環(ring)

集合:A

A 上の2項演算: ＋, ・

1. (A, ＋)は可換群
2. (A, ・)は半群
3. 分配律が成り立つ

$\forall a, b, c \in A$

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(A, +, ・) を環とよぶ

(A, ＋)の単位元をゼロ元とよび 0 で表す

要素 $a \in A$ の＋に関する逆元: $-a$

例1　整数全体の集合:Z

$(Z, +)$ は可換群

$(Z, \cdot)$ は半群

$a, b, c \in Z$ ならば

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

分配律が成り立つ

↓

$(Z, +, \cdot)$ は環

例2　$(2x^2 + 1) + (2x^3 + x^2 + 5x - 1)$

$= (2x^3 + 3x^2 + 5x)$

$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = (8x^3 - 1)$

実数係数の多項式の全体は環をなす

↓

多項式環

体（Field）

集合:A

A 上の2項演算：＋，・

１．（A, ＋）は可換群

２．（A－{０}, ・)は群

　　0 は(A, ＋)のゼロ元

３．分配律が成り立つ

　　$\forall a, b, c \in A$

　　$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

　　$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

（A, +, ・) を体とよぶ

「体」という名称の由来

有機的に機能が働くという意味合いからドイツ語では

Körper（身体の意味）とよぶ.

例

有理数全体の集合 : $\mathbb{Q}$

加算 : ＋, 乗算 : ・

1. ($\mathbb{Q}$, +)は可換群

   ($\mathbb{Q}$, +)の零元 : 0

2. ($\mathbb{Q}-\{0\}$, ・)は群

3. 分配律が成り立つ

↓

($\mathbb{Q}$, +, ・) は体(有理数体)

実数, 複素数も体をなす(実数体, 複素数体)

体（ F, ＋, ･）上の多項式（polynomial on field）

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$$

$a_i \in F\ (i = 0 \sim n)$,　$a_n \neq 0$

＃＃＃注意＃＃＃

和や積を行う時，係数の計算は F 上で行うこと

体上の多項式環（polynomial ring on field）

$F[\mathrm{x}]$：体（F, ＋, ・）上の多項式の集合

（$F[\mathrm{x}]$, ＋, ・）は環をなす

「・」は略記されることが多い