MOVIMIENTO OSCILATORIO

Kenet Chapeton, Lautaro Moya, Marcos Picco, Martín Zelicovich
(martinzelicovich@gmail.com, lautamoya01@gmail.com, marcospicco123@gmail.com, kenetchape@gmail.com)
Laboratorio de Mecánica y Termodinámica (A) – Verano 2024 –
Departamento de Física, FCEyN, UBA.

1. RESUMEN

En el siguiente trabajo se estudiaron experimentalmente las características que describen a un movimiento armónico simple y amortiguado a través de dos experiencias. En la primera buscamos determinar el valor de la constante elástica (*k)* del resorte a través de un método estático y otro dinámico, en donde observaremos cómo varía el período de la oscilación con diferentes masas. En la segunda parte, se analizó el movimiento oscilatorio amortiguado de un resorte sumergido en agua, donde buscamos determinar el coeficiente de amortiguamiento. Con los datos obtenidos haciendo un ajuste no lineal con el método de cuadrados mínimos. Dado que la viscosidad del agua es mucho mayor que la del aire, esperamos que sus efectos disipativos sean también mayores, para luego comparar ambos coeficientes.

2. INTRODUCCIÓN

La Ley de Hooke establece que el alargamiento que experimenta un cuerpo elástico, en este caso un resorte, es directamente proporcional y de sentido contrario a la fuerza recuperadora, si tenemos como hipótesis que el resorte está en reposo, se puede llegar a la siguiente igualdad.

$$x_{eq} = mg\,\frac{1}{k} + l_0 \quad (1)$$

$$x_{eq} - l_0 = mg\,\frac{1}{k}$$

Donde x_{eq} es la posición en equilibrio, k la constante elástica del resorte, y l_0 la posición inicial.

Observamos que hay una relación lineal entre la posición de equilibrio y la la inversa de la constante elástica. Nos interesa estimar k, para ello vamos a hacer regresión lineal, tomando las mediciones experimentales $(Y_n, X_n) = (x_{eq} - l_0, mg)_n$, permitiéndonos el abuso de notación. Y la pendiente a estimar será $g(k) = \frac{1}{k}$, esto nos obliga a hacer un estudio de la propagación del error para determinar la estimación final, pues tenemos una función de la variable.

Por otro lado, la fuerza aplicada sobre un cuerpo elástico provoca un movimiento armónico simple al desplazarse de su posición de equilibrio. Esta oscilación, con las debidas condiciones, tiene como periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2)$$

Donde m es la masa que cuelga y k, la constante elástica.

Podemos reescribir la ecuación (2):

$$T^2 = m\frac{4\pi^2}{k} \quad (3)$$

Es en base a esta última ecuación que podemos observar más claramente la dependencia del período (al cuadrado) con respecto al peso.

Nuevamente llegado a este punto podemos considerar del error del cuadrado de la periodo (T^2) para hacer una regresión donde se considere las incertezas de cada medición, pudiendo usar el método de mínimos cuadrados pesados.

, no lo tendremos presente debido a que no se encontraron cambios significativos.

Sobre la estimación del coeficiente se tomará en cuenta la función h, para hallar el valor estimado

$$h(k) = \frac{4\pi^2}{k} \quad (4)$$

Por último, estamos considerando el caso en el movimiento oscilatorio subamortiguado, pues estamos en estas condiciones al tomar al agua como fluido amortizante. La ecuación del movimiento correspondiente viene dada en función del tiempo.

$$x(t) = a\,e^{-\gamma t}\cos(W.t + \varphi) + x_0 \quad (5)$$

siendo x(t) la posición en función del tiempo, a la amplitud, γ el coeficiente de amortiguamiento, ω la frecuencia angular de oscilación, φ la fase inicial y x_0 la posición de equilibrio. Nos interesa medir saber la relación con la fuerza, pues es lo que vamos a medir, luego reemplazamos, vemos que

$$F = -kx$$

$$F = -ka\,e^{-\gamma t}cos(W.t + \varphi) - k\,x_0$$

$$F = A\,e^{-\gamma t}cos(W.t + \varphi) + F_0 \quad (6)$$

Comenzaremos con el ajuste no lineal, tomando los picos de la señal que nos proporciona el sensor de Fuerza, haciendo la estimación exponencial de

$$F_{picos} = A\,e^{-\gamma t} + F_0 \;(7)$$

Un posible ajuste lineal, se obtiene transformando la ecuación (7)

$$ln(F_{picos} - F_0) = ln(A) - \gamma t \;(8)$$

Por último se hizo un ajuste completo, es decir tendremos en cuenta a (6), ahora siendo 5 los parámetros a estimar.

3. PROCEDIMIENTO

El sensor utilizado es un transductor, por lo que puede detectar y registrar diferentes tipos de magnitudes físicas en señales eléctricas.
~~En Motion D.A.Q. utilizamos preajustes de calibración para conseguir mediciones más precisas y adecuadas a las unidades que estamos trabajando.~~

Al trabajar con pesos menores a 10 N, el rango utilizado para nuestro sensor fue de ± 10 N. En la página oficial de Vernier [1] encontramos el error de apreciación, el cual es

$$\Delta F = 0.01\,N \;(15)$$

A) <u>Método estático para la determinación de *k*</u>

Para comenzar, medimos la posición del resorte en reposo l_0 = (0,350 ±0,001) m.
Utilizamos un soporte para facilitar el uso del resorte y para satisfacer los supuestos, esto es que la masa del resorte resulte despreciable a la masa del objeto que cuelga "atado" al resorte. Tener en cuenta que el soporte tiene una base con fondo circular, y fue usado en los primeros dos métodos. Su masa es de (0,1350 ± 1E-4) kg.
Todos los cálculos del trabajo se realizaron con el peso del soporte más las pesas adicionales y la balanza utilizada cuenta con una apreciación de 0,0001 kg.
Luego medimos las distintas posiciones de equilibrio del resorte con los diferentes pesos.
Por último, realizamos un ajuste lineal en el que relacionamos Xeq y la masa utilizando la ecuación (1), de donde podremos despejar *k*.

B) Método dinámico para la determinación de *k*

Nuevamente se registró el peso de 10 diferentes masas con el soporte y se lo suspendió del sensor para así poder registrar una señal proporcional a la fuerza necesaria para sostener dicho sistema suspendido. En estas condiciones, se estiró levemente el sistema y se lo dejó oscilar durante 30 seg, y así registrar la lectura del sensor de fuerzas en función del tiempo mediante el programa "Motion D.A.Q". Se utilizó una frecuencia de adquisición de 200 muestras por segundo, por lo que el error de apreciación fue de 0.005 seg.
Luego lo que hacemos es relacionar el T^2 con *k* utilizando la ecuación (3) y realizamos un ajuste lineal para despejar el valor de esta constante.

C. Determinación del coeficiente de amortiguamiento

Una vez determinada la constante elástica del resorte, se colgó del mismo una varilla con una esfera metálica de (0,2270 ± 0,0001) kg y se lo sumergió en un recipiente con agua donde, nuevamente, se lo dejó oscilar durante 30 segundos cuidando que, en cada oscilación, el sistema se encuentre dentro del agua.
Para determinar aquí la constante de amortiguamiento realizaremos un ajuste no lineal según la ecuación (6), de la cual podremos hallar γ. Para observar el gráfico que represente el movimiento amortiguado, deberemos combinar los gráficos exponencial y

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

a) Determinación de k mediante método estático

Luego de realizar las 10 mediciones con las distintas masas aplicadas al sistema, obtuvimos los resultados de las distintas posiciones de equilibrio del resorte.

	Masa (kilogramos)	**Longitud (metros)**
M1	0.2032 ± 1E-4	0.429 ± 0,001
M2	0.2868 ± 1E-4	0.449 ± 0,001
M3	0.1928 ± 1E-4	1,077 ± 0,001
M4	0.2345 ± 1E-4	0.437 ± 0,001
M5	0.3078 ± 1E-4	0.455 ± 0,001
M6	0.3394 ± 1E-4	0.474 ± 0,001
M7	0.2558 ± 1E-4	0.443 ± 0,001
M8	0.2226 ± 1E-4	0.433 ± 0,001
M9	0.2752 ± 1E-4	0.451 ± 0,001
M10	0.3798 ± 1E-4	0.483 ± 0,001

Tabla 1. Masas y longitudes correspondientes al método estático.

Usando la ecuación (1) para regresión, obtenemos la estimación.

$$k = (27,2 \pm 0,3)\ \frac{g}{seg^2}$$

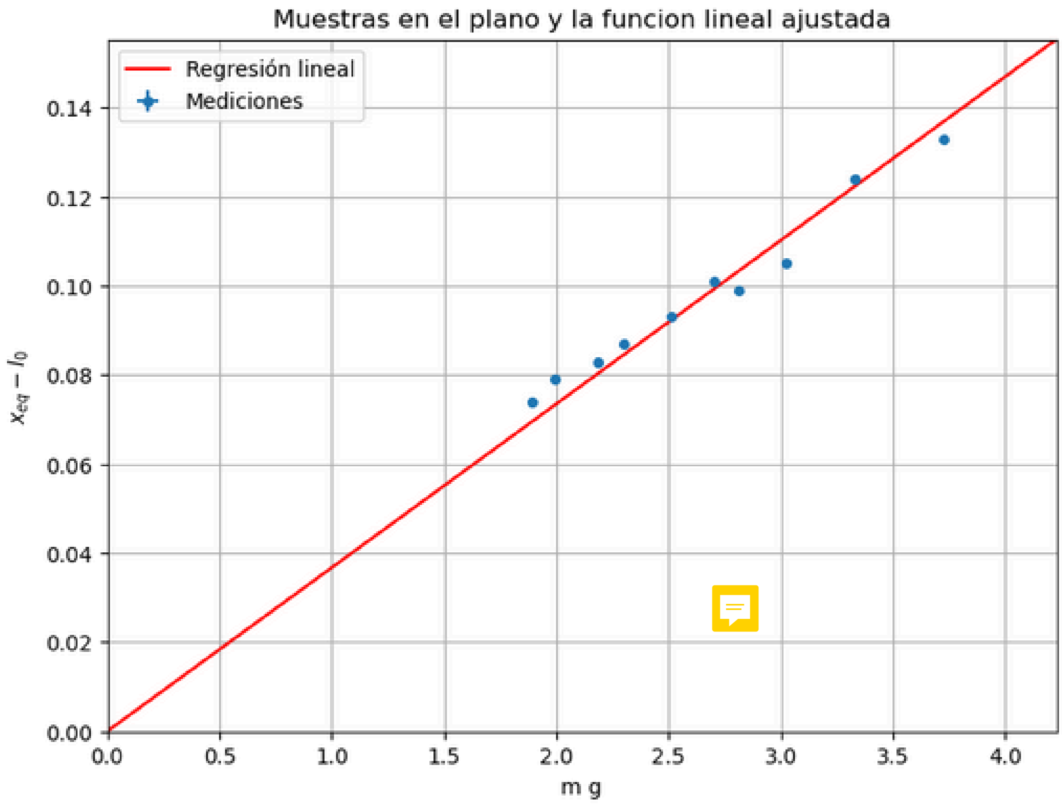

Fig. 2. Función predictora obtenida con el ajuste lineal con X=mg e Y = xeq - l0

Podemos observar cómo al aumentar la masa, la posición de equilibrio aumenta también de manera lineal.

b) <u>Determinación de k mediante el método dinámico</u>

Por otro lado, haciendo la propagación del error, obtenemos que el error instrumental, es de 0.007 seg.

El error estadístico es $\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}$, con n = 10 con el desvío estándar (σ) de la i-ésima muestra obtenida correspondiente a la i-ésima masa. Luego obtenemos el error absoluto, que es el que finalmente mostramos en la Tabla 2.

Hicimos 2 ajustes para este caso, uno considerando el error relativo y otro en el que no, usando la ecuación (2) obtenemos la estimación y error absoluto de la constante k.

(ver apéndice para la propagación de errores y demás cálculos)

Para el caso sin:

$$k = (23.5 \pm 0.5)\ \frac{g}{seg^2}$$

Caso con:

$$k \ = \ (23.8 \pm 0.4)\,\frac{g}{seg^2}$$

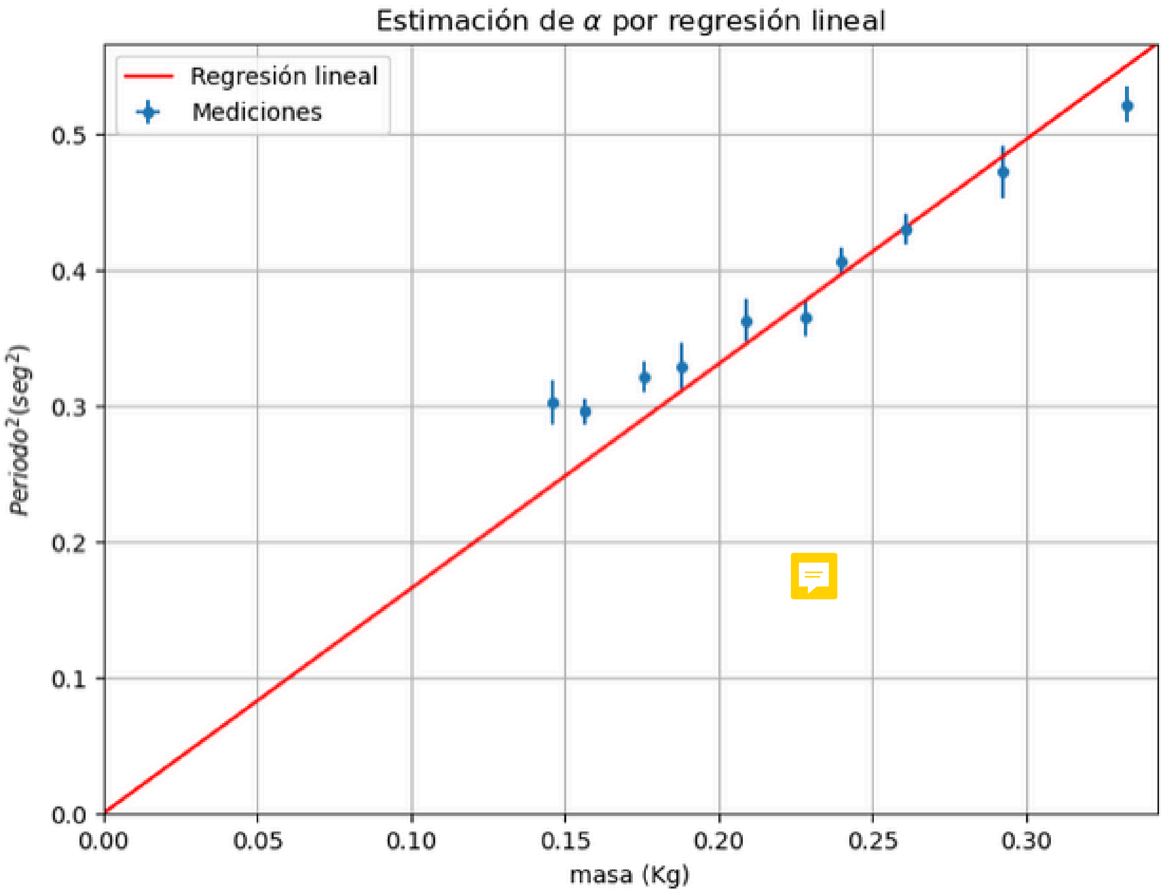

Fig 3. Gráfico de la regresión lineal considerando el error relativo.

entre la masa y el período al cuadrado.

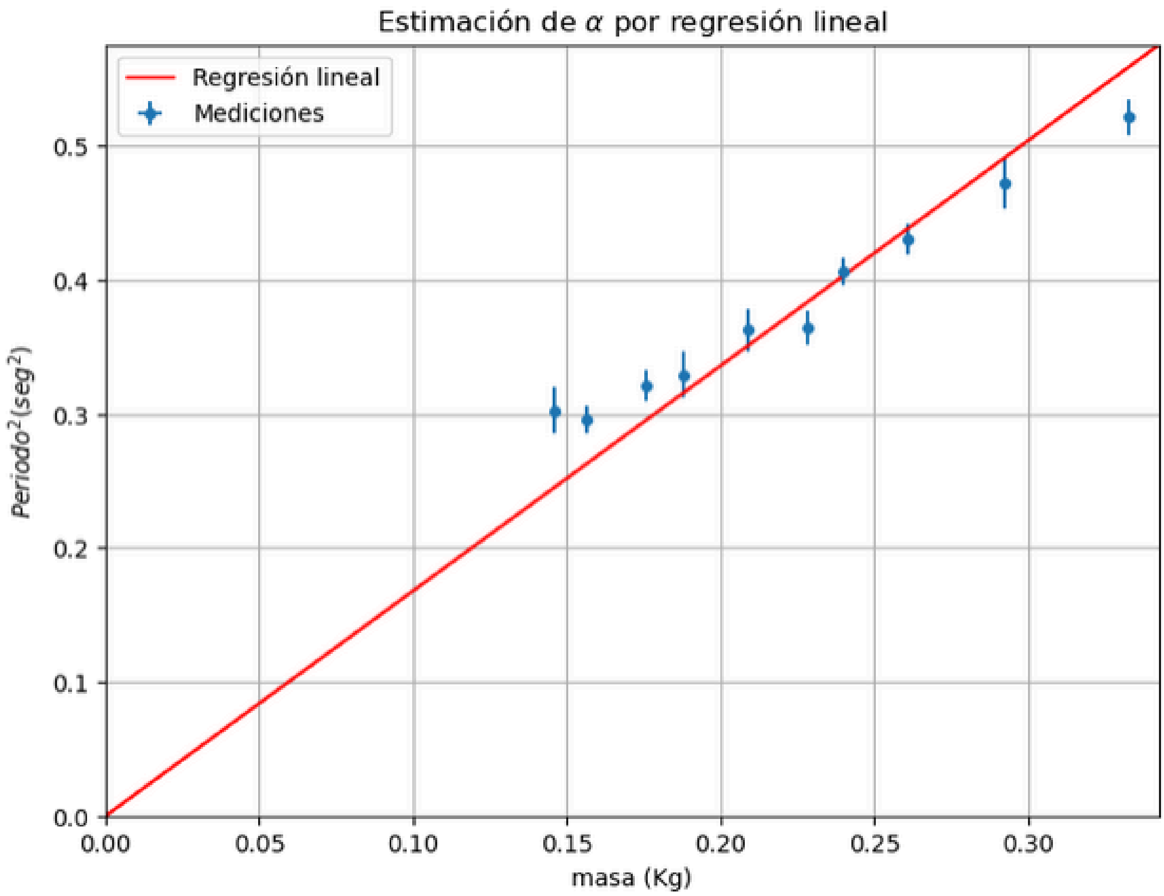

Fig 4. Gráfico de la regresión lineal sin el error relativo.

entre la masa y el período al cuadrado.

	Masa (kilogramos)	**Período (segundos)**
M1	0.1458 ± 1E-4	0.55 ± 0,01
M2	0.1562 ± 1E-4	0.543 ± 0,009
M3	0.1756 ± 1E-4	0.566 ± 0,009
M4	0.1878 ± 1E-4	0.57 ± 0,01
M5	0.2282 ± 1E-4	0,61 ± 0,01
M6	0.2088 ± 1E-4	0,60 ± 0,01
M7	0.2398 ± 1E-4	0,637 ± 0,008
M8	0.2608 ± 1E-4	0,655 ± 0,008

M9	0.2924 ± 1E-4	0,68 ± 0,01
M10	0.3328 ± 1E-4	0,722 ± 0,009

Tabla 2. Mediciones con sus respectivas masas y períodos.

Podemos observar cómo al aumentar la masa, aumenta el período según la ecuación (2). Comparando los dos métodos, observamos que en el caso del método estático tenemos un menor error asociado que en el método dinámico, por lo que podríamos decir que en esta experiencia resultó ser más preciso.

c) *Determinación del coeficiente de amortiguamiento*

Luego de realizar la medición de fuerza del sistema oscilando sumergido en agua, se obtuvieron resultados del período y la masa.

	Masa (kilogramos)	Período (segundos)
MW	0,227 ± 1E-4	0.53180 ± 5E-5

Tabla. 2. Datos de la medición de nuestra esfera metálica en el agua

Obtuvimos los máximos del gráfico de la Fuerza en función del tiempo para empezar con los ajustes.

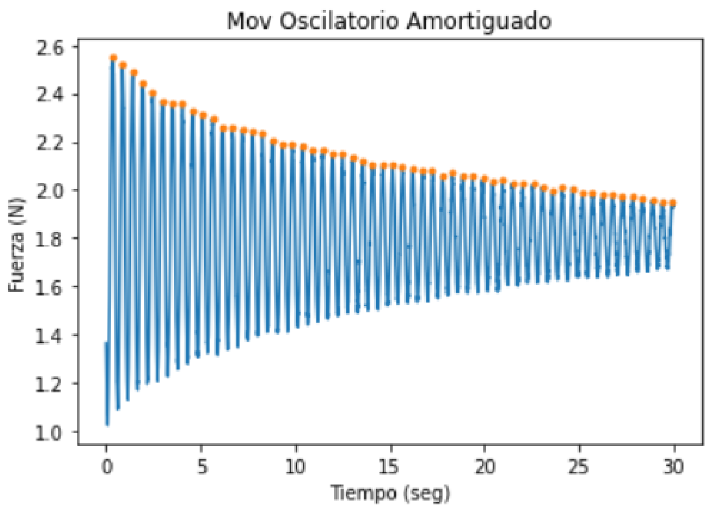

Fig. 5. Máximos de fuerza obtenidos en la oscilación del movimiento amortiguado.

Hacemos el ajuste exponencial usando la ecuación (7), en la Fig 6 podemos observar que encontramos un ajuste aceptable.

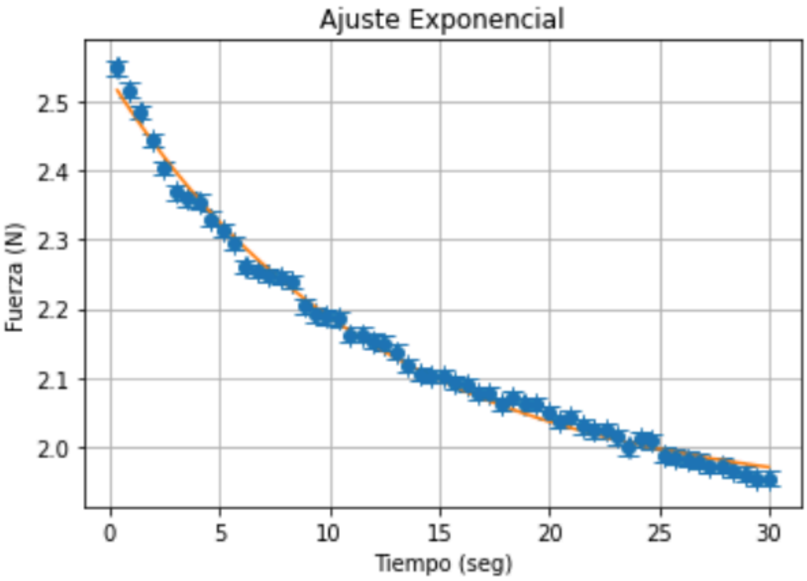

Fig 6. Ajuste exponencial de los máximos de fuerza obtenidos en la oscilación.

Podemos linealizar la ecuación mencionada y obtener valga la redundancia una ecuación lineal (8) y sobre ella hacer la regresión lineal conocida, y obtener los errores, mediante la propagación de errores.

Una observación, tenemos los signos cambiados en cada gráfico, esto de debe a que no hicimos el pertinente cambio de signos en el ajuste, es decir ajustamos con el modelo

$$Y = aX + b$$

en el caso linealizado, donde sabemos por la ecuación (8) que γ tiene un -1 multiplicando.

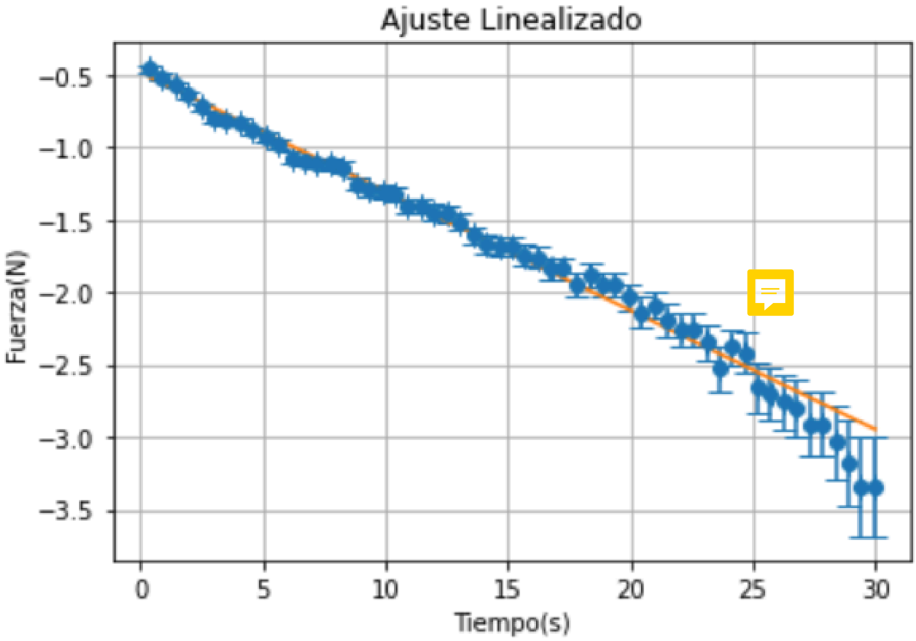

Fig 7. Ajuste linealizado de los máximos de fuerza obtenidos en la oscilación.

Para el ajuste exponencial obtuvimos

$$\gamma = (0.082 \pm 0.002)$$
$$A = (0.615 \pm 0.005)$$
$$F_0 = (1.918 \pm 0.006)$$

Y para el ajuste linealizado

$$\gamma = (0.082 \pm 0.001)$$
$$A = (0.61574 \pm 0.005)$$

No hay diferencia significativa como se puede observar, por lo que tomaremos los parámetros del ajuste exponencial.

Los usamos como valores iniciales para hacer el ajuste completo correspondiente a la ecuación (6), en principio esto es importante debido a la naturaleza de los métodos de ajuste no lineal por cuadrados mínimos que recurren a métodos de minimización numérica iterativos, a fin de encontrar un conjunto de parámetros que minimice la función a optimizar χ^2 [1], por ello y demás razones, entre ellas físicas, pues puede terminar con valores que carezcan de sentido físico. El algoritmo requiere que utilicemos valores iniciales adecuados para cada parámetro, de ahí la importancia de este primer paso, para estimar A, γ y F_0.

Como ya mencionamos usamos los 3 obtenidos previamente como valores iniciales para una búsqueda exitosa de mínimos.
Los parámetros son:

$$\gamma = (0.044 \pm 0.001)$$

$$A = (-\ 0.4924 \pm 0.007)$$

$$F_0 = (1.809 \pm 0.002)$$

$$W = (11.814 \pm 0.001)$$

$$\varphi = (1.03539 \pm 0.01)$$

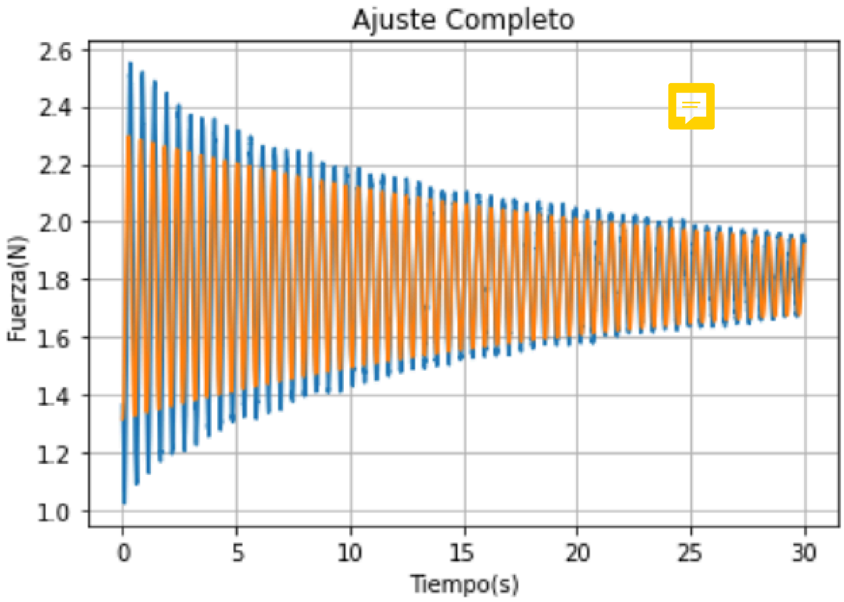

Fig. 8. Ajuste completo compuesto usando el ajuste exponencial y el gráfico obtenido de Motion DAQ del movimiento oscilatorio amortiguado durante 30s en agua.

Podemos observar más claramente en el ajuste completo el decaimiento de la amplitud en el movimiento oscilatorio amortiguado.

5. CONCLUSIÓN

-

Se logró determinar la constante elástica *(k)* del resorte utilizando un método estático y uno dinámico y comparar los resultados de ambos. También se logró determinar el coeficiente de amortiguamiento del agua.
Se profundizaron conceptos previamente trabajados como las regresiones lineales y se incorporaron regresiones no lineales (exponenciales) en esta ocasión.

Se logró determinar que es posible determinar la constante elástica conociendo solamente la masa y las posiciones de equilibrio o el período de un resorte. Se corroboró la relación entre la masa y el período cuadrado, teniendo estos una relación en donde aumentan proporcionalmente de manera lineal.

Se concluye además que en un movimiento simple amortiguado la amplitud no se mantiene constante por la existencia de fuerzas disipativas (en nuestro caso, el agua). Sin esta, la energía no se perdería y por consiguiente, el sistema no se detendría ni disminuiría la amplitud. Esta última variable y el período en un movimiento oscilatorio amortiguado decrecen exponencialmente con el tiempo.

6. APÉNDICE

Para el caso de la constante k en el método estático tenemos que a = $\frac{1}{k}$

$$\Delta k = \frac{1}{a^2} * \Delta a = \frac{1}{0.03673^2} * 0.0004 = 0.3\frac{g}{seg^2}$$

$$k = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{0.03673^2} = 27.222\frac{g}{seg^2}$$

Para el caso de la constante k en el método dinámico tenemos que k = $\frac{4\pi^2}{a}$,

para el caso sin error relativo:

$$k = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{1.67} = 23.5\frac{g}{seg^2}$$

$$\Delta k = \frac{4\pi^2}{a^2} * \Delta a = \frac{4\pi^2}{1.67^2} * 0.03 = 0.5\frac{g}{seg^2}$$

para el caso considerando el error relativo:

$$k = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{1.65} = 23.8\frac{g}{seg^2}$$

$$\Delta k = \frac{4\pi^2}{a^2} * \Delta a = \frac{4\pi^2}{1.65^2} * 0.03 = 0.4\frac{g}{seg^2}$$

Cálculo del error Absoluto para el caso en el que consideramos el error relativo

$$\Delta T = \sqrt{(\frac{\sigma_i}{\sqrt{10}})^2 + err_{inst}^2} = \sqrt{(\frac{\sigma_i}{\sqrt{10}})^2 + 0.007^2}$$

7. REFERENCIAS

Dual-Range Force Sensor - Vernier [1]