命題論理(propositional logic)

命題(proposition):真偽が一意的に決まる文や式のこと

真:T(true), 偽:F(false)と表す

命題の例

　　3は素数である

　　大阪は日本の首都である

　　3+5 =7

命題でないもの

　　金沢はよい街である

命題を変数で表したもの:命題変数(propositional variable)

論理結合子（logical connective）

命 題 を 組 み 合 わ せ て 複 合 命 題 （ compound proposition）を作る演算子（operator）
個々の命題を原子命題（atomic proposition）とよぶ

命題変数：p, q

1．論理和「または」（disjunction）　$p \lor q$

真理（値）表（truth table）

p	q	$p \lor q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

2．論理積「かつ」（conjunction）　$p \land q$

p	q	$p \land q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

3. 否定「でない」(negation)　 $\neg p$

p	$\neg p$
F	T
T	F

4. 含意「ならば」(implication)　 $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

注意：論理結合子の「ならば」は日常的な用法とは異なる！

論理式（formula）の定義

1） 命題変数は論理式である

2） A,B が論理式ならば

(A∧B)： 論理積（conjunction）

(A∨B)： 論理和（disjunction）

(A→B)： 含意（implication）

(¬ A)：否定（negation）

は論理式である

3)上記の規則で作られる式のみが論理式である

3)の定義はしばしば省略されるが必要！

論理結合子の優先順位：「¬」,「∧」,「∨」,「→」

ただしこの順序は文献によって異なる（∧と∨の優先順位が同じ場合もある）

あいまいさが生じない限り括弧は省略してよい

例 $(((p \land q) \lor ((\neg p) \land (\neg q))) \to p)$ を簡略化して $(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q) \to p$

論理式を用いた論理学を命題論理とよぶ

真理値割り当て（truth assignment）：論理式を構成するすべての命題変数にTまたはFを割り当てること

論理式 p，q があらゆる真理値割り当てに対して同じ値をとるとき p と q は論理的同値（logically equivalent）であるといい，$p \equiv q$ と書く

注意：「≡」は論理結合子ではない

例　　$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

命題（$p \rightarrow q$）に対して（$\neg q \rightarrow \neg p$）を対偶（contraposition）とよぶ

命題 $p \rightarrow q$ が T の場合

p：十分条件（sufficient condition）

q：必要条件（necessary condition）

命題$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$が T の場合

p：q の必要十分条件

（necessary and sufficient condition）

q：p の必要十分条件

同値（equivalent）

$(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$ を $p \leftrightarrow q$ と書き，これを論理結合子とみなし「同値」とよぶことがある

注意：「同値」と「論理的同値」と混同しないこと！

問題：同値　$p \leftrightarrow q$　の真理値表を書きなさい

恒真式，トートロジー（tautology）

常に T になる論理式

例

１．$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$

３段論法

２．$((\neg p \to q) \land (\neg p \to \neg q)) \to p$

背理法

述語（predicate）

変数を含む命題を述語とよぶ

例　P(x)：x は 2 より大きい素数である

　　P(2)は F,　P(3)は T

述語の使用の際はあらかじめ変数が取り得る議論領域（domain of discourse）を決めておく

discourse：講話，論説の意味

述語を用いる論理学が述語論理（predicate logic）

変数の取り得る値が議論領域内の要素に限られる場合，１階（first-order）述語論理とよぶ

変数の取り得る値が議論領域内の部分集合である場合，２階（second-order）述語論理とよぶ

変数の取り得る値が議論領域内の部分集合の部分集合である場合，３階（second-order）述語論理とよぶ

以下同様にして高階（higher-order）述語論理をつくることができる

量化記号(quantifier)

全称記号(universal quantifier) : ∀　任意の･･･
存在記号(existential quantifier) : ∃
　･･･が存在する

例　$x \in N$ （議論領域は自然数）
　$P(x)$: x は 2 より大きい素数である
　$Q(x)$: x は奇数である,

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$$

「全ての 2 より大きい素数は奇数である」

$$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

「2 より大きい素数でかつ奇数である自然数が存在する」

量化記号に関するド･モルガン則

$$\neg \forall x\, P(x) \ \equiv\ \exists x\, \neg P(x)$$

$$\neg \exists x\, P(x) \ \equiv\ \forall x\, \neg P(x)$$

数学的帰納法（mathematical induction）

自然数 n を含む述語 $P(n)$について

1) $P(n_0)$が真であることを示す

2) $P(k)$が真であるという仮定のもとで $P(k+1)$が真であることを示す

3) $n \geqq n_0$ のすべての自然数 n について $P(n)$は真

数学的帰納法は公理（axiom）として与えられる

公理とは数学理論の最初に決める仮定のこと
数学とは公理から出発して推論規則（rule of inference）を適用することで定理を証明する過程
→　形式主義（formalism）