Chapitre II. Problème primal & méthodes de résolution

*** Partie 01

II.1. Introduction

On appelle problème de type P L, tout problème dans lequel on cherche la répartition la plus efficace de ressources limitées en vue d'atteindre un objectif bien déterminé et en respectant certaines conditions. Un problème P L est caractérisé par les propriétés suivantes :

II.1.1. Linéarité

L'objectif et les contraintes sont des fonctions linéaires par rapport aux variables de décisions (coefficients de variables constantes, pas de produit de variables).

II.1.2. Objectif

Fonction à optimiser (maximiser ou minimiser) selon l'objectif, sous la forme suivante :

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

Où :

- Z Représente la fonction objective ou fonction économique ou aussi fonction de coût.
- $x_1, x_2, \dots, x_p$ Représentent les variables de décision (ou inconnues du P.L).
- $c_1, c_2, \dots, c_p$ Représentent les coefficients des variables de la fonction objective, appelée coefficients économiques ou coefficients de coût.

II.1.3. Contraintes

Ensemble de d'équations et d'inéquations, sous la forme est suivante :

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \boxdot b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \boxdot b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \boxdot b_n \\ \text{Avec } \boxdot \in \{=, \leq, \geq\} \end{array}$$

Où :

- a_{ij} Représentent les coefficients des variables des contraintes.
- b_i Sont les valeurs de la partie droite des contraintes et elles représentent fréquemment les quantités des ressources disponibles.

II.1.4. Non négativité

Les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle non négative.

$$x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$$

Un problème PL revient donc à optimiser une fonction linéaire de variables à valeur réelles non négatives sur un domaine défini par des contraintes d'égalités ou d'inégalités.

II.2. Modélisation en programmation linéaire

Pour formaliser un problème donné sous d'un Problème linéaire, on respecte, généralement, les étapes suivantes :

- Déterminer la fonction objective à optimiser.
- Déterminer les activités associées au problème : chaque activité représente une variable de décision unique.
- Déterminer les coefficients des variables de la fonction objective.
- Déterminer les ressources disponibles, puis formuler les contraintes qui délimitent l'univers des variables.
- Déterminer les coefficients des variables de contraintes.
- Déterminer la nature des valeurs qui peuvent prendre les variables.

Exemple

....

II.3. Résolution des Problèmes linéaires

La résolution d'un P.L. consiste à déterminer une solution, parmi un ensemble, qui optimise la fonction objective et satisfaire un ensemble des contraintes.

II.3.1. Solution et régions des solutions réalisables

- Solution : toutes ensemble x_i qui satisfait les contraintes fonctionnelles est appelé solution du PL.
- Solution réalisable (ou admissible) : toutes ensemble x_i qui satisfait les contraintes fonctionnelles et les contraintes de non négativité est appelé solution réalisable du P.L.
- Régions des solutions réalisables (ou région admissible) : c'est l'ensemble des solutions réalisables du P.L.
- Solution non réalisable (ou non admissible) : toute solution qui n'est pas située dans la région des solutions réalisables.

II.3.2. Propriété de convexité

Un ensemble S de $\Re^n$ est convexe si $\forall(x, y) \in S$, le segment joignant x et y est inclus tout entier dans S. Si l'ensemble S est fini, alors S est appelé Polyèdre.

II.3.3. Types de solution en P.L.

Lors de la résolution d'un P.L. deux cas peuvent se produire.

1. Inexistence de la région des solutions réalisables : dans ce cas, on ne peut pas déterminer les solutions réalisables (contraintes contradictoires). La région de solution est vide.
2. Existence d'une région des solutions réalisables : on distingue trois cas possibles.
    a. Solution optimale unique
    b. Solution optimale multiple
    c. Infinité de solutions de solutions (pas de solution optimale)

II.3.4. Méthode de résolution graphique

La méthode graphique est utilisée seulement si le nombre de variables de décision est au plus égal à 3. Cette méthode consiste à représenter l'ensemble des contraintes sur un repère cartésien, elle peut être résumée en quatre étapes :

1. On reporte sur un graphique les contraintes du modèle.
2. On détermine la région commune entre les contraintes. Cette région, si elle existe, représente la région des solutions réalisables.
3. On détermine les coordonnées des sommets de la région des solutions réalisables.
4. On substitue les coordonnées de chaque sommet dans l'expression de la fonction objective. Le sommet qui optimise la fonction objective correspond à la solution optimale.

Exemple

....

II.4. Règles de transformation d'un P.L.

Si l'objectif consiste à maximiser une forme linéaire $Z=c_1x_1 + \ldots + c_px_p$, cela équivalant à minimiser la forme linéaire opposée $W=- c_1x_1 - \ldots - c_px_p$, et de multiplier la valeur optimale de W par -1.

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{p} c_i x_i \equiv -Max\ W = -\sum_{i=1}^{p} c_i x_i$$

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{p} c_i x_i \equiv -Min\ W = -\sum_{i=1}^{p} c_i x_i$$

Inéquation $\geq$ vers inéquation $\leq$ et vice-versa

$$ax \geq b \iff (-a)x \leq -b$$

Equation vers inéquations

$$ax = b \iff \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases} = \begin{cases} ax \leq b \\ (-ax) \geq -b \end{cases}$$

Toute contrainte sous forme d'inéquation peut se ramener à une équation en ajoutant, ($\leq$) ou retranchant ($\geq$), du premier membre une variable dite « **variable d'écart** ».

$$a1x1 + a2x2 + \ldots + anxn \leq b1 \equiv a1x1 + a2x2 + \ldots + anxn + t1 = b1 \ /t1 \geq 0$$

$$a1x1 + a2x2 + \ldots + anxn \geq b1 \equiv a1x1 + a2x2 + \ldots + anxn - t1 = b1 \ /t1 \geq 0$$

Pour assurer que les variables d'écart ne perturbent pas la fonction objective, on suppose que les coefficients de coûts correspondants sont tous nuls.

Remarques

- Les variables $x_1, \ldots, x_p$ sont dites variables de décision.
- Les variables t_1, t_2, sont dites variables d'écart.
- Une contrainte est **saturée** si la variable d'écart associée est nulle.
- Une contrainte saturée passe toujours par l'optimum.

Exemple

....

II.5. Forme Matricielle d'un P.L.

Chaque problème modélisé en programmation linéaire, peut être transformé sous matricielle suivante :

$$\max\ (\text{ou min})\ \mathrm{CX}$$
$$\text{s.c.}\quad \begin{cases} \mathrm{AX} = \mathrm{b} \\ \mathrm{X} \geq 0 \end{cases}$$

Où : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est un vecteur de variables ; $C = \begin{pmatrix} c_1 \dots c_p \end{pmatrix}$ est un vecteur de coefficients de coûts.

$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ est la matrice des coefficients des variables des contraintes.

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ est un vecteur de bornes.

Exemple

....

II.6. Forme canonique et forme standard d'un P.L.

II.6.1. Forme canonique

Tout Problème linéaire peut être transformé en forme canonique, c'est-à-dire mettre toutes les contraintes de types inférieurs ou égale ($\leq$), la forme générale est la suivante :

$$min\ \ Z = CX\ \ (ou\ max) \qquad \begin{cases} AX \geq b \quad (ou\ AX \leq b) \\ \qquad X \geq 0 \end{cases}$$

Ou

$$\min z = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \quad (ou\ max) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (ou\ \leq) \\ \qquad x_j \geq 0 \end{cases}, i = 1,..,n$$

II.6.2. Forme standard

Tout PL peut être mis sous forme standard, en effectuant les transformations suivantes :

- Tout contrainte d'inégalité de type $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$, est remplacée par $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + t = b$ avec $t \geq 0$.
- Tout contrainte d'inégalité de type $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b$, est remplacée par $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - t = b$ avec $t \geq 0$.
- Tout variable x_i n'est soumis à aucune condition de signe, est remplacée par :
$$x = x_i^{'} - x_i^{''}\ avec\ x_i^{'} \geq 0\ et\ x_i^{''} \geq 0.$$

On obtient la forme générale suivante :

$$max/min\ \ Z = CX \qquad \begin{cases} \quad AX = b \\ X \geq 0, T \geq 0 \end{cases}$$

Ou

$$max\ /min\ z = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i \\ x_j \geq 0, t_k \geq 0 \end{cases}, i = 1,..,n$$

II.6.3. Base d'une solution d'un P.L.

Soit le Problème linéaire sous sa forme standard :

$$max/min \;\; Z = CX$$
$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0, T \geq 0 \end{cases}$$

Les variables du P.L. initial s'appellent variables de **décision**,

Les variables de la forme standard s'appellent variables structurelles (variables de décision + variables d'écarts + variables associées aux variables sans restriction de signe).

Donc, la matrice A contient toujours plus de colonnes que de lignes $(\mathrm{p} > \mathrm{n})$ vu que le nombre de variables structurelles p dépasse le nombre de contraintes n.

Une solution de base du système d'équations $\mathrm{AX} = \mathrm{b}$ sera calculée après un passage vers un système de Cramer, en appliquant les opérations suivantes :

- Annuler $(p - n)$ variables c'est-à-dire affecter à ces variables la valeur zéro, elles sont appelées **variables hors base (X_{HB})**.
- Résoudre le système pour les n variables restantes (système de Cramer), les m variables restantes sont appelés **variables de base (X_B).**

Donc, le P.L. peut s'écrire :

$$max\ (ou\ min)\ Z = C_B X_B + C_{HB} X_{HB}$$
$$\begin{cases} A_B X_B + A_{HB} X_{HB} = b \\ X_B \geq 0, X_{HB} \geq 0 \end{cases}$$

Où :

- A_B : Matrice formée par les n vecteurs de base.
- A_{HB} : Matrice formée par les $(p - n)$ vecteurs hors base.
- C_B : Vecteur de coefficients de coûts associés aux variables de base.
- C_{HB} : Vecteur de coefficients de coûts associés aux variables hors base.

En annulant les variables hors base $(X_{HB} = 0)$, on obtient le système de Cramer $A_B X_B = b$, et la solution de base du P.L. est donc :

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_{HB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {A_B}^{-1} * b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un système d'équations possède une solution unique si et seulement si les colonnes de la matrice A pour les n variables de base sont linéairement indépendants et forment une base. Les n variables forment une base si le déterminant de la matrice $\boldsymbol{X_B}$ est différent de zéro.

On appelle $\boldsymbol{X_B}$ solution de base réalisable si elle vérifiée la contrainte de non négativité, et dite solution de base optimale si elle optimise la fonction objective.

Propriétés

Le nombre maximal de solutions de base est le nombre maximal de sous matrices carrés d'ordre n que l'on peut extraire de A, c'est-à-dire :

$$C_p^n = \frac{p!}{n!\,(p - n)!}$$

Dr. B. Sidaoui (b.sidaoui@cuniv-naama.dz)

Puisque certaines solutions de base sont non réalisables (certaines composantes soient négatives), alors le nombre de solutions de base réalisables est toujours inférieurs ou égale à C_p^n pour la forme standard et inférieurs ou égale à C_{p+n}^n.

II.7. Résolution algébrique (méthode des sommets)

Méthode des sommets est la plus naturelle et la plus simple, elle est basée sur la résolution des systèmes d'équations linéaires de Cramer. Cette méthode se décompose en 3 étapes :

- Rechercher toutes les solutions de base possible du P.L.
- Sélectionner les solutions de base réalisables.
- Déduire la solution optimale.

Exemple

Une usine fabrique 2 produits P1 et P2 nécessitant des ressources d'équipement, de main d'œuvre et de matières premières disponibles en quantité limitée, toutes ces données sont récapitulées dans le tableau suivant :

	P1	P2	Disponibilité
Equipement	3	9	81
Main d'œuvre	4	5	55
Matière première	2	1	20

P1 et P2 rapportent à la vente 6 euros et 4 euros par unité.

Quelles quantités de produits P1 et P2 doit produire l'usine pour maximiser le bénéfice total ?

Modélisation sous forme d'un P.L.

$$\text{P. L. initial (primal)} \begin{cases} Max\ z = 6x + 4y \\ 3x + 9y \leq 81 \\ 4x + 5y \leq 55 \\ 2x + y \leq 20 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \qquad \text{P. L. standard} \begin{cases} Max\ z = 6x + 4y \\ 3x + 9y + t_1 = 81 \\ 4x + 5y + t_2 = 55 \\ 2x + y + t_3 = 20 \\ x, y, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, le nombre de variables est $p = 5$ (2 variables de décisions et 3 variables d'écarts) et le nombre de contraintes est $n = 3$.

Donc, Le nombre maximum de solutions de base est : $\mathrm{C}_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{12} = 10$ et l'ordre des matrices générées par les systèmes de cramer est égale à trois (3).

$$\text{La matrice totale est : A} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{t_1} & \mathrm{t_2} & \mathrm{t_3} \\ 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer le nombre exact de solutions de base, il faut calculer le déterminant de chaque base. Si le déterminant est nul, la matrice n'est pas inversible, donc il n'y a pas de solution de base correspondante.

Dr. B. Sidaoui (b.sidaoui@cuniv-naama.dz)

Pour une solution de base, si une coordonnée est négative, la solution n'est pas réalisable (contrainte de non négativité non vérifiée).

Dans cet exemple, les différentes bases du système sont :

$$\mathrm{B1}: (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{t}_1), \qquad \mathrm{B2}: (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{t}_2), \qquad \mathrm{B3}: (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{t}_3), \qquad \mathrm{B4}: (\mathrm{x}, \mathrm{t}_{1,} \mathrm{t}_2).$$

$$|\mathrm{B1}| = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad |\mathrm{B2}| = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad |\mathrm{B3}| = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad |\mathrm{B4}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{B5}: (\mathrm{x}, \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_3): |\mathrm{B5}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathrm{B6}: (\mathrm{x}, \mathrm{t}_2, \mathrm{t}_3) \qquad \mathrm{B7}: (\mathrm{y}, \mathrm{t}_{1,} \mathrm{t}_2) \qquad \mathrm{B8}: (\mathrm{y}, \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_3) \qquad \mathrm{B9}: (\mathrm{y}, \mathrm{t}_2, \mathrm{t}_3)$$

$$|\mathrm{B6}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad |\mathrm{B7}| = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad |\mathrm{B8}| = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad |\mathrm{B9}| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathrm{B10}: (\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \mathrm{t}_3): |\mathrm{B10}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

II.7.1. Inconvénient

Cette méthode est très coûteuse en exécution, si le nombre de variables et le nombre de contraintes augmentent. En effet, le nombre de solutions de base à explorer est trop important. Par exemple : Pour un problème à 15 variables et 10 contraintes, le nombre maximum de solutions de base est égal à : $C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = 3003$, et pour un problème à 25 variables et 10 contraintes, Ce nombre est égal à $C_{25}^{10} = \frac{25!}{10!(25-10)!} = 3268760$, ce qui n'est pas facile à calculer, même avec un ordinateur.

En 1947, DANTZIG a découvert un algorithme qui consiste à examiner une suite de sommets adjacents, dont l'objectif est d'améliorer la fonction objective à chaque itération. Cet algorithme a été appelé : Simplexe, le nombre d'itérations est généralement très inférieur à C_p^n.