写像(mapping)

A,B: 集合, R: A と B の2項関係

$$R = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

↓

任意の a に対して b が1つ決まる時

↓

R を写像とよび $f(a) = b$ と書く

A: 定義域(domain)

B: 値域(co-domain)

$f: A \to B$ とも書く

写像は関数（function）ともいう

$f: A \to B$, $g: A' \to B'$ において

1) $A = A'$ かつ $B = B'$

2) $\forall a \in A$, $f(a) = g(a)$

が成り立つとき f と g は等しい（equal）という

$f(\cdots)$の中にはAの部分集合も書けるものとする. すなわち $f(P)=\{f(a)\mid a\in P\subseteq A\}$

特に

$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}\subseteq B$$

をfの像(image)とよぶ

写像fが$f(A)=B$であるとき全射(surjection)とよぶ

言い換えると $\forall b\in B, \exists a\in A\ f(a)=b$

写像fにおいて$x\neq y$ならば$f(x)\neq f(y)$であるとき

単射(injection)とよぶ

関数fが全射かつ単射であるとき全単射(bijection)とよぶ

$f:A\to B$ が全単射であるとき

$f(a)=b$に対して

$f^{-1}(b)=a$となる全単射写像を作ることができる

↓

逆写像(inverse mapping)

$f: A \to B,\ g: B \to C$ から合成写像（composite mapping）

$g \circ f: A \to C$ を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

で定義する

任意の $x \in A$ について

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

となるので

$$f^{-1} \circ f = 1$$ （恒等写像, identity mapping）

同様に

$$f \circ f^{-1} = 1$$

$f: A \to B, \quad g: B \to C, \quad h: C \to D$

任意の $x \in A$ について

$((h \circ g) \circ f)(x)$

$= (h \circ g)(f(x))$

$= \quad h(g(f(x)))$

いっぽう

$(h \circ (g \circ f))(x)$

$= h((g \circ f)(x))$

$= \quad h(g(f(x)))$

従って写像の合成では結合律（associative law）が成り立つ

$(h \circ g) \circ f \quad = h \circ (g \circ f)$

f, g がともに全単射のとき $g \circ f$ も全単射となり

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

となる

$$((g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f))(x)$$
$$=(f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f))(x)$$
$$=(f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f))(x)$$
$$=(f^{-1} \circ f)(x)$$
$=1(x)$ ← 恒等写像

$= x$