Chapitre III. Dualité & méthodes de résolution

II.1. Introduction

À chaque problème de programmation linéaire, ont associé un autre problème de programmation linéaire appelé le dual, de telle façon qu'il existe des relations très fortes entre les solutions (variables et objectifs) entre les deux PLs. La dualité à plusieurs Intérêts à savoir :

- Délimiter l'intervalle de solutions
- En résolvant le Primal, on obtient aussi la solution optimale du dual et inversement.
- L'algorithme Dual simplexe permet d'éviter l'utilisation des variables artificielles.

II.2. Règles générales pour formuler le dual

min	max
primal	dual
dual	primal
Variable ≥0	Contrainte ≤
Variable ≥≤0	Contrainte =
Variable ≤0	Contrainte ≥
Contrainte ≤	Variable ≤ 0
Contrainte =	Variable ≥≤0
Contrainte ≥	Variable ≥0

Remarque : le dual d'un dual est un primal

Exemple

L'entreprise agricole désire composer un engrais ayant des propriétés particulières : il doit contenir au moins 80 tonnes de potasse, 20 tonnes d'azote et 8 tonnes d'ammoniac pour l'opération envisagée. D'une façon générale, l'entreprise fabrique ce type d'engrais en mélangeant des produits contenant des proportions variées de potasse, azote et ammoniac.

Dans le cas présent, L'entreprise peut acheter deux produits M et N chez son fournisseur habituel. Une unité du produit M coûte 2000 euros et contient 1,6 T de potasse, 0,2 T d'azote et 0,1 T d'ammoniac. Une unité du produit N coûte 3000 euros et contient 0,8 T de potasse, 0,4 T d'azote et 0,1 T d'ammoniac.

Quel(s) produit(s) et en quel quantité, l'entreprise doit-elle acheter à son fournisseur pour obtenir son engrais à moindre coût ?

Désignons par x et y les quantités de produits M et N à acquérir. Il faut trouver le coût total minimum :

$$\min z = 2000\,x + 3000y$$
$$\text{s.c.}\begin{cases} 1{,}6\,x + 0{,}8\,y \geq 80 \\ 0{,}2\,x + 0{,}4\,y \geq 20 \\ 0{,}1\,x + 0{,}1\,y \geq 8 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{cases}$$

La forme duale équivalente est trouvée le bénéfice total maximum :

$$\max 80\,y1 + 20\,y2 + 8\,y3$$
$$\text{s. c.} \begin{cases} 1{,}6\,y1 + 0{,}2\,y2 + 0{,}1\,y3 \leq 2000 \\ 0{,}8\,y1 + 0{,}4\,y2 + 0{,}1\,y3 \leq 3000 \\ y1, y2, y3 \geq 0 \end{cases}$$

III.3. Propriétés fondamentales de la dualité

- **Propriété 1**

  Si X et Y sont deux solutions réalisables respectivement du Primal et du Dual alors X et Y se rencontrent d'une région de solution.

- **Propriété 2**

  Si x^* est une solution réalisable du primal et y^* une solution réalisable du dual alors $cx^* \geq y^*b$.

- **Propriété 3**

  Soit un PL primal et son dual, l'un des cas suivants est vrai :

  1. Les deux problèmes primal et dual ont des solutions optimales finies x^* et y^* avec $Cx^* = y^*b$.
  2. Si un problème primal ou dual possède une solution infinie, l'autre problème n'admet pas de solution réalisable.
  3. Aucun des deux problèmes n'admet de solutions réalisables.

- **Propriété 4**

  Théorème des écarts complémentaires. Si x^* et y^* sont des solutions réalisables des problèmes primal et dual, alors x^* et y^* sont des solutions optimales si et seulement si elles vérifient :

$$\begin{cases} \alpha = y^*.(Ax^* - b) = 0 \\ \beta = (c - y^*A).x^* = 0 \end{cases}$$

Exemple

Soit P.L. primal suivant :

$$Min\ Z = x1 + x2 + 3x3 + x4$$
$$s.c. \begin{cases} 2x1 + 3x2 + 6x4 \geq 8 \\ 3x1 + x2 + 2x3 - 7x4 = -4 \\ x1, x2, x3, x4 \geq 0 \end{cases}$$

Soit P.L. dual suivant :

$$Max\ Z' = 8y1 - 4y2$$
$$\begin{cases} 2\,y1 + 3y2 \leq 1 \\ 3y1 + y2 \leq 1 \\ 2\,y2 \leq 3 \\ 6y1 - 7\,y2 \leq 1 \\ y1, y2 \geq 0 \end{cases}$$

Soit la solution primale suivante : $x^* = (0\ 32/27\ 0\ 20/27)$

La première condition est déjà vérifiée.

La deuxième condition :

Pour x1 : (1-y°$\binom{2}{3}$)*0=0

Pour x3 : (3-y°$\binom{0}{2}$)*0=0.

Pour x2 : (1-$\binom{y1}{y2}$ $\binom{3}{1}$)*32/27=0

Pour x4 : (1-$\binom{y1}{y2}$ $\binom{6}{-7}$)*20/27=0

A partir de ces deux derniers : y1=8/27 et y2=3/27.

III.4. Résolution du PL dual

La résolution d'un PL (lorsque les contraintes sont du type ≥ ou =) à l'aide de l'algorithme du simplexe nécessite l'introduction des variables artificielles pour obtenir une solution initiale. L'algorithme dual simplexe permet donc d'éviter l'utilisation des variables artificielles. Il s'applique à tout PL où la solution de base de départ du Primal n'est pas réalisable.

III.4.1. Algorithme dual du simplexe

1. Mettre le PL sous forme standard, en additionnant et/ou soustrayant les variables d'écart requises.
2. Multiplier par -1, les contraintes dont les variables d'écart négatives.
3. Obtenir une solution de base de départ avec : $cj - zj \leq 0$ (max) et $cj - zj \geq 0$ (min)
4. Critère de sortie d'une variable :
    a. La variable x_{out} sort de la base d'après : $x_{out} = \min\{x_{Bi}\}$
    b. Si pour la ligne pivot : $x_{out}, \alpha_{out/j} \geq 0$ et $x_{Bi} < 0$, alors le dual n'a pas de solution optimale finie, ainsi le Primal n'a pas de solution réalisable.
5. Critère d'entrée d'une variable :
6. La variable x_{in} entre dans la base d'après :
    a. $\frac{c_{in}-z_{in}}{\alpha_{out/in}} = min\left\{\frac{c_j-z_j}{\alpha_{out/j}}, \ \alpha_{out/j} < 0\right\}$ cas du max
    b. $\frac{c_{in}-z_{in}}{\alpha_{out/in}} = min\left\{-\frac{c_j-z_j}{\alpha_{out/j}}, \ \alpha_{out/j} < 0\right\}$ cas du min
7. Faire un changement de base sur le pivot est $\alpha_{out/in}$
8. Critère d'optimalité : tous les $x_{Bi} \geq 0$ et $cj - zj \leq 0$ (max) et $cj - zj \geq 0$ (min).
9. Si la solution de base n'est pas réalisable, aller à 4.