MATEMÁTICA

CAPÍTULO 4 - COMO SURGEM NOVAS FUNÇÕES A PARTIR DE OUTRAS JÁ EXISTENTES?

Thuysa Schlichting de Souza

Introdução

Sabemos que existem diversas situações do cotidiano que requerem a utilização do conhecimento intuitivo de função. Contudo, quando estudamos as funções, precisamos entender os conceitos de modo mais formal, extrapolando o conhecimento trivial sobre o assunto. Então, vamos aprofundar nossos estudos sobre as características e as propriedades algébricas e gráficas das funções, de modo generalizado?

Devemos lembrar que as funções são entendidas como regras que representam relações entre duas variáveis, ou mais, as quais são conhecidas como variável dependente e variáveis independentes, postas em correspondência unívoca. Costumamos expressá-las por meio de expressões algébricas, de tabelas de valores ou, ainda, de curvas no plano cartesiano. Dependendo das suas características, é possível separá-las em categorias especiais. Por exemplo, no capítulo anterior, estudamos as funções polinomiais, as racionais, as exponenciais e as logarítmicas, tanto em seus aspectos algébricos, quanto em suas características geométricas ou gráficas.

Neste capítulo, discutiremos as ideias principais concernentes às funções e suas representações gráficas de modo geral, sem enfatizar um determinado tipo de função. Assim, estaremos munidos do conhecimento necessário para resolver problemas aplicados e situações de fenômenos do mundo real, que envolvem o conceito de função. Também discutiremos o uso das ferramentas computacionais para nos auxiliarem a entender mais detalhadamente as funções e suas representações gráficas.

Vamos estudar, ainda, as funções que são definidas por partes e que utilizam as funções já conhecidas para determinar as sentenças que as constituem. As funções estudadas anteriormente, serão utilizadas também para a construção de novas funções, a partir de deslocamentos e expansões dos seus gráficos.

Dessa forma, ao final do capítulo, seremos capazes de responder às questões: o que caracteriza as funções definidas por partes? Quais são suas principais aplicações? Como podemos construir novas funções a partir de deslocamentos e expansões de gráficos já conhecidos?

Para responder a esses questionamentos, vamos em frente!

4.1 A utilização de *software* gráfico no desenvolvimento do ensino de funções

Neste tópico, vamos utilizar o GeoGebra® como ferramenta que nos possibilitará construir gráficos de funções mais complexas do que aquelas estudadas anteriormente, as quais não poderiam ser facilmente esboçadas apenas com os conhecimentos desenvolvidos até aqui. Vamos aproveitar para explorar também algumas das armadilhas que podemos encontrar com a utilização de *softwares* gráficos.

Assim, vamos iniciar nosso estudo, considerando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = x^3 - 25x$. Quando digitamos a função f na janela de Álgebra do GeoGebra®, a representação da função aparece na janela de visualização imediatamente. Contudo, o programa exibe apenas um recorte retangular do gráfico da função, definido automaticamente. Esta é a chamada visão-padrão e, geralmente, fornece uma imagem incompleta da função em questão.

Vejamos como é a visão-padrão fornecida para a função $f(x) = x^3 - 25x$ e, ainda, como é apresentada a mesma função, quando mudamos o recorte retangular da janela de visualização da função.

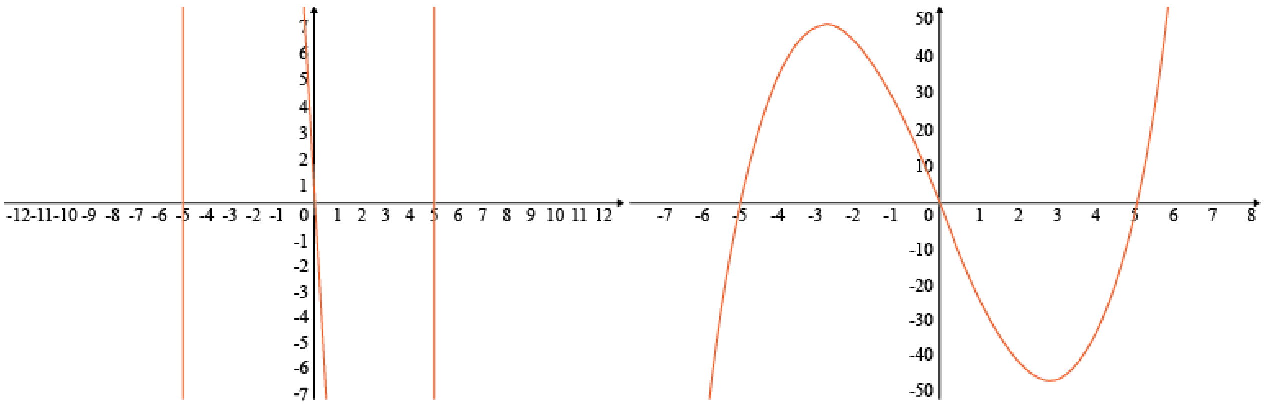

Figura 1 - O gráfico da função f retratado em duas janelas de visualização retangulares, com dimensões diferentes.
Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Podemos constatar que a escolha da janela de visualização retangular é determinante para o aspecto da representação gráfica da função. Na figura anterior, as dimensões da janela padrão (à esquerda) são: −12,6 e 12,6, para os valores de x mínimo e de x máximo, respectivamente; e −7,97 e 7,97, para os valores de y mínimo e de y máximo, respectivamente. Já as dimensões da janela de visualização (à direita) escolhidas a nosso critério são: −8 e 8, para os valores de x mínimo e de x máximo, respectivamente; e −53 e 53, para os valores de y mínimo e de y máximo, respectivamente.

Portanto, algumas vezes, para se obter uma visão mais completa, ou mais global, do gráfico, que nos permite a visualização de suas raízes e de seus pontos de máximo e de mínimo, precisamos optar pela ampliação da janela de visualização, como fizemos no exemplo anterior, mas como saber quais são as dimensões mais adequadas para escolhermos? Você poderá observar, no próximo exemplo, que o conhecimento do domínio e da imagem da função, pode nos auxiliar a selecionar as dimensões da janela retangular de visualização mais adequadas à função que estamos trabalhando.

Considere a função algébrica, cuja lei de formação é $f(x)=\sqrt{27 \quad 3x^2}$. Sabemos que a expressão $f(x)$ é definida, apenas, quando $27-3x^2 \geq 0$. Para acharmos o resultado da inequação, vamos transformá-la em uma equação e resolvê-la normalmente, para, ao final, analisar o resultado. Logo, temos que: $3x^2 = 27$ e, assim, $x=-3$, ou $x=3$. Note que, se tomarmos valores de x dentro do intervalo $-3 \leq x \leq 3$, a inequação $27-3x^2 \geq 0$ será verdadeira.

Agora que encontramos o domínio da função f, podemos determinar os valores de x máximo e de x mínimo da janela de visualização. Como definimos a função para que ela tenha uma imagem real para todos os valores do domínio, podemos inferir, ainda, que a imagem da função é sempre um valor não negativo. Logo, o valor de y mínimo na janela de visualização pode ser o próprio número zero, mas, normalmente, escolhemos um valor ligeiramente maior do que a imagem.

Observe o gráfico fornecido pelo GeoGebra®, por meio da janela de visualização padrão e o mesmo gráfico numa janela de visualização escolhida a nosso critério.

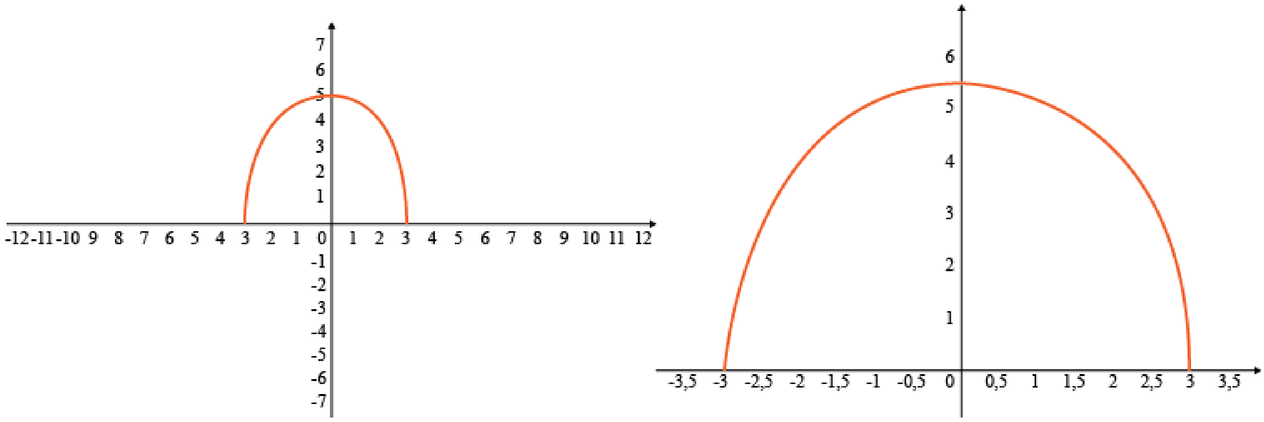

Figura 2 - O gráfico da função f apresentado em duas janelas de visualização retangulares com dimensões distintas.
Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

As dimensões da janela padrão (à esquerda) são as mesmas dadas no exemplo anterior: −12,6 e 12,6, para os valores de x mínimo e de x máximo, respectivamente; e −7,97 e 7,97 para os valores de y mínimo e de y máximo, respectivamente. Já as dimensões da janela de visualização (à direita), escolhidas a nosso critério são: −4 e 4, para os valores de x mínimo e de x máximo, respectivamente; e −1 e 7, para os valores de y mínimo e de y máximo, respectivamente.

O que aconteceria se tivéssemos escolhidos como dimensões da janela de visualização os valores: −2,5 e 2,5, para x mínimo e x máximo, respectivamente; e −3 e 2 para os valores de y mínimo e de y máximo? A janela apareceria em branco, pois a curva do gráfico está inteiramente fora desse retângulo.

Você pode aproveitar as potencialidades do GeoGebra® para investigar os gráficos dos diversos tipos de funções. Segundo Stewart (2013), para entender como a expressão de uma função relaciona-se com seu gráfico, é útil fazer o gráfico de uma família de funções, isto é, uma coleção de funções, cujas equações estão relacionadas. Por exemplo, faça o gráfico da função $f(x) = 2^x + c$, para vários valores da constante *c*, e observe como mudará o gráfico, quando fizermos *c* variar. Você pode anotar suas hipóteses, pois retomaremos este exercício ainda neste capítulo.

VOCÊ QUER LER?

Se você tem interesse em conhecer outras ferramentas computacionais que permitem a construção gráfica de funções, sugerimos a leitura do texto “Gráficos animados do Winplot”, de Jesus e Soares (2005). Os autores apresentam modelos para construir gráficos de funções, de modo que seja possível observar o traço da curva sendo executado. Além disso, você tem a oportunidade de conhecer as potencialidades de um novo programa computacional. Você pode acessar o artigo completo na página: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/56/6.htm>.

Na sequência, vamos estudar uma categoria especial de função, que é definida por diversas sentenças. Além disso, veremos importantes aplicações destas funções.

4.2 Funções definidas por partes

Ao longo do nosso estudo, aprendemos que uma função é fundamentalmente uma regra que associa elementos de um determinado conjunto a elementos de outro conjunto. Por exemplo, quando pensamos na regra de triplicar um número real, podemos descrevê-la como sendo uma função f que associa um número real x ao seu triplo $3x$, ou seja, a função cuja lei de formação é $f(x) = 3x$. Observe que, nesta expressão, está implícito que podemos considerar qualquer valor real como sendo x. Contudo, já vimos que, dependendo da lei de formação, é necessário restringir o valor do domínio, como acontece com as funções racionais e as logarítmicas.

Vamos considerar duas funções distintas: a função polinomial do 1º grau $g(x) = x + 1$, definida no conjunto dos reais, e a função logarítmica $h(x) = \log_2 x$, a qual já sabemos que é definida apenas para valores de x positivos.

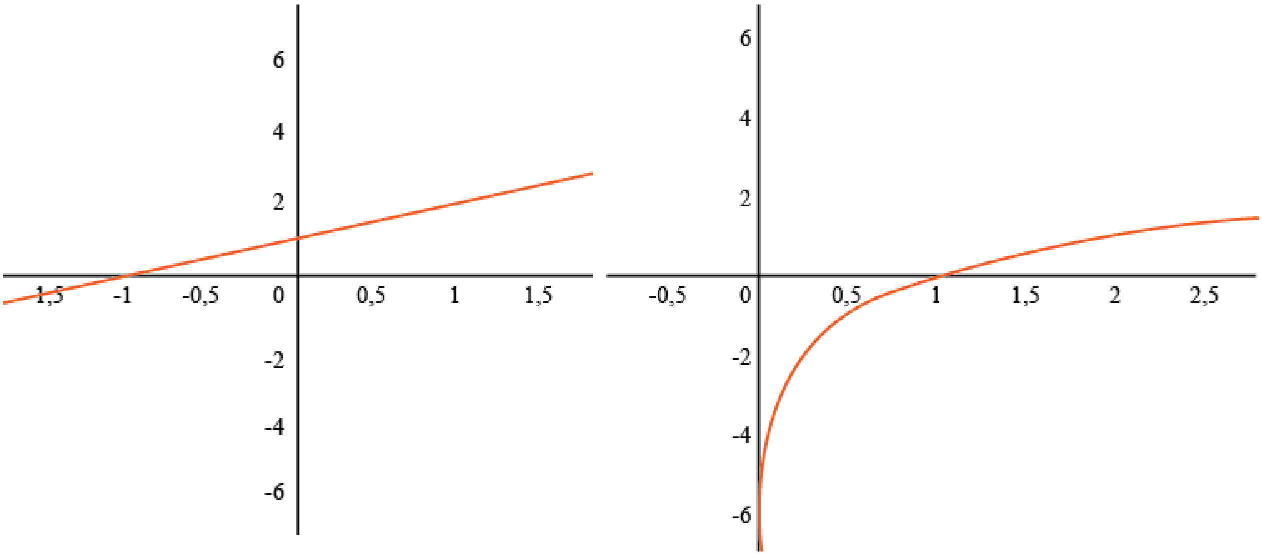

Figura 3 - Gráfico das funções g(x) e h(x).
Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Agora, vamos pensar em uma função $f(x)$, definida por $f(x) = g(x)$, para valores de x menores ou iguais a zero e $f(x) = h(x)$ para valores maiores do que zero, isto é:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{se } x \leq 0 \\ \log_2 x, \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Note que o gráfico da função $f(x)$ será representado pelo gráfico da função $g(x)$, quando os valores de x são menores ou iguais a zero. Porém, quando os valores de $f(x)$ são tomados maiores que 0, o gráfico da função será igual ao gráfico de $h(x)$. Dessa forma, o domínio da função f é todo o conjunto dos reais. Veja como é sua representação gráfica:

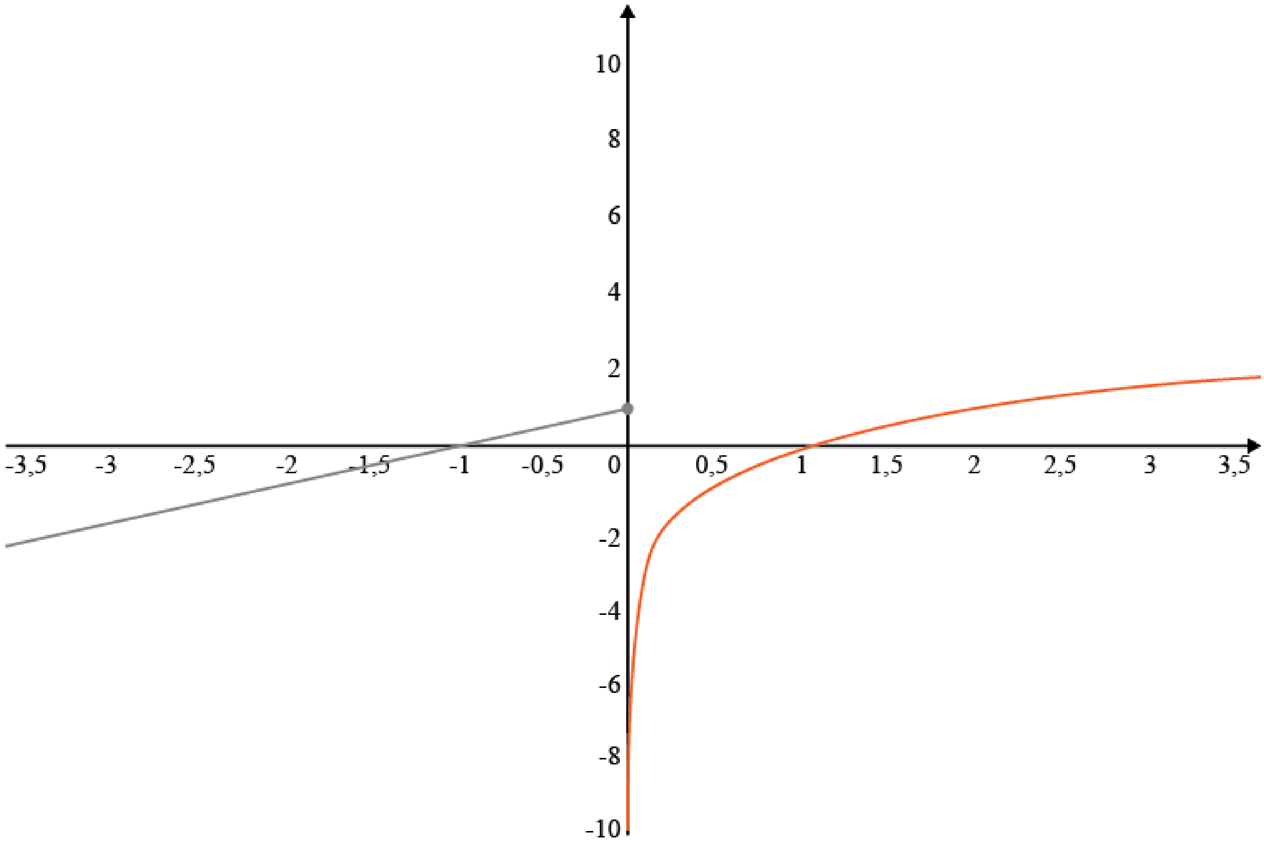

Figura 4 - Gráfico da função f(x) definida por duas sentenças.
Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Cabe destacar que a função f é denominada de função definida, por mais de uma sentença, ou ainda, de função definida por partes. De modo geral, uma função f é definida por partes quando cada uma das sentenças abertas que a define está associada a um subdomínio D_i do domínio da função f.

Devemos lembrar que, pela definição de função, não existe um elemento do domínio com mais de uma imagem. Por isso, as sentenças que definem as partes de uma função são sempre abertas. No exemplo anterior, os dois subdomínios são: $(-\infty, 0]$ e $(0, \infty)$. Observe que a imagem de 0 é calculada apenas por meio da regra $f(x) = x + 1$, por isso $f(0) = 1$.

Vejamos outro exemplo de uma função definida por partes. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{se } x < 0 \\ x + 2, \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 5, \text{se } x > 3 \end{cases}$$

A função f é uma função definida por três sentenças distintas: a primeira está definida no intervalo $(-\infty, 0)$, a segunda em [0, 3] e a terceira em $(3, \infty)$. Note que cada sentença está associada a um subdomínio, cuja união é o domínio de f, isto é, o conjunto dos números reais. Assim, o gráfico de f é da seguinte forma:

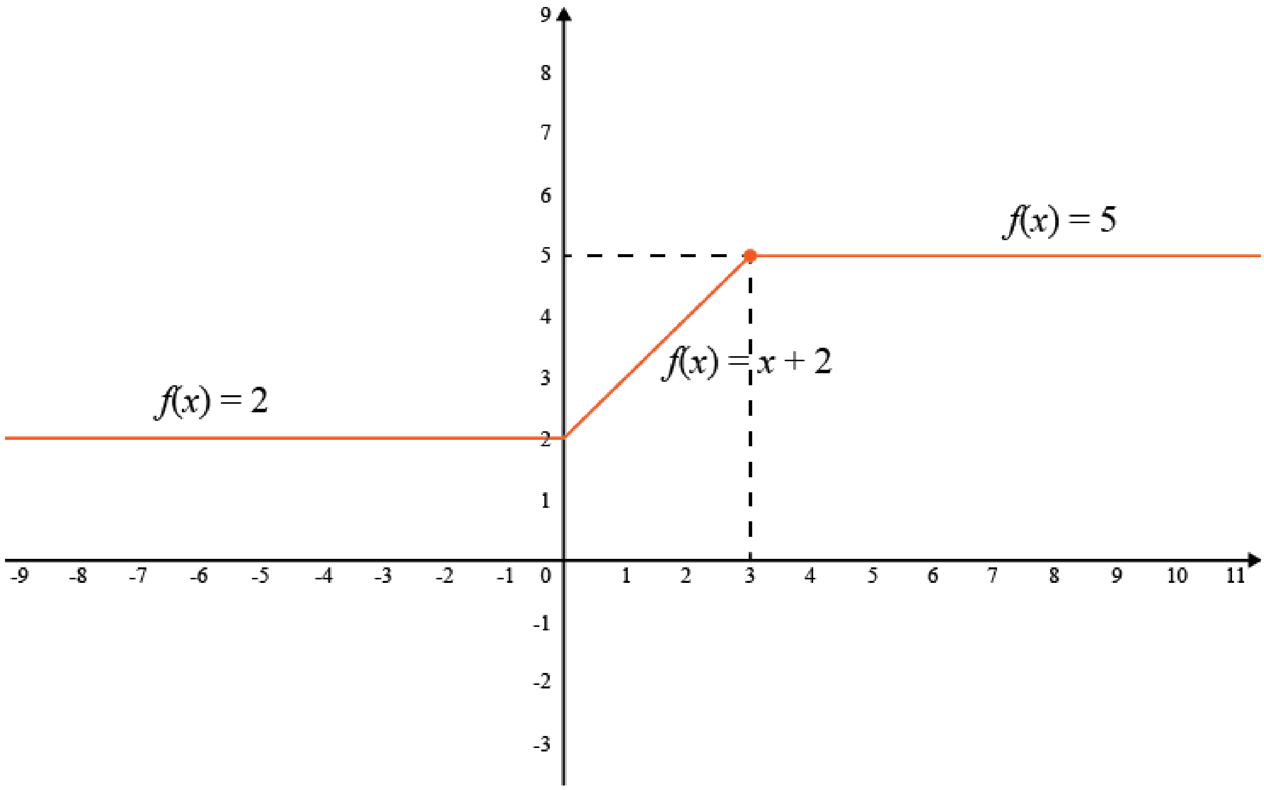

Figura 5 - Função definida por três sentenças.
Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Uma função definida por partes, bastante conhecida e utilizada na matemática, é a função modular. Uma aplicação de em recebe o nome de função modular quando associa a cada x real do domínio o elemento $|\ x\ |$. Isto significa que a função é da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{se } x < 0 \\ x, \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Assim, quando o elemento x do domínio é um número real não negativo, sua imagem é igual ao próprio número x. Porém, quando o elemento x do domínio é um número real negativo, sua imagem é igual ao oposto desse número. Por exemplo, $f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5};\ f(-3) = -(-3) = 3;\ f(0) = 0;\ f(1) = 1$. Observando sua lei de formação, podemos constatar que o gráfico da função modular será a reunião de duas semirretas bissetrizes do 1º e do 2º quadrante e cuja origem é o ponto de coordenadas (0, 0). Veja:

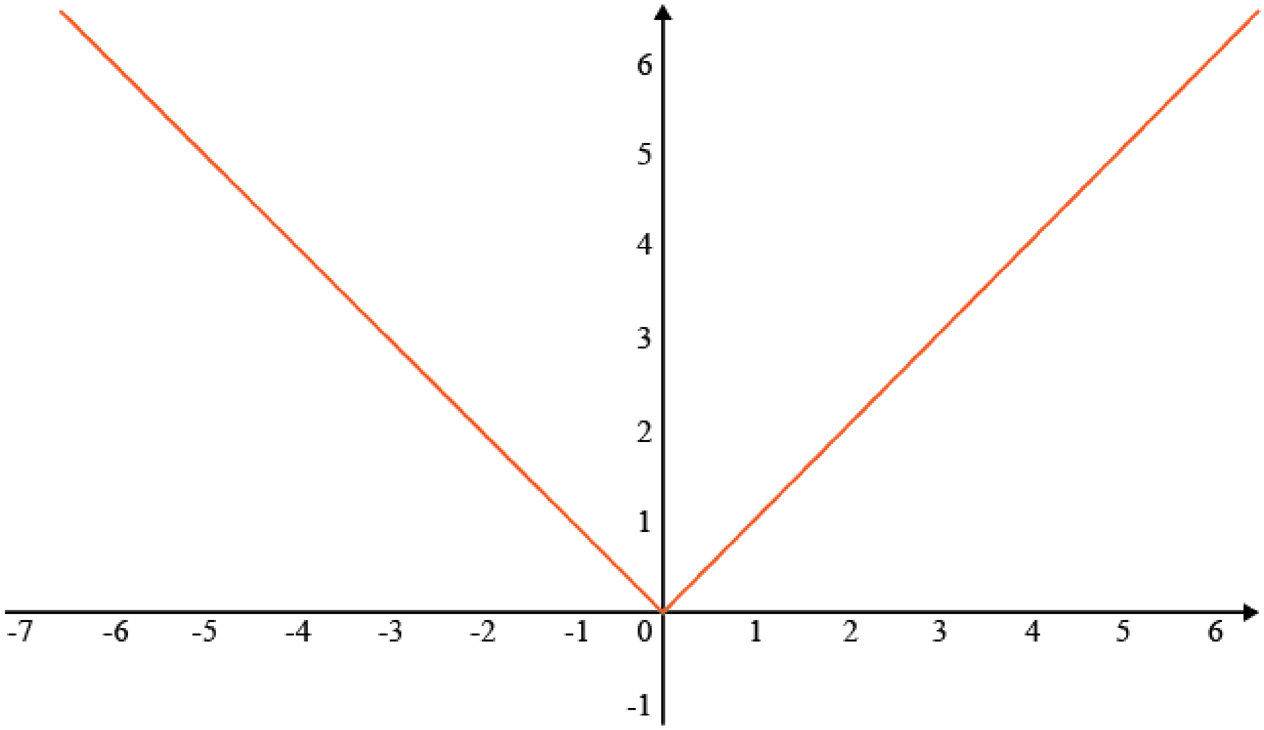

Figura 6 - A função modular definida no conjunto dos reais.
Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

A imagem da função modular é o conjunto dos números reais não negativos, uma vez que, pela definição da função, não é possível obter números negativos como imagem. Além disso, podemos verificar que cada elemento do conjunto imagem é a imagem de dois elementos diferentes do domínio, com exceção do 0. Por exemplo, $f(2)=2$ e $f(-2)=2$; $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$ e $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

Algumas situações cotidianas podem ser descritas por funções definidas por partes. Assim, vamos analisar dois problemas.

Problema 1

Numa cidade, o cálculo da conta mensal de água de uma residência é realizado utilizando-se a seguinte tabela de tarifa:

Tarifa de água por m^3	
Faixa de consumo (m^3)	Tarifa (R$)
Até 10	2,80
Acima de 10 até 25	5,50 (m^3 excedente)
Maior que 25	7,80 (m^3 excedente)

Tabela 1 - Relação entre o consumo de água e a tarifa a ser paga.
Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Se, em uma residência, o consumo de água num determinado mês foi de 9 m^3, qual será o valor da conta de água? E se o consumo foi o dobro? E se foi o triplo? Vamos pensar separadamente em cada situação.

Quando o consumo foi de 9 m^3, devemos calcular o valor a ser pago considerando a tarifa de R$2,80. Assim, o total em reais a pagar será: $9 \cdot 2{,}80 = 25{,}20$.

Agora, se o consumo for o dobro de 9 m^3, isto é, 18 m^3, é necessário considerar as duas primeiras faixas da tarifa no cálculo do valor final. Os primeiros 10 m^3 serão calculados utilizando a tarifa de R$2,80, porém os 8 m^3 excedentes (18 serão calculados considerando a tarifa de R$5,50, da seguinte forma: $10 \cdot 2{,}80 + (18 - 10) \cdot 5{,}50 = 72$.

Portanto, quando o consumo for 18 m^3, o total a pagar será de R$72,00.

Finalmente, quando o consumo for o triplo de 9 m^3, ou seja, 27 m^3, precisamos levar em consideração todas as três faixas da tarifa. Portanto, os primeiros 10 m^3 serão calculados utilizando o valor de R$2,80, os próximos 15 m^3 excedentes serão calculados considerando a tarifa de R$5,50 e, por fim, os últimos 2 m^3 excedentes serão calculados usando o valor de R$7,80. Sendo assim, temos: $10 \cdot 2{,}80 + 15 \cdot 5{,}50 + (27 - 25) \cdot 7{,}80 = 126{,}10$. Logo, quando o consumo for de 27 m^3, o total a pagar será de R$126,10.

Note que o valor da conta (y) é função do consumo de água (x), em metros cúbicos, e que cada consumo de água apresenta um único valor a ser pago. Assim, podemos construir uma função $f(x) = y$, cuja lei de formação é da forma:

$$f(x) = \begin{cases} 2{,}8 \cdot x \text{, se } x \leq 10 \\ 2{,}8 \cdot 10 + 5{,}5 \cdot (x - 10) \text{, se } 10 < x \leq 25 \\ 2{,}8 \cdot 10 + 5{,}5 \cdot 15 + (x - 25) \cdot 7{,}8 \text{, se } x > 25 \end{cases}$$

VOCÊ SABIA?

A conta de água está relacionada à cobrança pelos serviços de coleta, tratamento e distribuição de água e de esgotos. De modo geral, as contas de água no Brasil são calculadas considerando faixas de consumo e tarifas adequadas a cada faixa. Além disso, existem categorias de estruturas tarifárias, por exemplo a social, a residencial e a comercial, cada uma apresentando tarifas diferenciadas. Se você deseja saber mais sobre o assunto, acesso a página da Agência Nacional de águas em: <http://www3.ana.gov.br/>.

Problema 2

Uma operadora de celular oferece planos no sistema pós-pago. Maria aderiu a um plano que apresenta uma taxa fixa de R$90,00 por mês, desde que sejam realizados até 100 minutos de ligações para celulares da mesma operadora ou ligações locais. Caso Maria exceda esse tempo de ligação, o custo para cada minuto adicional será de R$1,50. Se Maria realizar 80 minutos de ligações entre números locais e celulares da mesma operadora em um único mês, qual será o valor da sua conta? E se ela falar o dobro de minutos?

Note que, na primeira situação, Maria realizou 80 minutos de ligações, porém, ela pode usar até 100 minutos que continuará pagando a taxa fixa de R$90,00. Logo, este será o valor da sua conta de celular.
Caso Maria realize o dobro de ligações, isto é, 160 minutos, ela excederá o tempo de 100 minutos e vai precisar pagar cada um dos 60 minutos adicionais, além da taxa fixa de R$90,00. Portanto, na segunda situação, o cálculo da sua conta é realizado da seguinte forma: 90 + (160 −100) · 1,50 = R$180,00.
Podemos observar que o valor da conta mensal (y) é função do número de minutos de ligações locais e de ligações para celulares da mesma operadora (x). Assim, a lei de formação da função é da forma:

$$f(x) = \begin{cases} 90, \text{ se } \leq 100 \\ 90 + (x-100) \cdot 1{,}5, \text{ se } x > 100 \end{cases}$$

Existem outras situações que fazem uso de funções definidas por partes. Além do cálculo da conta de água e de planos de telefonia, também podemos encontrá-las no cálculo do imposto de renda sobre o salário ou no cálculo do preço de produtos que recebem descontos de acordo com a quantidade de produtos comprados.

VOCÊ QUER VER?

O vídeo intitulado *A parte do leão* (NEHRING, 2012) aborda uma situação fictícia de um jovem recém-formado que recebe um aumento salarial, mas deseja verificar se este aumento é real. Isto porque, com o novo valor de seu salário, ele não é mais isento do imposto de renda e precisará descontar uma porcentagem do novo salário. Ao longo do vídeo, é explorada a ideia de função definida por partes. Para assistir ao vídeo completo, acesse a página: <https://www.youtube.com/watch?time_continue=76&v=Vl1duxB_jEs>.

Neste tópico, você teve a oportunidade de aprender sobre as funções definidas por mais de uma sentença e verificou algumas de suas aplicações. Agora, você aprenderá a construir novas funções a partir das funções básicas já conhecidas.

4.3 Novas leis de formação a partir de funções conhecidas

Você já conhece as propriedades algébricas e geométricas das funções polinomiais do primeiro e do segundo grau, das racionais, das exponenciais e das logarítmicas. A partir de agora, utilizaremos estas funções elementares para construir novas funções por meio do deslocamento, da expansão ou da reflexão de seus gráficos.
Você pode se perguntar: por que estudar a aplicação das transformações aos gráficos de uma função? O que isso nos ajuda no entendimento do comportamento das funções? Quando aplicamos tais transformações, obtemos gráficos de funções relacionadas e isso nos possibilita reconhecer sua curva, sem que haja a necessidade de realizar um estudo algébrico aprofundado da função, basta que saibamos o comportamento da função original.
Portanto, vamos considerar inicialmente a transformação por translações. A título de exemplo, vejamos o que acontece com a função quadrática $f(x) = x^2$, definida no conjunto dos reais, quando adicionamos ou subtraímos a constante $c = 2$ à função $f(x)$.

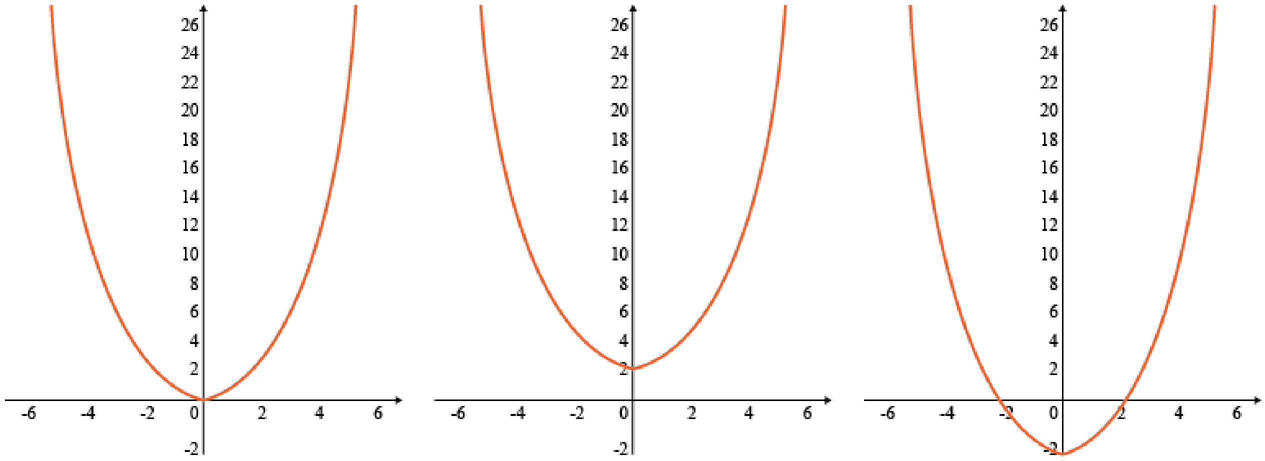

Figura 7 - Gráfico da função quadrática f (x) = x2 e das funções relacionadas g (x) = x2 + 2 e h(x) = x2 – 2, respectivamente.

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Note que o gráfico de $g(x) = f(x) + 2$ é obtido deslocando-se o gráfico de $y = f(x)$ para cima em 2 unidades, uma vez que cada coordenada y fica acrescida pelo mesmo número 2. De modo análogo, quando fazemos $h(x) = f(x) - 2$, cada coordenada y é diminuída pelo mesmo número 2. Portanto, o gráfico de $y = f(x)$ – 2 é precisamente o de $y = f(x)$, deslocado 2 unidades para baixo.

Se tomarmos a mesma função quadrática $f(x) = x^2$ e adicionarmos ou subtrairmos a mesma constante *c* = 2 a cada elemento x do domínio da função, vejamos o que acontece com os gráficos das novas funções relacionadas a $f(x)$.

A seguir, podemos visualizar o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ e das funções relacionadas $i(x) = f(x+2)^2$ e $j(x) = f(x-2)^2$, respectivamente.

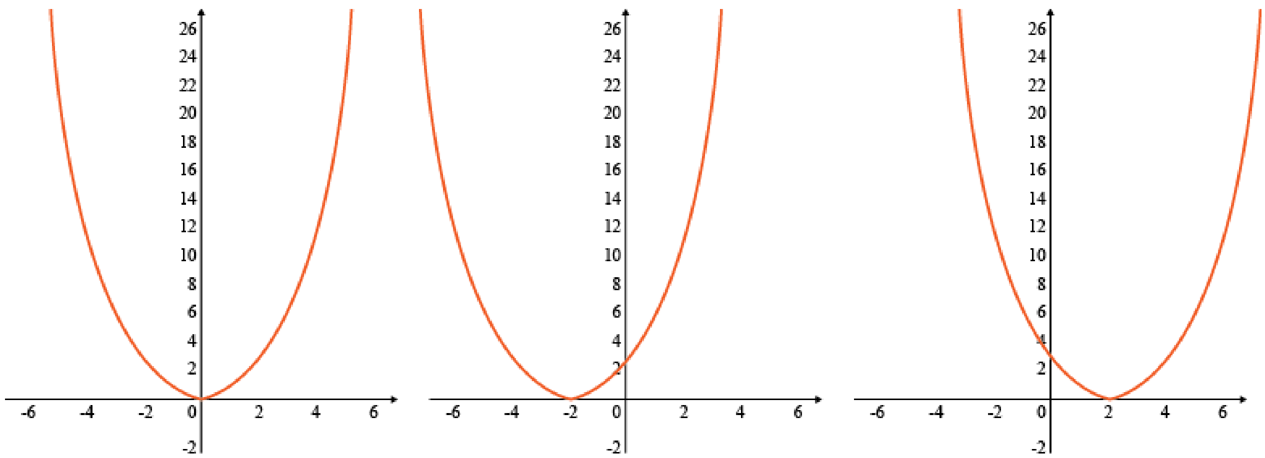

Figura 8 - Gráficos das funções.

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Observe que, quando fazemos a função $i(x) = f(x+2)$, então o valor de i aplicado em x é igual ao valor da função f aplicada em $x + 2$, isto é, f é aplicada num valor que está 2 unidades à direita de x. Portanto, o gráfico de $y = f(x+2)$, é precisamente o de $y = f(x)$, deslocado 2 unidades para a esquerda. Por exemplo, se x = 0, temos que $i(0) = f(2) = 22 = 4$.

Analogamente, se determinarmos que $j(x)=f(x-2)$, teremos que o valor de j em x, é igual ao valor da função f aplicada em x – 2, ou seja, f é calculada para um valor que está 2 unidades à esquerda de x. Sendo assim, a curva de $y=f(x-2)$ é precisamente a de $y=f(x)$ deslocado 2 unidades para a direita. Por exemplo, se x = 1, temos que $j(0)=f(-2)=(-2)^2=4$.

VOCÊ SABIA?

Nx^2 século XVII, o matemático francês René Descartes (1596-1650) introduziu as notações para as potências de modo muito similar à que usamos nos dias de hoje, com uma exceção: ele usava para o quadrado. Ocasionalmente, porém, usava . Ele também adotou as três últimas letras do alfabeto para representar as variáveis e as incógnitas (STEWART, 2014).

Independentemente do tipo de função original seja, polinomial, racional, exponencial ou logarítmica , quando somamos ou subtraímos uma constante c positiva a esta função, ou a cada elemento x do domínio, a função sofrerá um deslocamento horizontal ou vertical. Sendo assim, vamos generalizar nossas conclusões na tabela a seguir:

Translações horizontais e verticais da curva da função	
Função construída a partir de $f(x)$ e da constante $c>0$	Construção gráfica
$y=f(x)+c$	Deslocar o gráfico de $y=f(x)$ em c unidades para cima
$y=f(x)-c$	Deslocar o gráfico de $y=f(x)$ em c unidades para baixo
$y=f(x-c)$	Deslocar o gráfico de $y=f(x)$ em c unidades para a direita
$y=f(x+c)$	Deslocar o gráfico de $y=f(x)$ em c unidades para a esquerda

Tabela 2 - Deslocamentos horizontais e verticais a partir do gráfico da função f (x).
Fonte: Elaborada pela autora, adaptada de STEWART, 2013.

Além da transformação de funções por translação, existem ainda as transformações de expansão e reflexão. Para que possamos compreender melhor o que acontece com a curva de uma função quando a multiplicamos por uma constante c não negativa, vamos utilizar como exemplo, a função definida nos reais, cuja lei de formação é $f(x)=-+\frac{1}{2}x^3+-2x^2\ \ \frac{7}{2}x\ \ 5$.

A seguir, vemos o gráfico da função quadrática $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{7}{2}x - 5$ e das funções relacionadas $g(x) = 2 \cdot f(x)$ e $h(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$, respectivamente.

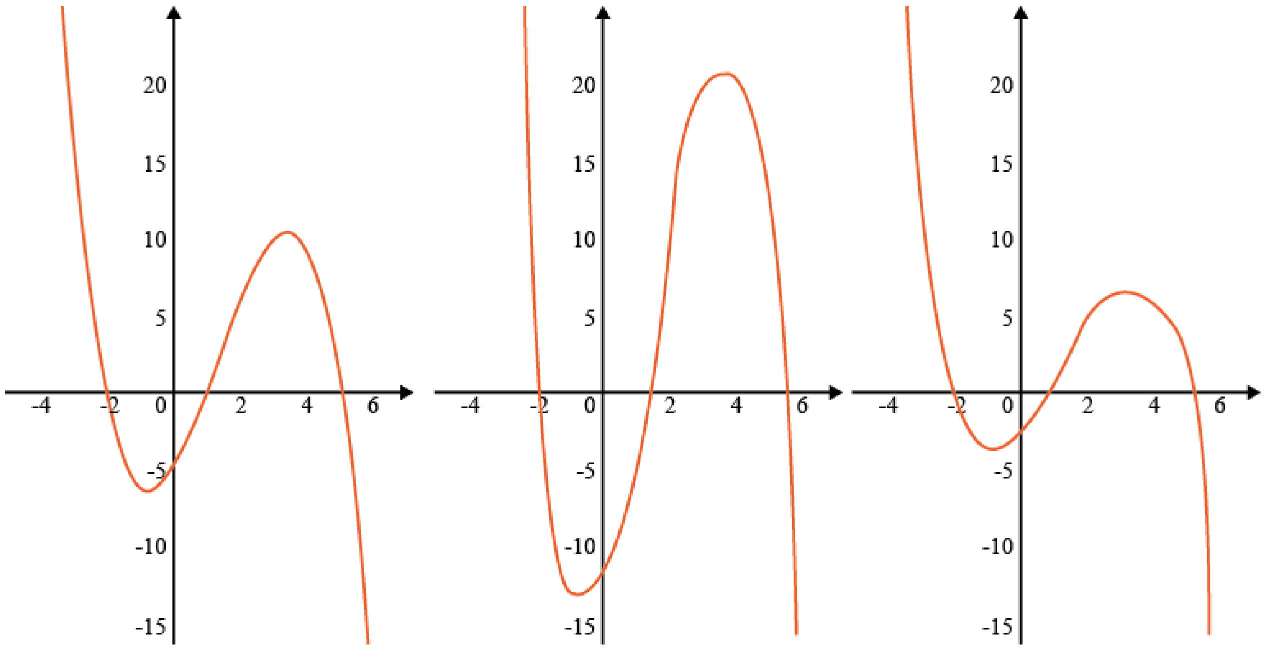

Figura 9 - Gráficos das funções.
Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Note que o gráfico da função $g(x) = 2 \cdot f(x)$ é o gráfico de $y = f(x)$ expandido pelo fator 2 na direção vertical, uma vez que cada coordenada y fica multiplicada pelo mesmo número 2. Podemos verificar, por exemplo, que: $f(0) = -5$ e $g(0) = -10$; $f(-1) = -6$ e $g(-1) = -12$; $f(2) = 6$ e $g(2) = 12$. Da mesma forma, podemos perceber que o gráfico da função $h(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ é o gráfico de $y = f(x)$, comprimido verticalmente pelo fator 2, pois, cada coordenada y fica dividida pelo número 2. Observe, por exemplo, que: $f(0) = -5$ e $h(0) = -2{,}5$; $f(-1) = -6$ e $h(-1) = 3$; $f(2) = 6$ e $h(2) = 3$.

E o que acontece quando tomamos a mesma função polinomial $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{7}{2}x - 5$, e multiplicamos ou dividimos a constante *c* = 2 a cada elemento x do seu domínio? Será que o gráfico será expandido ou comprimido? Vamos investigar!

Sejam as funções $i(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$ e $j(x) = f(2 \cdot x)$, com x números reais pertencentes ao domínio das funções. Vejamos como a curva de cada função se comporta. A seguir, vemos o gráfico da função quadrática $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{7}{2}x - 5$ e das funções relacionadas $i(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$ e $j(x) = f(2 \cdot x)$, respectivamente.

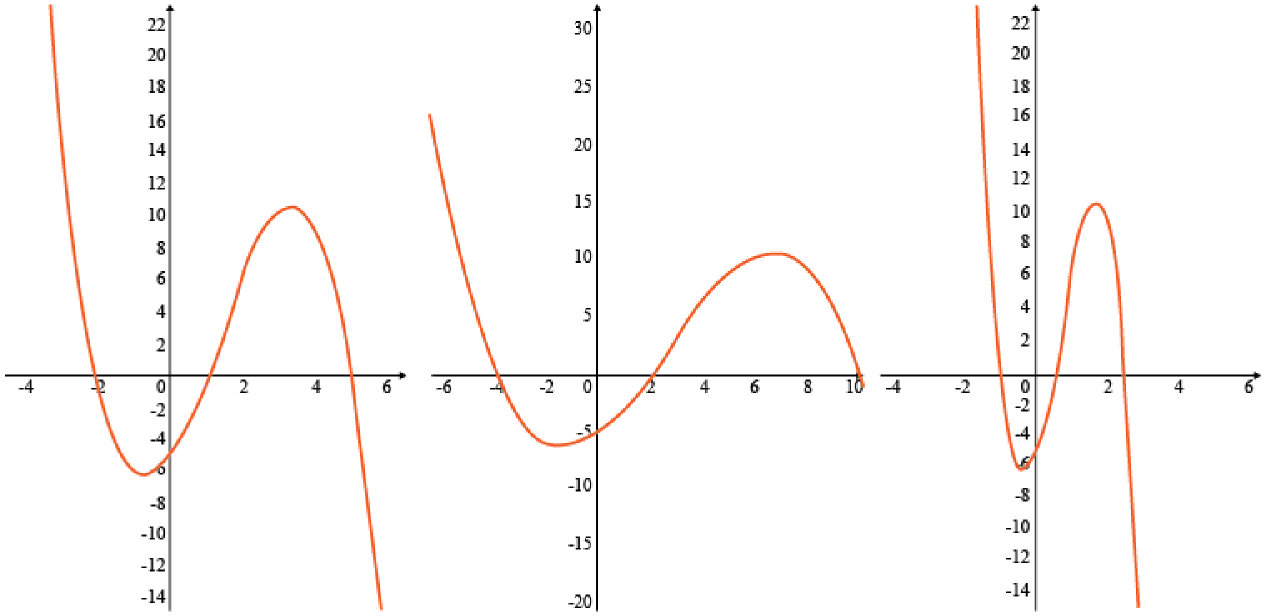

Figura 10 - Gráficos das funções.
Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Agora, é possível verificar que o gráfico da função $i(x) = f(\frac{1}{2} \cdot x)$ é obtido expandindo-se o gráfico de $y = f(x)$ pelo fator 2 na direção horizontal. Além disso, o gráfico da função $j(x) = f(2 \cdot x)$ tem a mesma curva da função $y = f(x)$, mas comprimida horizontalmente pelo fator 2.
Podemos generalizar nossas conclusões na tabela a seguir.

Expansões horizontais e verticais da curva da função	
Função construída a partir de $f(x)$ e da constante $c > 1$	Construção gráfica
$y = c \cdot f(x)$	Expandir o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
$y = \left(\frac{1}{c}\right) \cdot f(x)$	Comprimir o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
$y = f(c \cdot x)$	Comprimir o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c
$y = f(\frac{1}{c} \cdot x)$	Expandir o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c

Tabela 3 - Expansões horizontais e verticais a partir do gráfico da função f (x).
Fonte: Elaborada pela autora, adaptada de STEWART, 2013.

Vamos aplicar estes conhecimentos? Agora que aprendemos as principais ideias sobre a transformação de funções por meio de translação, reflexão e expansão, podemos obter os gráficos de $g(x) = 2^x + 3$, $h(x) = 2^{x-3}$, $i(x) = 3 \cdot 2^x$ e $j(x) = 2^{3x}$, a partir da função exponencial $f(x) = 2^x$, a qual é definida no conjunto dos reais.

Já sabemos o comportamento da função exponencial $y = 2^x$. Assim, vamos analisar diretamente as demais funções.

Podemos constatar que: $g(x) = f(x) + 3$, $h(x) = f(x-3)$, $i(x) = 3 \cdot f(x)$ e $j(x) = f(3x)$. Logo, o gráfico de cada função pode ser obtido por meio de uma transformação no gráfico da função $f(x)$. Mais especificamente, o gráfico da função $g(x)$ pode ser construído deslocando-se a curva de $y = f(x)$ para cima, em 3 unidades; o gráfico de $h(x)$ pode ser obtido deslocando-se a curva de $y = f(x)$ para a direita, em 3 unidades; o gráfico de $i(x)$ pode ser esboçado expandindo-se a curva de $y = f(x)$ verticalmente, por um fator de 3; e o gráfico de $j(x)$ pode ser obtido comprimindo-se o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente, também por um fator de 3. Vejamos:

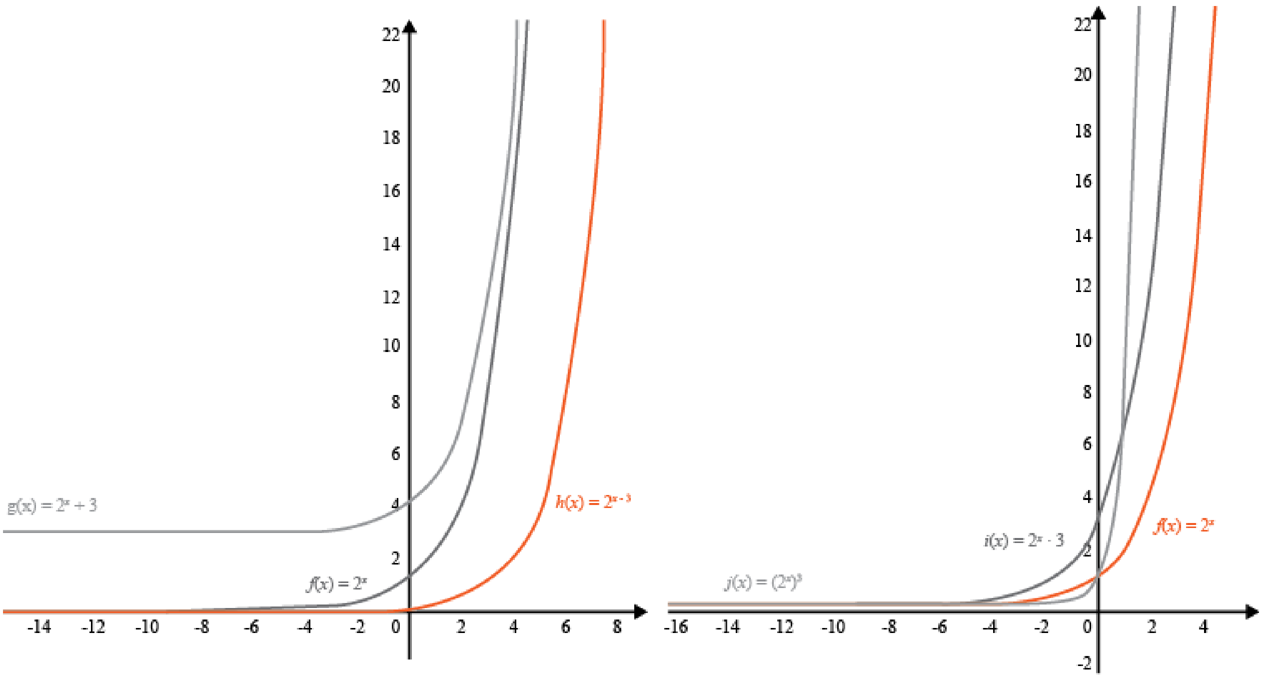

Figura 11 - As funções obtidas a partir do gráfico da função exponencial y = 2x.
Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Neste tópico, aprofundamos os conhecimentos sobre as funções de modo geral. Foi possível perceber que, a partir das funções elementares, podemos determinar o comportamento de outras funções, que são construídas por meio da translação e da expansão da curva original. A partir de agora, vamos utilizar o conhecimento sobre as funções, adquiridos até aqui para resolver problemas que envolvem o conceito de função.

4.4 A aplicação da resolução de problemas no ensino de funções

O conceito de funções na Matemática é considerado um dos mais essenciais e historicamente relevante, para o desenvolvimento das Ciências em geral. Utilizando este conceito, podemos descrever e analisar diversas relações entre grandezas, as quais muitas vezes são decorrentes de situações e fenômenos reais. Sendo assim, frequentemente nos deparamos com problemas, sejam matemáticos ou de outras áreas do conhecimento, que exigem a aplicação do conceito de função e suas propriedades no processo de resolução.

A partir de agora, vamos resolver diferentes tipos de problemas que envolvem as funções já estudadas. Você poderá perceber que "não existem regras rígidas que garantam sucesso na resolução de problemas. Porém, é possível esboçar alguns passos gerais no processo de resolver problemas e fornecer alguns princípios que poderão ser úteis ao resolver certos problemas" (STEWART, 2013, p. 69).

Algumas diretrizes foram sugeridas pelo matemático George Pólya (1978). De modo geral, o primeiro passo é a leitura do problema em questão, assegurando-se de que todas as informações foram claramente compreendidas. Devemos nos questionar sobre as incógnitas e sobre as quantidades e condições dadas no enunciado. Depois, é necessário introduzir uma notação apropriada, como símbolos de letras para representar os números desconhecidos.

VOCÊ O CONHECE?

George Pólya (1887-1985) foi quem começou a investigar o ensino da Resolução de Problemas como campo de pesquisa na década de 1960, nos Estados Unidos. Pólya foi um matemático húngaro que também fez contribuições fundamentais para a análise combinatória, teoria dos números e teoria da probabilidade. No ano de 1914, assumiu um cargo na Universidade de Zurique. Mas, em 1940, receoso que a Alemanha invadisse a Suíça, transferiu-se para os Estados Unidos, onde lecionou na Universidade de Stanford. E foi lá que, em 1945, publicou um dos seus livros mais famosos: "*How to Solve it*" ou, em português, "A arte de resolver problemas" (SILVA, 2018).

Em seguida, devemos encontrar uma relação, dentre as informações disponibilizadas, e aquelas solicitadas no problema, que nos auxilie a determinar a incógnita. Caso haja dificuldade em se visualizar imediatamente tal relação, existem algumas ideias que podem ser úteis para se esboçar um plano geral. Por exemplo, podemos tentar relacionar a situação dada com seu conhecimento anterior; reconhecer o tipo de padrão no qual o problema ocorre; ou ainda, pensar sobre problemas similares, que sejam mais simples que o problema original, para se obter pistas sobre a solução do problema mais complexo.

Veja os problemas resolvidos a seguir.

Problema 1

Seja f, uma função polinomial decrescente de primeiro grau, que satisfaz as seguintes condições:

- **$f\,(f(1)) = 1$**
- O ponto (2, 7) pertence ao gráfico da função.

Determine a abscissa do ponto onde f corta o eixo x?

Resolução

Observe que o problema solicita que encontremos a abscissa x_1 de P = (x_1, 0), uma vez que a abscissa do ponto onde o gráfico da função f intercepta o eixo x é o valor x_1 tal que $f\,(x_1) = 0$, a chamada raiz da função.

Agora, vamos trabalhar com as informações disponibilizadas no enunciado do problema. Lembre-se que uma função polinomial do primeiro grau apresenta sua lei de formação da forma: $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Como sabemos que a função é decrescente, podemos acrescentar ainda a condição: $a < 0$. Além disso, dizer que o ponto (2, 7) pertence ao gráfico da função, significa que: $f(2) = 7$.

Destes dados, podemos escrever duas equações:

Equação1: $f(2) = a \cdot 2 + b = 7$ ou, de modo equivalente, $2a + b = 7$; e

Equação 2: $f(f(1)) = a \cdot f(1) + b = 1$.

Note que, $f(1) = a \cdot 1 + b = a + b$. Portanto, podemos substituir este resultado na segunda equação obtendo: $a \cdot (a + b) + b = 1$, isto é, $a^2 + ab + b = 1$. Organizando novamente as informações, temos que:

Equação 1: $2a + b = 7$; e

Equação 2: $a^2 + ab + b = 1$.

Como podemos continuar a resolução, utilizando estas duas equações? Observe que as duas equações estão escritas em função das incógnitas a e b. Logo, uma opção é isolar b na primeira equação e substituí-lo na segunda, como podemos verificar a seguir:

$2a + b = 7 \rightarrow b = 7 - 2a$; e

$a^2 + a \cdot (7 - 2a) + (7 - 2a) = 1 \rightarrow a^2 + 7a - 2a^2 + 7 - 2a = 1 \rightarrow -a^2 + 5a + 6 = 0$, ou ainda, $a^2 - 5a - 6 = 0$.

Resolvendo a equação do segundo grau ($a^2 - 5a - 6 = 0$), obtemos as seguintes raízes: $a = -1$ e $a = 6$. Como já sabemos que o valor do coeficiente a é, obrigatoriamente, um número menor do que zero, devemos usar apenas a relação $a = -1$. Por conseguinte, $b = 7 - 2 \cdot (-1) = 7 + 2 = 9$.

Substituindo o valor encontrado para os coeficientes na fórmula geral da função polinomial do primeiro grau, temos que a função do problema é da forma: $f(x) = -x + 9$. Agora, para determinar a abscissa do ponto onde f corta o eixo x, basta resolvermos a equação do primeiro grau: $-x + 9 = 0$. Assim, temos que: $x = 9$.

A resposta do problema é: a função f corta o eixo das abscissas no pontos $x = 9$.

VOCÊ QUER LER?

O artigo intitulado "Codificando e decifrando mensagens", de Antônio Carlos Tamarozzi (2004) trata da relação entre a criptografia e o conceito de funções. O autor faz uma breve apresentação da criptografia e seu contexto histórico para, em seguida, apresentar exemplos de mensagens codificadas e como funciona o processo criptográfico. Assim, podemos observar uma importante aplicação das funções numa situação real. Você pode acessar o artigo nas páginas 69 a 72, do texto que está disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_3.pdf>.

Problema 2

Pedro é proprietário de um restaurante "a quilo". Ele verificou que vende 100kg de comida por dia, quando o preço do quilo é de R$12,00. Com o intuito de expandir seu negócio, ele realizou uma pesquisa de opinião com seus clientes, a qual revelou que o restaurante venderia 5kg de comida a menos para cada real de aumento no preço do quilo. Utilizando estas informações, quanto deve ser o novo preço do quilo no restaurante de Pedro para que sua receita seja a maior possível? (LIMA *et al.*, 2001).

Resolução

Inicialmente, vamos recordar o conceito de função receita de uma empresa. De acordo Morettin, Hazzan e Bussab (2012), se x é a quantidade vendida de um determinado objeto, chamamos de função receita o produto de x pelo seu preço de venda e a indicamos por *R*.

Agora, vamos sistematizar as informações disponibilizadas no enunciado do problema.

Preço inicial do quilo: R$12,00.

Valor acrescido ao preço do quilo: x.

Preço do quilo de comida obtido após o acréscimo: $p = 12 + x$.

Quantidade de comida vendida por dia: $v = 100 - 5x$.

O problema solicita que determinemos o novo preço p, para que a receita (R) seja máxima. Como a receita diária do restaurante leva em consideração a quantidade de comida vendida por dia (v) e o preço de venda do quilo de comida (p), podemos escrever a seguinte relação: $R(x) = v \cdot p \Rightarrow R(x) = (100 - 5x) \cdot (12 + x) = -5x^2 + 40x + 1200$.

Portanto, a função receita do restaurante de Pedro é representada por uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Podemos inferir, dessa forma, que a receita máxima corresponderá aos valores de máximo da função receita, os quais são obtidos pelo cálculo do vértice da parábola.

A seguir, podemos ver o gráfico da função receita $R(x) = -5x^2 + 40x + 1200$, definida para $x > 0$.

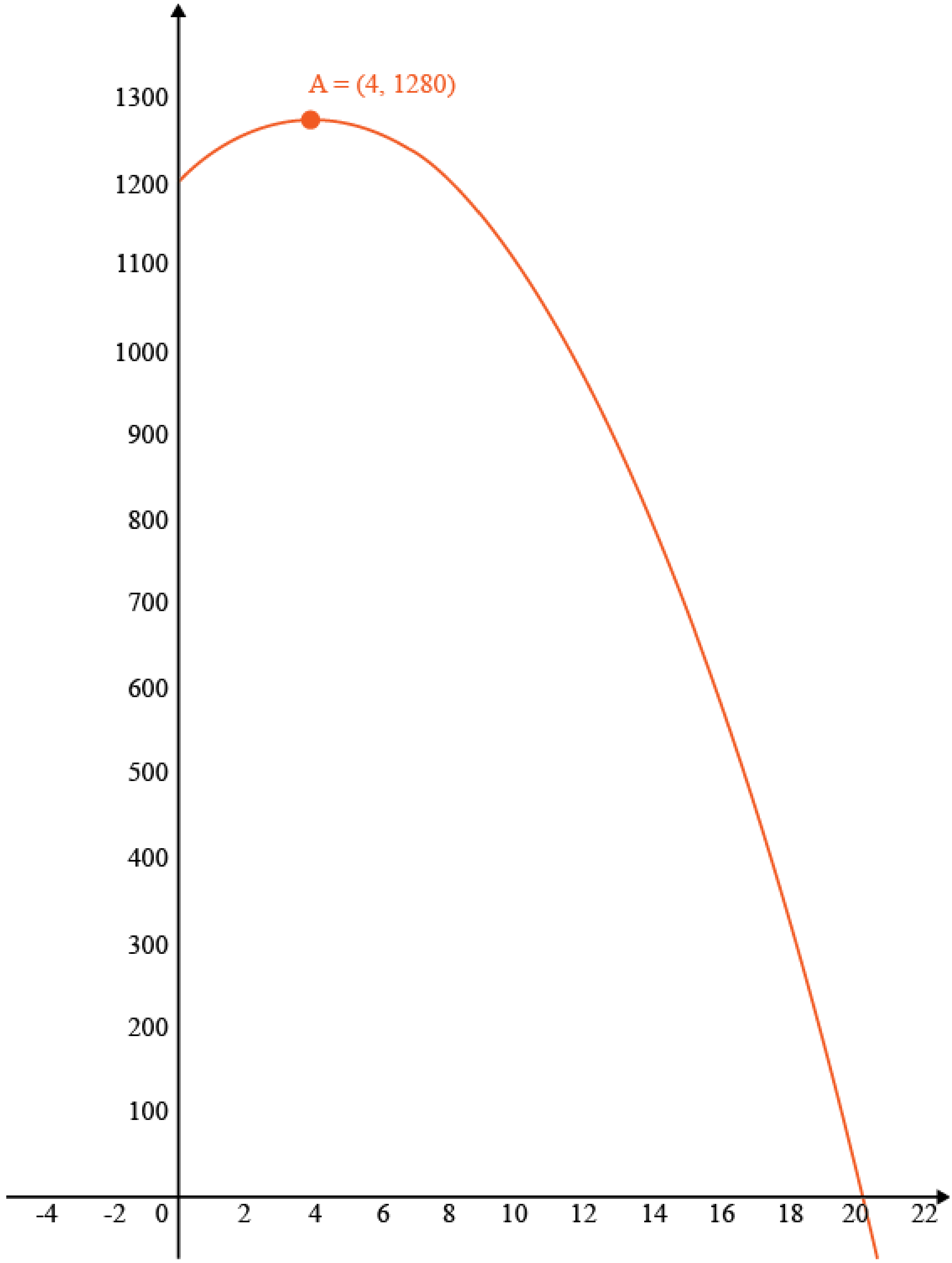

Figura 12 - Gráfico da função.
Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Devemos lembrar que o vértice da função é dado pelo par ordenado da forma $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Assim, realizando os cálculos adequados ao ponto do vértice de $R(x)$, obtemos: $x_v = 4$ e $y_v = 1280$. Finalmente, podemos concluir que a receita diária do restaurante será de R$1.280,00, a maior possível, quando o preço do quilo for de R$ 16,00, pois, para $x = 4$, temos que $p = 12 + 4 = 16$.

Problema 3

Uma agência de pesquisa observou que o Produto Interno Bruto (PIB) de um determinado país foi de 500 bilhões de dólares, no início do ano 2009, e aumentou à taxa de 2,7% ao ano. Supondo que esta taxa de crescimento foi mantida, quanto será o PIB do país no início de 2019 (HOFFMAN; BRADLEY, 2011).

Resolução

Primeiro, vamos sistematizar as principais informações apresentadas na questão.

PIB inicial: 500 bilhões ou 500.000.000.000;

Taxa de crescimento anual: 2,7% ou 0,027;

Tempo (em anos) decorridos desde 2009: *t.*

Para facilitar a visualização do crescimento do PIB anualmente, vamos descrevê-lo detalhadamente nos três primeiros anos, decorridos desde 2009, na tabela seguinte.

Taxa de crescimento anual: 2,7%	
Anos decorridos desde 2009	PIB
0 (inicial)	R$ 500.000.000.000
1	R\$513.500.000.000 = 500.000.000.000 + 500.000.000.000 · 0,027 = 500.000.000.000 · (1 + 0,027)
2	R\$527.364.500.000 = 513.500.000.000 + 513.500.000.000 · 0,027 = 513.500.000.000 · (1+ 0,027) = 500.000.000.000 · (1+ 0,027) · (1+ 0,027) = 500.000.000.000 · $(1+ 0,027)^2$
3	R\$571.244.750.776,9535 = 527.364.500.000 + 527.364.500.000 · 0,027 = 527.364.500.000 · (1+ 0,027) = 500.000.000.000 · $(1+ 0,027)^2$ · (1+ 0,027) = 500.000.000.000 · $(1+ 0,027)^3$

Figura 13 - Relação entre o tempo decorridos desde 2009 e o Produto Interno Bruto.

Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Observe que a relação entre o Produto Interno Bruto do país em questão e o tempo, em anos, decorridos desde 2009 pode ser representada pela função exponencial da forma $f(t) = 500.000.000.000\ (1{,}027)^t$, cujo domínio é o conjunto dos números inteiros não-negativos, uma vez que não podemos considerar anos negativos.

Sendo assim, para encontrarmos o PIB em 2019, devemos considerar 10 anos decorridos desde 2009, isto é, t = 10. Substituindo este valor na lei de formação da função f, temos que: $f(10) = 500.000.000.000\ (1{,}027)^{10}$. Portanto, o PIB no início de 2019 será de aproximadamente R$652.641.130.580,45.

Por fim, vamos analisar um último caso aplicado, envolvendo o conceito de função.

CASO

A $Q(t) = \left(\frac{t - 30}{10}\right) \cdot 12 \Rightarrow Q(t) = 1{,}2t - 36$ n 12 cabeças, isto é, uma máquina capaz de b tempo. A máquina é comandada por um c minutos para inicializar a máquina (ligar a máquina, o computador, carregar o programa, etc.). Além disso, a cada 10 minutos, a máquina completa uma operação com os 12 desenhos. Como Ana pode descrever a produção de peças desenhadas pela máquina em função do tempo, se iniciar a produção às oito horas da manhã e finalizar às 12 horas? (SILVA; SILVA; SILVA, 2010).

Ana deve considerar que, começando a contar o tempo a partir das 8 horas, a cada 10 minutos a máquina produzirá 12 bordados. Assim, para *t* minutos após as 8 horas, tem-se as seguintes relações: o tempo de preparação da máquina é de 30 minutos; o tempo de operação da máquina é (t – 30); o número de operações da máquina é ; e o número de bordados produzidos no tempo *t* é de .

Portanto, denotando de Q a quantidade de bordados produzidos num tempo *t*, Ana pode escrever a função . Porém, ela precisa perceber que a produção inicia somente às 8h30min, ou seja, quando t = 30 min. E finaliza às 12 horas, isto é, quando t = 240 min. Dessa forma, o intervalo que faz sentido para o cálculo da quantidade produzida é $30 \leq t \leq 240$.

Neste tópico, foi possível verificar a importância do estudo das funções para a resolução de problemas e situações práticas. Você teve a oportunidade de observar situações que exigiram o estudo detalhado do problema, por meio da análise da lei de formação e da interpretação gráfica de funções, para que fossem realizadas tomadas de decisões importantes. Observamos que o conceito de função e suas propriedades básicas podem ser utilizados em diversas áreas do conhecimento, como na Física, na Biologia, na Economia e na própria Matemática.

Síntese

Finalizamos o último capítulo desta disciplina, e, com isso, nossos estudos. Neste último capítulo, você teve a oportunidade de aprofundar o conhecimento das funções, estudando, em detalhes, as função definidas por partes e aquelas construídas a partir de deslocamentos e expansões dos gráficos de funções já conhecidas. Além disso, teve também oportunidade de aplicar os conhecimentos adquiridos para resolver problemas aplicados envolvendo o conceito de função.

Neste capítulo, você teve a oportunidade de:

- relembrar os conceitos de função exponencial e logarítmica;
- utilizar um *software* gráfico para aprofundar o conhecimento acerca das propriedades geométricas das funções;
- reconhecer as funções definidas por partes;
- aprender a construir novas funções por meio da transformação dos gráficos das funções básicas;
- resolver problemas aplicados que envolvem as funções elementares estudadas.

Bibliografia

ANA. Portal **Agência Nacional de Águas**. Disponível em: <http://www3.ana.gov.br/>. Acesso em: 26/7/2018.

DEMANA, F. D.; WAITS, B. K.; FOLEY, G. D.; KENNEDY, D. **Pré-cálculo**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo:** um curso moderno e suas aplicações. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

JESUS, A. R.; SOARES, E. P. **Gráficos Animados no Winplot**. Revista do Professor de Matemática, Brasil, v. 56, p. 34-44, 2005. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/56/6.htm>. Acesso em: 26/7/2018.

LIMA, E. L. *et al*. **Temas e Problemas**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. **Cálculo**: funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2012.

NEHRING, M. **A parte do leão**. Canal M3 Matemática Multimídia, YouTube, publicado em 18 de março de 2012. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?time_continue=76&v=Vl1duxB_jEs>. Acesso em: 26/07/2018.

PÓLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SILVA, I. N. **George Pólya**. 2018. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/b_bpascal-2/>. Acesso em: 26/07/2018.

SILVA, S. M.; SILVA, M. E; SILVA, E. M. **Matemática básica para cursos superiores**. São Paulo: Atlas, 2010.

STEWART, J. **Cálculo**, volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, I. **Em busca do infinito:** uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

TAMAROZZI, A. C. Codificando e decifrando mensagens. In: BÁSICA, Secretaria da Educação (Org.). **Explorando o Ensino da Matemática:** Funções. Brasília: Ministério da Educação, 2004. p. 69-72. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_3.pdf>. Acesso em: 26/07/2018.