Práctica Filtros
Procesamiento de Imágenes
Kenet Chapetón

Ejercicio 1

a) Tenemos, $x = [0, 1, 0, 0, 0, 0]$ y $h = [0, 2, 1, 0, 0]$

Para realizar la convolución de forma visual debemos rotar a h:

$$\begin{array}{rcccccccc} x: & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & & & \\ x*h: & & & & 2 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} x: & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & & \\ x*h: & & & 2 & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} x: & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \\ x*h: & & & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} x: & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ x*h: & & & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} x: & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ rotated(h): & & & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ x*h: & & & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc} x: & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ rotated(h): & & & & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ x*h: & & & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcccccccc} x: & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & & & \\ x*h: & & & 0 & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} x: & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & & \\ x*h: & & 0 & 2 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} x: & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \\ x*h: & 0 & 2 & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} x: & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ x*h: & 0 & 2 & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} x: & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ x*h: & 0 & 2 & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc} x: & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ rotated(h): & & & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \\ x*h: & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccccc} x: & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ rotated(h): & & & & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \\ x*h: & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rccccccccc} x: & & & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ h: & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ x*h: & & -2 & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccccc} x: & & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & & \\ x*h: & -2 & 5 & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccccc} x: & & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & \\ x*h: & -2 & 5 & 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccccc} x: & & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ rotated(h): & & & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ x*h: & -2 & 5 & 0 & -1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccccc} x: & & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & & \\ rotated(h): & & & & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & \\ x*h: & -2 & 5 & 0 & -1 & 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccccc} x: & & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & & \\ rotated(h): & & & & & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ x*h: & -2 & 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & \end{array}$$

d) Aca tengo un problema de interpretación de como es x e h, voy a suponer que tienen la siguiente forma,

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dando como resultado

$$x * h = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

a,i)

Recordemos que estamos haciendo convolucion, por lo tanto debemos transponer el kernel para que sea visualmente amigable cada operacion y etapa

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ 1 & -1 & 0 \times 1 & 4 & 1 & \\ & & 2 & 5 & 3 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & \\ -1 & 4 & -1 & \\ 1 & -1\times 1 & 0\times 4 & 1 \\ & 2 & 5 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1\times 1 & -1\times 4 & 0\times 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & -1 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 0 & -1 & 0 \\ & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1\times 4 & -1\times 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 0 & -1 & -3 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & -1 & 0 \\ & & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 1\times 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 0 & & \\ -1 & 4 & -1\times 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0\times 2 & 5 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & \\ -1 & 4\times 1 & -1\times 4 & 1 \\ 1 & -1\times 2 & 0\times 5 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ -1\times 1 & 4\times 4 & -1\times 1 \\ 1\times 2 & -1\times 5 & 0\times 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1\times 4 & 4\times 1 & -1 \\ 2 & 1\times 5 & -1\times 3 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1\times 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1\times 3 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 0\times 1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -1\times 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \\ -2 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -1\times 1 & 0\times 4 & 1 \\ -1 & 4\times 2 & -1\times 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0\times 1 & -1\times 4 & 0\times 1 \\ -1\times 2 & 4\times 5 & -1\times 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 11 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0\times 4 & -1\times 1 & 0 \\ 2 & -1\times 5 & 4\times 3 & -1 \\ & 1 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 11 & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 0\times 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1\times 3 & 4 & -1 \\ & & 1 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 11 & 6 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0\times 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ 1 & -1 & 0 & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 11 & 6 & -3 \\ 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1\times 2 & 0\times 5 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & \\ 1 & -1 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 11 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 1 \\ 0\times 2 & -1\times 5 & 0\times 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 11 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -5 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 1 & \\ 2 & 0\times 3 & -1\times 5 & 0 \\ & -1 & 4 & -1 \\ & 1 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 11 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 1 & & \\ 2 & 3 & 0\times 5 & -1 & 0 \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & 1 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 11 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 11 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -5 & -3 & 0 \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 1\times 1 & 4 & 1 \\ & & 2 & 5 & 3 \end{array} \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2\times 1 & 1\times 4 & 1 \\ & 2 & 5 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3\times 1 & 2\times 4 & 1\times 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 6 & 12 \end{array}$$

....

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 1 & & \\ 2 & 5 & 3\times 3 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 6 & 12 & 14 & 3 \\ 2 & 9 & 19 & 21 & 9 \end{array}$$

iii)

$$\begin{array}{ccc} -1 & & \\ 3 & & \\ -2\times 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \rightarrow -2$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & -1 & & \\
 & 3 & & \\
1 & -2 \times 4 & 1 & \\
2 & 5 & 3 &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cc}
-2 & -8
\end{array}
$$

....

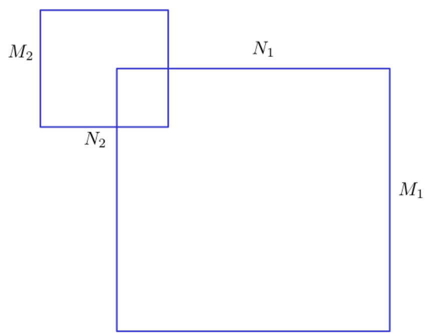
$$
\begin{array}{cccc}
1 & 4 & 1 & \\
2 & 5 & 3 \times -1 & \\
 & & 3 & \\
 & & -2 &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccc}
-2 & -8 & -2 \\
-1 & 2 & -3 \\
5 & 11 & 8 \\
-2 & -5 & -3
\end{array}
$$

b)

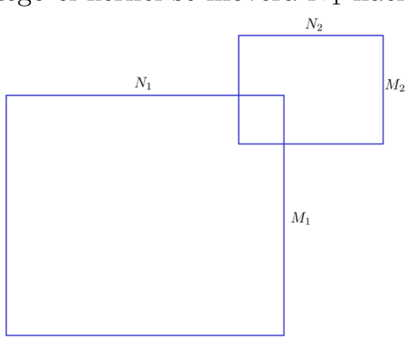
La justificación de esta fórmula se basa en cuántas posiciones puede ocupar el centro del kernel con respecto a la matriz original:

Cuando el kernel se desplaza sobre la matriz de entrada, cubre más espacio si sus dimensiones son grandes. El resultado de la convolución contiene todos los desplazamientos, incluso aquellos donde el kernel solo toca parcialmente la matriz original.

En la primer etapa por ejemplo tenemos:



luego el kernel se movera N_1 hacia la derecha, entonces ...



$N_2 - 1$, luego quedan $N_1 + N_2 - 1$ columnas, análogamente podemos hacerlo con las filas, donde quedan $M_1 + M_2 - 1$, finalmente la dimensión del array resultante sería $(M_1 + M_2 - 1, N_1 + N_2 - 1)$

Ejercicio 3

Entiendo que el ejercicio pide el algoritmo en pseudocodigo

Las pruebas estan en el codigo.

Algorithm 1 Convolución2D(A,B)

Input: Matriz A de dimensiones $M_1 \times N_1$, Matriz B de dimensiones $M_2 \times N_2$
Output: Matriz C de dimensiones $(M_1 + M_2 - 1) \times (N_1 + N_2 - 1)$
$M_r, N_r \leftarrow M_1 + M_2 - 1, N_1 + N_2 - 1$
$C \leftarrow$ ceros$(M_r \times N_r)$
$A_{pad} \leftarrow ceros(M_1 + 2(M_2 - 1)) \times (N_1 + 2(N_2 - 1))$
For i in 1...M_1 **do**
    For j in 1...N_1 **do**
        $A_{pad}[i + (M_2 - 1), j + (N_2 - 1)] \leftarrow A[i, j]$
    End For
end For
For i in 1...M_r **do**
    For j in 1...N_r **do**
        region $\leftarrow A_{pad}[i : i + M_2, j : j + N_2]$
        C $\leftarrow sum(region * B)$
    end For
end For
Return C

Ejercicio 4.