Geomet

Geometrické metody teoretické fyziky I

Semestr: 1
verze: 0.1
Odkaz na veřejný github: https://github.com/KeniAlquist/Geomet_I_draft_poznamek.git
(Upravujte, měňte, vylepšujte, navrhujte dle libosti a nadšení + info pro Obsidian uživatele)

Obsah

Topologické prostory

Topologické prostory

D: Topologický prostor (X, τ)

je prostor X s topologií τ, tj souborem otevřených množin, takový že splňuje:

$$\begin{aligned} \tau: \quad & \emptyset, X \in \tau \\ & \bigcup_i A_i \in \tau, \forall i \in I, A_i \in \tau \\ & \bigcap_i A_i \in \tau, \forall i \in I, A_i \in \tau \end{aligned}$$

D:

Otevřená množina:
je množina z τ.
Uzavřená množina:
je komplement otevřené v X.
Komponenta:
zároveň uzavřená a otevřená množina.
Báze topologie:
soubor otevřených množin generující sjednocení a konečných průniků topologii.
Kompaktní množina:
Každé její pokrytí lze pokrýt konečně mnoha podpokrytími.

D: Spojité zobrazení f

Spojitým zobrazením $f: X \to Y$, topologických prostorů X, Y splňující:

$$\forall x \in X \supset U, \quad \forall V \subset Y : \text{pro otevřené okolí } U \text{ bodu } x: \, f(U) \subset V$$

D: Homeomorfizmus

Vzájemně jednoznačné zobrazení ϕ a ϕ^{-1} jsou spojité.

Charakterizace topologických prostorů

Vlastnosti pro nás důležité.

D: Hausdorffův prostor

Topologický prostor M, kde $\forall x, y \in M$, kde $\exists U, V \in \tau$ takové, že $x \in U, y \in V$ a $U \cap V = \emptyset$.

Další jiné:

- velikost: prostory lze generovat spočetnou bází.
- parakompaktnost: každé pokrytí má lokálně konečné podpokrytí.

D: Lokálně euklidovský

$\forall x$ najdeme okolí, které je homomorfní s okolím v $\mathbb{R}^n$.

D: lokálně metrizovatelný

tzn. duh. sry. Vzdálenost mezi body můžu měřit.

D: Topologická varieta

M je topologická varieta pokud:

- M je lokálně euklidovský topologický prostor
- M je Hausdorffovský
  Dále: Lze pro ně ukázat
- topo. varieta je disjunktní sjednocení souvislých komponent
- spočetná báze --> parakompaktnost
- parakompaktnost + spočetně komponent --> spočetná báze
- metrizovatelný $\iff$ parakompaktnost

Diferenciální struktura

Diferenciální struktura

D: Souřadnicová mapa $(U, \mathbf{x})$ v M

- U otevřená oblast v M
- zobrazení $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^n$
  tj. dokážu se přenést na $\mathbb{R}^n$

D: Přechodové zobrazení

Mějme dvě zobrazení $(U, \mathbf{x})$ a $(V, \mathbf{y})$ na M. Pak definujeme zobrazení

$$\alpha := \mathbf{x}\mathbf{y}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

tj. α operuje na $U \cap V$.

D: Atlas třídy C^r

Pro kolekce map $(U_a, \mathbf{x_a})$.

- U_α tvoří otevřené pokrytí M
- přechodové zobrazení $\mathbf{x}_{ab} := \mathbf{x_a} \circ \mathbf{x_b}^{-1}$ jsou tzv. třídy C^r.
  C^0 - homeomorfizmus
  C^r - spojitých r-derivací
  C^∞ - nekonečně diferencovatelné
  C^ω - analytické zobrazení

D: Kompatibilita atlasů

A_1, A_2 jsou C^r-kompatibilní, pokud
$A_1 \cup A_2$ je C^r atlas.

D: Diferenciální struktura

Třída ekvivalence C^r-atlasů.
tj. i když existuje mnoho atlasů, my mezi nimi nerozlišujeme.

D: Maximální atlas

Sjednocení $\forall$ atlasů v diferenciální struktuře.

D: Diferencovatelná varieta (M, A)

Dvojice (M, A) tj. topo. varieta s diferencovatelnou strukturou je tzv. diferencovatelná varieta třídy C^r.

Hladké zobrazení

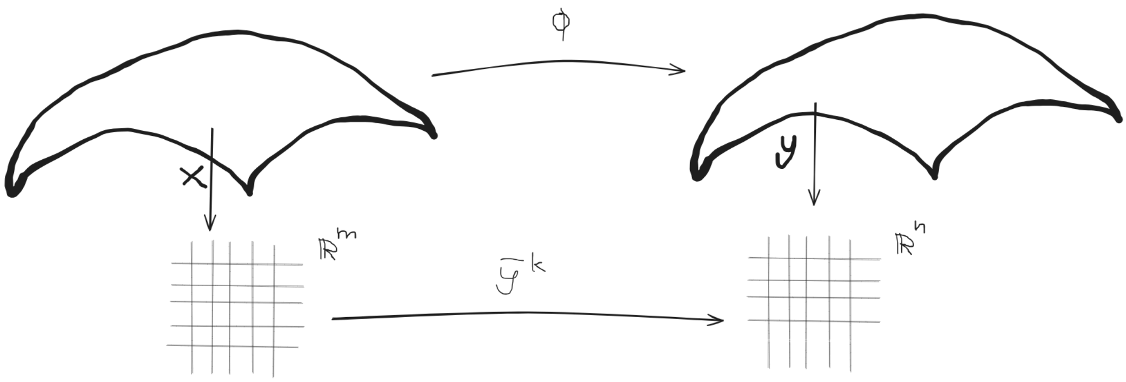
Hladké zobrazení

D: Hladké zobrazení mezi M a N

Zobrazení $\phi : M \to N$ je C^r, pokud
$\forall (U, \mathbf{x})$ na M a $(V, \mathbf{y})$ na N bude souřadnicové vyjádření ϕ třídy C^r tj.

$$\mathbf{y} \circ \phi \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ je } C^r$$

Obrázkově



D: Difeomorfizmus

$\phi : M \to N$ je C^r difeomorfizmus. Pokud $\exists \phi^{-1}$ a ϕ, ϕ^{-1} jsou C^r hladké.
(Prostor difeomorfizmů ozn. $\mathrm{Diff}(M, N)$)

Speciální případy

D: Hladká funkce

$f : M \to \mathbb{R}$; ozn. souřadnicově $\bar{f}(u^1, \ldots, u^m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

D: Hladké křivky

$\gamma : \mathbb{R} \to M$; ozn. souřadnicově $\bar{\gamma}^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

D: Difeoekvivalentní variety

(M, A_M) a (N, A_N) jsou difeoekvivalentní $\iff$ $\exists$ difeomorfizmus $\phi : M \to N$

Tečná struktura

Tečná struktura

Existují dva obecně používané postupy, jak konstruovat tečný prostor: Zavedením tečných vektorů nebo jako prostor derivací na prostoru funkcí.

Prostor směrů

Parametrizovaná křivka $z(\alpha)$, která prochází skrze bod x, $z : \mathbb{R} \to M$ a $z(0) \equiv x$.
Definujeme derivaci podél křivky z v bodě x jako

$$\left[\frac{d}{d\alpha}\right]\Bigg|_{\alpha=0} f \circ z$$

Říkáme, že křivky z_1 a z_2 mají stejné směry a rychlosti:

$$\forall f \in \mathcal{F}M, \text{ platí } : \left[\frac{d}{d\alpha}\right]_0 f \circ z_1 = \left[\frac{d}{d\alpha}\right]_0 f \circ z_2$$

D: Směr

Je třída ekvivalence křivek stejného směru, zn. $\dot{z} = \left[\frac{D}{d\alpha}\right]_0 z$

D: Derivace ve směru

Pro směr a a jakákoliv křivka z reprezentující směr a definujeme derivaci funkce f ve směru a jako:

$$a[f] = \left[\frac{d}{d\alpha}\right]_0 f \circ z$$

Pozn. pro $f = F(f_1, \ldots, f_k)$, kde $f_l \in \mathcal{F}M$ a $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ hladká:

$$a[f] = \sum_l \frac{\partial F}{\partial f_l}_{(f_1, \ldots, f_k)} a[f_l]$$

Derivace ve směru můžeme povýšit na diferenciální operátor 1. řádu, neboť splňuje jeho definici.

Prostor derivací

Nebo můžeme prvně definovat prostor derivací.

D: Prostor derivací na $\mathcal{F}M$ v bodě x

a je derivace na $\mathcal{F}M$ v bodě x, pokud:

1. $a : \mathcal{F}M \to \mathbb{R}$
2. $a[rf] = ra[f]$
   $a[f+g] = a[f] + a[g]$
3. $a[fg]_x = a[f]g\,|_x + fa[g]|_x$
   Lineární zobrazení z funkcí do $\mathbb{R}$ splňující Leibnizovo pravidlo.

Vlastnosti:

1. Lokalita je už zahrnuta.

- $f = 0$ na okolí $x \implies a[f]_x = 0$
- $f = C$ na okolí $x \implies a[f]_x = 0$
- $f = g$ na okolí $x \implies a[f]_x = a[g]_x$
  neboť pro $x \in U$, $f|_U = 0$ a $\beta|_x = 1$ (support U), kdy je $f\beta = 0$ všude.
  Pak derivace
  $0 = a[f\beta]_x = fa[\beta]|_x + \beta a[f]|_x = a[f]$.
  a pro $f = C \overset{\text{BÚNO}}{=} 1$: $a[1] = a[1^2] = 2a[1] \implies a[1] = 0$.

2. Derivace složené funkce

$$a[f] = \sum_l \frac{\partial F}{\partial f_l}_{(f_1,...,f_k)} a[f_l]$$

už plyne z definice.

D: Tečný prostor $\mathbf{T}_x M$

$\mathbf{T}_x M$ je prostor všech derivací $\mathcal{F}M$ v x. Je inherentně lineární struktura z definice $a[\,]$.

D: Tečný bandl $\mathbf{T}\,M$

$\mathbf{T}\,M = \bigcup_{x\in M} \mathbf{T}_x M$. Jakožto soubor tečný prostorů ve všech bodech M.

Pokud byly mapy kompatibilní na M tak budou i na $\mathbf{T}\,M$.
Tvoří diferencovatelnou varietu, protože lze opět popsat souřadnicově a mapy jsou kompatibilní.
Souřadnice x^i akorát rozšíříme o $a[x^i] = a^i$ na $x_* := [x^i, a^i]$.
Neboli pro mapu (U, X) na M dostáváme mapu $(\mathbf{T}\,U, x_*)$ na $\mathbf{T}\,M$.

D: Kotečný prostor $\mathbf{T}^*_x M$

$\mathbf{T}^*_x M$ definujeme jako duální prostor k $\mathbf{T}_x M$, tj. pro

$$\alpha \in \mathbf{T}^*_x M : \alpha[a] \equiv a[\alpha] \equiv \langle \alpha; a\rangle \equiv \alpha \cdot a$$

Hovoříme o duální bázi prostoru jako bázi e^i generující $\mathbf{T}^*_x M$, pokud pro bázi e_i generující $\mathbf{T}_x M$:
$e^i \cdot e_j = \delta^i_j$.

Vlastnosti

- df:
  Užitečný příklad prvku kotečného prostoru je *gradient*. 1-forma $\mathrm{d}f$ jakožto $a[f] = a \cdot df$.

1. $d(f+g) = df + dg$
2. $d(rf) = r\ df$
3. $d(fg) = \ df\ g + f\ dg$
   $f = F(f_1, \dots, f_k)$
4. $df = \sum_l \partial_{f_l} F(\dots)\ df_l$

- souřadnice
  báze v $\mathbf{T}\,M : \partial_{x^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$
  báze v $\mathbf{T}^*M :\ dx^i$
  pak souřadnice v dané bázi

1. $a^i = a \cdot dx^i$
2. $\alpha_j = \alpha \cdot \partial_{x^j}$

- Transformace souřadnic

1. $dx^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} \, dx^l$
2. $\partial_{x^{k'}} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \partial_{x^l}$.

- Poznámky:

1. Varietu lze obecně rozšiřovat o další struktury (VP) tzv. fibrované prostory.
2. Jiné podobné algebraické struktury jsou Okruhy, kde se vypouští požadavek existence inverze mimo 0. ”tečnou strukturou” jsou moduly.

(Ko)Vektorová Pole

Vektorová pole a pole forem

D: Prostor vektorových polí $\mathcal{T}M$

Prostor vektorových polí a, které jsou zobrazení $a : M \to \mathbf{T}M$. (Lze uvažovat jako řez bandlů)

D: Prostor kovektorových polí $\mathcal{T}^*M$

Prostor kovektorových polí α, které jsou zobrazení $\alpha : M \to \mathbf{T}^*M$.

Poznámky:

- Obě zobrazení jsou hladké pakliže jsou komponenty hladké.
- $\mathcal{T}M$ a $\mathcal{T}^*M$ jsou "reflexivní" neboli duální.
- $\mathcal{T}M$ a $\mathcal{T}^*M$ jsou moduly nad okruhem $\mathcal{F}M$, tehdy se mluví o $\mathcal{F}M$-linearitě (Těleso: "skaláry" jsou funkce).
- Reflexivita má za důsledek předvídatelnou vlastnost:

$$
\begin{aligned}
m : \mathcal{T}^*M &\to \mathcal{F}M \\
\mu : \mathcal{T}M &\to \mathcal{F}M
\end{aligned}
$$

  obě $\mathcal{F}M$-lineární. $fm[\alpha + \beta] = m[f\alpha] + m[f\beta]$, Pak z reflexivity.: $m \in \mathcal{T}M, \mu \in \mathcal{T}^*M$.

D: Derivace na okruhu $\mathcal{F}M$

Zobrazení $a : \mathcal{F}M \to \mathcal{F}M$, splňující:

$$
\begin{aligned}
a[f+g] &= a[f] + a[g] \\
a[rf] &= ra[f] \\
a[fg] &= fa[g] + a[f]\; g
\end{aligned}
$$

(takové zobrazení je ekvivalentní vektorovému poli na M, pak $a[f]|_x$ určuje derivaci v x $a|_x \in \mathbf{T}_xM$)

D: Lieova závorka

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \to \mathcal{T}M$$

Působení závorky porozumíme aplikace na funkcích.

$$\big[a, b\big][f] = a\big[b[f]\big] - b\big[a[f]\big]$$

$$\big[a, b\big][fg] = a\big[b[f]g\big] + fa\big[b[g]\big] - b\big[a[f]g\big] - b\big[fa[g]\big] = f\big[a, b\big][g] + \big[a, b\big][.$$

Vidíme, že splňuje definici derivace, zde na $\mathcal{F}M$.

Vlastnosti:

- $[a, b] = -[b, a]$
- $[a, fb] = f[a, b] + a[g]b$
- $[fa, b] = f[a, b] - b[f]a$
- $\big[a, [b, c]\big] + \big[b, [c, a]\big] + \big[c, [a, b]\big] = 0$

D: Holonomní báze

Hovoříme o bázi e_j jako o holonomní, pokud $\exists x^j : e_j = \partial_{x^j}$.

D: $\mathbf{T}\, M$ a Paralizovatelnost

$\mathbf{T}\, M$ je paralizovatelná $\iff$ $\exists$ globální báze

Tenzory

Tenzory

konstruovat lze opět různými způsoby. Skrze tenzorový součin VP. Nebo jako univerzální lineární zobrazení.

D: Tenzor

Pro $V_1, V_2, \dots, V_k$ VP nad $\mathbb{K}$, konstruujeme tenzorovým součinem

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k$$

prostor, kterému rozumíme, jako volné násobení prvků z V_i vymezené na podprostor daný pravidly:

$$\begin{aligned} [1, \dots, rj, \dots, k] &= r[1, \dots, j, \dots, k] \\ [1, \dots, j + l, \dots, k] &= [1, \dots, j, \dots, k] + [1, \dots, l, \dots, k] \end{aligned}$$

Tenzorový součin obecně nekomutuje, je třeba hlídat třeba pomocí abstraktních indexů $\underline{a}$, pro další použití indexy nebudeme podtrhávat, pokud je nebude nutné odlišit. Příklad:

$$(u \otimes v \otimes \phi)^{abA} = u^a \otimes v^b \otimes \phi^A \in V \times V \times U$$

D: Tenzory typu (K,L) nad V

$$V^K_L := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{K} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{L}$$

horními indexy označujeme objekty chápané jako vektory, dolními pak kovektory.

Operace na tenzorech

Lineární operace je dána akcí na součinových tenzorech.

- **Úžení** $\alpha \cdot \mathbf{a} : V \times V^* \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{C}^j_i : V^K_L \to V^{K-1}_{L-1}$$

akce:
$C^j_i a_1 \dots a_j \dots a_k \alpha^1 \dots \alpha^i \dots \alpha^L = (a_j \cdot \alpha^i) a_1 \dots \cancel{a_j} \dots a_k \alpha^1 \dots \cancel{\alpha^i} \dots$

- **Stopa** : $A^k_k =: \mathrm{Tr}[A]$
- **Algebraické operátory** :

$$\begin{aligned} A : V \to V \\ b^k &= A^k_l a^l \\ b &= A \cdot a \end{aligned}$$

- **Identita** : δ^m_n
- **Permutace na** V^K :

$$P_\sigma : V^K \to V^K$$

akce: $P_\sigma(u_1 \dots u_k) = u_{\sigma_1 \dots \sigma_K}$
je jedno jestli permutujeme číslování u_i nebo abstraktní indexy.

- **Symetrizace** :

$$\mathscr{S} T = \frac{1}{k!} \sum_\sigma P_\sigma T$$

akce: $(\mathscr{S} T)^{a_1 \dots a_k} = T^{(a_1 \dots a_k)}$

- **Antisymetrizace** :

$$\mathscr{A} T = \frac{1}{k!} \sum_\sigma \mathrm{sign}[\sigma] P_\sigma T$$

akce: $(\mathscr{A} T)^{a_1 \dots a_k} = T^{[a_1 \dots a_k]}$

Prostor antisymetrických tenzorů $V^{[K]} \subset V^K$

$$A \in V^{[K]} \iff \mathscr{A} A = A$$

identitu zde definujeme jako:

$$\begin{aligned} {}^{[K]}\delta &\in V_{[K]} \otimes V^{[K]} \\ {}^{[K]}\delta^{b_1 \dots b_K}_{a_1 \dots a_K} &= \delta^{[b_1}_{a_1} \otimes \dots \otimes \delta^{b_K]}_{a_K} \end{aligned}$$

Tato identita je projektorem na $V^{[K]}$. tj. obecný tenzor antisymetrizuje.

Komponenty (souřadnice) Tenzorů

Vyjádřením tenzoru v nějaké bázi $V \mid e_k$, resp. $V^* \mid e^k,\ k = 1, \ldots, d$. Obdržíme komponenty tenzoru v dané bázi. $V^K_L \mid e_{m_1} \ldots e_{m_K} e^{n_1} \ldots e^{n_L}$.

$$T = T^{a^1 \ldots a^K}_{b^1 \ldots b^L} e_{a^1} \cdots e_{a^K} e^{b^1} \cdots e^{b^L}$$

pokud bychom Tenzor vypsali pomocí abstraktních indexů (musíme rozlišit souřadnice a abstraktní indexy). Souřadnice získáme jako:

$$T^{m_1 \ldots m_K}_{n_1 \ldots n_L} = T^{\underline{c}_1 \cdots \underline{c}_K}_{\underline{\gamma}_1 \cdots \underline{\gamma}_L} e^{\underline{\gamma}_1}_{n_1} \cdots e^{\underline{\gamma}_L}_{n_L} e^{m_1}_{\underline{c}_1} \cdots e^{m_K}_{\underline{c}_K}.$$

Transformace v komponentách (souřadnicích)

Dvě různé komponentové báze rozlišíme čárkováním indexů.

$$e_{k'} = M^l_{k'} e_l$$

Transformace souřadnic tenzoru je pak z linearity analogická:

$$T^{m'_1 \ldots m'_K}_{n'_1 \ldots n'_L} = T^{a_1 \ldots a_K}_{b_1 \ldots b_L} M^{m'_1}_{a_1} \cdots M^{m'_k}_{a_k} M^{b_1}_{n'_1} \cdots M^{b_L}_{n'_L}$$

speciálně lze vidět, jak se vypadají identity v různých souřadnicových bázích a jako přechodové.

$$\delta^l_m e_l e^m = M^l_{k'} e_l e^{k'} = \delta^l_{k'} e_l e^{k'}$$

tedy $\delta^l_{k'} = \delta^{\underline{c}}_{\underline{d}} e^l_{\underline{c}}\ e^{\underline{d}}_{k'} = e^l \cdot e_{k'}$

D: Tenzory jako lineární zobrazení

$$l : V^{K_1}_{L_1} \times V^{K_2}_{L_2} \times \cdots \to V^K_L$$

(Velkým písmenem označíme kombo index)

$$l^{\underline{A}}(T_1, T_2, \ldots) = L^{\underline{A}}_{\underline{A}_1 \underline{A}_2 \ldots} T_1^{\underline{A}_1} T_2^{\underline{A}_2} \cdots$$

každé lineární zobrazení lze zadat tenzorem, příklad:

$$l : V \times V^1_2 \to V^*$$

$$l_{\underline{a}}(u, A) = L^{\underline{mn}}_{\underline{apq}}\ u^{\underline{p}}\ A^{\underline{q}}_{\underline{mn}}$$

v souřadnicové bázi:

$$\begin{aligned} e^{\underline{a}}_a \, l_{\underline{a}}(u, A) &= u^p \, A^q_{mn} \, e^{\underline{a}}_a \, l_{\underline{a}}(e_p, e_q, e^m, e^n) \\ &= u^p \, A^q_{mn} \, L^{mn}_{apq} \end{aligned}$$

Můžeme definovat *multilineární* zobrazení

$$A : V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}$$

jako

$$A(a_1, \ldots a_K, \alpha^1, \ldots \alpha^L) := A^{\underline{n}_1 \cdots \underline{n}_L}_{\underline{m}_1 \cdots \underline{m}_K} \, a^{\underline{m}_1}_1 \ldots a^{\underline{m}_K}_K \, \alpha^1_{\underline{n}_1} \ldots \alpha^L_{\underline{n}_L}$$

Tenzorová pole

Tenzorová pole

D: Tenzorové pole typu (K, L)

$\mathcal{T}_L^K M$ je prostor tečných bandlů. Řez tímto prostorem $\mathbf{T}_L^K M$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_L^K M \ni A : M &\to \mathbf{T}_L^K M \\ x &\mapsto A(x) \in \mathbf{T}_x{}_L^K M\end{aligned}$$

Je to speciální tenzorový součin $\mathcal{F}M$ modulů. $f(x) A^{\underline{m}\cdots}_{\underline{n}\cdots}(x)$ je lokální.

D: Tenzorové pole jako univerzální $\mathcal{F}M$-lineární zobrazení

$$l : \mathcal{T}_{L_1}^{K_1} M \times \mathcal{T}_{L_2}^{K_2} M \times \cdots \to \mathcal{T}_L^K M$$

a je ultra-lokální

$$l(\ldots, f\mathbf{A}, \ldots) = f l(\ldots, A, \ldots)$$

Toto zobrazení, lze reprezentovat tenzorovým polem

$$l^{\underline{A}}(T_1, T_2, \ldots)(x) = L^{\underline{A}}_{\underline{A}_1 \underline{A}_2}(x)\; T_1^{\underline{A}_1}(x)\; T_2^{\underline{A}_2}(x) \cdots$$

(jelikož lze reprezentovat tenzorovým polem, je vlastnost zděděná z lineárních prostorů)

D: D Tenzorová derivace

Zobrazení $\mathbf{D} : \mathcal{T}_L^K M \to \mathcal{T}_L^K M$ splňující

- $\mathbf{D}(A + B) = \mathbf{D}A + \mathbf{D}A$
- $\mathbf{D}(AB) = (\mathbf{D}A)B + A(\mathbf{D}B)$
- $\mathbf{D}(\mathrm{C}A) = \mathrm{C}\mathbf{D}A$
  (není jednoznačná)

Zobecněná tenzorová derivace
$\mathbf{D} : \mathcal{T}_L^K M \to \mathcal{T}_{L+Q}^{K+P} M$

$$\mathbf{D}^{\underline{p}\dots}_{\underline{q}\dots} A^{\underline{a}\dots}_{\underline{b}\dots}$$

$$\mathbf{D}_T = T^{\underline{q}\dots}_{\underline{p}\dots}\ \mathbf{D}^{\underline{p}\dots}_{\underline{q}\dots}$$

Lemma: Restrikce $\mathbf{D}$ na $\mathcal{F}M$

Restrikce derivace D na modul $\mathcal{F}M$ je dána $\mathbf{D}f = a[f] = a \cdot \mathrm{d}f$

Věta: $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}$ shodnost na $\mathcal{F}M$ a $\mathcal{T}M$

Pokud jsou derivace D_1 a D_2 stejné na $\mathcal{F}M$ a $\mathcal{T}M$, pak musí být stejné i pro tenzory.

D: Pseudoderivace $\mathbf{M}$

- $\mathbf{M}$ je derivace
- $\mathbf{M}f = 0;\quad \forall f \in \mathcal{F}M$
  (ultralokální, neboť: $\mathbf{M}(fA) = \cancelto{0}{(\mathbf{M}f)} + f\mathbf{M}A$)

Poznámka.: Pseudoderivace jsou později nástrojem měření nekomutativity derivací.

lemma: $\mathbf{M}$ je dána akcí na $\mathcal{T}M$

Pseudoderivace $\mathbf{M}$. Pak $\mathbf{M}a^{\underline{m}} = M^{\underline{m}}_{\underline{a}} a^{\underline{a}}$ díky $\mathcal{F}M$-linearitě lze vyjádřit tenzorem. Víme, že

$$0 = \mathbf{M}(\alpha_{\underline{m}} a^{\underline{m}}) = (\mathbf{M}\alpha_{\underline{n}})a^{\underline{n}} + \alpha_{\underline{n}}(\mathbf{M}a^{\underline{n}}) = (\mathbf{M}\alpha_{\underline{n}})a^{\underline{n}} + \alpha_{\underline{n}}\ M^{\underline{n}}_{\underline{m}} a^{\underline{m}}$$

tedy na kovektorech už nutně působí jako:

$$\mathbf{M}\alpha_{\underline{n}} = -M^{\underline{m}}_{\underline{n}} \alpha_{\underline{m}}$$

Na tenzor tedy působí jako

$$\mathbf{M}T^{\underline{m}\underline{n}}_{\underline{k}\underline{l}} = M^{\underline{m}}_{\underline{p}}\ T^{\underline{p}\underline{n}\dots}_{\underline{k}\underline{l}\dots} + \dots - M^{\underline{q}}_{\underline{k}}\ T^{\underline{m}\underline{n}\dots}_{\underline{q}\underline{l}\dots} - \dots$$

Věta: $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}$ shodnost na $\mathcal{F}M$

implikuje, že jsou si derivace rovny až a pseudoderivaci $\mathbf{D_2} - \mathbf{D_1} = \mathbf{M}$

D: Transformace $\mathbf{G}$

$\mathcal{F}M$-lineární nedegenerovanou transformaci na $\mathcal{T}M$.

$$(\mathbf{G}a)^{\underline{m}} = G^{\underline{m}}_{\underline{n}} a^{\underline{n}}$$

na tenzorech tedy:

$$(\mathbf{G}T)^{\underline{a}\underline{b}}_{\underline{c}\underline{d}} = G^{\underline{a}}_{\underline{m}}\; G^{\underline{b}}_{\underline{n}} \dots \; G^{-1}{}^{\underline{k}}_{\underline{c}}\; G^{-1}{}^{\underline{l}}_{\underline{d}}\; T^{\underline{m}\underline{n}}_{\underline{k}\underline{l}}$$

- $\mathbf{G}$ komutuje s $\otimes$: $\mathbf{G}(a^{\underline{n}} b^{\underline{m}}) = (\mathbf{G}a^{\underline{n}})(\mathbf{G}b^{\underline{m}})$
- $\mathbf{G}$ komutuje s C pak
  $a^{\underline{m}} \alpha_{\underline{m}} \overset{!}{=} \mathbf{G}(a^{\underline{m}} \alpha_{\underline{m}}) = (G^{\underline{m}}_{\underline{l}} a^{\underline{l}})(\tilde{G}^{\underline{k}}_{\underline{m}} \alpha_{\underline{k}}) \implies \tilde{G} = G^{-1}$
  infinitesimální rozvoj transformace:

$$(\mathbf{G}_\varepsilon T)^{\underline{a}\underline{b}\dots}_{\underline{c}\underline{d}\dots} = T^{\underline{a}\underline{b}\dots}_{\underline{c}\underline{d}\dots} + \varepsilon \Big[M^{\underline{a}}_{\underline{m}}\; T^{\underline{m}\underline{b}\dots}_{\underline{c}\underline{d}\dots} + M^{\underline{b}}_{\underline{m}}\; T^{\underline{a}\underline{m}\dots}_{\underline{c}\underline{d}\dots} + \dots - M^{\underline{m}}_{\underline{d}}\; T^{\underline{a}\underline{b}\dots}_{\underline{c}\underline{m}\dots} -$$

Uzavřené a Exaktní Formy

Uzavřené a exaktní formy

D: Uzavřená a Exaktní forma

ω je uzavřená $\iff$ $\mathrm{d}\omega = 0$; Prostor *uzavřených* $\mathcal{A}_c^P M = \mathrm{Ker}[\mathrm{d}]$
ω je exaktní $\iff$ $\exists\sigma : \omega =$ $\mathrm{d}\sigma$; Prostor *exaktních* $\mathcal{A}_e^P M = \mathrm{Img}[\mathrm{d}]$

přirozeně *exaktní* $\implies$ *uzavřená*

D: de Rhamova kohomologie

$\mathcal{H}^P(M) = \mathcal{A}_c^P M / \mathcal{A}_e^P M$
neboli pro ω formy je to třída ekvivalence(ω), invariantní vůči přičtení exaktních forem $\mathrm{d}\sigma$: $(\omega) = \omega + \mathrm{d}\sigma$

D: Bettiho číslo

Dimenze de Rhamovy kohomologie. $b^p(M) = \dim(H^P(M))$.
Taky představuje maximální počet řezů (dané dimenze p), které je třeba provést, abychom varietu rozsekali na 2 kusy.

Má souvislost s *Eulerovou charakteristikou:* $\chi(M) := \sum_{p=0,\ldots,d} (-1)^p \; b^p(M)$
.

Lemma: Poincarého lemma

pro topologicky triviální varietu M (bez děr) platí:
ω uzavřená $\implies$ ω exaktní. Tj. Betti $= 1 = b^0(M);\; b^p(M) = 0,\; p > 0$.

Příklady:

- S^n má $b^n = b^0 = 1$.
- T^2 má $b^0 = 1, b^1 = 2, b^2 = 1$
  (lze interpretovat jako: b^0 : $\#$ spojitých komponent, b^1 : $\#$ kruhových smyček (1D), b^2 : $\#$kruhových děr (2D), etc...)

Holonomie báze

(i) e_k je holonomní, tj. $\exists x^k : e_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$

$\iff$

(ii) e^k jsou exaktní, tj. $\exists x^k : e^k = \mathrm{d}x^k$

$\iff$

(iii) $\mathrm{d}e^k = 0, \forall k$ na topologicky triviální oblasti.

$\iff$

(iv) $[e_k; e_l] = 0, \forall k, l$

DK: (iii) $\iff$ (iv) nejméně triviální:
Uvažme Cartanův vzorec

$$\begin{aligned} e_k \cdot \mathrm{d}e^m \cdot e_l &= e_k \cdot\ \mathrm{d}(e^m \cdot e_l) -\ \mathrm{d}(e_k \cdot e^m) \cdot e_l - [e_k; e_l] \cdot e^m \\ &= 0 - 0 - [e_k; e_l] \cdot e^m \end{aligned}$$

$\mathrm{d}e^m = 0 \quad \iff \quad [e_k; e_l] = 0$ pro všechna m.

Indukovaná Zobrazení

Indukovaná zobrazení

Jako zobrazení akcí při mapovaní mezi varietami obecných dimenzí.

$\phi : M \to N$,
takové, že zobrazení je hladké na $\mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$.

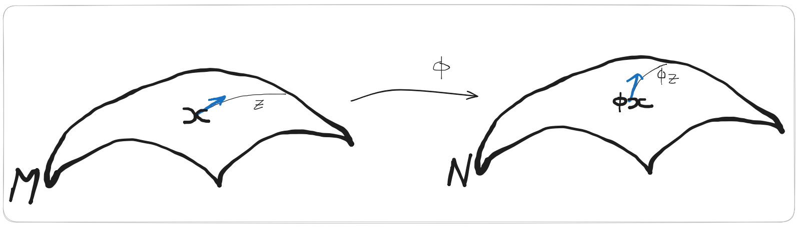
D: Pull-back funkce

$\phi^* : \mathcal{F}N \to \mathcal{F}M$

$$(\phi^* f)_{(x)} = f(\phi x)$$

D: Push-forward vektoru

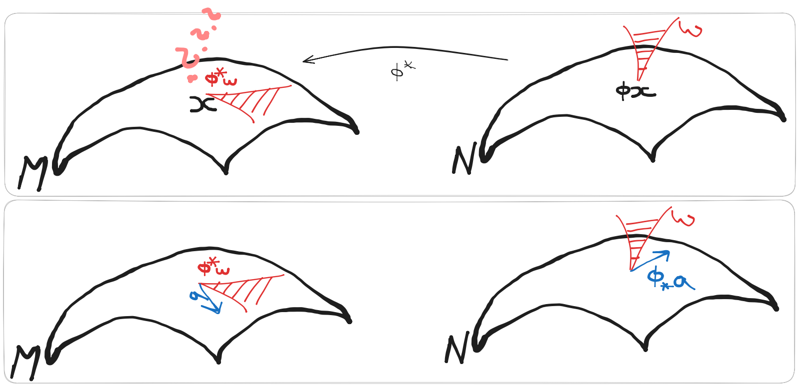
$\phi_* : \mathbf{T}_x M \to \mathbf{T}_{\phi x} N$



$$\phi_* \frac{Dz}{\partial t} = \frac{D\phi z}{\partial t}$$

D: Pull-back kovektorů

$\phi^* : \mathbf{T}^*_{\phi x} N \to \mathbf{T}^*_x M$



$\phi^*\omega \cdot a \overset{!}{=} \omega \cdot \phi_* a$

Definované z akce na vektorech, tj. využitím duality.

Příklady k rozmyšlení:

- $(\phi_* a)|_{\phi x}(f) = a|_x(\phi^* f)$
- $\phi^*(\mathrm{d} f) = d(\phi^* f)$

Push-forward je lineární operace

$\phi_*(a + rb) = \phi_* a + r\phi_* b, \quad r \in \mathbb{R}$.
$\phi^*(\alpha + r\beta) = \phi^* \alpha + r\phi^* \beta$
A tedy ji lze reprezentovat nějakým tenzorem (rozlišujeme abstraktní indexy na varietách $\sim$):

$$(\phi_* a)^{\underline{\tilde{m}}} = (D\phi)^{\tilde{m}}_{\underline{n}} a^{\underline{n}}$$
$$(\phi^* \alpha)_{\underline{\tilde{n}}} = (D\phi)^{\tilde{m}}_{\underline{n}} \alpha_{\underline{\underline{m}}}$$

Tento $D\phi$ tenzor nazýváme diferenciál zobrazení.
!! Nelze obecně dělat push-forward a pull-back na obecných tenzorech, nejde to kombinovat obecně.
Lze to pro diffeomorfizmy !!

D: Diffeomorfizmy

1-1 značné zobrazení. $\phi \quad \phi^{-1}$.
Pro ně můžeme definovat push-forward pro kovektory jako inverzi pull-backu.
$\phi_* \alpha := \phi^{-1*} \alpha$, kde $\alpha \in \mathbf{T}^* M$

Speciálně:

1. v 1D, kdy $M \to \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$.
   $\mathrm{D} f = \mathrm{d} f \frac{\partial}{\partial \tau}$, je pak ekvivalentní gradientu.
2. křivka, kdy $\mathbb{R} \to N$
   $\mathrm{D} z = \mathrm{d}\tau \frac{Dz}{\partial \tau}$, je pak ekvivalentní tečnému vektoru ke křivce.

Tenzor můžeme vyjádřit v souřadnicích po zúžení s duální bází

$$\mathrm{D}\phi \in \mathbf{T}^* M \otimes \mathbf{T} N$$
$$x \in M \quad y \in N$$

$$\mathrm{D}\phi = \frac{\partial \bar{\phi}^{\tilde{k}}}{\partial x^l}\ \mathrm{d}x^l \frac{\partial}{\partial y_{\tilde{k}}},$$

kde je $\bar{\phi}$ známé značení pro vyjádření na $\mathbb{R}$ prostorech. $\bar{\phi} = y \circ \phi \circ x^{-1}$.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}\phi)^{\tilde{k}}_l &= \mathrm{d}y^{\tilde{k}} \cdot \mathrm{D}\phi \cdot \frac{\partial}{\partial x^l} \\
&\overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}y^{\tilde{k}} \cdot \phi_* \frac{\partial}{\partial x^l} \\
&\overset{\text{def}}{=} \left[\phi_* \frac{\partial}{\partial x^l}\right] y^{\tilde{k}} \qquad \overset{\text{neformálně}}{=} \frac{\partial y^{\tilde{k}}}{\partial x^l} = \frac{\partial \bar{\phi}^{\tilde{k}}}{\partial x^l}
\end{aligned}$$

neboli k získání souřadnic tenzoru, děláme parciální derivaci $y^{\tilde{k}} = \bar{\phi}^{\tilde{k}}(x^1, \ldots, x^m)$.

Takto jsme se zatím bavili pouze o lokálně, ale jelikož to můžeme udělat v každém bodě, můžeme to zobecnit na pole.

Indukovaná zobrazení na polích

(reminder: funkce $\phi^* : \mathcal{F}N \to \mathcal{F}M$)
Formy $\phi^* : \mathcal{T}^0_p N \to \mathcal{T}^0_p M$

$$(\phi^* \tilde{\omega})_{(x)} := \phi^*(\tilde{\omega}_{(\phi x)})$$

Lemma pro funkce s push-forwardem $\phi_* \mathrm{d}\ f = \mathrm{d}\ \phi^* f$. To ale neplatí pro push-forward obecně na tenzorech, protože push-forwardem neumím působit na funkce (souřadnice)!!! Opět zachrání diffeomorfizmy: ϕ, ϕ^{-1}.

$$(\phi_* A)_{(\phi x)} := \phi_*(A_{(x)})$$

ale na to jsem využil tu inverzi.

Vlastnosti push-forwardu pro pole:

- $\phi_*(A + rB) = \phi_* A + r\phi_* B$
- $\phi_*(A \otimes B) = \phi_* A \otimes \phi_* B$
- $\phi_* \mathrm{C}\ A = \mathrm{C}\ \phi_* A$

Příklady na rozmyšlení:

- $a[\phi^* \tilde{f}] = \phi^*((\phi_* a)[\tilde{f}])$
  pro diffeomorfizmy ekvivalentní
- $\phi_*(a[\phi^* \tilde{f}]) = (\phi_* a)[\tilde{f}]$
- $\phi_*(a[f]) = (\phi_* a)[\phi_* f]$
  (páč $(\phi_* a)[\phi^{-1*} f] = (\phi_* a)[\phi_* f]$)
- $\phi_*[a; b] = [\phi_* a; \phi_* b]$ lze takhle push-forwardit lie závorku
  Dk:

$$\begin{aligned}
\phi^* \left([\phi_*[a;b]]\, \tilde{f} \right) &= [a;b] \phi^* \tilde{f} = a[b[\phi^* \tilde{f}]] - b[a[\phi^* \tilde{f}]] = a \left[\phi^* \left((\phi_* b)[\tilde{f}] \right) \right] \\
&= \phi^* \left((\phi_* a) \left[(\phi_* b)\, \tilde{f} \right] \right) - \phi^* \left((\phi_* b) \left[(\phi_* a)\, \tilde{f} \right] \right) \\
&= \phi^* \left([\phi_* a; \phi_* b]\, \tilde{f} \right)
\end{aligned}$$

Podvarieta a Tečné Distribuce

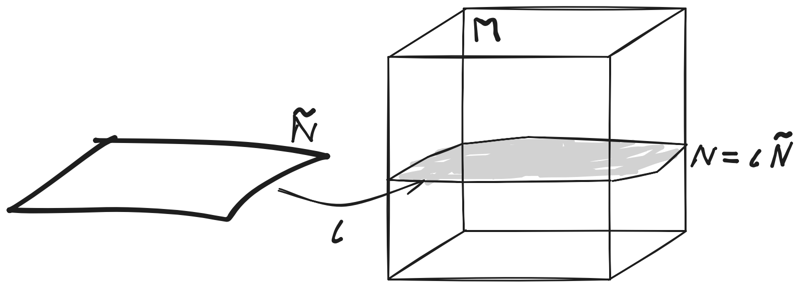
Podvarieta a tečné distribuce

Podvarieta

D: Podvarieta dimenze $n \leq m$

Zobrazení
$\iota : \tilde{N} \to M$ je lokálně prosté když

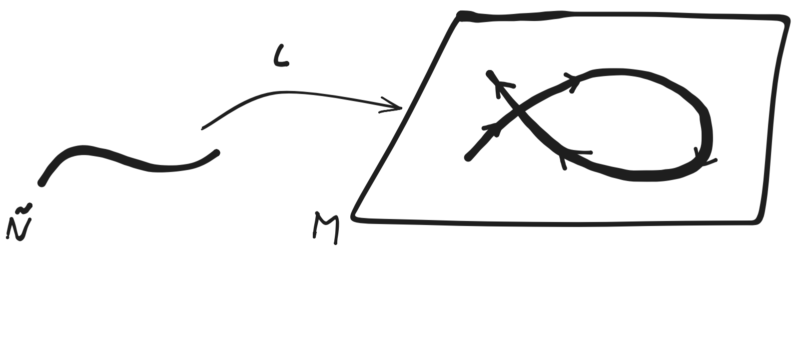
- ι_* push-forward je prostý (nedegeneruje směry)



 ($\iota \tilde{N} = N$)

D: Vnoření a vložení

Vnoření je ι lokálně prosté zobrazení.
Vložení je ι prosté zobrazení.



(není vložení, jen vnoření)

D: Přizpůsobené souřadnice

$\tilde{N}\ y^i\ i = 1, \ldots, n\,;\ M\ x^a\ a = 1, \ldots, m$
pak přizpůsobenými souřadnicemi myslíme souřadnice M, které

$$\begin{aligned} y^i &= x^i, \qquad i = 1, \ldots, n \\ \text{konst.} &= x^p, \qquad p = n+1, \ldots, m \end{aligned}$$

D: Tečné struktury

…k podvarietě a normálové kovektory.

Tečné vektory k N

(tj. ta už v M)

$$\iota_* : \mathbf{T}_{\tilde{x}}\tilde{N} \to \mathbf{T}_x N \subset \mathbf{T}_x M$$

Restrikce formy

(!!$\mathbf{T}_x N \subset \mathbf{T}_x M$. To samé **nelze** říct o kovektorech, neboť ty jsou definované akcí na obecně větším počtu vektorů než je na N!!) Na formy jdeme obecně z druhé strany a děláme jejich restrikci.

$$\iota^* : \mathbf{T}^*_x M \to \mathbf{T}^*_{\tilde{x}}\tilde{N}$$

ozn. $\omega|_N = \iota^*\omega$

Normálové kovektory

$\omega \in \mathbf{N}^*_x N \subset \mathbf{T}^*_x M \iff \omega|_N = 0.$

Intuitivně rozumíme, že objekty z $\mathbf{N}^*_x N$ jsou v jakém si smyslu „paralelní” s $\mathbf{T}_x M$, neboli že kontrakce dá 0.
Dualita $\mathbf{T}_x M$ a $\mathbf{N}^*_x N$:

$$\begin{aligned} \omega \in \mathbf{N}^*_x N &\iff \forall a \in \mathbf{T}_x N : \omega \bullet a = 0 \\ &\text{nebo opačně} \\ a \in \mathbf{T}_x N &\iff \forall \omega \in \mathbf{N}^*_x N : \omega \bullet a = 0 \end{aligned}$$

Tečné struktury v souřadnicích:

Pro prvek z originální $\mathbf{T}\tilde{N} \ni \tilde{a}$, který má souřadnice: $\tilde{a} = a^i \frac{\partial}{\partial y^i}$. Můžeme push-forwardem
$a = \iota_* \tilde{a} \in \mathbf{T}N$, přiřadit přizpůsobené souřadnice $a = \sum_i^n a^i \partial_{x^i}$.

Pro prvek z cílové $\mathbf{T}^* M \ni \omega$, která je v souřadnicích: $\omega = \omega_a \, \mathrm{d}x^a$. Můžeme restrikcí formy, tj. pull-backem
$\iota^* \omega = \omega|_N = \tilde{\omega} \in \mathbf{T}^* \tilde{N}$, přiřadit $\tilde{\omega} = \sum_i^p \omega_i \, \mathrm{d}y^i$. Normální kovektory budou právě ty, které chybí:

$$\omega \in \mathbf{N}^* N \quad \omega = \sum_{p=n+1}^{m} \omega_p \, \mathrm{d}x^p$$

Distribuce

D: Δ je Distribuce (...podprostorů tečných vektorů dim n)

Soubor podprostorů $\Delta_x \subset \mathbf{T}_x M : \forall x \in M$, dim $\Delta_x = n$.
Je generovaná hladkými vektorovými poli $a_j \in \mathcal{T}M$, $j = 1, \dots, n$. (není nutné celé $\mathcal{T}M$ ale i na okolí každého bodu.)
Říkáme, že $a \in \mathcal{T}M$ patří do Δ, když $\forall x : a|_x \in \Delta_x$.

D: Δ^* je Kodistribuce (...podprostorů normálových kovektorů dim $m - n$)

Soubor podprostorů $\Delta^*_x \subset \mathbf{T}^*_x M : \forall x \in M$, dim $\Delta^*_x = m - n$.
Je generovaná hladkými poli $\alpha^p \in \mathcal{T}^* M, p = n + 1, \dots, m$ (opět obecně ne nutně celý prostor kovektorových polí.)
Říkáme, že $\alpha \in \mathcal{T}^* M$ patří do Δ^* když $\forall x : \alpha|_x \in \Delta^*_x$.

D: Δ a Δ^* jsou komplementární

pokud dim $\Delta = n$, dim $\Delta^* = m - n$.
Pak pro
$\forall a \in \Delta_x, \forall \alpha \in \Delta^*_x : a \cdot \alpha = 0$, platí:

$a \in \Delta \iff \forall \alpha \in \Delta^* : \alpha \cdot a = 0$ a
$\alpha \in \Delta^* \iff \forall a \in \Delta : \alpha \cdot a = 0.$
Odteď už uvažujeme jen komplementární.

D: Nulovost restrikce formy $\omega \in \mathcal{T}_k^0 M$

Restrikce formy na Δ znamená a je nulová když:

$$\forall a^1, \ldots, a^k \in \Delta : \omega(a^1, \ldots, a^k) = 0 \iff \omega|_\Delta = 0$$

pozn.: jde to s formou jde to s kovektorem.

D: Involutivita Δ

Pakliže $[\Delta; \Delta] = \Delta$
přesněji $\forall a, b \in \Delta : [a; b] \in \Delta,$
ještě přesněji pomocí generátorů $[a_i; a_j] = \sum_j^n f_{ii'}^j a_j$.

D: Δ^* je diferenciální

pokud $\forall \alpha \in \Delta^* : (\mathrm{d}\alpha)|_\Delta = 0.$

Přesněji lze $\mathrm{d}\alpha^p$ zapsat v $\mathrm{d}\alpha^p = \sum_{q=n+1}^m \theta_q^p \wedge \alpha^q$, kde mi p, q pouze číslují konkrétní formy z $\mathcal{T}^* M$.
θ jsou obecné jakékoliv 1-formy, lze tedy $\mathrm{d}\alpha^p$ vyjádřit pomocí θ jako kombinací souboru forem vně Δ^* (α^q).

Komentář: Tedy Takto určené formy α^p, které patří do Δ^* , mají vnější derivaci, která lze zapsat jako lineární kombinace α^q ležící mimo Δ^*, proto derivace mizí na vektorových polích z Δ: $\theta_q^p \wedge \alpha^q$ 2-forma – a tedy Δ^* je diferenciální systém.

Věta: Δ je involutivní $\iff$ Δ^* je diferenciální

Dk:
Δ^* je diferenciální tedy $(\mathrm{d}\alpha^p)|_\Delta = 0$, jinak řečeno to je když pro $a_i, a_j \in \Delta : 0 \overset{!}{=} a_i \cdot \mathrm{d}\alpha^p \cdot a_j$

Dk: Použitím Cartanova vzorce:

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} a_i \cdot \mathrm{d}\alpha^p \cdot a_j \\
&= a_i \cdot \mathrm{d}(\alpha^p \cdot a_j) - \mathrm{d}(a_i \cdot \alpha^p) \cdot a_j - [a_i; a_j] \cdot \alpha^p \\
&= 0 - 0 - [a_i; a_j] \cdot \alpha^p
\end{aligned}
$$

ale $\alpha^p \in \Delta^*$, tedy $[a_i; a_j] \in \Delta$, takže je Δ involutivní.

D: N integrabilní podvarieta

N je **integrabilní podvarieta** pokud:
$\forall x \in N; a \in \Delta_x \iff a \in \mathbf{T}_x N$
ekvivalentně definováno pomocí kodistribucí
$\alpha \in \Delta_x^* \iff \alpha \in \mathbf{N}_x^* N$, tj. $\Delta_x^* = \mathbf{N}_x N, \forall x \in N$.

D: Δ^*, Δ integrabilní

Distribuce jsou **integrabilní** pokud každým $x \in M$ prochází nějaká integrabilní podvarieta.
komentář: pro soubor (ko)vektorů v každém x, tj. distribuci, existuje integrabilní podvarieta. Distribuce jsou si stále komplementární

Věta: Δ, Δ^* jsou integrabilní

$\iff \quad \exists$ souřadnice x^k :

- $\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n$ generují Δ_x
- $\mathrm{d}x^p, \quad p = n+1, \ldots, m$ generující Δ_x^*
- $x^p = \text{konst.}$, pro $p = n+1, \ldots, m$. Definují integrabilní podvariety (vrstvení).
- $x^i = \text{konst.}$, pro $i = 1, \ldots, n$. jsou souřadnice na integrabilních podvarietách.
  komentář: Jsou to tedy přizpůsobené souřadnice celé sadě podvariet určené $x^p = \text{konst.}$

Věta: Frobeniova věta

Δ, Δ^* je integrabilní

$\iff$

Δ je involutivní

$\iff$

Δ^* je diferenciální

Dk:

Δ, Δ^* je integrabilní $\implies$ $\exists x^p,\ p = n+1, \dots m$: $\mathrm{d}x^p$ generují Δ^*.
Pak z toho plyne α^p generátory Δ^* musí být lineární kombinací $\mathrm{d}x^p$:

$$\alpha^p = \sum_{q=n+1}^{m} A^p_q \mathrm{d}x^q$$

pak

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha^p &= \sum_{q=n+1}^{m} \mathrm{d}A^p_q \wedge \mathrm{d}x^q + 0 \\
&= \sum_{r,q=n+1}^{m} \mathrm{d}A^p_q \wedge {A^{-1}}^q_r\, \alpha^r = \sum_{r,q=n+1}^{m} \mathrm{d}A^p_q\, {A^{-1}}^q_r \wedge \alpha^r \\
&=: \sum_{r=n+1}^{m} \theta^p_r \wedge \alpha^r
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ skrze indukci a dlouze. Ale proč by ne...
Δ je involutivní, pro integrabilitu (z podmínky integrability) potřebujeme ukázat existenci souřadnic x^k generující Δ^* jako $\mathrm{d}x^k$. Indukčním přidáváním do distribuce:
$n = 1$: Nechť

$$a_1 \text{ gen } \Delta \implies \exists x^k : a_1[x^1] = 1, \quad a_1[x^p] = 0$$

tedy $\exists$ komplementární generátory $\mathrm{d}x^p$ Δ^*. (V 1D je každá distribuce integrabilní.)
$n-1 \to n$:

$$a_j \text{ gen } \Delta \text{ a zároveň z předpokladu } \Delta \text{ involutivní, tedy } [a_i, a_{i'}] = f^j_{ii'} a_j$$

Definujeme novou sadu generátorů, odečtením projekce do směru 1. souřadnice ($a_1[x^1] = 1$):

$$\bar{a}_j = a_j - a_j[x^1] a_1; \qquad \bar{a}_1 = a_1$$

Tahle nová kolekce

- generuje Δ
- zcela určitě generuje Δ involutivní.
- $\bar{a}_j[x^1] = 0$ z konstrukce
- $[\bar{a}_1; \bar{a}_i] = \dots = \sum_{j=2}^{n} f_{1i}^{j} \bar{a}_j$
  lze použít indukční předpoklad. $\exists x^p :\ \mathrm{d}x^p$ generující Δ^*
  komplementární k Δ generované $\bar{a}_j$.

Příklady:

$m = 3$, $n = 2$. $M \qquad \rho, \varphi, z$
Mějme kodistribuci $\Delta^* : \alpha = \rho^2\ \mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}z$ (dim 2). je kodistribuce integrabilní?
Můžeme otestovat

1. Involutivitu komplementární Δ.
2. diferencialitu Δ^*.

Najděme prvky z komplementární distribuce, tzn.: $0 \overset{!}{=} \alpha \cdot a$

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \rho^2 a^\varphi + a^z \\ \implies a_1 &= \frac{\partial}{\partial \rho} \\ a_2 &= -\rho^2 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

ad 1) $[\Delta; \Delta] = \Delta$:

$$[a_1; a_2] = -2\frac{\partial}{\partial z} \notin \operatorname{span}\{a_1; a_2\}$$

není involutivní.

ad 2) $\mathrm{d}\alpha|_\Delta \overset{?}{=} 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha &= \mathrm{d}(\rho^2\,\mathrm{d}\varphi) + \cancelto{0}{\mathrm{d}(\mathrm{d}z)} \\
&= \mathrm{d}(\rho^2)\wedge \mathrm{d}\varphi + \rho^2\,\cancelto{0}{\mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi)} = 2\rho\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

$$a_1 \cdot \mathrm{d}\alpha \cdot a_2 = 2\rho \neq 0$$

takže Δ^* není diferenciální.

LifeHack:

Rychleji to lze poznat z toho, že podvarieta není integrabilní když nemá integrabilní křivky $(\rho(t), \varphi(t), z(t)) \to$ vektor $\dot{\gamma}$: $\alpha\cdot\dot{\gamma} = \rho^2\dot{\varphi} + \dot{z} = 0$.
$\rho = \rho_0,\quad \varphi = \varphi \quad\Longrightarrow\quad \dot{z} = -\rho^2\dot{\varphi}$. Křivky se neuzavírají po oběhu.

Speciální případy: $n = m - 1$
Δ je generovaná $n-1$ vektorovými poli, pak jednoduše Δ^* jen jedním α. A stačí ověřit, že $\mathrm{d}\alpha = \theta\wedge\alpha$, pak je diferenciální a Δ je involutivní.

Aplikace:
Frobeniova věta na systém homogenních parciálních diferenciálních rovnic (HPDR):

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^p(x^j)\frac{\partial X^i}{\partial y^k} = 0$$

$X^i(y^1,\ldots,y^n)$
Přeformulujeme:

$$
\begin{aligned}
M \;\; \dim m \qquad & x^j \qquad j = 1,\ldots,m \\
N \;\; \dim n \qquad & y^k \qquad k = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

Chceme, aby X bylo vyjádření souřadnicově:
def vnoření $\iota : N \hookrightarrow M$, takže technicky: $X = x\circ\iota\circ y^{-1}$.
Pak zavedli bychom Δ^* generovanou nějakými $\alpha^p,\quad p = n+1,\ldots,m$. Pro ně by (díky komplementaritě) platilo: že kontrakce tečných vektorů z N (∂_{y^k}) vnořených do M tj. $\iota_*\partial_{y^k}$, dává 0:

$$0 \overset{\text{def}}{=} \alpha^p \cdot \underbrace{\left(\iota_*\frac{\partial}{\partial y^k}\right)}_{\sum \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\partial_{x^i}} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i^p(x^j)\frac{\partial x^i}{\partial y^k}$$

Což je přímo definice HPDR, a tedy Δ^* existuje. Řešením pak budou speciální α: $\mathrm{d}\alpha^p|_\Delta = 0$.

Tok a Lieova Derivace

Tok a Lieova derivace

D: Tok

Tok na M je 1-par grupa difeomorfizmů na M.

$$\phi_\alpha \in \mathrm{Diff}\, M, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

s grupovou strukturou:

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta = \phi_{\alpha+\beta}, \quad \phi_0 = \mathrm{id}, \quad \phi_{-\alpha} = \phi_\alpha^{-1}$$

Interpretace: Skrze bod x prochází orbita, na které se pohybujeme ϕ_α pomocí parametru α. Pro každý bod z nějakého okolí. Tak stejně pro jejich push-forward.

D: Generátor toku

Jakožto malá orbita, posutím o malé α. Jako vektor

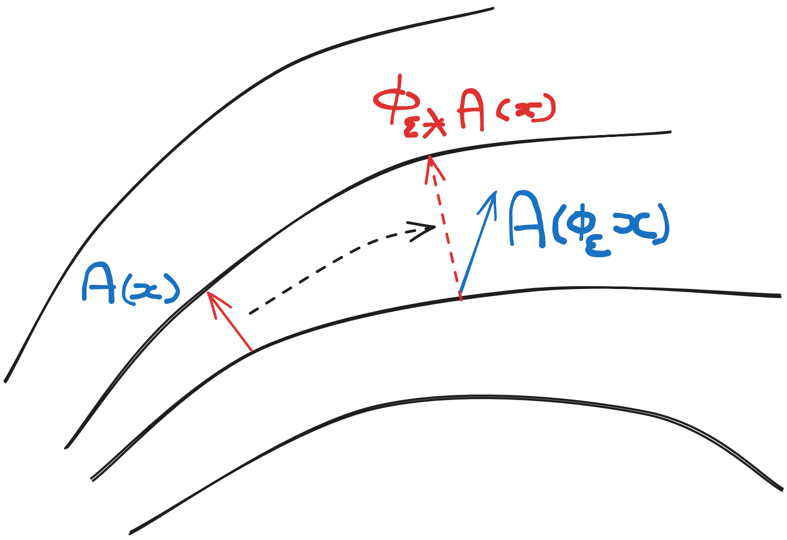
$$a|_x = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\alpha} \phi_\alpha x \bigg|_{\alpha=0}$$

Vztah mezi generátorem a tokem je jednoznačný.

Lemma:

$\phi_{\alpha *} a = a$
Dk:
Vyčíslíme v bodě:
$(\phi_{\alpha *} a)(\phi_\alpha x) = \phi_{\alpha *}(a(x)) \overset{\text{def}}{=} \phi_{\alpha *} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\varepsilon} \phi_\varepsilon x \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\varepsilon} \phi_{\alpha *} \phi_\varepsilon x \Big|_{\varepsilon=0} =: a(\phi_\alpha x)$

Derivování tenzorových polí. Musíme dbát, že tenzor nelze odečítat v různých bodech. Zadáním celého toku skrz generátor, podle kterých budeme přenášet tenzorovou strukturu:



D: Lieova derivace

Derivace podle vektorového pole z tenzorového pole:

$$\mathcal{L}_a A|_x := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\phi_{-\varepsilon*}\left(A\left(\phi_\varepsilon x\right)\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

Obecně na tenzorové pole:

$$\mathcal{L}_a A := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\phi_{\varepsilon*}A\Big|_{\varepsilon=0}$$

Věta: Vlastnosti Lieovy derivace

- $\phi_{\alpha*}\circ\phi_{\beta*} = \phi_{\alpha+\beta*}$
- $\phi_{0*} = \mathrm{id}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\phi_{\varepsilon*}\Big|_{\varepsilon=0} = -\mathcal{L}_a$ Lieova derivace je generátor (akce) push-forwardu.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\phi_{\alpha*} = -\phi_{\alpha*}\mathcal{L}_a$
  Tyto vlastnosti vedou jednoznačně na Exponenciální řešení
  $$\phi_{\alpha*} = \exp[-\alpha\mathcal{L}_a]$$
- $\mathcal{L}_u(A + rB) = \mathcal{L}_u A + r\mathcal{L}_u B; \qquad r\in\mathbb{R}$
- $\mathcal{L}_u(A\otimes B) = (\mathcal{L}_u A)\otimes B + A\otimes\mathcal{L}_u B$
- $\mathcal{L}_u(\mathrm{C}A) = \mathrm{C}\mathcal{L}_u A$

- $\mathcal{L}_u f = u[f]; \qquad f \in \mathcal{F}M$
  Takže je to derivace.
- $\mathcal{L}_u \,\mathrm{d}f = \,\mathrm{d}\mathcal{L}_u f$
  důsledky:
- $\mathcal{L}_u(a \cdot \omega) = (\mathcal{L}_u a) \cdot \omega + a \cdot \mathcal{L}_u \omega$
- $\mathcal{L}_u v = [u; v]$ Lieova závorka
  Dk:
  Lieova závorka, akorát Cartanův vzorec (s $\gamma = \,\mathrm{d}f$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u(v \cdot \mathrm{d}f) &= u \cdot \mathrm{d}(v \cdot \mathrm{d}f) = (\mathcal{L}_u v) \cdot \mathrm{d}f + v \cdot \mathcal{L}_u \,\mathrm{d}f \\ &= (\mathcal{L}_u v) \cdot \mathrm{d}f + v \cdot \mathrm{d}(u \cdot \mathrm{d}f) \\ &= u \cdot \mathrm{d}(v \cdot \mathrm{d}f) + v \cdot \mathrm{d}(u \cdot \mathrm{d}f) \\ &= [u; v] \cdot \mathrm{d}f\end{aligned}$$

Věta: $\mathcal{L}_a$ určená vlastnostmi

- tenzorová derivace $\implies$ určená akcí na $\mathcal{F}M$ a $\mathcal{T}M$
- na $\mathcal{F}M$: jako derivace podle a
- na $\mathcal{T}M$: jako $[a; \cdot]$

Věta: Linearita, ale ne $\mathcal{F}M$-linearita $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}_{u+rv} = \mathcal{L}_u + r\mathcal{L}_v, \qquad r \in \mathbb{R},$$

ale na fcích

$$\mathcal{L}_{fu} = d\mathcal{L}_u + \mathbf{L},$$

kde $\mathbf{L}$ je pseudoderivace, není ultralokální (přirozeně, jelikož potřebujeme znát informaci i z okolí). Navíc

$$\mathcal{L}_{[u;v]} = \mathcal{L}_u\mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v\mathcal{L}_u$$

Dk:

1. Definujme speciální tenzorovou derivaci

$$\mathbf{L} := \mathcal{L}_{u+rv} - \mathcal{L}_u - r\mathcal{L}_v,$$

kterou aplikujeme na funkce

$$\mathbf{L}f = (u + rv)[f] - u[f] - rv[f] = 0$$

a jedná se o pseudoderivaci, kterážto je určena akcí na vektorech

$$\mathbf{L}w = [u + rv; w] - [u; w] - r[v; w] = 0.$$

Tedy je navíc identicky nula. $\mathbf{L} = 0$

2. Definujme speciální tenzorovou derivaci

$$\mathbf{L} := \mathcal{L}_{fu} - f\mathcal{L}_u,$$

kterou aplikujeme na $\mathcal{F}M$

$$\mathbf{L}h = fu[h] - fu[h] = 0,$$

takže je pseudoderivace a opět hledáme akci na vektorech

$$\begin{aligned}\mathbf{L}w = \mathcal{L}_{fu}w - f\mathcal{L}_u w &= [fu; w] - f[u; w] \\ &= -u\ w[f] + f[u; w] - f[u; w] \\ &= -(u\ \mathrm{d}f) \cdot w\end{aligned}$$

Z toho vidíme akci pseudoderivace na formách:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{fu}\alpha &= f\mathcal{L}_u\alpha + \mathbf{L}\alpha \\ &= f\mathcal{L}_u\alpha - \alpha \cdot (-u\ \mathrm{d}f)\end{aligned}$$

Věta: Lie der. působení na Lie závorku

$$\mathcal{L}_w[u; v] = [\mathcal{L}_w u, v] + [u; \mathcal{L}_w v]$$

Dk: Jacobiho identita

Věta: Lie derivace na komponenty tenzoru

Mějme souřadnice x^a.

$$\left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A\right)^{a...}_{b...} = A^{a...}_{b...,i}$$

Dk:

Protože $A = A^{a...}_{b...} \frac{\partial}{\partial x^a} \cdots\ \mathrm{d}x^b \cdots$, pak

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} A = \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(A^{a\cdots}_{b\cdots} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^a} \cdots}_{[\cdot,\cdot]=0} \underbrace{\mathrm{d}x^b \cdots}_{0} \right)$$

$$= A^{a\cdots}_{b\cdots,i} \frac{\partial}{\partial x^a} \cdots \mathrm{d}x^b \cdots$$

Vztah Lie derivace a AS forem

Věta: Jednoznačnost Lie derivace na AS forem

Následující vlastnosti určují Lie derivaci na AS formách jednoznačně.

$$\mathcal{L}_a : \mathcal{A}^p M \to \mathcal{A}^p M$$

$\mathcal{L}_a(\omega + \sigma) = \mathcal{L}_a\omega + \mathcal{L}_a\sigma$,
$\mathcal{L}_a(\omega \wedge \sigma) = (\mathcal{L}_a\omega) \wedge \sigma + \omega \wedge \mathcal{L}_a\sigma$,
a již známé
$\mathcal{L}_a f = a[f]$,
$\mathcal{L}_a \,\mathrm{d}f = \mathrm{d}\mathcal{L}_a f$.

Věta: Cartanova identita

$$\mathcal{L}_a\omega = a \cdot \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(a \cdot \omega)$$

neboli $\mathcal{L}_a = i_a \,\mathrm{d} + \mathrm{d}\, i_a$

Dk:
Pokud splňuje vlastnosti, které určují Lieovu derivaci jednoznačně.
Netriviální Leibniz:

$$\begin{aligned}
&a \cdot \mathrm{d}(\omega \wedge \sigma) + \mathrm{d}(a \cdot (\omega \wedge \sigma)) = \\
&= a \cdot (\mathrm{d}\omega \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\sigma) + \mathrm{d}((a \cdot \omega) \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge (a \cdot \sigma)) \\
&= (a \cdot \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(a \cdot \omega)) \wedge \sigma + (-1)^{2p} \omega \wedge (a \cdot \mathrm{d}\sigma + \mathrm{d}(a \cdot \sigma)) \\
&\quad + \cancel{(-1)^{p+1} \mathrm{d}\omega \wedge (a \cdot \sigma)} + \cancel{(-1)^p (a \cdot \omega) \wedge \mathrm{d}\sigma} \\
&\quad + \cancel{(-1)^p \mathrm{d}\omega \wedge (a \cdot \sigma)} + \cancel{(-1)^{p+1} (a \cdot \omega) \wedge \mathrm{d}\sigma}
\end{aligned}$$

Věta: Lie komutuje s vnější derivací

$$\mathcal{L}_a \,\mathrm{d} = \mathrm{d}\mathcal{L}_a$$

Dk: S Cartanovou identitou:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a \,\mathrm{d}\omega &= a\cdot\ \mathrm{d}\,\mathrm{d}\omega +\ \mathrm{d}(a\cdot\ \mathrm{d}\omega)\\ &= \mathrm{d}(a\cdot\ \mathrm{d}\omega +\ \mathrm{d}(a\cdot\omega))\\ &= \mathrm{d}\ \mathcal{L}_a\omega\end{aligned}$$

Věta: Lie s insertem

$$\mathcal{L}_a i_b - i_b\mathcal{L}_a = i_{[a;b]}$$

Dk:

$$\mathcal{L}_a i_b\omega = \mathcal{L}_a(b\cdot\omega) = (\mathcal{L}_a b)\cdot\omega + b\cdot\mathcal{L}_a\omega = [a;b]\cdot\omega = i_b\mathcal{L}_a\omega$$

Věta: neUltralokalita Lie pro formy

$$\mathcal{L}_{fa}\omega = f\mathcal{L}_a\omega + \mathrm{d}f\wedge(a\cdot\omega)$$

Dk: Opět Cartanova identita.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{fa}\omega &= fa\cdot\mathrm{d}\omega +\ \mathrm{d}(fa\cdot\omega) = f(a\cdot\mathrm{d}\omega +\ \mathrm{d}(a\cdot\omega)) +\ \mathrm{d}f\wedge(a\cdot\omega)\\ &= f\mathcal{L}_a\omega + \mathrm{d}f\wedge(a\cdot\omega)\end{aligned}$$

Metrická Struktura

Metrická struktura

D: Základní Metrika

Metrika g je $(0, 2)$-tenzorové pole:

$$g \in \mathcal{T}_2^{\,0} M,$$

které je

- bilineární,
- symetrické a
- nedegenerované.

Typy:

- **Riemannova**: pozitivně definitní ($a^{\underline{m}} a^{\underline{n}} g_{\underline{mn}} > 0$ pro $a \neq 0$),
- **pseudoriemannova (Lorentzovská)**: signatura (p, m), typicky $(-, +, \dots, +)$.

Pozn.: g indukuje izomorfismy, zvyšování a snižování

$$\flat : a \mapsto a^\flat := g_{\underline{mn}} a^{\underline{n}}, \quad \sharp : \alpha \mapsto \alpha^\sharp := g^{-1\,\underline{mn}} \alpha_{\underline{m}}, \quad g^{\underline{ik}} g_{\underline{kj}} = \delta^{\underline{i}}{}_{\underline{j}}.$$

D: Délka křivky a vzdálenost

Pro křivky, jejichž kauzální struktura se nemění $z : [\tau_z, \tau_k] \to M$, $u := \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}$:

$$\Delta s = \int_{(\tau_z, \tau_k)} |u^{\underline{m}} u^{\underline{n}} g_{\underline{mn}}|^{1/2} \;\mathrm{d}\tau = \int_{(\tau_z, \tau_k)} \left| \frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{d}\tau} \right| \;\mathrm{d}\tau = \int_{(\tau_z, \tau_k)} \mathrm{d}s.$$

Totálně antisymetrické tenzory

mají tolik indexů kolik je dimenze d
$V^{[d]}$ $V_{[d]}$, $\dim V^{[d]} = 1 \dim V_{[d]}$
$V_{[d]}$ $\epsilon = e^1 \wedge \dots \wedge e^d = d! \mathcal{A}(e^1 \dots e^d)$
$V^{[d]}$ $e = e_1 \wedge \dots \wedge e_d$

Připomenutí: $\epsilon \bullet e = 1$, $\frac{1}{d!} \epsilon_{a_1, \dots, a_d} e^{a_1, \dots, a_d} = 1$.

V souřadnicích:

$$e = \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^d}, \quad \epsilon = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^d.$$

Pak se tenzory

$$\omega = \omega_{1\ldots d}\epsilon, \quad w = w^{1,\ldots,d}e,$$

kontrahují přes binární operaci

$$\omega \bullet w = \omega_{1,\ldots,d} w^{1,\ldots,d}$$

Změna báze:

$\omega = \omega_{1,\ldots,d}\epsilon = \omega_{1',\ldots,d'}\epsilon'$, tzn.:
$\omega_{1',\ldots,d'} = T_{1'}^{a_1} \ldots T_{d'}^{a_d} \omega_{a_1,\ldots,a_d}$ (formálně přes jakýkoliv možné indexy a_i)
$= \sum_\sigma \mathrm{sign}[\sigma] T_{1'}^{\sigma_1} \ldots T_{d'}^{\sigma_d} \omega_{1,\ldots,d}$ (Antisymetrická kombinace transformačních matic)
$= \det[T_{k'}^l]\omega_{1,\ldots,d}$ (determinant přechodové matice, dává smysl, že 1 dim objekt se škáluje podobně jako číslo, ale nejsou to čísla.)
$w^{1',\ldots,d'} = (\det[T_l^{k'}])w^{1,\ldots,d}$

inverze:

${}^{-1} : V^{[d]} \longleftrightarrow V_{[d]}$, $\omega^{-1} \bullet \omega = 1$, $w^{-1} \bullet w = 1$ (nejedná se však o **dualitu**)
$(\omega^{-1})^{1,\ldots,d} = \frac{1}{\omega_{1,\ldots,d}}$.

Akce pseudoderivace:

$\mathbf{M}\omega_{a_1\ldots a_d} = -dM_{[a_1}^k \omega_{|k|\ldots a_d} \stackrel{!}{=} \alpha\omega_{a_1\ldots a_d} \,/ \bullet\, \omega^{-1}$
Faktor, který je dán stopou pseudoderivace:
$\alpha = \frac{d}{d!}\omega^{-1\,a_1\ldots a_d} M_{a_1}^k \omega_{ka_2\ldots a_d} = dM_{a_1}^k \,{}^{[d]}\delta_{ka_2\ldots a_d}^{a_1\ldots a_d} = M_a^k \delta_k^a = M_n^n$
(det je reprezentace akce grupy, a Tr je reprezentace příslušné algebry.)

D: Orientace báze

Báze e_k, $e_{k'}$, mají stejnou orientaci, pakliže $\det[T_{k'}^k] > 0$. Můžeme tedy v jednom bodě tvořit dvě třídy bazí.
Lze hovořit i o Globální orientovatelnosti.

Pokud $\omega_{1,\dots,d} > 0$ tak, pozitivně orientovaná. Tedy i Totálně antisymetrické se děli do tříd.

D: Levi-Civitův tenzor

Positivně orientovaná

$$\varepsilon_{a_1\dots a_d} \in \Lambda^d M$$
$$\varepsilon_{a_1\dots a_d}\varepsilon^{\sharp\, a_1,\dots a_d} = \mathrm{sign}[g]d!, \quad \varepsilon \cdot \varepsilon^\sharp = \mathrm{sign}[g]$$

D: Hodgeův duál $*$

Zobrazení z forem stupně p do $d-p$

$$* : \Lambda^p M \to \Lambda^{d-p} M$$

Pro $\omega \in \Lambda^p M$ definujeme $*\alpha \in \Lambda^{d-p} M$ jako

$$(*\omega)_{a_{p+1}\dots a_d} = \frac{1}{p!}\omega^{\sharp\, a_1\dots a_p}\varepsilon_{a_1\dots a_d}.$$

V souř. s metrikou:

$$(*\alpha)_{i_{k+1}\dots i_n} = \tfrac{1}{k!} \;\; \varepsilon_{i_1\dots i_n} \;\; g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_k j_k} \;\; \alpha_{j_1\dots j_k}.$$

Hodge je skoro inverzní, až na znaménko !!

$$** \omega = (\mathrm{sign}[g])(-1)^{p(d-p)}\, \omega$$

Díky němu mi dovolí udělat něco jako skalární součin na antisymetrických formách

$$(*\omega) \bullet (*\sigma) = (\mathrm{sign}[g])\, \omega \bullet \sigma$$

symetrický a dává skalární faktor

$$\omega \wedge (*\sigma) = \sigma \wedge (*\omega) = \omega \bullet \sigma \;\; \varepsilon = *(\omega \bullet \sigma)$$

Takto můžeme hovořit jako o duál skaláru ($\omega \bullet \sigma$).

Kovariantní Derivace

Kovariantní derivace

Motivace:

- chceme studovat změnu $\iff$ klid. Potřebujeme umět odečítat tenzory v různých bodech variety, tedy specifikovat přenos tenzoru podél nějaké křivky, např.: Paralelní přenos.
  $\mathrm{par}[z] : \mathbf{T}_{z(0)} M \to \mathbf{T}_{z(1)} M$, požadované vlastnosti:
- linearita,
- nezávislost na parametrizaci z,
- komutace s $\otimes$ a C + přenos čísla beze změny (to nám dovolí přenášet i formy),
- skládání $\mathrm{par}[z] = \mathrm{par}[z_f]\mathrm{par}[z_i]$,
- opačný směr $\mathrm{par}[z^{-1}] = \mathrm{par}^{-1}[z]$,
- přenos podél konst. křivky je identická transformace $\mathrm{par}[\text{konst.}] = id$.
  pak by měla jít reprezentovat tenzorově (ale stále nejednoznačně) $(\mathrm{par}[z]a)^{\underline{m}} = (\mathrm{par}[z])^{\underline{m}}_{\underline{\tilde{n}}} a^{\underline{\tilde{n}}}$. Indexy v různých bodech.

D: Kovariantní derivace (CD)

…Tenzorového pole A ve směru a v bodě x.

$$\nabla_a A \in \mathbf{T}_x{}^k_l M$$

splňující:

- $\nabla_{(a+rb)} A = \nabla_a A + r\nabla_b A; \quad r \in \mathbb{R}$
- $\nabla_a(A + rB) = \nabla_a A + r\nabla_a B; \quad r \in \mathbb{R}$
- $\nabla_a(AB) = A\nabla_a(B) + (\nabla_a A)B$!!! Pořadí indexů a je první !!!
- $\nabla_a \mathrm{C} A = \mathrm{C}\nabla_a A$
- na fce: $\nabla_a f := a[f] \equiv a \cdot \mathrm{d}f$
  (není určena jednoznačně. Zobecníme do každého bodu)

D: Kovariantní diferenciál

$$\nabla_a A \in \mathcal{T}_l{}^k M; \qquad A \in \mathcal{T}_l{}^k M; \qquad a \in \mathcal{T} M$$

$$\nabla_a A^{\underline{k}\dots}_{\underline{l}\dots} = a^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} A^{\underline{k}\dots}_{\underline{l}\dots}$$

vlastnosti dědí od kovariantní derivace. Navíc ultralokální:

- $\nabla_{fa} A = f \nabla_a A; \quad f \in \mathcal{F} M$
  Speciálně: Podél křivky, kde $a = t$ je tečný vektor křivky tj. $\frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{d}\tau}$,
  $\nabla_t A = \frac{\nabla}{\mathrm{d}\tau} A$ akcent změny A oproti změně τ parametru křivky.

Vyjádření v souřadnicové bázi:

$$\nabla_{\underline{m}} A^{\underline{k}\dots}_{\underline{l}\dots} = \nabla_a A^{b\dots}_{c\dots} \, (\mathrm{d}x^a)_{\underline{m}} \cdots \, (\partial_{x^b})^{\underline{k}} \cdots$$

Alternativní značení:

$$\nabla_a A^b_c \equiv A^b_{c;a}$$

Příklad:

$$\nabla_{\underline{a}} \delta^{\underline{k}}_{\underline{l}} = 0$$

$$\text{neboť: } \delta^{\underline{m}}_{\underline{l}} v^{\underline{l}} = v^{\underline{k}} \quad / \nabla_{\underline{a}}$$

$$\nabla_{\underline{a}} (\delta^{\underline{k}}_{\underline{l}} v^{\underline{l}}) = (\cancelto{0}{\nabla_{\underline{a}} \delta^{\underline{k}}_{\underline{l}}}) v^{\underline{l}} + \delta^{\underline{k}}_{\underline{l}} \nabla_{\substack{\underline{a} \\ 1.}} v^{\underline{l}} = \nabla_{\underline{a}} v^{\underline{k}}$$

D: Paralelní přenos

Pro křivku z, říkáme že se $A \in \mathcal{T}_l{}^k M$ paralelně přenáší po $z \iff$

$$\nabla_t A = 0, \qquad \text{tzn. } \frac{\nabla}{\mathrm{d}\tau} A = 0,$$

kde $t = \frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{d}\tau}$.

Příklady Kovariantních derivací

Souřadnicová kovariantní derivace

Pro pevně zvolené souřadnice x^a spojujeme ∂, která splňuje vlastnosti výše.
Navíc anihiluje bázové vektory/formy:

$$\partial \frac{\partial}{\partial x^a} = 0, \qquad \partial \mathrm{d}x^a = 0$$

dovoluje zavést pojem *globální rovnoběžnosti* v daných souřadnicích.
a je komutativní: $\partial_{\underline{a}} \partial_{\underline{b}} f - \partial_{\underline{b}} \partial_{\underline{a}} f = 0$

Frejmová kovariantní derivace

(bázová)
Volíme obecněji bázi vektorů/forem $e_{\underline{j}}^{a}, e_{\underline{a}}^{j}$. Definujeme derivace $\not\partial$ tak aby anihilovala bázi.
$\not\partial e_{\underline{j}} = 0 = \not\partial e^{\underline{j}}$. Už neplatí komutace.

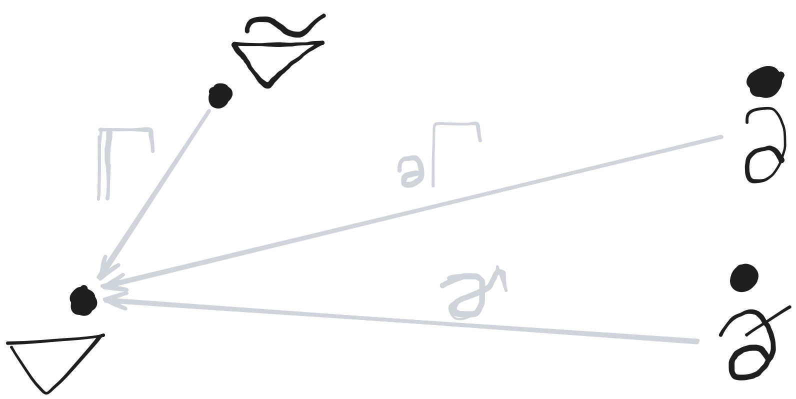
Komentář: Vidíme, že jich je spousta $\to$ prostor kovariantních derivací? případně hledat rozdíly.

D: Konexe

Vztah 2 kov. derivací
Rozdílový faktor $\Gamma_a = \nabla_a - \tilde{\nabla}_a$; a vektor.
Vlastnosti dědí po $\nabla_a, \tilde{\nabla}_a$, Ale speciálně $\Gamma_a f = 0$, protože obě působí na $\mathcal{F}M$ totožně.
Je to tedy tenzorová derivace anihilující fce, tedy Pseudoderivace, a ta je určená akcí na vektorech.
Vyjádřena tenzorově:

$$\Gamma_{a\,\underline{n}}^{\;\;m} = a^{\underline{k}} \Gamma_{\underline{k}\,\underline{n}}^{\;\;m}$$

Na afinním prostoru (CD) není definovaný součet, ale rozdíl ano. Rozdíl, který pak definuje směry, kterými jsou právě Γ:



Jak zadat kovariantní derivaci?

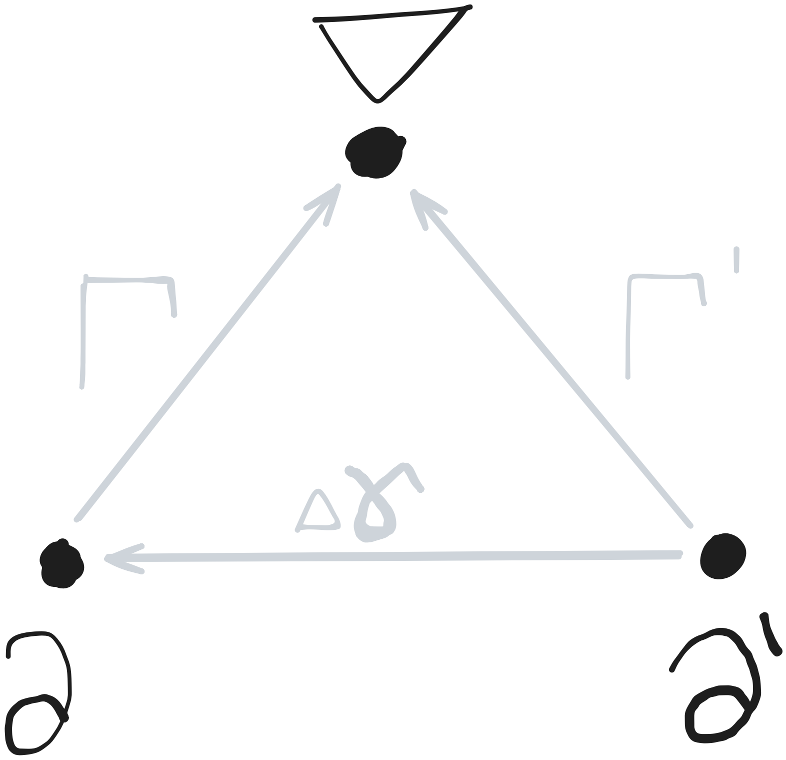
- vyberu počátek ($\tilde{\nabla}$)
- a průvodič ($\boldsymbol{\Gamma}$)
  Typicky:

1. souřadnicová x^a
   $\nabla = \partial + \Gamma$ (Christofelovy symboly jsou až složky této pseudoderivace)
2. bázové e_j
   $\nabla = \eth + \underbrace{\gamma}_{\text{spin koef.}}$

Komentář: Christofelovy symboly jsou tenzory pokud zůstáváme ve stejné bázi, pokud není Γ rozkročena mezi dvěma souřadnicemi:
Zvolím si dvě souřadnice, každá určuje svou ∂', ∂. Pak i své vlastní Γ', Γ. V souřadnicích

$$\Gamma = \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{ab}} \to \Gamma^{k}_{ab}$$
$$\Gamma' = \Gamma'^{\underline{k}}_{\underline{ab}} \to \Gamma'^{k'}_{a'b'}$$

jsou dva různé tenzory, a nelze mezi nimi přecházet souřadnicovou transformací:



Což lze vidět i výpočtem

$$
\begin{aligned}
0 \overset{\text{def}}{=} \partial' \,\mathrm{d}x^{a'} &= \partial'(x^{a'}{}_{,m}\,\mathrm{d}x^{m}) \\
&= \partial'(x^{a'}{}_{,m})\,\mathrm{d}x^{m} + x^{a'}{}_{,m}\partial'\mathrm{d}x^{m} \\
&= x^{a'}{}_{,mn}\,\mathrm{d}x^{m}\,\mathrm{d}x^{n} + x^{a'}{}_{,m}(\partial - {}_{\Delta}\gamma)\,\mathrm{d}x^{m} \\
&= \underbrace{x^{a'}{}_{,mn}\,\mathrm{d}x^{m}\,\mathrm{d}x^{n}}_{\text{tenzor}} - \underbrace{x^{a'}{}_{,m}\,{}_{\Delta}\gamma\,\mathrm{d}x^{m}}_{\text{konexe}} \\
&= (x^{a'}{}_{,mn} - {}_{\Delta}\gamma^{k}_{mn}x^{a'}{}_{,k})\,\mathrm{d}x^{m}\,\mathrm{d}x^{n} \overset{!}{=} 0 \qquad \forall\,\mathrm{d}x^{m}\,\mathrm{d}x^{n}
\end{aligned}
$$

$$
\implies \quad {}_{\Delta}\gamma^{k}_{mn} = x^{a'}{}_{,mn}\,x^{k}{}_{,a'}
$$

Z tohoto už víme jak se jednotlivé pseudoderivace transformují

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \Gamma' - {}_{\Delta}\gamma \\
\Gamma^{a}_{bc} &= \Gamma'^{a}_{bc} - {}_{\Delta}\gamma^{a}_{bc} \\
&= \Gamma'^{k'}_{m'n'}\,x^{a}{}_{,k'}\,x^{m'}{}_{,a}\,x^{n'}{}_{,b} - x^{k'}{}_{,bc}\,x^{a}{}_{,k'}
\end{aligned}
$$

a podle předpokladu, kdy to není a ten samý tenzor, se netransformuje jako tenzor.

Interpretace:

$\nabla \frac{\partial}{\partial x^k} = \cancelto{0}{\partial \frac{\partial}{\partial x^k}} + \Gamma \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}$

Jak se mění souřadnicové vektory $\frac{\partial}{\partial x^i}$ vzhledem k nové kovariantní derivaci.

Lemma: Ultralokalita Cartanova vzorce pro CD

$$a^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} b^{\underline{n}} - b^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} a^{\underline{n}} - [a, b]^{\underline{n}}$$

je ultralokální objekt.

Dk:

$$\nabla_{\underline{m}} b^{\underline{n}} = \partial_{\underline{m}} b^{\underline{n}} + \Gamma^{\underline{n}}_{\underline{mp}} \;\; b^{\underline{p}}.$$

$$\begin{aligned} a^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} b^{\underline{n}} - b^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} a^{\underline{n}} &= a^{\underline{m}} (\partial_{\underline{m}} b^{\underline{n}} + \Gamma^{\underline{n}}_{\underline{mp}} b^{\underline{p}}) - b^{\underline{m}} (\partial_{\underline{m}} a^{\underline{n}} + \Gamma^{\underline{n}}_{\underline{mp}} a^{\underline{p}}) \\ &= a^{\underline{m}} \partial_{\underline{m}} b^{\underline{n}} - b^{\underline{m}} \partial_{\underline{m}} a^{\underline{n}} + a^{\underline{m}} b^{\underline{p}} \Gamma^{\underline{n}}_{\underline{mp}} - b^{\underline{m}} a^{\underline{p}} \Gamma^{\underline{n}}_{\underline{mp}}. \end{aligned}$$

$$\implies \;\; [a, b]^{\underline{n}} = a^{\underline{m}} \partial_{\underline{m}} b^{\underline{n}} - b^{\underline{m}} \partial_{\underline{m}} a^{\underline{n}}.$$

Pak dohromady:

$$\begin{aligned} a^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} b^{\underline{n}} - b^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} a^{\underline{n}} - [a, b]^{\underline{n}} &= (a^{\underline{m}} \partial_{\underline{m}} b^{\underline{n}} - b^{\underline{m}} \partial_{\underline{m}} a^{\underline{n}}) + (a^{\underline{m}} b^{\underline{p}} \Gamma^{\underline{n}}_{\underline{mp}} - b^{\underline{m}} a \\ &\quad -(a^{\underline{m}} \partial_{\underline{m}} b^{\underline{n}} - b^{\underline{m}} \partial_{\underline{m}} a^{\underline{n}}) \\ &= a^{\underline{m}} b^{\underline{p}} \Gamma^{\underline{n}}_{\underline{mp}} - b^{\underline{m}} a^{\underline{p}} \Gamma^{\underline{n}}_{\underline{mp}} \end{aligned}$$

Takže ve výsledku dostáváme pseudoderivaci, která je ultralokální ($\mathcal{F}M$-lineární):

$$a^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} b^{\underline{n}} - b^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} a^{\underline{n}} - [a, b]^{\underline{n}} = (a^{\underline{m}} b^{\underline{p}} - b^{\underline{m}} a^{\underline{p}}) \;\; \Gamma^{\underline{n}}_{\underline{mp}}.$$

Objekt tedy můžeme reprezentovat jako tenzor, jako tzv. *Torze*

D: Torze

$$T^{\underline{n}}_{\underline{mk}} a^{\underline{m}} b^{\underline{k}} := a^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} b^{\underline{n}} - b^{\underline{m}} \nabla_{\underline{m}} a^{\underline{n}} - [a; b]^{\underline{n}}$$

Interpretace:

Nekomutativita na funkcích, kterou nezachytí Lieova závorka. Je to totiž míra nekomutativity kovariantních derivacích na fcích:

$$\nabla_{\underline{m}} \nabla_{\underline{n}} f - \nabla_{\underline{n}} \nabla_{\underline{m}} f = -T^{\underline{k}}_{\underline{mn}} \; \mathrm{d}_{\underline{k}} f$$

Značení:
$T = \mathrm{Tor}[\nabla]$
Vlastnosti:

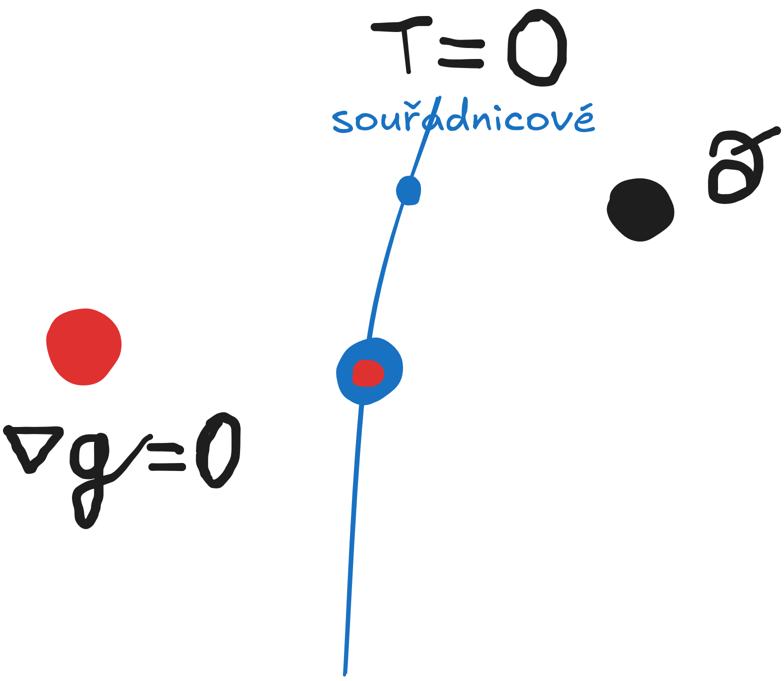
- $T[\partial] = 0$
- Pro n-ádovou derivaci $\cancel{\partial}$: $T[\cancel{\partial}] = t$
  S použitím Cartanova vzorce a $\mathrm{d}e^{k} = t^{k}$.

$$t^{\underline{k}}_{\underline{mn}}\, e^{\underline{m}}_{a}\, e^{\underline{n}}_{b} = -[e_a; e_b]^{\underline{k}}$$

  čili nekomutativita bázových prvků.
  Life-hacks:
  Lze spočíst z antisymetrie indexů Γ. Pro dvě $\nabla = \tilde{\nabla} + \Gamma$
- $T^{\underline{k}}_{\underline{ab}} - \tilde{T}^{\underline{k}}_{\underline{ab}} = \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{ab}} - \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{ba}} = 2\Gamma^{\underline{k}}_{[\underline{ab}]}$
  Dk: $\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = \tilde{\nabla}_a\, \mathrm{d}_b f + \Gamma^{k}_{ab}\, \mathrm{d}_k f - \tilde{\nabla}_b\, \mathrm{d}_a f - \Gamma^{k}_{ba}\, \mathrm{d}_k f.$

$$-T^{k}_{ab}\, \mathrm{d}_k f = -\tilde{T}^{k}_{ab}\, \mathrm{d}_k f - \left[\Gamma^{k}_{ab} - \Gamma^{k}_{ba}\right] \mathrm{d}_k f$$

  Nyní zvolme $\tilde{T} = \mathrm{Tor}[\partial] = 0$, pak zbude $\forall\ \mathrm{d}_k f$: $T^{\underline{k}}_{\underline{ab}} = \Gamma^{\underline{k}}_{[\underline{ab}]}$.
  V afinním prostoru je celá třída souřadnicových derivací, kdy je torze nulová.



Užitečné Vztahy Derivací

Užitečné vztahy derivací

Vztah ∇ a $\mathcal{L}$

Připomenutí CD a Lieovy derivace. Přechodem mezi derivacemi skrze Lieovu závorku a definici torze:

$$\mathcal{L}_a b^{\underline{n}} = [a;b]^{\underline{n}} = a^{\underline{k}} \nabla_{\underline{k}} b^{\underline{n}} \underbrace{- b^{\underline{k}} \nabla_{\underline{k}} a^{\underline{n}} - T^{\underline{n}}_{\underline{mk}} a^{\underline{m}} b^{\underline{k}}}_{\equiv \mathbf{L}^{\underline{n}}_{a\,\underline{k}}} y$$

$$\mathcal{L}_a = \nabla_a + \mathbf{L}_a.$$

Speciálně: když $T = 0$, pak

- pro 1-formu:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a \omega_{\underline{m}} &= \nabla_a \omega_{\underline{m}} - \mathbf{L}^{\underline{n}}_{a\,\underline{m}} \omega_{\underline{n}} = \\ &= \nabla_a \omega_{\underline{m}} + (\nabla_{\underline{m}} a^{\underline{n}}) \omega_{\underline{n}} \end{aligned}$$

- pro 2-formu (např. metrika):

$$\mathcal{L}_a g_{\underline{mn}} = \nabla_a g_{\underline{mn}} + (\nabla_{\underline{m}} a^{\underline{k}}) g_{\underline{kn}} + (\nabla_{\underline{n}} a^{\underline{k}}) g_{\underline{mk}}$$

  Speciálněji pro metrickou kovariantní derivaci ($\nabla g = 0$)

$$\mathcal{L}_a g_{\underline{mn}} = \nabla_{\underline{m}} a_{\underline{n}} + \nabla_{\underline{n}} a_{\underline{m}}$$

  Což je ideální tvar na hledání killingových polí a v $\mathcal{L}_a g_{\underline{mn}} = 0$:

Killingovy vektory s metrickou kovariantní derivací, bez torze

$$\nabla_{\underline{m}} a_{\underline{n}} + \nabla_{\underline{n}} a_{\underline{m}} \overset{!}{=} 0$$

Vztah ∇ a d

Připomenutí vnější derivace.

Věta: d a ∇

$$\mathrm{d} = \nabla\wedge + T \curlywedge \;,$$

kde

$$\nabla_{\underline{m}} \wedge \omega_{\underline{a_1}\dots\underline{a_p}} := \binom{p+1}{1} \nabla_{[\underline{m}}\omega_{\underline{a_1}\dots\underline{a_p}]},$$

a

$$\begin{aligned}(T \curlywedge \omega)_{\underline{a_0}\underline{a_1}\dots\underline{a_p}} &= T^{\underline{n}}_{\underline{a_0}\underline{a_1}} \wedge \omega_{|n|\underline{a_2}\dots\underline{a_p}} \\ &:= \binom{p+1}{2} T^{\underline{n}}{}_{[\underline{a_0}\underline{a_1}}\ \omega_{|\underline{n}|\underline{a_2}\dots\underline{a_p}]}\end{aligned}$$

Dk:
Nejprve pro konexi nulovou (tj. i torze $=0$) pak efektivně ∇ je ∂:

$$\mathrm{d}_{\underline{a_0}}\omega_{\underline{a_1}\dots\underline{a_p}} = (p+1)\partial_{[\underline{a_0}}\ \omega_{\underline{a_1}\dots\underline{a_p}]}$$

zapneme Γ

$$\begin{aligned}\nabla_{\underline{a_0}} \wedge \omega_{\underline{a_1}\dots\underline{a_p}} = \partial_{\underline{a_0}}\omega_{\underline{a_1}\dots\underline{a_p}} &- \Gamma^{\underline{k}}{}_{[\underline{a_0}\underline{a_1}}\ \omega_{|\underline{k}|\underline{a_2}\dots\underline{a_p}]} \\ &- \Gamma^{\underline{k}}{}_{[\underline{a_0}\underline{a_2}}\ \omega_{\underline{a_1}|\underline{k}|\underline{a_3}\dots\underline{a_p}]} - \dots,\end{aligned}$$

členů bude celkem p. Víme, že antisymetrická část Γ je právě T, čili zbude

$$= \mathrm{d}_{\underline{a_0}}\omega_{\underline{a_1}\dots\underline{a_p}} - \binom{p+1}{2} T^{\underline{k}}{}_{[\underline{a_0}\underline{a_1}}\omega_{|\underline{k}|\underline{a_2}\dots\underline{a_p}]}$$

Speciálně:

- na fce $\mathrm{d}_{\underline{n}} f = \nabla_{\underline{n}} f$
- na 1-formy

$$\mathrm{d}_{\underline{a}}\alpha_{\underline{b}} = \nabla_{\underline{a}}\alpha_{\underline{b}} - \nabla_{\underline{b}}\alpha_{\underline{a}} + T^{\underline{k}}_{\underline{a}\underline{b}}\alpha_{\underline{k}}$$

- na 2-formy

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{a}\sigma_{kl} = \nabla_{a}\sigma_{kl} + \nabla_{k}\sigma_{la} + \nabla_{l}\sigma_{ak} \\ + T^{\underline{n}}_{\underline{a}\underline{k}}\sigma_{\underline{n}\underline{l}} + T^{\underline{n}}_{\underline{k}\underline{l}}\sigma_{\underline{n}\underline{a}} + T^{\underline{n}}_{\underline{l}\underline{a}}\sigma_{\underline{n}\underline{k}}\end{aligned}$$

Levi-Civitova Derivace

Levi-Civitova derivace

Přidáním 2 dodatečných požadavků k obecné CD.

1. Paralelní přenos zachová úhly a délky:

   $$0 \overset{!}{=} \frac{\nabla}{\mathrm{d}\tau}(a^{\underline{a}} g_{\underline{ab}} b^{\underline{b}}) = \frac{\nabla a^{\underline{a}}}{\mathrm{d}\tau} g_{\underline{\underline{ab}}} b^{\underline{b}} + a^{\underline{a}} g_{\underline{\underline{ab}}} \frac{\nabla b^{\underline{b}}}{\mathrm{d}\tau} + a^{\underline{a}} \frac{\nabla}{\mathrm{d}\tau} g_{\underline{\underline{ab}}}\, b^{\underline{b}}$$
   $$\iff$$
   $$\frac{\nabla}{\mathrm{d}\tau} g_{\underline{ab}} = 0, \quad \forall z(\tau),$$

   tzn.:

   $$\nabla_{\underline{k}} g_{\underline{ab}} = 0$$

2. Beztorzní derivace

Věta: Levi-Civitova derivace

Podmínky kovariantní derivace, zachování úhlu a délky při paralelním přenosu a nulovost torze, určuje Levi-Civitovu derivaci jednoznačně.
Jedná se o souřadnicovou a metrickou (Beztorzní a metriku anihilující)

$$\nabla_{\underline{k}} g_{\underline{ab}} = 0, \qquad \mathrm{Tor}[\nabla] = 0$$

Dk:
Představme si $\nabla = \tilde{\nabla} + \gamma$. Označme $\mathrm{Tor}[\tilde{\nabla}] \equiv \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t}^{\underline{c}}{}_{\underline{ab}}$. Můžeme snížit metrikou.

$$\gamma = \nabla - \tilde{\nabla} \implies 0 - \boldsymbol{t}_{\underline{mab}} = \gamma_{\underline{amb}} - \gamma_{\underline{bma}}$$

Dále by pak $0 \overset{?}{=} \tilde{\nabla}_{\underline{m}} g_{\underline{ab}} = \cancelto{0}{\nabla_{\underline{m}} g_{\underline{ab}}} - (-\gamma_{\underline{mab}} - \gamma_{\underline{mba}})$. Jak γ vypadají? Lze zjistit ze sudoku:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\underline{a}} g_{\underline{bc}} &= \gamma_{\underline{abc}} + \gamma_{\underline{acb}}, \\
\nabla_{\underline{b}} g_{\underline{ca}} &= \gamma_{\underline{bca}} + \gamma_{\underline{bac}}, \\
\nabla_{\underline{c}} g_{\underline{ab}} &= \gamma_{\underline{cab}} + \gamma_{\underline{cba}}.
\end{aligned}$$

Manipulací s řádky, můžeme dostat symetrickou a antisymetrickou část v krajních indexech:

$$\begin{aligned}\gamma_{(a|c|b)} = & \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_{\underline{a}} g_{\underline{bc}} + \tilde{\nabla}_{\underline{b}} g_{\underline{ac}} - \tilde{\nabla}_{\underline{c}} g_{\underline{ab}}) \\ & + \frac{1}{2}(\boldsymbol{t}_{\underline{abc}} + \boldsymbol{t}_{\underline{bac}})\end{aligned}$$

$$\gamma_{[a|c|b]} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{t}_{\underline{cab}})$$

Dohromady dostáváme tvar γ jako

$$\begin{aligned}\gamma_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\underline{b}} = & \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_{\underline{a}} g_{\underline{bc}} + \tilde{\nabla}_{\underline{b}} g_{\underline{ac}} - \tilde{\nabla}_{\underline{c}} g_{\underline{ab}}) \\ & + \frac{1}{2}(\boldsymbol{t}_{\underline{abc}} + \boldsymbol{t}_{\underline{bac}} - \boldsymbol{t}_{\underline{cab}})\end{aligned}$$

Pokud chceme, aby

D: 1-Forma konexe pro Levi-Civitu

Zvolíme si n-ádu e_n, resp. e^n, ve které vyjádříme poslední dva indexy konexe a tím zbyde 1-forma, které nazýváme *1-formy konexe* ω. Pro Levi-Civitovu derivaci: (která je frejmová)$\wedge\cdot$

$$\nabla_{\underline{a}} e^m_{\underline{b}} = -\gamma_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\underline{b}}\, e^m_{\underline{k}} = -\gamma_{\underline{a}}{}^{m}{}_{n}\, e^n_{\underline{b}} =: (\omega^m{}_n)_{\underline{a}} e^n_{\underline{b}}$$

(a je beztorzní)

$$\nabla_{\underline{a}} \wedge e^m_{\underline{b}} = \mathrm{d}_{\underline{a}} e^m_{\underline{b}} = \omega_{\underline{a}}{}^{m}{}_{n} \wedge e^n{}_{\underline{b}}$$

Můžeme vztah obrátit k nalezení takových ω.

D: I. Cartanovy rovnice struktury

$$\mathrm{d}e^m + \omega^m{}_n \wedge e^n = 0$$

pomocí takových 1-forem ω lze dále napočítat křivost.
Speciální volba n-ády e_m, kdy je $g_{kl} = \text{konst.}$, pak budou $\omega_{[mn]} = \omega_{mn}$ plně antisymetrické v těchto souřadnicích.

Klasifikace Kovariantních Derivací

Klasifikace kovariantních derivací

Všechny dosavadní kovariantní derivace si afinním prostoru můžeme klasifikovat.

D: Metrické

$$\bar{\nabla} g = 0$$

Příkladem: L-C

D: Kontorze

Hyperonymum torze. Definujeme jako rozdíl dvou CD typicky od L-C. Kromě Torze zahrnuje i nekompatibilitu s metrikou; tj. obě vlastnosti, které má L-C nulové.

$$\bar{\nabla} = \nabla + \frac{1}{2}\mathbb{C}$$

Oproti L-C:

$$\bar{\nabla}_{\underline{a}} g_{\underline{bc}} =: -2\mathbb{C}_{\underline{a}(\underline{bc})}$$

Konvence: $\mathbb{C} = C_{\underline{a}}{}^{m}{}_{\underline{b}}$.
Speciálně: Pro metrické derivace, tedy získáme informaci jen o torzi:

$$C_{\underline{abc}} = T_{\underline{abc}} - T_{\underline{bca}} - T_{\underline{cba}}$$

D: LC-Geodetičnost

Třída kovariantních derivací, které mají stejné geodetiky jako L-C.

$$\hat{\nabla} = \nabla + \hat{\Gamma}$$

Stejné geodetiky z ekvivalence geodetik znamená, totální antisymetrii indexů : $\hat{\Gamma}^{m}_{(\underline{ab})} = 0$.
Nebo ekvivalentně pro $\hat{C}_{\underline{abc}} = \hat{C}_{\underline{a}[\underline{bc}]}$.

Příklady:

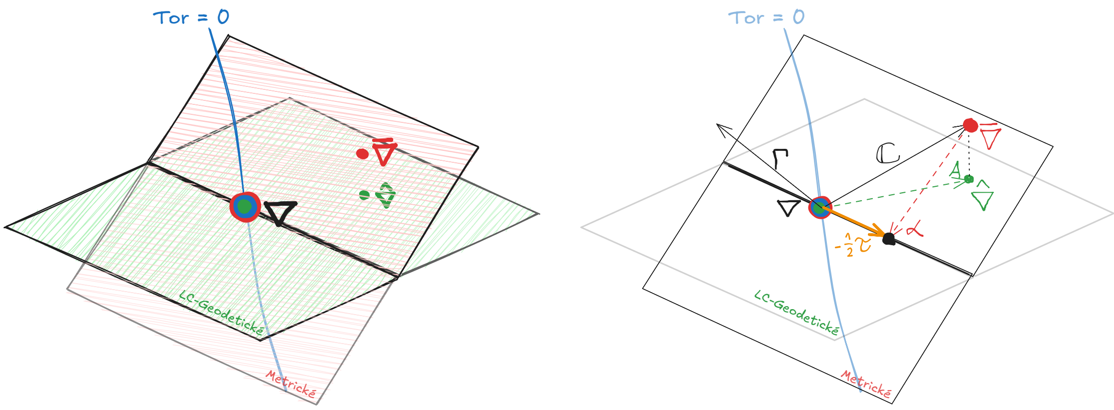
Speciálně pro geodetické a metrické derivace, dostáváme postupně podmínky na kontorzi

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_{\underline{abc}} &= \hat{C}_{\underline{a}[\underline{bc}]} \\
\hat{C}_{\underline{abc}} &= \hat{C}_{[\underline{a}|\underline{b}|\underline{c}]} \\
\Longleftrightarrow \\
\hat{C}_{\underline{abc}} &= \hat{C}_{[\underline{abc}]} = \hat{T}_{\underline{abc}}
\end{aligned}
$$

Tedy kontorze je přímo torze.

Afinní prostor derivací

Pro danou metriku



kde

- $\Gamma = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}S$,
- $\tau_{\underline{abc}} := -C_{[\underline{abc}]}$,
- $\alpha_{\underline{abc}} = \frac{4}{3}S_{\underline{a}[\underline{bc}]}$.

Křivost

Křivost

Lemma: Ultralokalita L-C Cartanova vzorce

Objekt je ultralokální v a, b, C pro a, b vektorová pole, $C \in \mathcal{T}_l{}^k M$.

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a - \nabla_{[a;b]})C$$

Dk: $\mathcal{F}M$-linearita
Jedná se o jakési rozšíření (o L-C) Cartanova vzorce:

$$\begin{aligned}
(\nabla_a \nabla_{fb} - \nabla_{fb} \nabla_a - \nabla_{[a;fb]})C = \\
&= (\nabla_a (f \nabla_b) - f \nabla_b \nabla_a - \nabla_{[a;fb]})C \\
&= f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a - \nabla_{[a;b]})C \\
&\quad + (\underbrace{\cancel{\nabla_a f}}_{\nabla_{a \cdot \mathrm{d}f}})(\nabla_b C) - \cancel{\nabla_{a \cdot \mathrm{d}f} \nabla_b C}
\end{aligned}$$

Ultralokalita v C, se dokáže později sama, neboť $(\ldots)$ objekt je pseudoderivace.

D: Riemannův tenzor

Pro a, b, c vektorová pole a L-C derivaci definujeme speciální antisymetrii derivací

$$R_{ab} c := (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla a - \nabla_{[a;b]})c.$$

V indexech:

$$(R_{a,b} c)^{\underline{k}} = a^{\underline{m}} b^{\underline{n}} R_{\underline{mn}}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}}\, c^{\underline{l}}$$

Také se používá napůl kontrahovaný:

$$R_{ab}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}}$$

jako operátor křivosti, (za chvíli).

Kovariantním diferenciálem:

$$R_{\underline{mn}}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}}\, c^{\underline{l}} = \nabla_{\underline{m}} \nabla_{\underline{n}} c^{\underline{k}} - \nabla_{\underline{n}} \nabla_{\underline{m}} c^{\underline{k}} + T_{\underline{mn}}{}^{\underline{l}}\, \nabla_{\underline{l}}\, c^{\underline{k}}$$

D: Operátor Křivosti

Definujeme pro vektorová pole a, b a L-C derivaci, Křivost jako

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ab} &:= \nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a - \nabla_{[a;b]} \\ &= a^{\underline{m}} b^{\underline{n}}\, \mathbf{R}_{\underline{mn}} \\ &= R_{ab}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}}\end{aligned}$$

Kovariantním diferenciálem:

$$\mathbf{R}_{\underline{mn}} = \nabla_{\underline{m}} \nabla_{\underline{n}} - \nabla_{\underline{n}} \nabla_{\underline{m}} + T_{\underline{mn}}{}^{\underline{l}} \nabla_{\underline{l}}$$

Poznámka.: Pro obecnou kovariantní derivaci, se může objevit torzní člen.

Lemma: Operátor křivost jako pseudoderivace

Operátor křivosti je pseudoderivace. Tzn.: na vektorová pole M, N a na skalární fci f:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ab}(M \otimes N) &= (\mathbf{R}_{ab} M) N + M\,(\mathbf{R}_{ab} N) \qquad \text{(Leibnitz)} \\ \mathbf{R}_{ab} f &= 0\end{aligned}$$

Jakožto pseudoderivace je určena akcí na tenzorech, tedy pomocí napůl kontrahovaného Riemannova tenzoru:

$$\mathbf{R}_{ab}\, T^{\underline{k}\cdots}_{\underline{l}\cdots} = R_{ab}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{n}}\, T^{\underline{n}\cdots}_{\underline{l}\cdots} + \cdots - R_{ab}{}^{\underline{n}}{}_{\underline{l}}\, T^{\underline{k}\cdots}_{\underline{n}\cdots} - \cdots$$

(Těmto rovnicím se také říká Ricciho identity)

Dk:
Jako pseudoderivace měří nekomutativitu derivací, což si ověříme:

- na vektorová pole působí jako derivace.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ab}(MN) = &\left[(\nabla_a \nabla_b M)N + (\nabla_b M)(\nabla_a N) + (\nabla_a M)(\nabla_b N) + M(\nabla_a \right. \\ &- \left[(\nabla_b \nabla_a M)N + (\nabla_a M)(\nabla_b N) + (\nabla_b M)(\nabla_a N) + M(\nabla_b \right. \\ &-(\nabla_{[a,b]} M)N - M(\nabla_{[a,b]} N) \\ \\ = &\left[\nabla_a \nabla_b M - \nabla_b \nabla_a M - \nabla_{[a,b]} M\right] N \\ &+ M \left[\nabla_a \nabla_b N - \nabla_b \nabla_a N - \nabla_{[a,b]} N\right] \\ \\ = &\,(\mathbf{R}_{ab} M) N + M\,(\mathbf{R}_{ab} N)\end{aligned}$$

- funkce však anihiluje.

$$\mathbf{R}_{ab} f = \nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f - \nabla_{[a;b]} f = 0$$

D: Ricciho identity

Pro Operátor Křivosti $\mathbf{R}_{ab}$ a obecný tenzor T, platí rozpis do Riemannova tenzoru křivosti

$$\mathbf{R}_{ab}\, T^{\underline{k}\dots}_{\underline{l}\dots} = R_{ab}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{n}}\, T^{\underline{n}\dots}_{\underline{l}\dots} + \dots - R_{ab}{}^{\underline{n}}{}_{\underline{l}}\, T^{\underline{k}\dots}_{\underline{n}\dots} - \dots .$$

Věta: Riemann pro různé CD

Pro souřadnicovou $x^\mu \to \partial$ ... $\mathrm{Tor}[\partial] = 0$ ... $\mathrm{Riemann}[\partial] = 0$.
Pro frejmovou $e_k \to \boldsymbol{\eth}$ ... $\mathrm{Tor}[\boldsymbol{\eth}] \neq 0$ ... $\mathrm{Riemann}[\partial] = 0$.

Dk: $\mathbf{R}_{ab} e_k = \boldsymbol{\eth}_a \boldsymbol{\eth}_b e_k - \boldsymbol{\eth}_b \boldsymbol{\eth}_a e_k - \boldsymbol{\eth}_{[a;b]} e_k = 0$
Je vhodný trik pro spočtení Riemannova tenzoru. Stačí přidat Γ.

Tvrzení: Riemann obecně

$$R_{\underline{ab}}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}} = \tilde{R}_{\underline{ab}}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}} + \tilde{\nabla}_{\underline{a}} \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{bl}} - \tilde{\nabla}_{\underline{b}} \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{al}} + \tilde{T}^{\underline{m}}_{\underline{ab}}\, \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{ml}} + \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{am}}\, \Gamma^{\underline{m}}_{\underline{bl}} - \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{bm}}\, \Gamma^{\underline{m}}_{\underline{al}}$$

Obsahuje: Kovariantní derivace Γ, Torzní člen T, a členy dvojitých Γ.
Speciálně:

- Přechod od $\partial \to \nabla$ $\nabla = \partial + \Gamma$

$$R_{\underline{ab}}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}} = 0 + \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{bl},\underline{a}} - \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{al},\underline{b}} + \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{am}}\, \Gamma^{\underline{m}}_{\underline{bl}} - \Gamma^{\underline{k}}_{\underline{bm}}\, \Gamma^{\underline{m}}_{\underline{al}}$$

- Přechod od $\boldsymbol{\eth} \to \nabla$ $\nabla = \boldsymbol{\eth} + \gamma$, tj. Frejmová ale s 1-formou konexe $\gamma_{\underline{a}}{}^{k}{}_{l} \equiv \omega_{\underline{a}}{}^{k}{}_{l}$:

$$\begin{aligned} R_{\underline{ab}}{}^{k}{}_{l} = {} & \boldsymbol{\eth}_{\underline{a}} \omega_{\underline{b}}{}^{k}{}_{l} - \boldsymbol{\eth}_b \omega_{\underline{a}}{}^{k}{}_{l} + t_{\underline{a\cancel{b}}}{}^{n} \omega_{\underline{n}}{}^{k}{}_{l} \\ & + \omega_{\underline{a}}{}^{k}{}_{m}\, \omega_{\underline{b}}{}^{m}{}_{l} - \omega_{\underline{b}}{}^{k}{}_{m}\, \omega_{\underline{a}}{}^{m}{}_{l} \end{aligned}$$

$$\equiv \Omega_{\underline{ab}}{}^{k}{}_{l} = \mathrm{d}_{\underline{a}}\, \omega_{\underline{b}}{}^{k}{}_{l} - \omega_{\underline{b}}{}^{k}{}_{m} \wedge \omega_{\underline{a}}{}^{m}{}_{l}$$

Tomu se také říká II. Cartanovy rovnice struktury.

Rozštěpení Riemannova tenzoru s L-C derivací

Obecně lze psát součin symetrických tenzorů $\mathbf{T}^0_{(2)} M$v symetrizovaném tvaru:

D: Symetrizace tenzoru

$$(A \wedge \wedge B)_{\underline{abcd}} = 4A_{[a|[c}B_{d]b]}$$
$$= A_{ac}B_{db} + A_{bd}B_{ca} - A_{ad}B_{cb} - A_{bc}B_{da}$$

Def: Tr ze symetrizace

$$\mathrm{Tr}[A \wedge \wedge B] = A\mathrm{Tr}B + B\mathrm{Tr}A - A \cdot B - B \cdot A$$

Speciálně $B = g$: $Tr(A \wedge \wedge g) = (d-2)A + g\,\mathrm{Tr}A$
Speciálněji $A = g$: $Tr(g \wedge \wedge g) = 2(d-1)g$

D: Bezestopá část Ricci

Vytáhneme si z Ricciho tenzoru bezestopou část S

$$\mathrm{Ric} = S + \frac{1}{d}\mathscr{R}g,$$

kde koeficient $\frac{1}{d}$ vychází z identického vztahu $\mathscr{R}$ po aplikaci Tr.

Věta: Rozštěpení Riemannova tenzoru

$$R = C + \frac{1}{d-2}\mathrm{Ric} \wedge \wedge g - \frac{1}{2(d-1)(d-2)}\mathscr{R}g \wedge \wedge g,$$

kde C je analogická bezestopá část Riemannova tenzoru tzv. Weylův tenzor. Inverzním vztahem ho lze odtud vyjádřit.
Dk:
Začněme s extrakcí Bezestopé části R, a koeficientní úměrností

$$R = C + \alpha S \wedge \wedge g + \beta\mathscr{R}\ g \wedge \wedge g$$

Postupnými aplikacemi Tr se dozvíme povahu α, β. Nakonec nahradíme S, Riccim. Zbytek Ricciho se schová ve členu β.

D: Weylův tenzor

$$C_{\underline{abcd}} = R_{\underline{abcd}} - \frac{4}{d-2}\mathrm{Ric}_{[\underline{a}|[\underline{c}}g_{\underline{d}]|\underline{b}]} + \frac{2\mathscr{R}}{(d-1)(d-2)}g_{[\underline{a}|[\underline{c}}g_{\underline{d}]|\underline{b}]}$$

(Pro konformně ploché prostoročasy $\implies$ $C = 0$. Speciálně ve 3 dimenzích je identicky nulový, ale to neimplikuje, že jsou si všechny prostoročasy konformně ekvivalentní, je třeba přidat podmínku, kterou později uvidíme.)

Další typy rozštěpení Riemannova tenzoru

D: Schoutenův

$$\mathscr{Sch} = \frac{\mathscr{R}}{d-2}\left(\mathrm{Ric} - \frac{1}{2(d-1)}\mathscr{R}g\right)$$

$$\mathrm{Tr}[\mathscr{Sch}] = \frac{\mathscr{R}}{2(d-1)}$$

D: Einsteinův tenzor

$$\mathrm{Ein} = \mathrm{Ric} - \frac{1}{2}\mathscr{R}g$$

$$\mathrm{Tr}[\mathrm{Ein}] = -\frac{d-2}{2}\mathscr{R}g$$

D: Cottonův tenzor

- Antisymetrizace kovariantní derivace Schoutenova (už derivace Riemanna)

$$\mathscr{Cot}_{\underline{amn}} = \nabla_{\underline{m}}\mathscr{Sch}_{\underline{na}} - \nabla_{\underline{n}}\mathscr{Sch}_{\underline{ma}}$$

- Z konstrukce je antisymetrický ve dvou zadních indexech, ale Schoutenův tenzor byl symetrický tenzor. Z čehož můžeme dedukovat:

$$\mathscr{Cot}_{[\underline{amn}]} = 0$$

- Divergence Weylova tenzoru je zbytek po bezestopé části Riemanna. Ve třech dimenzích Cottonův tenzor nemusí být vůbec nulový, ale pro konformně ploché už musí být i on.

$$\nabla_{\underline{k}} C_{\underline{ab}}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{c}} = (d-3)\mathscr{Cot}_{\underline{abc}}$$

- I v těch netriviálních indexech je stopa nulová.

$$\mathscr{Cot}^{\underline{n}}{}_{\underline{na}} = 0$$

- v $d = 3$ lze udělat duál a pracovat s tenzorem, který má dva indexy.

$${}^*\mathscr{Cot}_{\underline{a}}^{\underline{b}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\underline{bkl}}\mathscr{Cot}_{\underline{akl}}$$

Z Riemannova tenzoru má celou informaci o křivosti, ale lze extrahovat z něj další speciální informaci.

Věta: Symetrie Riemannova tenzoru

Pro dimenze $d > 2$ má Riemann počty komponent omezené symetriemi

$$R_{[ab]\,[cd]} \to \left(\frac{d(d-1)}{2}\right)^2 \text{volností}$$

Další symetrie vychází z Bianchiho identit, kterých je d a to jsou zbylé nezávislé restrikce

$$R_{[abc]\,d} = 0 \to \frac{d(d-1)(d-2)}{3} \cdot d \text{ vazeb}$$

což ve výsledku dává: $\frac{d^2(d^2-1)}{12}$.

D: II. Cartanovy rovnice struktury

Určují Operátor křivosti, z 1-formy konexe, (I. Cartanovy rovnice struktury)

$$\Omega_{\underline{a}\underline{b}}{}^k{}_l = \mathrm{d}_{\underline{a}}\, \omega_{\underline{b}}{}^k{}_l - \omega_{\underline{b}}{}^k{}_m \wedge \omega_{\underline{a}}{}^m{}_l$$

Též zvané 2-formy křivosti

D: Cartanovy rovnice struktury

I. Cartanovy rovnice struktury určují 1-formu konexe:

$$\mathrm{d}e^m + \omega^m{}_n \wedge e^n = 0$$

II. Cartanovy rovnice struktury určují Operátor křivosti z 1-formy konexe. 2-formy konexe

$$\Omega_{\underline{a}\underline{b}}{}^k{}_l = \mathrm{d}_{\underline{a}}\, \omega_{\underline{b}}{}^k{}_l - \omega_{\underline{b}}{}^k{}_m \wedge \omega_{\underline{a}}{}^m{}_l$$

$$\Omega^k{}_l = \mathrm{d}\omega^k{}_l + \omega^k{}_n \wedge \omega^n{}_l$$

Stopy Riemannova tenzoru

V principu můžeme udělat dvě stopy. (1,2 s 3) nebo (3 s 4)
Kontrakci Riemannova tenzoru v jednom z prvních dvou indexech s třetím. Nazýváme Ricciho tenzor:

$$\mathrm{Ric}_{\underline{a}\underline{b}} = \mathrm{C}^{\underline{d}}_{\underline{c}} R_{\underline{a}\underline{d}}{}^{\underline{c}}{}_{\underline{b}}$$

Nestandardní stopa Riemanna:

$$\mathrm{Tr}[R]_{\underline{a}\underline{b}} = R_{\underline{a}\underline{b}}{}^{\underline{c}}{}_{\underline{c}}$$

(V případě L-C derivace je identicky nula.)

Lemma: Význam $\mathrm{Tr}[R_{ab}]$

V aplikaci na totálně antisymetrickou formu, tuto formu vnímá jako skalár. Podobně jako u akce pseudoderivace na tot. antisymetrické formy, kde byla konstanta úměrnosti stopa tenzoru:

$$\mathbf{R}_{ab}\omega_{a_1 \dots a_d} = -\mathrm{Tr}[\mathbf{R}_{ab}] = \omega_{a_1 \dots a_d}$$

Jelikož je Riemannova křivost komutace derivací, tak nám tato rovnice říká, jak na těchto „skalárech" derivace nekomutuji.

Veta: Integrabilita ∇ na $\mathcal{A}^d M$

$$\mathrm{Tr}\mathbf{R} = 0 \iff \exists \omega \in \mathcal{A}^d M, \quad \nabla\omega = 0$$

Derivace zachovávající pojem objemu.

Dk:

$\Longleftarrow$: je triviální.

$\Longrightarrow$: $\mathrm{Tr}\mathbf{R} = 0$ a také

$$\nabla_k \tilde{\omega}_{a_1 \dots a_d} = \lambda_k \tilde{\omega}_{a_1 \dots a_d},$$

kde λ spočteme z

$$\lambda_k = \frac{1}{d!}(\nabla_k \tilde{\omega}_{a_1 \dots a_d})\tilde{\omega}^{-1\, a_1 \dots a_d}.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{ab}\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_d} &= \nabla_a\nabla_b\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_d} - \nabla_b\nabla_a\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_d} + T^k_{ab}\nabla_k\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_d} = \\
&= \nabla_a\left(\lambda_b\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_d}\right) - \nabla_b\left(\lambda_a\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_d}\right) - T^k_{ab}\lambda_k\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_d} \\
&= \left[\left(\nabla_a\lambda_b - \nabla_b\lambda_a + T^k_{ab}\lambda_k\right) + \cancel{\lambda_b\lambda_a - \lambda_a\lambda_b}\right]\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_d} \\
&= \mathrm{d}_a\lambda_b\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_d} = -\operatorname{Tr}\left[R_{ab}\right]\tilde{\omega}_{a_1\ldots a_d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0 \overset{!}{=} \operatorname{Tr}\left[R_{ab}\right] = -\mathrm{d}_a\lambda_b \Rightarrow \lambda = -\mathrm{d}f \\
&\omega := e^{-f}\tilde{\omega} \\
&\nabla\omega = e^{-f}\nabla\tilde{\omega} - e^{-f}\mathrm{d}f = e^{-f}\tilde{\omega}(\lambda - \mathrm{d}f) = 0.
\end{aligned}$$

Lokálně tedy $\mathrm{Tr}\mathbf{R}_{ab}$ je nula páč lambda má potenciál, který využijeme k přeškálování na nové ω.

Věta: Bianchiho identity

I. Bianchiho Identity

$$R_{[\underline{a}\underline{b}}{}^{\underline{n}}{}_{\underline{c}]} = \nabla_{[\underline{a}}T^{\underline{n}}_{\underline{b}\underline{c}} - T^{\underline{k}}_{[\underline{a}\underline{b}}T^{\underline{n}}_{\underline{c}]\underline{k}}$$

II. Bianchiho Identity

$$\nabla_{[\underline{a}}R_{\underline{b}\underline{c}]}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}} = T^{\underline{n}}_{[\underline{a}\underline{b}}R_{\underline{c}]\underline{n}}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}}$$

Speciálně, bez torze

I. $R_{[\underline{a}\underline{b}}{}^{\underline{n}}{}_{\underline{c}]} = 0$

II. $\nabla_{[\underline{a}}R_{\underline{b}\underline{c}]}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}} = 0$

Dk:

Pro beztorzní

I.

$$R_{ab}{}^n{}_c\omega_n = -\mathbf{R}_{ab}\omega_c = -\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]} + \nabla_{[b}\nabla_a\omega_{c]} = -\nabla_{[a}\left(\nabla_b\omega_{c]} - \nabla_c\omega_{b]}\right) =$$

II.

$$\begin{aligned}
(\nabla_a R_{bc}{}^k{}_l)\,a^l &= \nabla_a\underbrace{(R_{bc}{}^k{}_l\,a^l)}_{\mathbf{R_{bc}}\,a^k}\underbrace{-R_{bc}{}^k{}_l\,\nabla_a a^l + R_{bc}{}^l{}_a\nabla_l a^k}_{-\mathbf{R}_{bc}\nabla_a\,a^k}\overbrace{-R_{bc}{}^l{}_a\nabla_l a^k}^{\text{I. Bianchi}=0} \\
&= \nabla_a\nabla_b\nabla_c a^k - \nabla_a\nabla_c\nabla_b a^k - \nabla_b\nabla_c\nabla_a a^k + \nabla_c\nabla_b\nabla_a a^k \\
[abc] & \\
&= 0
\end{aligned}$$

Úžené Bianchiho identity

Zúžené B1:

$$2\mathrm{Ric}_{[ab]} + \mathrm{Tr}[\mathbf{R}_{ab}] = \mathrm{d}_n T^n_{ab} + \nabla_n T^n_{ab}$$

Zúžené B2 a):

$$\mathrm{d}_a \mathrm{Tr}[\mathbf{R}_{bc}] = 0$$

Zúžené B2 b):

$$\nabla_a \mathrm{Ric}_{bc} - \nabla_b \mathrm{Ric}_{ac} + T^n_{ab}\mathbf{R}_{nc} = \nabla_m R_{ab}{}^m{}_c + T^n_{am} R_{bn}{}^m{}_c - T^n_{bm} R_{an}{}^m{}_c$$

Speciálně bez torze

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Ric}_{[ab]} &= -\mathrm{Tr}[\mathbf{R}_{ab}] \\ \mathrm{d}_a \mathrm{Tr} R_{ab} &= 0 \qquad \nabla_{[a} \mathrm{Tr}[\mathbf{R}_{bc]}] = 0 \\ 2\nabla_{[a} \mathrm{Ric}_{b]c} &= \nabla_m R_{ab}{}^m{}_c \end{aligned}$$

Křivost Levi-Civitovy Derivace

Křivost Levi-Civitovy derivace

Máme k dispozici metriku g, a k ni metrickou L-C derivaci $\nabla g = 0$, $\mathrm{Tor}[\nabla] = 0$, a tak umíme sundávat indexy $\to R_{abcd}$.

Symetrie Křivosti L-C

Platí tedy:

1. $R_{abcd} = R_{[ab]cd} = R_{ab[cd]}$
2. $R_{[abc]d} = 0$ z B1 a $R_{a[bcd]} = 0$
3. $R_{abcd} = R_{cdab}$

Dk:

1. Použijeme, že L-C $\mathbf{R}_{ab}$ je metrická pseudoderivace vyjádřená pomoci Riemannova tenzoru:

$$0 = \mathbf{R}_{ab} g_{cd} = -R_{ab}{}^{m}{}_{c}\, g_{md} - R_{ab}{}^{m}{}_{d}\, g_{cm} = -2R_{ab\,(cd)}.$$

2. Spočítejme

$$\begin{aligned} 3R_{a[bcd]} &= R_{abcd} + R_{acbd} + R_{adbc} \\ &= \frac{1}{2}\left[R_{\underline{abcd}} + R_{\underline{badc}} + R_{\underline{cadb}} + R_{\underline{adbc}} + R_{\underline{dacb}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-R_{\underline{bcad}} - R_{\underline{dbac}} - R_{\underline{cdab}}\right] \\ &= \frac{3}{2} R_{[\underline{bcd}]\underline{a}} = 0 \end{aligned}$$

Netriviální úžení

Ricciho tenzor je zde symetrický

$$\mathrm{Ric}_{\underline{ab}} = \mathrm{Ric}_{(\underline{ab})},$$

a to souvisí s antisymetričností v zadních dvou indexech

$$\mathrm{Tr} R_{\underline{ab}} = 0.$$

Tuto vlastnost můžeme dosadit do zúžených 2. Bianchiho identit), které zúžíme dále pomocí g^{bc} kde bez Torze:

$$
\begin{aligned}
&2\nabla_{[a}\mathrm{Ric}_{b]c} - \nabla_m R_{ab}{}^{m}{}_{c} = 0 \;\; /g^{bc} \\
\implies \quad &\nabla^c \left(\mathrm{Ric}_{cn} - \frac{1}{2}\mathscr{R} g_{cn}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Objekt uvnitř divergence je Einsteinův tenzor.

Lemma: Dualita Riemannova tenzoru v $d = 3$

Informaci antisymetrických tenzorů můžeme duálně kompaktifikovat, pro obě dvojice antisymetrických indexů:

$$R_{\underline{abcd}} = \varepsilon_{\underline{abk}}\varepsilon_{\underline{cdl}}{}^{*}R^{*\underline{kl}}.$$

${}^{*}R^{*\underline{kl}}$ je již symetrický.
A postupným stopováním (podle signatury metriky):

$$\mathrm{Ric}_{\underline{ab}} = \mp({}^{*}R^{*}{}_{\underline{ab}} - \mathrm{Tr}[{}^{*}R^{*}]g_{\underline{ab}})$$

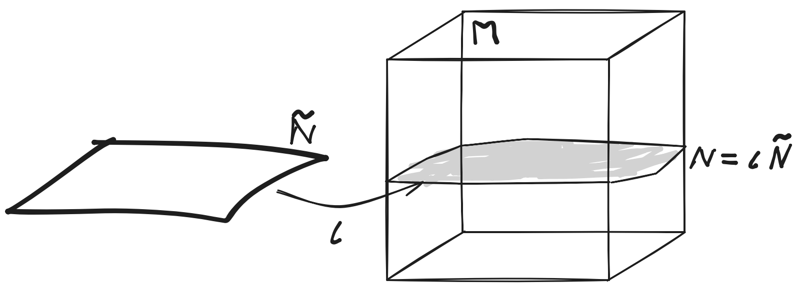
se dostáváme až na skalární křivost:

$$\mathscr{R} = \pm 2\ \mathrm{Tr}[{}^{*}R^{*}]$$

Ovšem při detailnějším rozboru si možná všimneme podobnosti s Einsteinovým tenzorem a to ten, že

$$\mathrm{Ein}_{\underline{ab}} = \mp\ {}^{*}R^{*}{}_{\underline{ab}}.$$

Veškerá informace Křivosti je obsažena v Einsteinově tenzoru. A tedy na bezestopou část, Weylův tenzor, nic nezbude, tj. $C = 0$.



Integrovatelné hustoty

Integrovatelné hustoty

Integrace na varietách. Toto poslední téma je kulminace veškerých příprav, které jsme za semestry provedli. Pokud čtenář narazí na věci, které ho zmátnou, je srdečně vítám využít odkazy, kterých je v těchto posledních kapitolách hojně.

Motivace:

Obecně integrujeme tzv. *Extenzivní veličiny*, tj. takové veličiny rozložené v prostoru (na varietě) a aditivní v oblasti. Typicky $m_\Omega = \int_\Omega \mathrm{d}m$, kde $\mathrm{d}m$ budou hladké míry, kteréžto budou středem našeho zájmu z pohledu diferenciální geometrie.
Mají skalární charakter, aditivita vyplývá z ultralokality. Takové míry tvoří 1-dim vektorový prostor, a jsou si tedy ekvivalentní až na násobek konečným reálným číslem $\mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}V$. Můžu se tedy bavit i o podílu hodnot $\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$.
Takže si stačí zvolit referenční hustotu a ostatní označit třeba právě tímto násobkem: $\mathrm{d}\rho \equiv \rho \mathrm{d}V$.

Referenční souřadnice:

(U, x), s U oblast s x. Oblast $\Omega \subset U$, tj. můžu oblast pokrýt stejnými souřadnicemi. Pak můžeme definovat souřadnicový objem $\Delta^m x = \int_\Omega \mathrm{d}^m x$, objem měřený souřadnicovými buňkami.
Do jiných souřadnicových objemů se můžu transformovat pomocí Jakobiánu:

$$\int_\Omega \mathrm{d}^m x = \int_\Omega \left| \det \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} \right| \mathrm{d}^m x'$$

čili $\mathrm{d}^m x = \left| \det \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} \right| \mathrm{d}^m x'$, jak se mění měřící objem.
Obecnou hustotu pak pomocí reálný koeficientu $\alpha_x \equiv da_x$ vztaženému k referenčním x:

$$\mathrm{d}a = \alpha_x \mathrm{d}^m x \equiv da_x \mathrm{d}^m x$$

Z toho plynou transformační vlastnosti

$$\alpha_{x'} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}^m x'} = \left|\det \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\right| \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}^m x^{l'}} = \left|\det \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\right| \alpha_x.$$

Čili pak je jedno, ve kterých referencích měřím, pokud jsou koeficienty patří souřadnicím:

$$\int_\Omega \mathrm{d}a = \int_\Omega \alpha_x \mathrm{d}x = \int_\Omega \alpha_{x'} \mathrm{d}x'$$

Paradoxně by se zdálo, že $\left|\det \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\right|$ potřebuje informaci nejen v jednom bodě, tj. ve sporu s ultralokalitou, ale zde postačí informace z tečného prostoru v tom bodě. Souřadnicová buňka má tak tvar "napnutý" na souřadnicových vektorech $\frac{\partial}{\partial x^k}$ (resp. bázových vektorech $\mathbf{e}_k$)

$$\mathrm{d}a\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\right] \equiv da_x$$

množství kvantity "napnuté" na bázi. A dále v závislosti na libovolné bázi

$$\mathrm{d}a[\mathbf{e}_{k'}] \equiv \mathrm{d}a[A^l_{k'}\mathbf{e}_l] = \left|\det A^l_{k'}\right| \mathrm{d}a[\mathbf{e}_l].$$

Značení:

Ve fyzikálním kontextu použijeme $\mathrm{d}m$, $\mathrm{d}q$
Pro odlehčení značení $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{m}$, případně $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{m}$

D: Integrovatelná hustota v bodě

nad $\mathbf{T}_x M$ je

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : \text{báze} \mathbf{T}_x M &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{e}_k &\mapsto \mathfrak{a}[\mathbf{e}_k], \end{aligned}$$

splňující transformační vlastnost

$$\mathfrak{a}[A^k_{l'}\mathbf{e_k}] = \left|\det A^k_{l'}\right| \mathfrak{a}[\mathbf{e}_{l'}]$$

(Jakési zobecněné tenzory, reprezentace transformací na objektech lehce obecnější než tenzor)

Prostor hustot v x ozn. $\mathbf{H}_x M$, a má přirozenou vektorovou strukturu:

- $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})[\mathbf{e}_k] = \mathfrak{a}[\mathbf{e}_k] + \mathfrak{b}[\mathbf{e}_k]$

- $(r\mathfrak{a})[\mathbf{e}_k] = r\mathfrak{a}[\mathbf{e}_k]$
  Prostor hustot je 1-dim:
- $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}[\mathbf{e}_k]}{\mathfrak{b}[\mathbf{e}_k]}$, pro libovolnou bázi (pro nenulové hustoty $\mathfrak{b}$)

(Speciálně při zobecnění do pole se prostor popisuje z pohledu funkčního a tedy to reflektuje značení $\tilde{\mathcal{F}}M$)

D: Bázové hustoty

Bázi $\mathbf{e}_j \mapsto \mathfrak{e}$, tak že $\mathfrak{e}[\mathbf{e_j}] = 1$. A tedy v souřadnicích bychom označili, jak známe: $\frac{\partial}{\partial x^j} \mapsto \mathrm{d}^m x$, tak že $\mathrm{d}^m x\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 1$. Nebo obecně

$$\mathfrak{a} = \underline{\mathfrak{a}_x}_{\mathbb{R}} \mathrm{d}^m x = \underline{\mathfrak{a}_e}_{\mathbb{R}} \mathfrak{e}$$

Konzistentně taky transformace $\mathrm{d}^m x' = \mathrm{d}^m x'\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right]$ $\mathrm{d}^m x = \mathrm{d}^m x'\left[\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{k'}}\right] \mathrm{d}^m = \left|\det \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right| \underbrace{\mathrm{d}^m x\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right]}_{1} \mathrm{d}^m x$

.

Pozn: Integrování hustot

Ω Pokryté mapou U, x

$$\int_\Omega \mathfrak{a} = \int_\Omega \mathfrak{a}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right] \mathrm{d}^m x$$

Pokud Ω je pokryto více mapami, pak rozsekáme na menší oblasti a aditivně posčítáme příspěvky každé části. (hladkým rozsekáním, neostře *Rozkladem jednotky*)

D: Hustoty obecné váhy w

$\mathfrak{a}$ je hustota obecné váhy w z $\mathbf{H}^w_x M$. (Budeme pracovat pouze s váhami konstantními na celé varietě)

$$\mathfrak{a} : \text{báze } \mathbf{T}_x M \to \mathbb{R}$$

tak, že $\mathfrak{a}[A^k_{l'}\mathbf{e}_k] = \left|\det A^k_{l'}\right|^w \mathfrak{a}[\mathbf{e}_k]$
Opět se jedná o 1-dim vektorový prostor. Umožňuje definovat součin hustot: $\mathbf{H}^a_x M \times \mathbf{H}^b_x M \to \mathbf{H}^{a+b}_x M$, neboli $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})[\mathbf{e}_j] = \mathfrak{a}[\mathbf{e}_j]\mathfrak{b}[\mathbf{e}_j]$. A transformační vlastnosti jsou naprosto analogické.
A p-mocninovou analogii: $\mathbf{H}^w_x M \to \mathbf{H}^{pw}_x M$, neboli $(\mathfrak{a}^p)[\mathbf{e}_j] = (\mathfrak{a}[\mathbf{e}_j])^p$. (Mohou nastat problémy pokud by hustoty byly záporné).

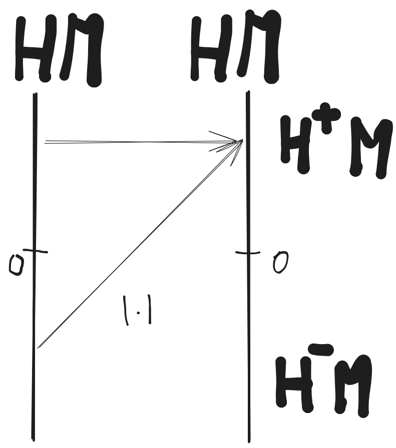
D: Absolutní hodnota

Operace

$$
\begin{aligned}
|\cdot| : \mathbf{H}_x M &\to \mathbf{H}^+_x M \\
\mathfrak{a} &\mapsto |\mathfrak{a}|
\end{aligned}
$$

Tedy $|\mathfrak{a}|[\mathbf{e}_j] = |\mathfrak{a}[\mathbf{e}_j]|$.
Rozlišíme tak kladné a záporné hustoty.

$$\mathbf{H}^\pm_x M \ni \iff \mathfrak{a}[\mathbf{e}_j] \gtrless 0$$



D: Tenzorové hustoty

Další zobecnění se nabízí Tenzorové hustoty.

$$\tilde{\mathbf{T}}^{w}{}^k_l M = \mathbf{T}^k_l \otimes \mathbf{H}^w M$$

Například: $\mathfrak{a}^{\underline{m}} = a^{\underline{m}}\mathfrak{m}$, takže je násobení tou hustotou.

D: Geometrický objem

Daný metrikou, krychle ve smyslu metriky g. Určuje ortonormální bázi $\mathbf{e}_j$.

$$\mathrm{d}V[\mathbf{e}_j] = 1$$

nezávisle na $\mathbf{e}_j$ Jakobi ± 1.

V obecné neortonormální bázi $\mathbf{e}_k$ tedy: $\mathrm{d}V[\mathbf{e}_k] = |\det g_{kl}|^{1/2}$, $g_{kl} = \mathbf{e}_k \cdot g \cdot \mathbf{e}_l$
.
$\det g_{kl} = \det(A^{k'}_k A^{l'}_l g_{k'l'}) = (\det A^{k'}_k)^2 \underbrace{\det g_{k'l'}}_{\mathrm{sign}\, g}$ (sign dál nepíšeme) a tedy po odmocnění dostáváme absolutní hodnotu $|\det g_{kl}|^{1/2} = |\det A^{k'}_k|$, kterou můžeme dosadit do transformace bázové hustoty.
(Časté značení $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}\Omega$ a pro metriky $\mathrm{g}^{1/2}$, příp. $\mathcal{g}^{1/2}$)

D: Determinant metriky

Dříve jsme použili determinant metriky, to můžeme obecněji zavést pro tenzory stupně 2, kterým přiřadí integrální hustotu váhy 2.

$$\begin{aligned} \mathrm{Det} : \mathbf{T}^0_2 M &\to \mathbf{H}^2 M \\ g &\mapsto \mathrm{Det} g \end{aligned}$$

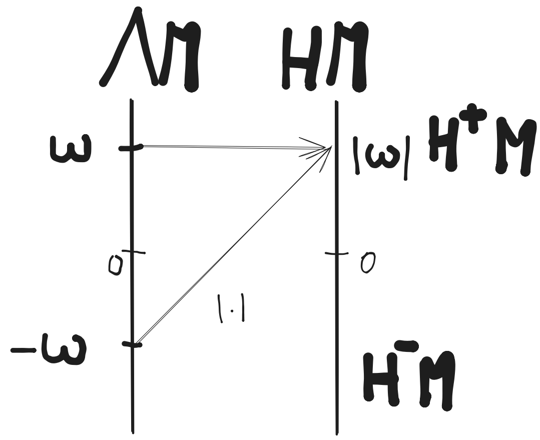
Tedy $(\mathrm{Det} g)[\mathbf{e}_k] = \det g_{kl}$. Což označujeme $\mathrm{g} \equiv |\mathrm{Det} g|$.

Vztah $\mathbf{H} M$ a $\Lambda^m M$

Totálně antisymetrické formy (TASF) $\omega \in \Lambda^m M$ s bází $\varepsilon = e^1 \wedge \dots \wedge e^m$. $\omega = \omega_{1\dots m}\varepsilon = \omega_{1'\dots m'}\varepsilon'$. Pro ně víme, že $\omega_{1'\dots m'} = (\det A^k_{l'})\omega_{1\dots m}$, kde jsou A transformace antisym. báze $\varepsilon^k = A^k_{l'}\varepsilon^{l'}$. Vidíme, že jsou velmi podobné transformacemi integrálním hustotám, avšak jsou citlivější na znaménko. Nabízí se definovat absolutní hodnotu formy.

D: Absolutní hodnota TASF

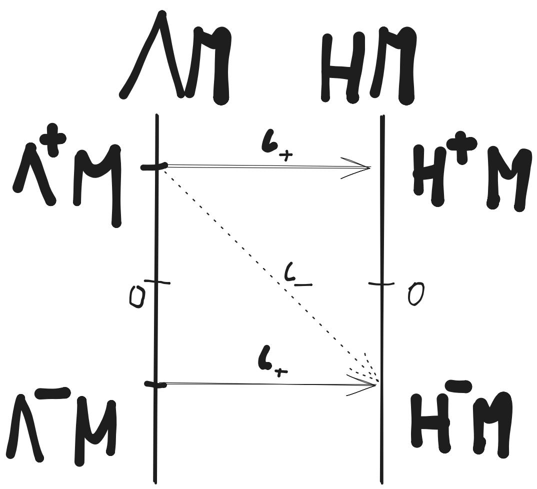
$$\begin{aligned} |\cdot| : \Lambda^m M &\to \mathbf{H} M \\ |\omega|[\varepsilon_j] &= |\omega_{1\dots m}| \end{aligned}$$



Komentář: U forem nevíme, které jsou hladké a které záporné bez dodatečného určení. U hustot to víme. Podle obrázku intuitivně vidíme, že prostory ΛM a $\mathbf{H}M$ jsou podobně velké. A protože to je jen absolutní hodnota, tak mají stejnou škálu.

Orientace dvěma způsoby:

- Báze zvolíme jednu třídu orientované báze jako kladnou.
- TASF pokud by při stejně zvolené bázi měly stejné znaménko komponenty. (znaménko faktoru úměrnosti) a volíme kladnou.
- zvoleným isomorfizmem $\Lambda^m M$ a $\mathbf{H}M$:



D: Tenzor orientace

Máme zvolenou orientaci bází, TASF a ι_+. Pak pro libovolnou $\omega \in \Lambda^m M$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon} &= \omega(\iota_+\omega)^{-1} \in \Lambda^m \otimes \mathbf{H}^{-1}M, \\
\tilde{\varepsilon}^{-1} &= \omega^{-1}(\iota_+\omega) \in \mathbf{T}_0^{[m]} \otimes \mathbf{H}M,
\end{aligned}
$$

kde je ω^{-1} inverze TAFS.

Poznámky:

Díky tomu lze ι_+, ι_- psát pomocí $\tilde{\varepsilon}^{-1}$, $\tilde{\varepsilon}$. Oběma směry:

- $\iota_+ : \Lambda^m M \to \mathbf{H}M \quad \alpha \mapsto \tilde{\varepsilon}^{-1} \bullet \alpha$
- $\iota_+^{-1} : \mathbf{H}M \to \Lambda^m M \quad \mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}\tilde{\varepsilon}$
  Pro positivní ω: $\iota_+\omega = |\omega|$ z čehož vyplývá, že $\tilde{\varepsilon} = \omega|\omega|^{-1}$.
  V komponentách vyjádřené tenzory orientace:
- V positivně orientovaný souřadnicích (tj. v positivně orientované bázi) $\mathrm{d}^m x = |\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m|$, dostáváme

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon} &= (\mathrm{d}^m x)^{-1} \;\; \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m \\
\tilde{\varepsilon}^{-1} &= (\mathrm{d}^m x) \;\; \partial_{x^1} \wedge \cdots \wedge \partial_{x^m}
\end{aligned}
$$

  a v takovéto bázi je komponenta Tenzoru orientace, též „Levi-Civitův symbol”, triviálně $\tilde{\varepsilon}_{x\,1\ldots m} = 1 = \tilde{\varepsilon}^{-1}{}_x^{1\ldots m}$ (znaménkové změny díky permutaci se kompenzují). Pro negativně orientovanou bázi budou komponenty -1.
  Je dobře vidět, jak jednoduše $\tilde{\varepsilon}$ působí, kde odebírá, resp. přidává $\mathrm{d}x \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x$ část a přidává, resp. odebírá $\mathrm{d}^m x$. Můžeme tak ztotožnit přímo komponenty $\alpha_{1\ldots m} = \mathfrak{a}_x$:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_{1\ldots m} \;\; \mathrm{d}^1 x \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m \\
\iota_+ \to \mathfrak{a} &= \mathfrak{a}_x \;\; \mathrm{d}^m x
\end{aligned}
$$

D: Orientovatelnost variety

Pokud orientace lze volit spojitě na celé varietě stejně. (viz. Möbiuv pásek). Existuje hladký globální tenzor orientace $\tilde{\varepsilon}$.

Na orientovatelných varietách lze integrovat TASFormy:

$$
\int_\Omega \alpha = \int_\Omega \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} = \tilde{\varepsilon}^{-1} \bullet \alpha
$$

D: Derivace hustot

Rozšíření tenzorové derivace na pole integrovatelných hustot $\mathbf{H}\,M$, respektive i na hustoty obecné váhy. Komutuje s $\iota_\pm$, (není třeba globální orientovatelnost)

$$\mathbf{D}(\iota_+\alpha) = \iota_+(\mathbf{D}\alpha)$$

a zároveň, jelikož $\mathfrak{a} = \iota_+\alpha = \tilde{\varepsilon}^{-1} \bullet \alpha$ a $\alpha = (\iota_+)^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\tilde{\varepsilon}^{-1}$, tak

$$\tilde{\varepsilon}\mathbf{D}\mathfrak{a} = \mathbf{D}(\tilde{\varepsilon}\mathfrak{a})$$

$\iff$ Podmínka $\mathbf{D}\tilde{\varepsilon} = 0$. Je konstantní vůči derivování. a nezávisí na konkrétní volbě orientace (± 1)
Pak již můžeme psát přímo derivace tenzorové hustoty.

$$\mathbf{D}\mathfrak{a} = \underbrace{\mathfrak{a}\alpha^{-1}}_{\tilde{\varepsilon}^{-1}} \bullet \mathfrak{D}\alpha$$

Poznámky:

- Pro $w \in \mathbb{R}$ platí

  $$\mathbf{D}\mathfrak{m}^w = w\mathfrak{m}^{w-1}\ \ \mathbf{D}\mathfrak{m}$$

- Akce pseudoderivace na $\mathbf{H}\,M$.

  $$\mathbf{M}\tilde{\varepsilon} = 0, \quad \mathbf{M}(\iota_+\alpha) = \iota_+(\mathbf{M}\alpha),$$

  ale pseudoderivace na TASF se zjednoduší na přenásobení stopou tenzoru $\mathbf{M}$. Takže pro hustoty:

  $$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathfrak{m} &= -M^{n}_{\underline{n}}\mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \text{ váhy } 1 \\ \mathbf{M}\mathfrak{a} &= -w\, M^{n}_{\underline{n}}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} \text{ váhy } w \end{aligned}$$

- Tyto vlastnosti již určují kovariantní derivaci na $\mathbf{H}\,M$
  $\nabla\tilde{\varepsilon} = 0$,
  $\nabla = \bar{\nabla} + \Gamma$.
  Působení na tenzorovou hustotu $\tilde{A}$ jako

  $$\nabla_{\underline{m}}\tilde{A}^{k\dots}_{\underline{l}\dots} = \bar{\nabla}\tilde{A}^{k\dots}_{\underline{l}\dots} + \Gamma^{k}_{\underline{mn}}\tilde{A}^{n}_{\underline{l}} + \dots - \Gamma^{n}_{\underline{ml}}\tilde{A}^{k}_{\underline{n}} - \dots - w\Gamma^{n}_{\underline{mn}}\tilde{A}^{k}_{\underline{l}}$$

  a přibude stopa z Γ.

- Ricciho identity jelikož, operátor křivosti je pseudoderivace a

$$\mathbf{R}_{ab}\ \mathfrak{m} = -wR_{ab}{}^{\underline{n}}{}_{\underline{n}}\ \mathfrak{m} = -w\ a^{\underline{k}} b^{\underline{l}}\ \mathrm{Tr}[\mathbf{R}_{\underline{kl}}]\ \mathfrak{m}$$

$$\mathbf{R}_{\underline{kl}}\ \mathfrak{m} = -w\ \mathrm{Tr}[\mathbf{R}_{\underline{kl}}]\ \mathfrak{m} = \left[\nabla_{\underline{k}}\nabla_{\underline{l}} - \nabla_{\underline{l}}\nabla_{\underline{k}} - T^{\underline{n}}_{\underline{kl}}\nabla_{\underline{n}}\right]\mathfrak{m}$$

Kdysi byla formulována podmínka integrability (CD) na TASF, která se jednoduše přeloží na hustoty.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\mathbf{R} = 0 &\iff \exists\omega \in \mathcal{A}^d M, \quad \nabla\omega = 0 \\ &\iff \exists\mathfrak{a}, \nabla\mathfrak{a} = 0 \end{aligned}$$

Tj. Stopa Riemannova tenzoru je nulová když je |objemová hustota konstantní vůči kovariantní derivaci. (Konkrétně L-C je metrická, tedy zachovává i metrický objemový element)

Divergence Tenzorových Hustot

Divergence tenzorových hustot

Dualita TAS forem a TAS tenzorových hustot

Vztah antisymetrických p-forem a duální struktuře antisymetrických tenzorových hustot.

$$\begin{array}{rll} \Lambda^p M & \mathcal{A}^p M & \text{p-formy} \\ \mathbf{H} \otimes \mathbf{T}_0^{[p]} M = \Lambda^{\# p} M & \mathcal{A}^{\# p} M & \text{p-AS tenz. hustoty} \end{array}$$

D: Hustotní duál

$$\# : \Lambda^n M \longleftrightarrow \Lambda^{\# \hat{n}} M, \quad n + \hat{n} = m$$

se dimenze sčítají podobně jako u hoedgeova duálu. Nyní to jsou však dvě operace.

$$\# : \Lambda^n M \to \Lambda^{\# \hat{n}} M, \quad \alpha \mapsto \# \alpha = \tilde{\varepsilon}^{-1} \bullet \alpha = \mathfrak{a}$$

(část horních indexů tenzoru orientace se zkrátí s dolními index formy α a zbude hustota)
Což vidíme v indexech $\mathfrak{a}^{a_1 \dots a_{\hat{n}}} = \frac{1}{n!} \tilde{\varepsilon}^{-1\, a_1 \dots a_{\hat{n}} k_1 \dots k_n} \alpha_{k_1 \dots k_n}$.

$$\# : \Lambda^{\# \hat{n}} M \to \Lambda^n M, \quad \mathfrak{a} \mapsto \alpha = \# \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \bullet \tilde{\varepsilon}$$

(Úženo z opačné strany. Používáme konvenci řazení norm-tečn složky, formy přísluší tečn.)
Pro ilustraci v indexech $\alpha_{a_1 \dots a_n} = \frac{1}{n!} \mathfrak{a}^{k_1 \dots k_{\hat{n}}} \tilde{\varepsilon}_{k_1 \dots k_{\hat{n}} a_1 \dots a_n}$.

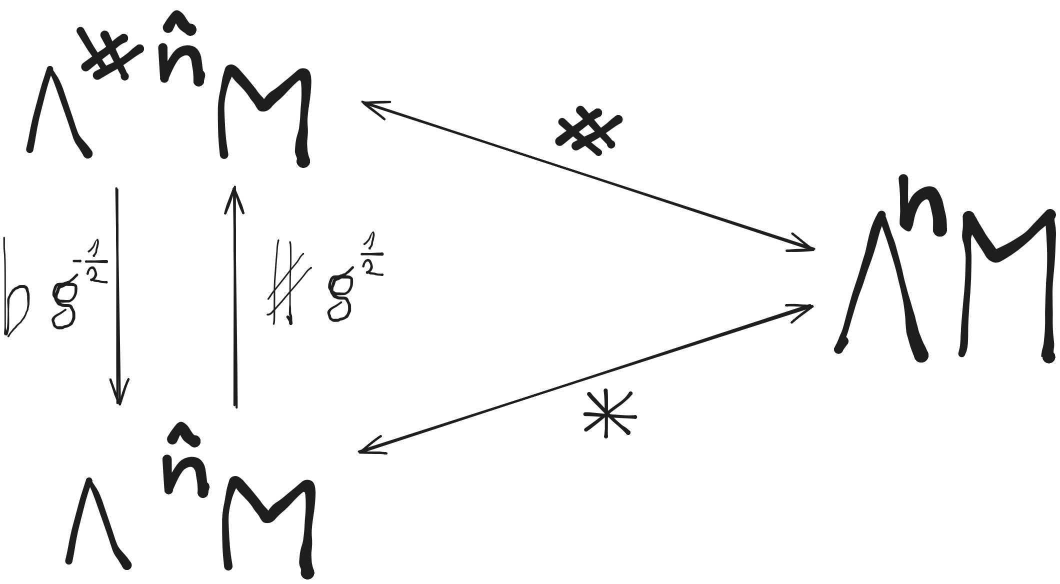
Platí relace duality: $\# \# \alpha = \alpha$ a $\# \# \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.
Na rozdíl od hoedgeova duálu zde nevystupují žádná znaménka, kvůli přirozenosti definice $\#$.

speciální případy:
$\# \omega = \iota_+ \omega$ pro $\omega \in \Lambda^m M$.
$\# \mathfrak{m} = {\iota_+}^{-1} \mathfrak{m}$ pro $\mathfrak{m} \in \mathbf{H} M$.
$\# 1 = \tilde{\varepsilon}^{-1}$ pro $1 \in \Lambda^0 M$
$\# \tilde{\varepsilon}^{-1} = 1$ pro $\tilde{\varepsilon}^{-1} \in \Lambda^{\# m} M$

$\#(a\mathfrak{m}) = a \cdot (\#\mathfrak{m})$ pro $a \in \mathbf{T}M \quad \mathfrak{m} \in \mathbf{H}M$
$\#(\mathfrak{a} \wedge a) = a \cdot (\#\mathfrak{a})$ pro $a \in \mathbf{T}M \quad \mathfrak{a} \in \Lambda^{\#\hat{n}}M$
poslední řádek je obecnější případ předchozího. Indexy je naznačíme

Příklady na rozmyšlení:

- $\#(\mathfrak{a} \wedge a) = \frac{1}{(\hat{n}+1)!}(\mathfrak{a} \wedge a)^{--a}\tilde{\varepsilon}_{--a,,,,} = \frac{\hat{n}+1}{(\hat{n}+1)!}\mathfrak{a}^{--}a^a\tilde{\varepsilon}_{--a,,,,} = (\#\mathfrak{a})_{a,,,,}a^a$
- $\underbrace{\mathfrak{a}}_{\hat{n}} \bullet \underbrace{(\#\mathfrak{b})}_{\hat{n}} = (-1)^{n\hat{n}}\underbrace{(\#\mathfrak{a})}_{n} \bullet \underbrace{\mathfrak{b}}_{n}$
- $\alpha \bullet (\#\beta) = (-1)^{n\hat{n}}(\#\alpha) \bullet \beta$
  Pokud máme metriku můžeme dát do vztahu s hoedgeovým duálem.
- $*\alpha = \# \sharp\mathrm{g}^{1/2}\alpha$
- $\#\mathfrak{a} = *\flat\mathrm{g}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{a}$



Lemma: Vztah komponent TAS forem a TAS tenzorových hustot

Ve standardním rozpisu komponent AS forem, kde $\alpha \in \Lambda^n M \quad \mathfrak{a} \in \Lambda^{\#\hat{n}}M$
$\alpha = \#\mathfrak{a}$

$$\alpha = \sum_{k_1 < \cdots < k_n} \alpha_{k_1 \ldots k_n} \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_n} \equiv \sum_K \alpha_K \, \mathrm{d}x^{\wedge K},$$

kde uspořádané indexy přeznačíme $k_1 < \cdots < k_n \equiv K$.

$$\mathfrak{a} = \sum_{l_1<\dots<l_{\hat{n}}} \mathfrak{a}_x^{l_1\dots l_{\hat{n}}}\, \partial_{x^{l_1}} \dots \partial_{x^{l_{\hat{n}}}} \equiv \sum_L \mathfrak{a}_x^L \partial_x^{\wedge L},$$

kde navíc musíme označit, vůči jaké bázi se hustota vyčísluje.

Vztah komponent:

$$\alpha_K = (\mathfrak{a} \bullet \tilde{\varepsilon})_K = \sum_L \mathfrak{a}_x^L \tilde{\varepsilon}_{xLK}$$

Ovšem pozor pro K existuje pouze jedna kombinace z doplňkových indexů L ozn. $\hat{K}$, čili

$$= \mathfrak{a}_x^{\hat{K}} \tilde{\varepsilon}_{xK\hat{K}}.$$

komponenty si odpovídají až na znaménko tenzoru orientace.

D: Divergence

Jako duál vnější derivace z antisymetrických forem. $\mathrm{d} : \mathcal{A}^p M \to \mathcal{A}^{p+1} M$.

$$\mathrm{div} : \mathcal{A}^{\#\hat{n}+1} M \to \mathcal{A}^{\#\hat{n}} M$$

$\mathrm{div} = \#\mathrm{d}\#$.

Lemma: Div Div

$$\mathrm{div}\ \ \mathrm{div} = 0$$

Analogicky k $\mathrm{dd} = 0$.

Věta: Podstata Div

$$(\mathrm{div}\,\mathfrak{a})^{a_1\dots a_{\hat{n}}} = \nabla_{\underline{b}} \mathfrak{a}^{a_1\dots a_{\hat{n}}\underline{b}}$$

Pro libovolné beztorzní ∇. (S torzí by obsahovala členy navíc v analogii.)

DK:
využijeme lemmatu nezávislosti na beztorzní CD.

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathfrak{a})^{\underline{a_1}\dots\underline{a_{\hat n}}} &= (\#\nabla\wedge\#\mathfrak{a})^{\underline{a_1}\dots\underline{a_{\hat n}}} = \frac{1}{n!}\tilde{\varepsilon}^{-1\underline{a_1}\dots\underline{a_1}\underline{k_1}\dots\underline{k_n}}(\nabla\wedge\#\mathfrak{a})_{\underline{k_1}\dots\underline{k_n}} \\
&= \frac{n}{n!}\tilde{\varepsilon}^{-1\underline{a_1}\dots\underline{a_{\hat n}}l\dots l}\nabla_l(\#\mathfrak{a})_{\underline{k_2}\dots\underline{k_n}} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{(\hat n-1)!}\tilde{\varepsilon}^{-1\underline{a_1}\dots\underline{a_{\hat n}}\underline{k_1}\dots\underline{k_n}}\nabla_{\underline{k_1}}\left(\mathfrak{a}^{\underline{b_1}\dots\underline{b_{\hat n+1}}}\tilde{\varepsilon}_{\underline{b_1}\dots\underline{b_{\hat n+1}}\underline{k_2}\dots\underline{k_n}}\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{(\hat n-1)!}\tilde{\varepsilon}^{-1\underline{a_1}\dots\underline{a_{\hat n}}\underline{k_1}\dots\underline{k_n}}\nabla_{\underline{k_1}}\left(\mathfrak{a}^{\underline{b_1}\dots\underline{b_{\hat n+1}}}\right)\tilde{\varepsilon}_{\underline{b_1}\dots\underline{b_{\hat n+1}}\underline{k_2}\dots\underline{k_n}} \\
&= \underbrace{\frac{m!}{(n-1)!}\frac{1}{(\hat n-1)!}{}^{[n]}\delta^{\underline{a_1}\dots\underline{a_{\hat n}}\underline{k k_2}\dots\underline{k_n}}_{\underline{b_1}\dots\underline{b_{\hat n} b k_2}\dots\underline{k_n}}}_{\text{identita}}\nabla_{\underline{k}}\mathfrak{a}^{\underline{b_1}\dots\underline{b_{\hat n} b}} \\
&= {}^{[\hat n+1]}\delta^{\underline{a_1}\dots\underline{a_{\hat n} k}}_{\underline{b_1}\dots\underline{b_{\hat n} b}}\quad\nabla_{\underline{k}}\mathfrak{a}^{\underline{b_1}\dots\underline{b_{\hat n} b}} \\
&= \nabla_{\underline{k}}\mathfrak{a}^{\underline{a_1}\dots\underline{a_{\hat n} k}}
\end{aligned}
$$

Lemma: Nezávislost Div

Následujeme konvenci, že $\cdot$ úží nejbližší indexy, a tedy $\nabla\cdot\mathfrak{a}$, nezávisí na beztorzní CD.
Pro jakoukoliv beztorzní derivaci pak

$$(\nabla\cdot\mathfrak{a})^{a_1\dots a_{\hat n}}_x = (\partial\cdot\mathfrak{a})^{a_1\dots a_{\hat n}}_x = \partial_k\mathfrak{a}^{k a_1\dots a_{\hat n}},$$

neboli také

$$(\operatorname{div}\mathfrak{a})^{a_1\dots a_{\hat n}}_x = \mathfrak{a}^{a_1\dots a_{\hat n}k}_x{}_{,k}$$

Speciálně: $\mathrm{d}\cdot\mathfrak{a} = (-1)^{\hat n-1}\operatorname{div}\mathfrak{a}$

D: Rotace

$$\tilde{\mathrm{rot}}\,\alpha = \#\mathrm{d}\alpha$$

Ve smyslu hustoty, duál vnější derivace.
$\mathrm{d}\alpha = \#\tilde{\mathrm{rot}}\,\alpha$
$\operatorname{div}\mathfrak{a} = \tilde{\mathrm{rot}}\,\#\mathfrak{a}$

Lieova derivace (TAS tenz.) hustot

Lieova derivace $\mathcal{L}_a$ jako tenzorovou derivaci rozšíříme na hustoty přirozenou podmínkou, že derivace anihilují tenzor orientace: $\mathcal{L}_a\tilde{\varepsilon} = 0 \iff \mathcal{L}_a\#\alpha = \#\mathcal{L}_a\alpha$.

Zároveň je Lieova derivace určená na tenzorech pomocí pseudoderivace, toto se přenáší stejné i na hustoty: $\mathcal{L}_a \mathfrak{m} = a \cdot \nabla \mathfrak{m} + \mathbf{L}_a \mathfrak{m} = a \cdot \nabla \mathfrak{m} - \nabla a \cdot \mathfrak{m}$, kde už můžeme využít, jak pseudoderivace působí na hustotu přes stopy pseudoderivace: $= a \cdot \nabla \mathfrak{m} - (-\nabla \cdot a)\mathfrak{m}$,
což vede na $\mathcal{L}_a \mathfrak{m} = \nabla \cdot (a\mathfrak{m}) = \mathrm{div}(a\mathfrak{m})$ (striktně vzato, $(a\mathfrak{m}) \cdot \nabla$, ale má jen jeden index.)

Lemma: Cartanovo lemma pro divergenci

Rozšíření Cartanovy identity na integrovatelné hustoty. Duální vzorec

$$\mathcal{L}_u \mathfrak{a} = (\mathrm{div}\mathfrak{a}) \wedge u + \mathrm{div}(\mathfrak{a} \wedge u)$$

($\wedge$ provádíme zprava u tečných indexů)

Dk:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u \mathfrak{a} &= \#\mathcal{L}_u \alpha \# \left(u \cdot \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\left(u \cdot \alpha\right)\right) = \\ &= |\#(\mathfrak{a} \wedge u) = u \cdot (\#\mathfrak{a})| = \\ &= (\#\mathrm{d}\alpha) \wedge u + \#\mathrm{d}\#(\mathfrak{a} \wedge u) \\ &= (\mathrm{div}\mathfrak{a}) \wedge u + \mathrm{div}(\mathfrak{a} \wedge u) \end{aligned}$$

D: Metrická divergence

Metrika g , ∇ bude L-C a $\mathrm{g}^{1/2}$ je objemový element.

$$(\mathrm{div}\omega)_{\underline{a_1} \dots \underline{a_n}} = \nabla^{\underline{k}} \omega_{\underline{a_1} \dots \underline{a_n k}}$$

kde je už zvednutý index u L-C derivace.
$(\mathrm{div}\omega)^{a_1 \dots a_n} = \mathrm{g}^{-1/2} \nabla_k (\mathrm{g}^{1/2} \omega^{a_1 \dots a_n}) = \mathrm{g}^{-1/2} (\mathrm{div}\mathrm{g}^{1/2} \omega)^{a_1 \dots a_n}$
Ve výsledku to znamená

$$\mathrm{g}^{1/2} \#\, \mathrm{div}\omega = \mathrm{div}\mathrm{g}^{1/2} \# \omega$$

na levo máme metrickou divergenci, na pravo ve smyslu hustotní divergence.

Speciálně:

$$* \,\mathrm{div}\omega = \mathrm{d} * \omega \longrightarrow \mathrm{div}\omega = *^{-1} \mathrm{d} * \omega$$

D: de Rhamův Laplaceův operátor

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathrm{dd} \cdot + \mathrm{d} \cdot \mathrm{d} \\ &= \nabla \wedge \nabla \cdot + \nabla \cdot \nabla \wedge \end{aligned}$$

Speciálně:
$\Delta\omega = \mathrm{d}(\nabla\cdot\omega) + (-1)^p \,\mathrm{div}\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\nabla\cdot\omega) \mp \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \omega$
Tady vidíme zobecnění známé struktury ze 3D.

D: Weitzenböckova identita

$$-\Delta\omega_{a_1\ldots a_p} = -\nabla^2\omega_{a_1\ldots a_p} + p\mathrm{Ric}_{n[a_1}\omega^n{}_{a_2\ldots a_p]} - \frac{p(p-1)}{2}R_{mn[a_1a_2}\ \omega^{mn}{}_{a_3\ldots}$$

Od známého „Beltrami-Laplaceova" ∇^2 se to navíc liší křivostí a křivostního potenciálu.

Integrální věty

Integrální věty

Připomeňme některé pojmy z kapitoly Podvariety a Tečné distribuce. Tečnými vektory rozumíme vektory ležící na podvarietě $N \subset M$. Normálovými kovektory podvariety N jsou pak takové, které tečné vektory anihilují. Normálové kovektory z $\mathbf{N}^*_x N$ nejsou nutně jednoznačně určena pro hypervarietě $\mathbf{T}^*_x M$!
Užitečné je zavést přizpůsobené souřadnice podvarietě N na varietě M.
$x^u = \text{konst.}$ definují podvarietu N, $u = 1 \dots \hat{n}$. Zbylé souřadnice x^i na N, $i = \hat{n} + 1, \dots \hat{n} + n$.
V nichž můžu vyjadřovat známé objekty.

Tenzoru orientace na varietě M, resp. N
$\tilde{\varepsilon}_M = (\mathrm{d}^m x)^{-1}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^m$ a inverzní $\tilde{\varepsilon}_M^{-1} = (\mathrm{d}^m x)\; \partial_{x^1} \wedge \dots \wedge \partial_{x^m}$
$\tilde{\varepsilon}_N = (\mathrm{d}^n x)^{-1}\, \mathrm{d}x^{\hat{n}+1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{\hat{n}+n}$ a inverzní $\tilde{\varepsilon}_N^{-1} = (\mathrm{d}^n x)\; \partial_{x^{\hat{n}+1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x^m}$

Tečné vektory N jsou pak lineární obal $\partial_{x^{\hat{n}+1}}, \dots, \partial_{x^m}$.
Normálové formy N jsou pak lineární obal $\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^m$. Je zřejmé, že se navzájem anihilují.

Kotečnou strukturu forem na N, jsme zjistili, že lze nalézt restrikcí formy na podvarietu: $\omega \mapsto \omega|_N \in \mathbf{T}^* N$. To samé lze provést přirozeně i pro **TAS formy**. Ty si také vyjádříme v souřadnicích, tím že si necháme jen ty souřadnice, které nejsou normálové ($\hat{n} <$):

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{k_1 < \dots < k_p} \omega_{k_1 \dots k_p}\, \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{k_p} \;\in \Lambda^p M \\ &\downarrow \\ \omega|_N &= \sum_{\hat{n} < k_1 < \dots < k_p} \omega_{k_1 \dots k_p}\, \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{k_p} \;\in \Lambda^p N \end{aligned}$$

Všimněme si, že jsou indexy báze stejné, což nemění nic na tom, že jsou indexy omezeny $\hat{n}$.

Integrování TAS forem na podvarietě

Prvně musíme provést restrikci těchto forem $\alpha \in \Lambda^m M$ na podvarietu, na které budeme integrovat. $\alpha|_N \in \Lambda^n N$. Integraci forem, víme, že docílíme přemapováním na integrovatelnou hustotu $\mathfrak{a} = \iota_+ \alpha \in \mathbf{H}N$. Formálně přes hustotní duál $\mathfrak{a} = \alpha \bullet \mathrm{d}\Sigma_N$, kde $\mathrm{d}\Sigma_N$ je **tečný** "plošný" element, tj. element, který vybírá tečné složky na podvarietě N. Je to tedy ekvivalent $\tilde{\varepsilon}_N^{-1}$.

$$\mathrm{d}\Sigma_N \in \mathbf{H}_x N \otimes \mathbf{T}_x^{[n]} M$$

V přizpůsobených souřadnicích je jeho podstava zcela zřejmá. Chápáno jako výběr vektorů velké variety.

$$\mathrm{d}\Sigma_N = (\mathrm{d}^n x)\ \partial_{x^{\hat{n}+1}} \wedge \cdots \wedge \partial_{x^m}$$

Dosazením do formálního zápisu $\mathfrak{a} = \alpha \bullet \mathrm{d}\Sigma_N = \alpha_{\hat{n}+1 \ldots \hat{n}+n}\ \mathrm{d}^n x$, vzal normálové indexy a přeformuloval do řeči tečných na N.

$$\int_{\Omega \subset N} \alpha|_N = \int_{\Omega \subset N} \mathfrak{a} \bullet \mathrm{d}\Sigma_N = \int_{x[\Omega]} \alpha_{\hat{n}+1 \ldots \hat{n}+n}\ \mathrm{d}^n x$$

Příklad: N dim 1. Tehdy τ souřadnice na N, pak $\mathrm{d}\Sigma_N = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathrm{d}\tau$

Integrování TAS tenz. hustot na podvarietě

Abstraktněji můžeme uvažovat o integraci TAS tenz. hustot. Začněme přímo od duálního objektu představující tenzor hustoty na větší varietě M, $\mathfrak{a} \in \Lambda^{\#\hat{n}} M \longrightarrow \mathfrak{a}|_N$, který restrikujeme na N.
Aby bylo možné restrikovanou hustotu integrovat na podvarietě, tak musí $\mathfrak{a}|_N \in \mathbf{H}M$. Toho docílíme vhodnou definicí, formálním zavedením **normálového** plošného elementu $\mathrm{d}\tilde{S}_N$:

$$\mathfrak{a}|_N \equiv \mathfrak{a} \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_N =: \alpha \bullet \mathrm{d}\Sigma_N$$
$$\mathfrak{a} = \#\alpha$$

Z definice si všimněme, že musí odstranit hustotní část M ($\mathfrak{a}$) a nahradit za normálovou hustotu v N, čili $\mathrm{d}\tilde{S}_N \in \mathbf{H}_x N \otimes \mathbf{H}_x^{-1} M \otimes \mathbf{N}_x^* N$. Z rovnice duality výše, taky vidíme, že relace plošných hustot je zprostředkovaná skrze $\#$, neboli přes relaci duality

$$\mathrm{d}\tilde{S}_N := \tilde{\varepsilon}_M \bullet \mathrm{d}\Sigma_N$$

V přizpůsobených souřadnicích $\mathrm{d}\tilde{S}_N = \mathrm{d}^n x\ (\mathrm{d}^m x)^{-1}\ (\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\hat{n}+n})\ (\partial_{x^{\hat{n}+1}} \wedge \cdots \wedge \partial_{x^m}) = \mathrm{d}^n x\ \mathrm{d}x^1 \wedge \cdot$.

$$\int_{\Omega\subset N} \mathfrak{a}|_N = \int_{\Omega\subset N} \mathfrak{a} \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_N = \int_{x[\Omega]} \mathfrak{a}_x^{1\ldots\hat{n}}\ \mathrm{d}^n x$$

Všimněme si, že nyní u $\mathfrak{a}$ integrujeme **normálové** komponenty, zatímco dříve to byly u α **tečné** komponenty.

Příklad: Ve 3D $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}S$.
Případně, když by kodimenze byla $\hat{n} = 1$, tj. když $\dim N = n = m - 1$, pak $\mathrm{d}\tilde{S}_N = \frac{\mathrm{d}^{m-1}x}{\mathrm{d}^m x}\mathrm{d}x^1$.
A úplně speciálně $N = M$, tj. $\hat{n} = 0$, pak musí $\mathrm{d}\tilde{S}_N = 1$.

Poznámka:

Duální vztah se propisuje jen významově do komponent. $\alpha \overset{\#}{\longleftrightarrow} \mathfrak{a}$: $\mathfrak{a}_x^{\hat{K}} = \tilde{\varepsilon}_x^{-1\,\hat{K}K}\alpha_K$, přičemž $\hat{K}$ a K jsou vzájemně komplementární množiny indexů, K je soubor normálových indexů hustoty $1, \ldots, \hat{n}$. Zatímco $\hat{K}$ je soubor tečný indexů formy $\hat{n}+1, \ldots, \hat{n}+n$. Komponenty objektů jsou stejné $\mathfrak{a}_x^{n_1\ldots\hat{n}} = \alpha_{\hat{n}+1\ldots\hat{n}+n}$ jen je jiný jejich význam.

Integrální věty

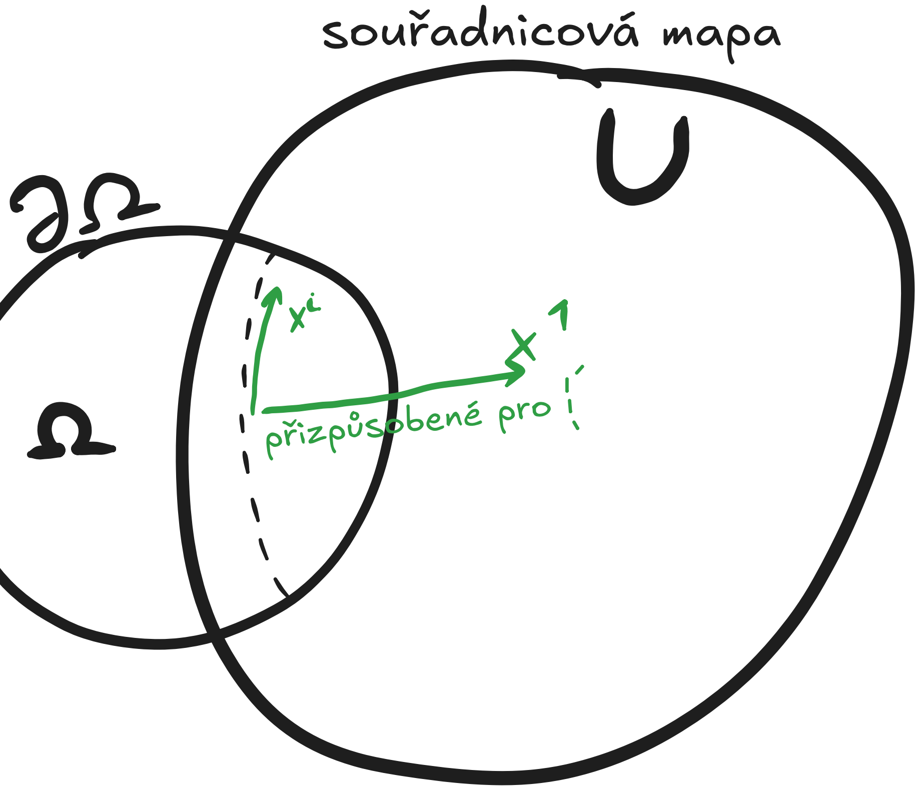
Nutné podotknout, že je lze zformulovat bez jakékoliv metriky. Jedná se pouze o hru hustot, forem a restrikcí na podvariety.

Věta: Stokesova věta pro TAS formy

$$\int_\Omega \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Omega} \omega|_{\partial\Omega}$$
$$\omega \in \mathcal{A}^{m-1}M$$

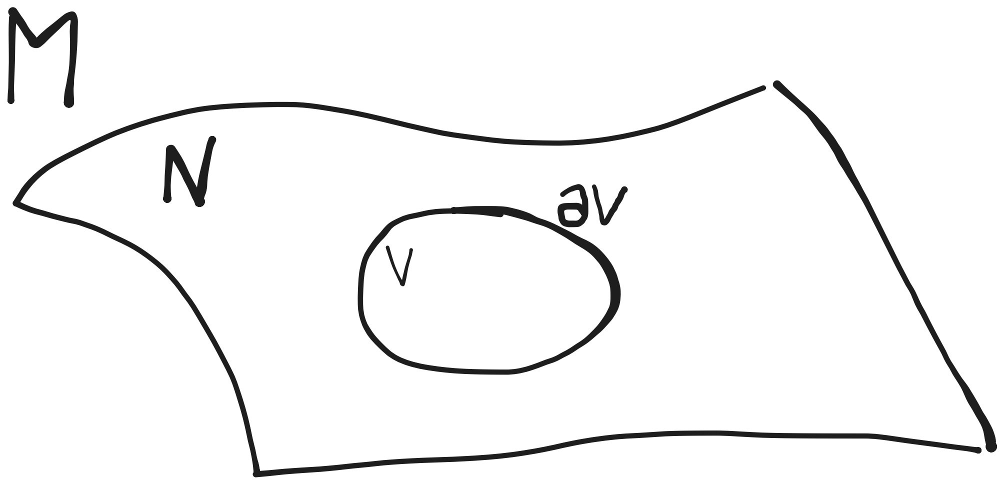
Dk: Sketch důkazu.
Typicky rozdělíme oblast zájmu Ω na části, kde máme vhodnou souřadnicovou mapu U, tj. části (---). Té pak najdeme přizpůsobené souřadnice x^m. Integrace $\mathrm{d}\omega$ je pak integrace komponent $\sim \omega_{[1\ldots m-1,m]}$, blíže $\sum \omega_{\underbrace{1\ldots m}_{m-1},k}$, kde k-index chybí a je derivace. Když budu komponenty

integrovat vždy se objeví souřadnice v k-směru , která nebude zahubena přizpůsobenými tečnými souřadnicemi a je ponechána pouze ta normálová. Tehdy je to jednoduchá integrace ve smyslu Newtonova rozdílu komponenty na hranicích. A to je ono, přizpůsobené souřadnice zařídí restrikci $\omega|_{\partial\Omega}$.



Lemma: Zobecnění Stokesovy věty na podvariety

$$\int_{\Omega\subset N} \mathrm{d}\alpha|_N = \int_{\partial\Omega} \alpha|_{\partial\Omega}$$
$$\alpha \in \mathcal{A}^{m-1} M$$



Další případy už uvažujeme v tomto kontextu postupných restrikcí.

Věta: Stokesova věta s rotací

$$\int_{V\subset N} \tilde{\mathrm{rot}}\alpha \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_N = \int_{\partial V} \alpha \bullet \mathrm{d}\Sigma_{\partial V}$$

Dk:

Přeformulováním vidíme Stokesovu větu:

$$\mathrm{LS} = \int_{V\subset N} \underbrace{\tilde{\mathrm{rot}}\alpha}_{\#\mathrm{d}\alpha} \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_N = \int_{V\subset N} \mathrm{d}\alpha \bullet \mathrm{d}\Sigma_N = \int_{V\subset N} \mathrm{d}\alpha|_N$$

$$\mathrm{PS} = \int_{\partial V} \alpha \bullet \mathrm{d}\Sigma_{\partial V} = \int_{\partial V} \alpha|_{\partial V}$$

Věta: Gaussova věta

$$\int_{V\subset N} (\mathrm{div}\mathfrak{a}) \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_N = \int_{\partial V} \mathfrak{a} \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_V$$

Dk:

opět se jedná o Stokesovu větu:

$$\mathrm{LS} = \int_{V\subset N} (\mathrm{div}\mathfrak{a}) \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_N = \int_{V\subset N} \#\mathrm{d}\#\mathfrak{a} \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_N = \int_{V\subset N} \#\mathrm{d}\alpha \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_N = \int_{V\subset .}$$

$$\mathrm{PS} = \int_{\partial V} \mathfrak{a} \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_V = \int_{\partial V} \alpha \bullet \mathrm{d}\tilde{\Sigma}_{\partial V} = \int_{\partial V} \alpha|_{\partial V}$$

Speciálně: $n = m, \quad N = M$, možná více známe

$$\int_V \operatorname{div}\mathfrak{a} = \int_{\partial V} \mathfrak{a} \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_{\partial V}$$

S metrickou strukturou na rozloučenou

Máme na varietě metrickou strukturu, a tedy g metriku na M.
Nyní můžeme jednoznačně určit normálové vektory podvariety N jako $n: \quad n \cdot g \cdot t = 0, \quad \forall t$ tečné.
Analogicky tečné kovektory k N jako $\sigma: \quad \sigma \cdot g^{-1} \cdot \nu = 0, \quad \forall \nu$ tečné kovektory
nebo přes podmínku $\sigma \cdot n = 0, \quad \forall n$ normálové vektory.

Nadplochy $\dim N = n = m - 1$, kodimenze $\hat{n} = 1$

Rozštěpení metriky, pomocí normálové 1-formy ν a normálový vektor n. Pokud je podvarieta $N = \partial\Omega$, hranice oblasti, pak ν nazveme „vnější normálou" a n míří ven, $n \cdot \nu = 1$ ($n = \pm g^{-1}\nu$).

Rovnice na rozmyšlení:

- $g = \pm\nu\nu + q \; \mathrm{sign}[g] = s_M \equiv \pm s$. Bude poučné vidět, kde mohou znaménka vyskakovat.
- $g^{-1} = \pm nn + q^{-1}$.
  Levi-Civitův tenzor
- $\varepsilon_M = \nu \wedge \varepsilon_N$, a platí při zvedání indexu $\varepsilon_M \bullet \varepsilon^{\sharp}_M = s_M \quad \varepsilon_N \bullet \varepsilon^{\sharp}_N = s_N$, přibude znaménko.
  Integrovatelné hustoty
- $\mathrm{g}^{1/2} = |\mathrm{Det} g|^{\frac{1}{2}} = |\varepsilon_M| \qquad \mathcal{q}^{1/2} = |\mathrm{Det} q|^{\frac{1}{2}} = |\varepsilon_N| = |\det q_{ab}| \; \mathrm{d}^{m-1}x$.
  Tenzor orientace
- $\tilde{\varepsilon}_M = \varepsilon_M \, \mathrm{g}^{-1/2} = \nu \wedge \varepsilon_N \, \mathrm{g}^{-1/2} \qquad \tilde{\varepsilon}^{-1}_M = s_M \varepsilon^{\sharp}_M \, \mathrm{g}^{1/2} = s_N n \wedge \varepsilon^{\sharp}_N \, \mathrm{g}^{1/2}$
- $\tilde{\varepsilon}_N = \varepsilon_N \, \mathcal{q}^{-1/2} \qquad \tilde{\varepsilon}^{-1}_N = s_N \varepsilon^{\sharp}_N \mathcal{q}^{1/2}$
  Elementy
- $\mathrm{d}\Sigma_N = s_N \varepsilon^{\sharp} \mathcal{q}^{1/2}$
  - $\alpha \bullet \mathrm{d}\tilde{\Sigma}_N = s_N \varepsilon_N \bullet \alpha \mathcal{q}^{1/2} = a \mathcal{q}^{1/2}$
  - čili $\alpha|_N = a \varepsilon_N$

- $\mathrm{d}\tilde{S}_N = \tilde{\varepsilon}_M \bullet \mathrm{d}\Sigma_N = s_N q^{1/2}\ \mathrm{g}^{-1/2} \varepsilon_M \bullet \varepsilon^\sharp_N$
- $\mathrm{d}\tilde{S}_N = \nu q^{1/2}\ \mathrm{g}^{-1/2}$
- $\mathrm{d}\tilde{S}_N =\ \mathrm{g}^{1/2} \mathrm{d}\tilde{S}_N = \nu q^{1/2}$
- $a\ \mathrm{g}^{1/2} \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_N = \mathfrak{a} \bullet \mathrm{d}\tilde{S}_N = a \cdot \nu\ q^{1/2}$
  Gaussova věta
- $\int_\Omega (\nabla \cdot a)\ \mathrm{g}^{1/2} = \int_{\partial\Omega} a\ \mathrm{d}S_N = \int_{\partial\Omega} a \cdot \nu\ q^{1/2}$