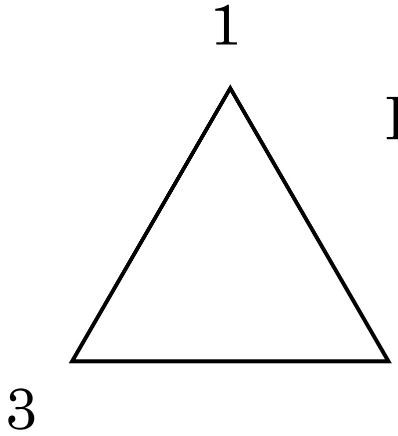
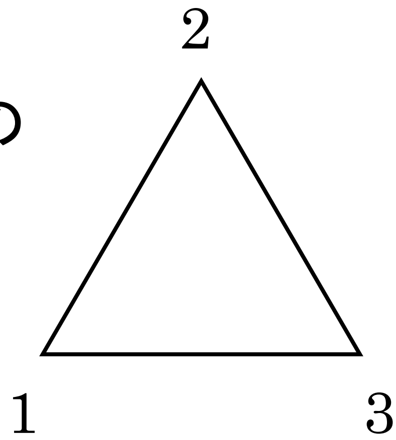
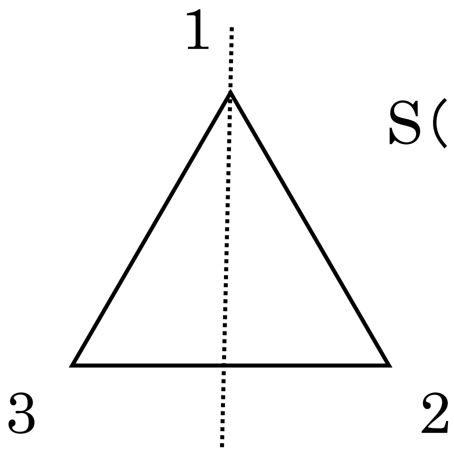
同型な群の例

3 角形の板を動かして自分自身に移すような変換(対称性)を考える

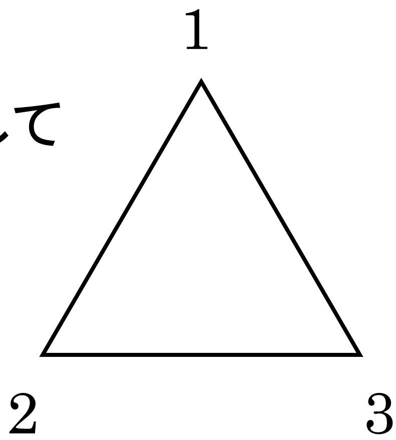


R(半時計周りの $2\pi/3$ 回転) ⇒





S(点線を軸にして裏返す) ⇒



恒等変換を E で表すと, 全部で 6 個の対称性をもつ

$$D_3 = \{ E, R, R^2, S, RS, R^2S \}$$

R^2S は S の後で R を2回続けて行うことを意味する

変換の積･を定義する. 例えば S･R^2 = SR^2. 演算表は以下の通り

･	E	S	R^2S	RS	R	R^2
E	E	S	R^2S	RS	R	R^2
S	S	E	R	R^2	R^2S	RS
R^2S	R^2S	R^2	E	R	RS	S
RS	RS	R	R^2	E	S	R^2S
R	R	RS	S	R^2S	R^2	E
R^2	R^2	R^2S	RS	S	E	R

全単射 $f : D_3 \to S_3$ を考える

$f(E) = e$, $f(S) = \sigma_1$, $f(R^2S) = \sigma_2$, $f(RS) = \sigma_3$,

$f(R) = \phi_1$, $f(R^2) = \phi_2$,

f は次式を満たすので

$$\forall a, b \in D_3, \quad f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$$

$D_3 \cong S_3$ となる

一般に正 n 角形（$n \geqq 3$）の板において

板に垂直で重心を通る軸に関する $2\pi/n$ 回転：R

板面の平面にある対称軸に関する π 回転:S

とすると

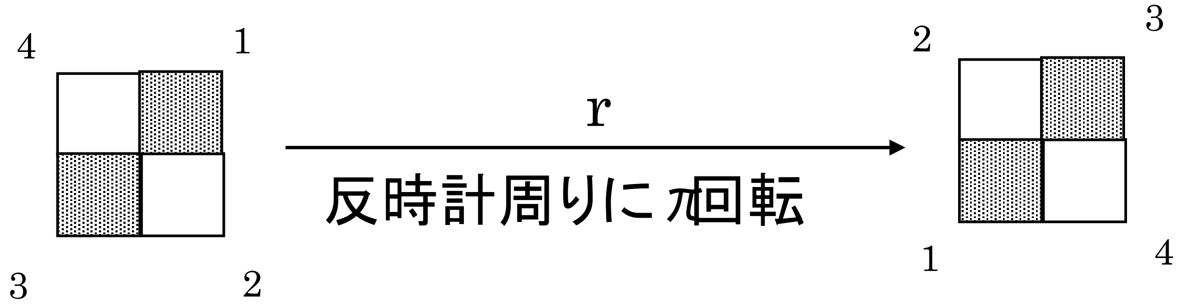
$D_n = \{ E, R, R^2, \cdots, R^{n-1}, S, RS, R^2S, \cdots, R^{n-1}S \}$

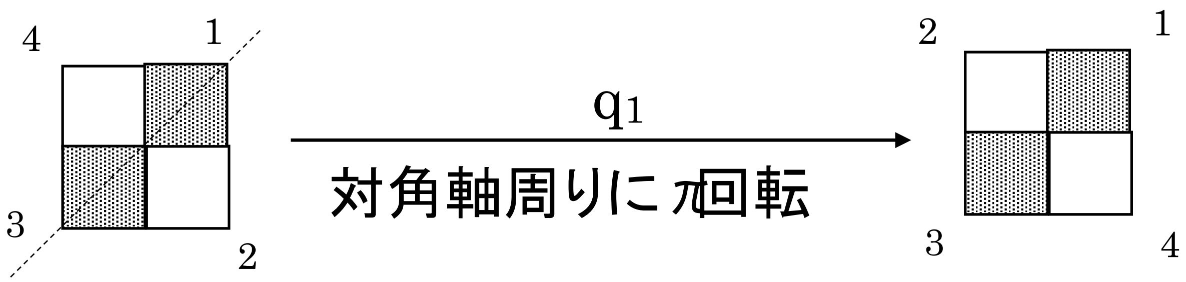
は積「・」について群をなす→2 面体群（dihedral group）

語源：di（2つの）+hedral（…個の面をもつ）

有限群の元の個数を位数（order）とよぶ

チェッカーフラッグの対称性は次の4つ





恒等変換：e

模様があるために 2 面体群 D_4 よりも対称性が少なくなっていることに注意