二項演算（binary operation）

集合:A に対して写像: $f : A \times A \to A$ を A 上の二項演算とよぶ

$f(a,b) = c$ の代りに $a☆b = c$ と書く
'a'行, 'b'列に'a☆b'の値を書いた表:Cayley table

これを一般化して

n 項演算（n-adic operation）

写像: $f : A \times A \times \cdots \times A \to A$ を A 上の n 項演算とよぶ

代数系(algebraic system)

集合:A

集合 A 上の n 項演算: $f: A^n \to A$

(A, f)を代数系とよぶ

演算は複数種類あってもよい. たとえば A 上の二項演算 f, g があれば(A, f, g)は代数系となる

例

自然数の集合:N

加算: ＋: N＋N→N

乗算: ×: N×N→N

となるので＋,×はともに N 上の二項演算

従って(N,＋,×)は代数系

代数系:(A, ☆)において

$\forall x \in A, \quad x☆e = e☆x = x$

となる e ∈A を単位元(identity element)とよぶ

x ∈A に対して

$$x☆y = y☆x = e$$

となる y ∈A を x の逆元(inverse element)とよぶ

x の逆元を x^{-1}(乗算の場合)または$-x$(加算の場合)で表す

単位元の一意性
（uniqueness of identity element）

単位元が2つあるとする: e, e'

任意の x に対して

$$x☆e = e☆x = x \quad ①$$

$$x☆e' = e'☆x = x \quad ②$$

① で $x=e'$ とおくと

$$e'☆e = e☆e' = e'$$

② で $x=e$ とおくと

$$e☆e' = e'☆e = e$$

したがって

$$e = e'$$

逆元の一意性

（uniqueness of inverse element）

代数系(A, ☆)の単位元を e とする

$a \in A$ に対して $b, b' \in A$ が存在して

$$a☆b = b☆a = e$$

$$a☆b' = b'☆a = e$$

と仮定する．結合律が成り立つとすると

$$b = b☆e = b☆(a☆b') = (b☆a)☆b'$$

$$= e☆b' = b'$$

となるので逆元は存在すれば一意に決まる

逆元の一意性には結合律が不可欠．ただし結合律は逆元の存在を保証しない

半群（semigroup）

代数系:（A, ☆)において，☆は結合律（associative law）を満たす，つまり$\forall$a, b, c$\in$A,

$$(a ☆ b) ☆ c = a ☆ (b ☆ c)$$

を満たすとき(A, ☆)を半群とよぶ

例　整数の集合:Z, 乗算: ∗

$\forall$a,b,c$\in$ Z,

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

↓

∗は結合的

↓

(Z, ∗)は半群

自由半群(free semigroup)

$\Sigma = \{0, 1\}$

Σ^*: Σ の元を0個以上並べた記号列の集合

$\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \cdots\}$

ε : 長さ0の文字列

任意の $\sigma, \tau \in \Sigma^*$ について

$$\sigma \circ \tau = \sigma\tau \in \Sigma^*$$

とすると, $\circ$ は Σ^* 上の 2 項演算子

$(\sigma \circ \tau) \circ \gamma = \sigma \circ (\tau \circ \gamma) = \sigma\tau\gamma$

なので $\circ$ は結合的

$(\Sigma, \circ)$ は自由半群とよばれる

例　自由半群(Σ, $\circ$)の単位元

$\forall \sigma \in \Sigma^*$について

$$\sigma \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \sigma = \sigma$$

となるのでεが単位元

単位元をもつ半群→モノイド(monoid)