Chapitre I. Introduction & Rappels Mathématiques

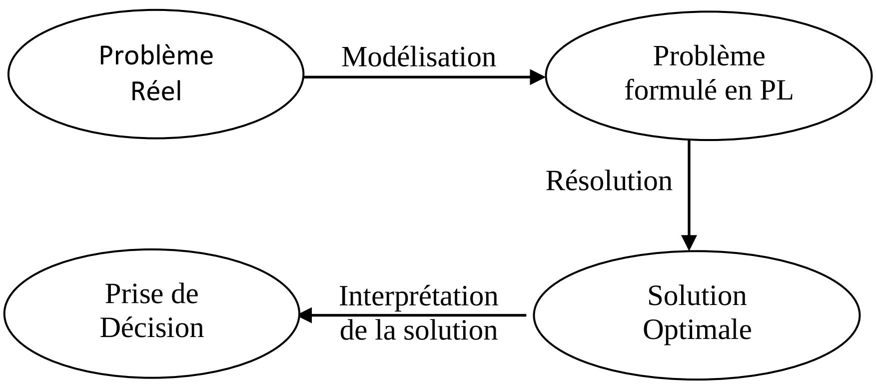
I.1. Introduction

La programmation linéaire (P.L.) est un outil mathématique qui permet de modéliser et de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire. Un problème d'optimisation linéaire est caractérisé par une fonction objective linéaire (de type maximisation ou minimisation) et des contraintes sous forme d'équations et d'inéquations linéaires.

La programmation linéaire (PL) est un outil fondamental de la recherche opérationnel. En 1947, G. Dantzig a introduit le nom de programmation linéaire, et il découvert l'algorithme du simplexe, le plus utilisé pour la résolution des problèmes d'optimisation linéaire. La programmation linéaire (P.L.) est utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation, de nombreux domaine tels que :

- Augmentation des profits (maximisation des bénéfices),
- Diminution des pertes (minimisation des dettes, minimisation de consommation),
- Distribution et transport (routier, maritime, aérien),
- Problèmes de l'industrie (production, exploitation,),
- Problèmes d'affectation (personnel, machines, tâches,),
- Problème de décision dans les problèmes d'investissements.

I.2. Cycle de programmation linéaire



I.3. Rappels Mathématiques

I.3.1. Espace Vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soient les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$, on dit que $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$, s'il existe des éléments non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = 0$$

Si les a_i, qui vérifié l'équation précédente, n'existent pas dans $\mathbb{R}$, alors $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ sont linéairement indépendants.

Une base d'un un espace vectoriel E est le sou ensemble maximal d'éléments de E linéairement indépendants. Une base est la famille de n vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n \subset E$, tels que tout vecteur $u \in E$ peut s'écrire sous la forme :

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

Les a_i sont appelés les coordonnées, n représente la dimension de l'espace vectoriel.

I.3.2. Matrices

Une matrice de dimension de *taille* $n \times p$ est un tableau de nombres (appelés coefficients ou termes), comportant n lignes et p colonnes. Si on désigne par $\mathrm{a_{ij}}$ le coefficient situé à la $\mathrm{i}^{\text{ième}}$ ligne et la $\mathrm{j}^{\text{ième}}$ colonne, la matrice peut s'écrire :

$$\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})_{1\le j\le p}^{1\le i\le n} = \begin{pmatrix} \mathrm{a_{11}} & \cdots & \mathrm{a_{1p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a_{n1}} & \cdots & \mathrm{a_{np}} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

I.3.3. Opérations sur les matrices

Transposée d'une Matrice

On appelle transposée d'une matrice A, notée A^t, la matrice dont les lignes sont les colonnes de A (et dont les colonnes sont les lignes de A).

Exemple

$$\mathrm{A}_{(2x3)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{La transposée de A est}} \mathrm{A^t}_{(3x2)} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : $(A^t)^t$ = A

Addition de matrices

Soit $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})_{1\le j\le p}^{1\le i\le n}$ et $\mathrm{B} = (\mathrm{b_{ij}})_{1\le j\le p}^{1\le i\le n}$, deux matrices carrées, on définit l'addition des deux matrices A et B, comme suit : C = A + B avec $C = (\mathrm{c_{ij}})_{1\le j\le p}^{1\le i\le n}$ et $\mathrm{c_{ij}} = \mathrm{a_{ij}} + \mathrm{b_{ij}}$ $\forall$i,j.

Exemple

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 6 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 12 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

I.3.3.1. Multiplication d'une Matrice par un Scalaire

Soit $A=(a_{ij})_{1\le j\le p}^{1\le i\le n}$ et k un scalaire, la multiplication de la matrice A par le scalaire k est donnée par : la matrice B = k* A où $B=(b_{ij})_{1\le j\le p}^{1\le i\le n}$ et $b_{ij} = k\, a_{ij}$ $\forall i,j$

Exemple

Soit A la matrice à α coefficients réels

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ \textit{et } \alpha \textit{ un nombre réel quelconque } \alpha A=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha & \alpha\end{pmatrix}$$

$$2*\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 8 & 6 & -2\end{pmatrix}$$

I.3.3.2. Multiplication de deux Matrices

Soit $A_{(m,n)} = (a_{ij})$ et $B_{(n,p)} = (b_{ij})$, la multiplication des deux matrices A et B est donnée par la matrice C = A*B comme suit :

$$C_{(m,p)} = (c_{ij})\ \text{avec}\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\quad \forall\ i=1,..,m\quad j=1,\dots,n$$

Exemple

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 3 & -1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 7\\ 23 & 9\end{pmatrix},\ (1\quad 2\quad 0)\begin{pmatrix}5\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=9,\ \ (1\quad 2\quad 0)\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 4\end{pmatrix}=7;$$

I.3.3.3. Déterminant d'une Matrice (matrice carrée)

Déterminant d'ordre 2

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, le Déterminant de A est défini par :

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

Exemple

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ det(A)=|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix},\ det(A)=2\times(-1)-3\times 1=-5$$

Déterminant d'ordre 3

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, le Déterminant de A est défini par :

$$|A|=(+1)a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(+1)a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \det(A) = -1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 32$$

I.3.3.4. Inversion de Matrices

Une matrice A est dite inversible, s'il existe une matrice notée A^{-1} telle que : $A^{-1} . A = A . A^{-1} = I$, avec I est la matrice d'identité (une matrice est inversible si elle est carrée).

Soit A est une matrice carrée, la matrice inverse A^{-1} est définie par la formule suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{com}(A))^t, \text{avec } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Où $\mathrm{com}(A)$ est la comatrice (ou matrice adjointe) de la matrice A, elle définie par :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}$$

Où δ_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij}, de la matrice A, défini à partir du mineur $|M_{ij}|$ par la relation : $\delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$, (le déterminant est différent de zéro, donc A est inversible).

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}(\mathrm{com}(A))^t = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \text{déterminer } B^{-1}.$$

I.3.4. Système linéaire

Un système linéaire est un système composé de n équations et p variables tel que :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Où : les x_i sont les variables, les a_{ij} sont les coefficients des variables et les b_j sont les bornes des équations.

On peut transformer tout système linéaire, sous forme matricielle par l'équation $AX = B$.

$$\text{Où : } A_{(n,p)} = (a_{ij}), X_{(p)} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^t, B_{(n)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si A est une matrice carrée (n=p), le système linéaire associé est un système de Cramer. Donc la résolution matricielle est donnée par : $X = A^{-1}B$.