数学的帰納法の例

$P(n)$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

とする. $n \geqq 1$ の時 $P(n)$が成り立つことを証明する.

(i) $n=1$ の時

左辺: $1^2 = 1$, 右辺: $1(1+1)(2*1+1)/6 = 1$

となり $P(1)$は成り立つ

(ii) $P(k)$が成り立つと仮定する. すなわち

$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = k(k+1)(2k+1)/6$

このとき

$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$

$= k(k+1)(2k+1)/6 + (k+1)^2$

$= (k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]/6$

$= (k+1)(2k^2 + 7k + 6)/6$

$= (k+1)(k+2)(2k+3)/6$

$= (k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]/6$

となるので $P(k+1)$が成り立つ

(iii) 従って $n \geqq 1$ の時 $P(n)$が成り立つ