MEDICIONES DIRECTAS E INDIRECTAS

Kenet Chapeton, Lautaro Moya, Marcos Picco, Martín Zelicovich
(martinzelicovich@gmail.com, lautamoya01@gmail.com, marcospicco123@gmail.com, kenetchape@gmail.com)
Laboratorio de Mecánica y Termodinámica (A) – Verano 2024 –
Departamento de Física, FCEyN, UBA.

1. RESUMEN

En este trabajo buscamos resolver las mejores maneras para realizar una medición de manera adecuada. En la primera parte utilizaremos la forma directa para así obtener una descripción estadística de estas mediciones, teniendo en cuenta el error experimental que se produce por las limitaciones del instrumento o de los sentidos. Para la segunda parte, trabajaremos con variables que se miden de forma indirecta a partir de otras medidas directas (como el área de un rectángulo o de un apotema), donde nos proponemos comparar los resultados y los errores de medir una misma magnitud física, en este caso, el volumen de un cuerpo de aluminio utilizando tres métodos indirectos distintos.

2. INTRODUCCIÓN

Al realizar una **medición directa**, se mide con un instrumento directamente la magnitud a determinar, mientras que en las **mediciones indirectas** se realizan mediciones de variables que estén relacionadas de alguna manera con la magnitud de interés. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estas mediciones al igual que las anteriores incluyen cierto grado de error que puede estar sujeto a variaciones o **errores experimentales**.
Al medir una magnitud física siempre existe un error experimental, que es la diferencia entre el valor medido y el valor real de la magnitud. Esto puede deberse a varias causas, tales como imperfecciones del instrumento, limitaciones de los sentidos o fluctuaciones en las condiciones ambientales. Este error afecta a **la precisión y a la exactitud** de las mediciones, y se puede expresar como un error absoluto o como un error relativo.
Estos dos son conceptos fundamentales en la medición. La precisión se refiere a la dispersión del conjunto de valores obtenidos de mediciones repetidas de una magnitud; cuanto menor es la dispersión, mayor es la precisión. La exactitud, por otro lado, se refiere a cuán cerca del

valor real se encuentra el valor medido. En términos estadísticos la exactitud se refiere a la proximidad del valor medido (directo) o estimado (indirecto) y el valor verdadero o teórico de una magnitud. Cuando se expresa la exactitud de un resultado, se expresa mediante el error absoluto, que es la diferencia entre el valor experimental y el valor verdadero. Es crucial considerar todas las posibles fuentes de error al realizar mediciones para aplicar correcciones o estimaciones adecuadas para obtener resultados más precisos.
En este trabajo se calculó el error absoluto y relativo de las mediciones y se analizó su influencia en la descripción estadística a través de un histograma.

Depende del método utilizado para hacer el histograma (directo o indirecto), la **Regla de Sturges** es una regla práctica que se utiliza para determinar el número de intervalos que deben considerarse al elaborar un histograma, establece que el número óptimo de intervalos k se puede calcular utilizando la siguiente ecuación, donde N es la cantidad de observaciones.

$$K = 1 + ln(N) \quad (1)$$

Otra regla común que se utiliza para determinar la cantidad de intervalos es usar la regla de la raíz cuadrada, la que sugiere usar el número de intervalos igual a la raíz cuadrada del número total de mediciones.

$$K = \sqrt{N} \quad (2)$$

Se puede sacar o mejor dicho identificar buena información de un histograma como el promedio (media), dicho valor se encuentra en el centro del histograma, se calcula

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \quad (3)$$

donde X_i es la i-ésima medida.
La desviación estándar mide la dispersión de los datos y se calcula

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} [\overline{X} - X_i]^2}{N}} \quad (4)$$

Es pertinente introducir un modelo de distribución de probabilidad aplicable a nuestros datos que suponemos aleatorios, el cual se usa para describir la probabilidad de que se den los diferentes valores. En términos formales una variable aleatoria es una función definida sobre un espacio de probabilidad.

En este trabajo nos interesa describir la distribución normal o Gaussiana, una de las distribuciones de probabilidad más comunes en estadística. Es simétrica y su gráfica tiene una forma de campana, conocida como la campana de Gauss. Cuanto mayor sea el número de mediciones mejor es la aproximación.
La función de densidad de probabilidad de una distribución normal estándar se define como:

$$f(x) \;=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\,(\frac{x-\mu}{2\sigma})^2} \quad (1)$$

Podemos observar que la distribución normal está determinada por sus dos parámetros: la media (μ) y la desviación estándar (σ).

No siempre se cuenta con un instrumento para medir en forma directa la magnitud requerida, sino que esta se tiene que derivar de algunas otras magnitudes medidas en forma directa.
Cuando se mide una magnitud en forma directa, obtenemos como resultado de la medición un rango de valores, determinado con un valor medio y una incerteza.
Una medición indirecta también tendrá un valor medio y una incerteza. ~~¿Cómo se obtiene?~~ Las incertezas de las mediciones directas deberían **propagarse** sobre el resultado de la medición indirecta.
En la segunda parte se estimará el volumen de un cuerpo de aluminio a través de 3 métodos distintos. Para cada uno de los métodos, se evaluaron los errores asociados a través de la **propagación de errores**, método que implica el uso de matemáticas para estimar cómo las incertidumbres en las variables de entrada se traducen en las variables de salida. Para esto se utiliza el cálculo de derivadas parciales en función de las variables que son tomadas en cuenta. Cuando se desea realizar el cálculo de una nueva cantidad basado en mediciones de otras que tienen una incerteza asociada se requiere propagar el error hacia esta nueva cantidad.

Como objetivos del trabajo nos proponemos comparar los resultados obtenidos de la medición indirecta y directa de una misma magnitud física, analizando los distintos métodos y estimando los errores correspondientes. También profundizar tanto conceptos de estadística y probabilidad como de propagación de errores.

3. DESARROLLO EXPERIMENTAL

Parte 1

Cada miembro del grupo realizó 50 mediciones de baldosas utilizando un calibre, lo que nos proporcionó un total de 200 mediciones al ser 4 integrantes. El calibre utilizado tiene una apreciación de 0,002 cm, eso significa que cada medición individual que se realice con ese calibre tendrá una incertidumbre de ± 0,002 cm.
Luego analizaremos los datos obtenidos, realizando histogramas para cada set de 50 mediciones, determinando el valor más frecuente (moda), el valor central (mediana) y el promedio (media) de las mediciones y también analizando la forma en la que se distribuyen los datos.

Parte 2

A. Estimación del volumen mediante medición de las áreas.

El primer método que se podría utilizar es la medición directa de sus partes para aplicar la fórmula del volumen. El cuerpo de aluminio es un prisma hexagonal, por lo que se necesita conocer la longitud del lado del hexágono, el apotema (la distancia desde el centro del hexágono a uno de sus lados) y la altura del prisma.

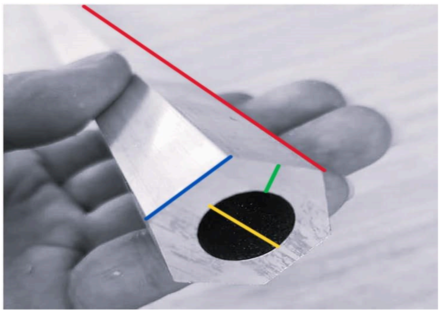

Fig. 1. Representación gráfica de las partes a medir para la estimación del volumen de la barra de aluminio mediante medición directa de las mismas.

Primero calculamos el área del hexágono y le restamos el área del agujero del medio. A partir de esto, multiplicamos por la altura y obtendremos el valor de volumen del cuerpo.

B. Estimación del volumen mediante desplazamiento de agua.

Otro método que se puede utilizar es mediante el desplazamiento de agua, el cual es especialmente útil si el cuerpo a medir tiene una forma irregular. Para ello, se sumerge el cuerpo de aluminio en una probeta llena de agua y se mide cuánta agua se desplaza, siendo el volumen de agua desplazada igual al volumen del prisma. La probeta utilizada cuenta con una apreciación de 0,1 cm.

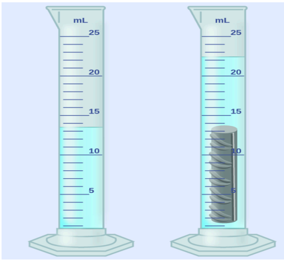

Fig. 2. Método de estimación del volumen mediante desplazamiento de agua.

C. Estimación del volumen mediante la densidad.

Si se conoce la densidad del aluminio y se mide la masa del cuerpo, se puede calcular el volumen utilizando la fórmula: densidad = $\frac{masa}{volumen}$. La apreciación de la balanza utilizada para medir la masa del prisma es de 0,01 g.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Parte 1

Con los datos obtenidos, se realizaron 4 histogramas con cada set de datos y se analizaron sus medias, modas y desvíos estándar.

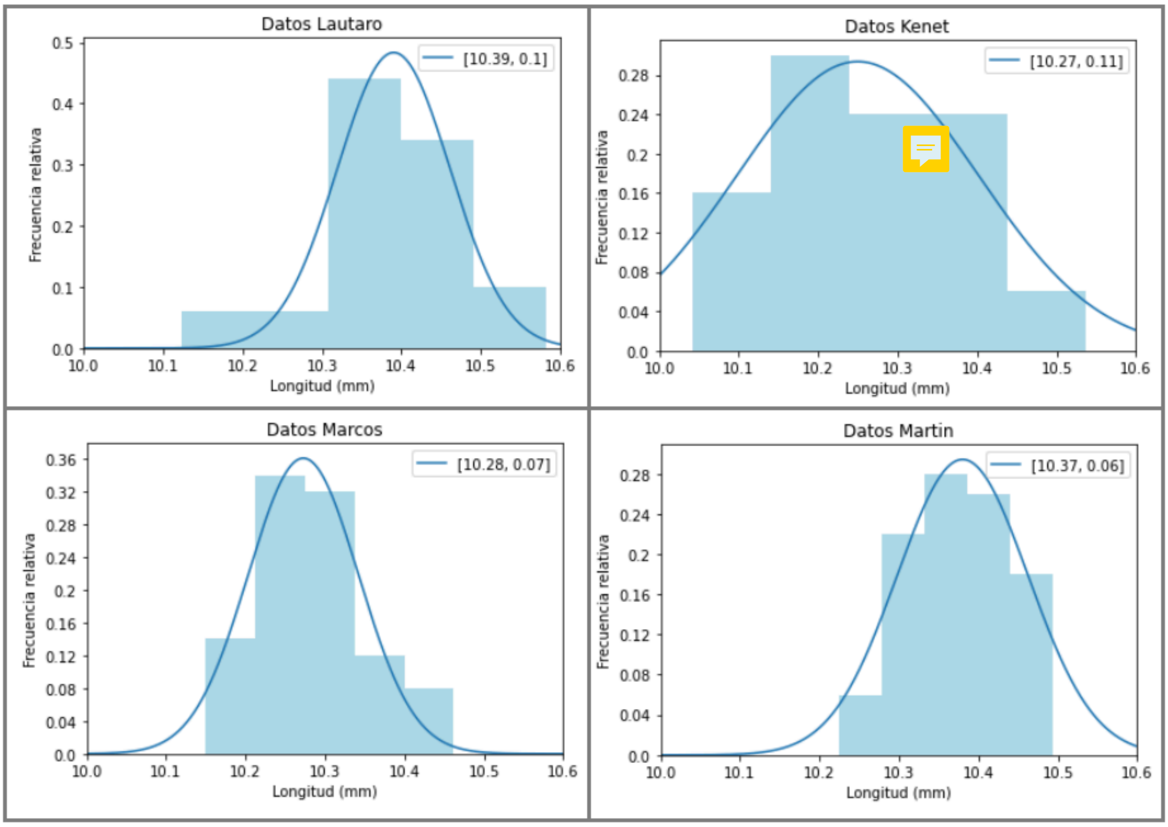

Fig. 3. Histogramas realizados para cada set de datos. En la esquina superior derecha de cada gráfico se encuentran la media y el desvío estándar (en ese orden).

Observando y comparando los histogramas de cada set de datos, podemos identificar que poseen una distribución que se corresponde con una normal, con valores de media y desvío similares entre sí. El histograma que presenta diferencias significativas con los demás es el que fue realizado con los datos de Kenet (esquina superior derecha), en el que vemos como el gráfico está corrido hacia la izquierda, pero con el desvío estándar similar a los demás. Esto se debe a que las mediciones realizadas por él se hicieron con el borde interno de las baldosas, mientras que el resto de los integrantes del grupo realizaron las mediciones utilizando el borde externo de las baldosas, lo que resultó en valores menores.

Ocurriendo el error del operador.

Para analizar mejor cómo se ajustan los datos a una distribución normal, realizamos un histograma con todos los datos superpuestos (aumentamos el N).

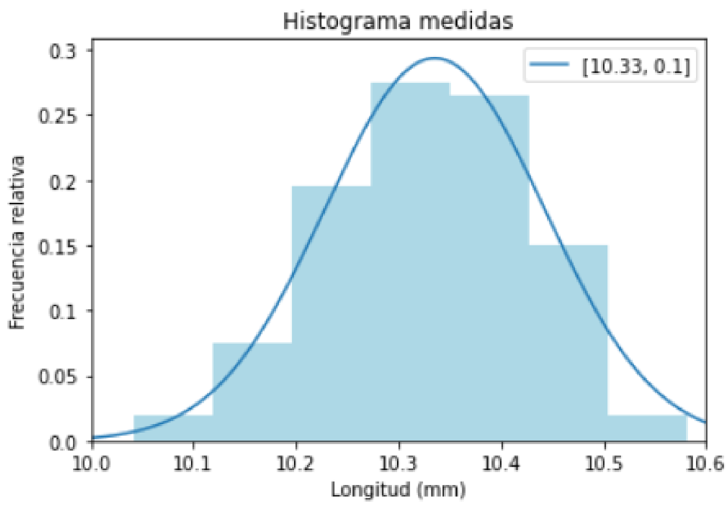

Fig. 4. Histograma de todas las mediciones superpuestas con valores de frecuencias relativas.

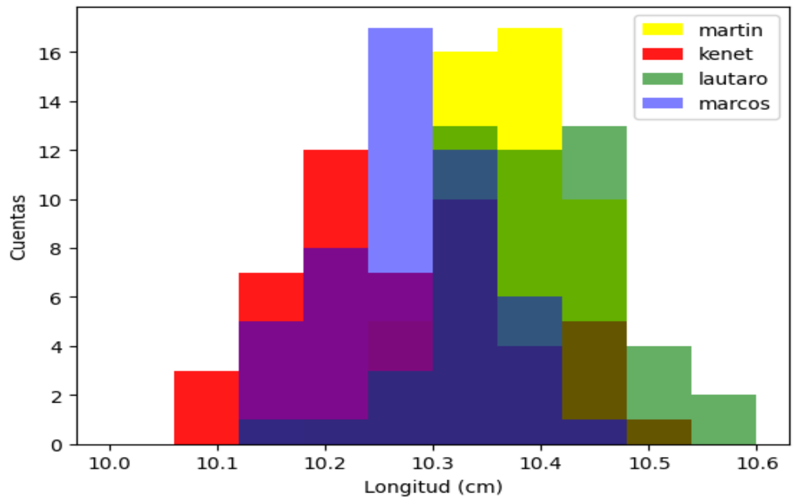

Fig. 5. Histograma de todas las mediciones superpuestas con valores de frecuencias absolutas.

Se puede observar más claramente en los histogramas realizados con todas las mediciones una distribución que tiende más a una de tipo normal, tanto con frecuencias absolutas como relativas.

Parte 2

Los resultados obtenidos a partir de los cálculos de los tres métodos fueron los siguientes: (Ver apéndice)

$V_{A1} = (29,04 \pm 0,09)\ cm^3$

$V_{A2} = (21,74 \pm 0,07)\ cm^3$

$V_B = (17,0 \pm 0,1)\ cm^3$

$V_C = (17,96 \pm 0,1)\ cm^3$

En primera instancia podríamos afirmar que los resultados B y C no difieren mucho entre sí, con una similitud del 95%. Podemos observar también que con los métodos A1y2 (calculando las áreas) obtuvimos un menor error asociado y relativo que en los otros dos métodos, aunque de todos modos hay mucha diferencia entre ambos, esto quizás se deba a un error del operador, pues había que tener mucha precisión, debido a las dimensiones del hexágono y foramen, sumando a que en A1 supusimos que el hexágono era una composición de triángulos equiláteros y congruentes, pues era regular.

Finalmente la diferencia entre los métodos A1y2 con el resto creemos que se debe a que no tuvimos mucho cuidado en tomar las medidas correspondientes, sumando a que si bien los 4 métodos son indirectos, creemos que hay más exactitud en B y C, pues no se hicieron demasiados supuestos u tomaron medidas que tengan peso en la exactitud del cálculo del volumen del sólido.

5. CONCLUSIÓN

En la primera parte del trabajo se reconoció la presencia de errores de precisión, los cuales se relacionan con la dispersión de los resultados respecto al valor verdadero y se los tuvo en cuenta en el análisis de datos obtenido. Además de que se identificaron las posibles fuentes de error que podrían asociarse a una medición.

Pudimos comprobar que al aumentar el número de mediciones, la distribución se asemejaba más a una de tipo normal.

Se lograron realizar estimaciones del volumen de un prisma hexagonal de aluminio (y su error asociado en cada caso) utilizando diferentes métodos y luego se compararon los resultados, analizando las diferencias entre los valores del volumen y los errores asociados de cada uno.

En adición, se pudo profundizar y comprender cómo utilizar la propagación de errores.

6. APÉNDICE

Área del hexágono:

Suponiendo que son triángulos equiláteros y congruentes, calculamos la altura de uno de ellos

$h = sen(60) * L$

$6\frac{sen(60)L*L}{2} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}L^2 \rightarrow 4,947cm$

Usando el apotema:

$\frac{Apotema * 6*L}{2} \rightarrow 3,771cm$

Área del foramen :

$\pi * r^2 \rightarrow \pi * (0,295\, cm)^2 = 0,273\, cm^2$

V prisma hexagonal :

Con triangulos congruentes equiláteros

$f_1(L, r, h) = (3\frac{\sqrt{3}}{2}L^2 - \pi r^2) * h$

$f_1(1.38cm, 0.295cm, 6.214cm) = (4,947 - 0,273)\, cm * 6,214\, cm = 29,044\, cm^2$

$V_{A1} = 29,044\, cm^2$

Con apotema

$f_2(Apotema, L, r, h) = (\frac{A*6*L}{2} - \pi r^2) * h$

$f_2(0,911cm, 1.38cm, 0.295cm, 6.214cm) = (3,771 - 0,273)cm * 6,214cm = 21,737cm^2$

$V_{A2} = 21,737cm^2$

$V_c = \frac{48,50}{2,70}cm^2$

$\frac{\partial f_2}{\partial r} = \frac{\partial f_1}{\partial r} =- \pi * r * 2 * h \rightarrow - 11,\ 518$ cm

$\frac{\partial f_2}{\partial L} = 3 * Apotema * h \rightarrow 16,982\, cm$

$\frac{\partial f_1}{\partial L} = 3\sqrt{3} * L * h \rightarrow 44,558\, cm$

$\frac{\partial f_2}{\partial h} = Apotema * 3 * L - \pi r^2 \rightarrow 3,498\, cm$

$\frac{\partial f_1}{\partial h} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}L^2 - \pi r^2 \rightarrow 4,674\, cm$

$\frac{\partial f_2}{\partial apotema} = 3 * L * h \rightarrow 25.73$

$\Delta V_{A1} = \sqrt{(\frac{\partial f_1}{\partial r} * \Delta\, cal)^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial h} * \Delta\, cal)^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial L} * \Delta\, cal)^2} \rightarrow 0,09251cm$

$\Delta V_{A2} = \sqrt{(\frac{\partial f_2}{\partial r} * \Delta\, cal)^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial h} * \Delta\, cal)^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial apotema} * \Delta\, cal)^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial L} * \Delta\, cal)^2} \rightarrow 0,06617cm$

Apotema = 0,911 cm

L = 1,380 cm

r = 0,295 cm

h = 6,214 cm

Δcal = 0,002 cm

7. REFERENCIAS

[1] *Mediciones Directas e Indirectas | Conceptos básicos de los Sistemas de Medición | Fundamentos de Medición | KEYENCE México*

[2] *Diferencia entre resolución, precisión y exactitud — HelixNorth*

[3] *Los errores de medición: Tipos, clasificación y causas - TCM Consultoría y Formación*