Chapitre II. Problème primal & méthodes de résolution

*** Partie 02

II.8. Méthode du Simplexe

II.8.1. Principe

La méthode du simplexe consiste à examiner un ensemble de solutions de base réalisables (sommets du polyèdre convexe), en améliorant la fonction objective à chaque itération. Après un nombre fini itérations, la solution optimale, s'il existe, est obtenue, sinon la méthode est bloquée. Pour cela, on doit :

- Déterminer une solution de base réalisable initiale (ou de départ).
- Passer d'une solution de base réalisable à une autre solution en améliorant à chaque étape la valeur de la fonction objective.
- Arrêter la procédure lorsqu'il n'est pas possible d'améliorer la fonction objective. La dernière solution trouvée est donc la solution optimale.

II.8.2. Théorie de la méthode du Simplexe

II.8.2.1. Hypothèse simple

Dans cette hypothèse, on suppose que toutes les contraintes sont de type inférieur ou égale $\leq$. Dans ce cas, l'ajout de variables d'écart permet d'obtenir une solution de départ réalisable, pour améliorer cette solution de départ, l'algorithme se déplace d'une solution à d'autre adjacente meilleure que la précédente, en remplaçant une variable de base par une autre hors base, cela revient à faire un « changement de base ».

II.8.2.2. Changement de Base

Critère d'entrée d'une variable dans la base

On calcule l'apport de chaque variable hors base à la fonction objective, en représentant la fonction objective en fonction des variables hors base. Donc, on calcule la quantité $c_j - z_j$ qui représente l'apport de chaque variable à la fonction objective, avec $z_j = C_B B^{-1} a_j$.

Une variable x_{input} est introduite dans la base si :

- Cas max : $c_{input} - z_{input} = \max_{j\in K}\{c_j - z_j, c_j - z_j > 0\}$
- Cas min : $c_{input} - z_{input} = \min_{j\in K}\{c_j - z_j, c_j - z_j < 0\}$
- $Z = Z_0 + \sum_{j\in K}(c_j - z_j)x_j$

Preuve

Soit le Problème linéaire sous forme matricielle et sous forme standard :

$$Optimiser\ \ Z = C\,X$$
$$\begin{cases} s.c. & AX = b \\ & X \geq 0 \end{cases}$$

$$A_{(n\,x\,p)} = (a_{ij})$$

$$A = (A_B\,, A_{HB})\ \ avec \begin{cases} A_B : Matrice\ de\ base\ (n\,x\,n) \\ A_{HB} : Matrice\ hors\ base\ (n\,x\,(p-n)) \end{cases}$$

Dr. B. Sidaoui (b.sidaoui@cuniv-naama.dz)

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_H \end{pmatrix}, X_B = \begin{pmatrix} X_{B_1} \\ \dots \\ \dots \\ X_{B_n} \end{pmatrix}, X_{HB} = \begin{pmatrix} X_{HB_1} \\ \dots \\ \dots \\ X_{HB_{p-p}} \end{pmatrix}$$

Par conséquence

$$AX = b \equiv (A_B \quad A_{HB}) \begin{pmatrix} X_B \\ X_{HB} \end{pmatrix} = b$$

On a donc,

$$A_B X_B + A_{HB} X_{HB} = b$$
$$\Rightarrow X_B + {A_B}^{-1} A_{HB} X_{HB} = {A_B}^{-1} b$$
$$\Rightarrow X_B = {A_B}^{-1} b - {A_B}^{-1} A_{HB} X_{HB}$$

On a aussi:

$$Z = CX \ \ et \ \ C = (C_B , C_{HB})$$
$$\Rightarrow Z = C_B X_B + C_{HB} X_{HB}$$
$$\Rightarrow Z = C_B \left({A_B}^{-1} b - {A_B}^{-1} A_{HB} X_{HB} \right) + C_{HB} X_{HB}$$
$$\Rightarrow Z = C_B {A_B}^{-1} b - C_B {A_B}^{-1} A_{HB} X_{HB} + C_{HB} X_{HB}$$
$$\Rightarrow Z = C_B {A_B}^{-1} b + (C_{HB} - C_B {A_B}^{-1} A_{HB}) X_{HB}$$

Soit $\mathrm{K}(= \mathrm{p} - \mathrm{n})$: le nombre des variables hors base, on note aussi :

$$A_{HB} = \sum_{j \in K} a_j \ et \ C_{HB} = \sum_{j \in K} c_j \ et \ \ X_{HB} = \sum_{j \in K} x_j$$
$$Z_0 = C_B {A_B}^{-1} b$$

On obtient

$$Z = Z_0 + (C_{HB} - C_B {A_B}^{-1} A_{HB}) X_{HB}$$
$$Z = Z_0 + \left(\sum_{j \in K} c_j - \sum_{j \in K} C_B {A_B}^{-1} a_j \right) \sum_{j \in K} x_j$$
$$Z = Z_0 + \sum_{j \in K} (c_j - C_B {A_B}^{-1} a_j) x_j$$
$$Z = Z_0 + \sum_{j \in K} (c_j - z_j) x_j \ \ où \ z_j = C_B {A_B}^{-1} a_j$$

Donc, on sélection la variable x_j ayant la valeur $(c_j - z_j)$, qui permet d'optimiser la fonction objective.

II.8.2.3. Détermination de la variable sortante

Une fois la variable x_{input} sélectionnée. Soit a_{input} le vecteur entrant dans la base (le vecteur associé au variable entrante), la solution de base est donc :

$$X_B = {A_B}^{-1} b - {A_B}^{-1} A_{HB} X_{HB}$$
$$\Rightarrow X_B = {A_B}^{-1} b - {A_B}^{-1} a_{input} x_{input} = \beta - \alpha_{input} x_{input}$$
$$\beta = {A_B}^{-1} b, \qquad et \ \ \alpha_{input} = {A_B}^{-1} a_{input}$$

Dr. B. Sidaoui (b.sidaoui@cuniv-naama.dz)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{B1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{Bn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_{1\ input} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{n\ input} \end{pmatrix} x_{input}$$

Pour que la nouvelle solution de base soit réalisable, il faut que chaque x_{Bi} soit supérieur ou égale à zéro (contraintes de non négativité), alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{B1} = \beta_1 - \alpha_{1\,\mathrm{input}} x_{\mathrm{input}} \geq 0 \\ \vdots \\ x_{Bn} = \beta_n - \alpha_{n\,\mathrm{input}} x_{\mathrm{input}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{input}} \leq \dfrac{\beta_1}{\alpha_{1\,\mathrm{input}}} \\ \vdots \\ x_{\mathrm{input}} \leq \dfrac{\beta_n}{\alpha_{n\,\mathrm{input}}} \end{cases}$$

On doit sélectionner x_{Bj} le moins important c'est-à-dire choisir la plus petite valeur.

La variable x_{out} sort de la base d'après le critère de Dantzig :

$$\frac{\beta_k}{\alpha_{k\,\mathrm{input}}} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{i\,\mathrm{input}}}, \alpha_{i\,\mathrm{input}} > 0 \right\},$$

Où: $\alpha_{k\,\mathrm{input}}$ est appelé Pivot.

II.8.2.4. Détermination des Nouvelles Valeurs des Variables de Base

Ligne pivot : Diviser la ligne pivot par le coefficient pivot :

$$a_{(x_{\mathrm{input}})} = \frac{a_{kj}}{\alpha_{k\,\mathrm{input}}} \; où\ j = 1..n\ et\ \alpha_{k\,\mathrm{input}} = \mathrm{pivot}$$

$$x_{\mathrm{input}} = \frac{\beta_k}{\alpha_{k\,\mathrm{input}}}$$

Mettre à jour les autres lignes par:

$$a_{(x_B)ij} = a_{ij} - \alpha_{i\ input} \frac{a_{kj}}{\alpha_{k\,\mathrm{input}}}$$

$$x_{Bi} = \beta_i - \alpha_{i\ input} \frac{\beta_k}{\alpha_{k\ input}}$$

Pour la fonction objective :

$$\text{Nouvelle valeur de Z} = \text{Ancienne valeur de Z} + \frac{\beta_k}{\alpha_{k\,\mathrm{input}}} \left(c_{input} - z_{input} \right)$$

II.8.2.5. Critère d'optimalité

La solution de base réalisable est optimale lorsque toutes les variables hors base ayant des valeurs $c_j - z_j \leq 0$ (cas de max) et $c_j - z_j \geq 0$ (cas de min).

La solution optimale est unique**, si** toutes les variables hors base ayant des valeurs :

$c_j - z_j < 0$ (Cas de max) et $c_j - z_j > 0$ (cas de min)

La solution optimale est multiple**, si** pour une variable x_j hors base, on a $c_j - z_j = 0$ et $\alpha_j > 0$

La solution optimale est infinie :

Si pour une variable x_j hors base, on a $c_j - z_j > 0$ et $\alpha_j \leq 0$ (cas max)

Si pour une variable x_j hors base, on a $c_j - z_j < 0$ et $\alpha_j \leq 0$ (cas min)

II.8.3. Forme générale du Simplexe

Max/Min		Variables structurelles x_j					Solution de base β_i	x_{out}: Select argmin of $\frac{\beta_i}{\alpha_{i\,input}}$
		x_1	…	x_{input}	…	x_p		
X_B	$x_{B\,1}$	α_{11}	…	$\alpha_{1\,input}$	…	$\alpha_{1\,p}$	β_1	$\frac{\beta_1}{\alpha_{1\,input}}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$x_{B\,k}$ (x_{out})	α_{k1}	…	$\boldsymbol{\alpha_{k\,input}}$	…	α_{kp}	β_k	$\boldsymbol{\frac{\beta_k}{\alpha_{k\,input}}}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$x_{B\,n}$	α_{n1}	…	$\alpha_{n\,input}$	…	α_{np}	β_n	$\frac{\beta_n}{\alpha_{n\,input}}$
$c_j - z_j$		$c_1 - z_1$	…	$c_{input} - z_{input}$	…	$c_p - z_p$	$-Z$	$\boldsymbol{\alpha_{k\,input} = \text{pivot}}$

$$x_{input} = \arg\,(\max/\min)\{c_j - z_j, j = 1..n\}$$

$$x_{out} = \arg\text{of}\frac{\beta_k}{\alpha_{k\,input}} \text{ avec } \frac{\beta_k}{\alpha_{k\,input}} = \min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{i\,input}}, \alpha_{i\,input} > 0\right\}$$

$$x_{Bi} = \beta_i - \alpha_{i\,input}\frac{\beta_k}{\alpha_{k\,input}} \text{ et } a_{(x_B)ij} = \alpha_{ij} - \alpha_{i\,input}\frac{\alpha_{kj}}{\alpha_{k\,input}}$$

$$-Z = -Z - \frac{\beta_k}{\alpha_{k\,input}}\left(c_{input} - z_{input}\right)$$

Exemple

Soit le PL sous sa forme standard : $Max\ Z = 30x + 80y + 0t_1 + 0t_2$

$$s.c.\begin{cases} x + y + t_1 = 5 \\ x + 4y + t_2 = 10 \\ x, y, t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemples à résoudre

Soit les PL suivants

$$Max\ 3x + 4y$$
$$s.c.\begin{cases} 2x + 3y \leq 180 \\ 2x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$Min\ Z = -2x - y$$
$$s.c.\begin{cases} x - y \leq 4 \\ x + y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

II.8.4. Signification des variables d'écart

$3x + 4y \leq 42 \Longrightarrow 3x + 4y + t_1 = 42 \Longrightarrow$ Contrainte non saturée
$x + 3y \leq 22 \Longrightarrow x + 3y + t_2 = 22 \Longrightarrow$ Contrainte non saturée
$2x + 2y \leq 26 \Longrightarrow 2x + 2y + t_3 = 26 \Longrightarrow$ Contrainte non saturée
$x \leq 11 \Longrightarrow x + t_4 = 11 \Longrightarrow$ Contrainte non saturée

Dr. B. Sidaoui (b.sidaoui@cuniv-naama.dz)

II.9. Extension de l'algorithme du Simplexe

L'obtention d'une solution de base réalisable est facile lorsque

- Toutes les contraintes sont de type "≤" et b ≥ 0
- Toutes les contraintes sont de type "≥" et b ≤ 0

Dans le cas "≤" et "b ≥ 0", les variables d'écarts introduites dans chaque contrainte fournissent la base initiale.

Dans tous les autres cas, il n'existe pas de solution de base de départ immédiate. Pour déterminer une solution de base initiale, on ajout des variables, appelées des variables artificielles (pour chaque contrainte de type ≥ ou =), ensuite on applique l'une des méthodes suivantes :

- La méthode des 2 phases.
- La méthode des pénalités.

II.9.1. Ajout de variables artificielles

Ajouter une variable artificielle dans chaque contrainte de type "≥" ou "=".

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$$

$$\text{avec} \begin{cases} 2x1 + 3x2 + 6x4 \geq 8 \\ \quad 3x1 + x2 + 2x3 - 7x4 = -4 \\ x1 , x2 , x3 , x4 \geq 0 \end{cases} \quad \underset{\Rightarrow}{\text{Forme Standard}} \quad \begin{cases} 2x1 + 3x2 + 6x4 - t1 = 8 \\ -3x1 - x2 - 2x3 + 7x4 = 4 \\ x1 , x2 , x3 , x4 , t1 \geq 0 \end{cases}$$

⇒ Introduction des variables artificielles

$$\begin{cases} 2x1 + 3x2 + 6x4 - t1 + w1 = 8 \\ -3x1 - x2 - 2x3 + 7x4 + w2 = 4 \\ x1 , x2 , x3 , x4 , t1 , w1 , w2 \geq 0 \end{cases}$$

II.9.2. Méthode des deux phases

Formellement nous pouvons présenter la méthode des deux phases comme suit :

- Mettre le P.L. sous forme standard (ajouter les variables d'écarts).
- Ajouter les variables artificielles ai dans chaque contrainte de type "≥" ou "=".
- Construire la nouvelle fonction objectif w = Σ ai
- Utiliser l'algorithme du simplexe pour minimiser l'objectif w.
- Itérer jusqu'à ce que l'une de ces trois situations se présente :
    - w = 0 et toutes les artificielles sont hors base, dans ce cas, reconstruire la ligne objectif originale z au moyen des formules z = cBB-1b et $c_j - z_j$, passer à la phase II.
    - w > 0 (ou w<0), le problème de départ n'a pas de solution réalisable puisqu'il est impossible d'annuler les variables artificielles.
    - w = 0 mais il reste des variables artificielles en base.
        - Si tous ces éléments sont nuls le système contient une ligne du type aj = 0.
        - Cette ligne est sans intérêt ; on peut la supprimer.
        - Si au moins un élément est non nul, il peut servir de pivot même s'il est négatif
        - Pour éliminer aj au profit d'une variable structurelle.

Exemples

Résoudre les Problèmes linéaires suivants.

$$\text{Min } Z = x1 + x2 + 3x3 + x4$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x1 + 3x2 + 6x4 \geq 8 \\ -3x1 - x2 - 2x3 + 7x4 = 4 \\ x1, x2, x3, x4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z = x + y + 2v$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} x + y + v = 12 \\ 2x + 5y - 6v = 10 \\ 7x + 10y - v = 70 \end{cases}$$

$$\min z = 2x + 3y$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$$

$$\max z = 5x + 7y$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} x + y \geq 6 \\ x \geq 4 \\ y \leq 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\min z = 3x + 10y$$
$$\text{s. c.} \begin{cases} 5x + 6y \geq 10 \\ 2x + 7y \geq 14 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

II.9.3. Méthode des pénalités (ou M-méthode)

C'est une autre méthode qui est utilisée pour éliminer les variables artificielles de la base. Elle consiste à appliquer le simplexe en optimisant la fonction objective dont les variables artificielles ont été fortement pénalisées.

- Ecrire le PL dans sa forme standard et introduire les variables artificielles requises.
- Soit M un nombre arbitrairement grand.
- Associer aux les variables artificielles un coût égal à –M $\Rightarrow MaxZ = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j - \sum_{l=1}^{r} Mw_l$ (cas de maximisation)
- Associer aux les variables artificielles un coût égal à +M $\Rightarrow MinZ = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j + \sum_{l=1}^{r} Mw_l$.
- Résoudre le PL avec le simplexe.