MAT 1110 Obligatorisk oppgave 2

Kenneth Ramos Eikrehagen

8. september 2017

Innhold

1 Oppgave 1

1.1 a)

Jeg har fått oppgitt at 50% av A går til B, 50% av B går ti C og 50% av C går til A. Jeg setter opp en matrise M der første søyle representerer de kulene som startet i A, midterste søyle er de som startet i B og siste søyle er de som startet i C.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden jeg skal skrive M som $\frac{1}{2}M$ kan jeg bruke at

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Så vil vektoren $\mathbf{x}_{n+1} = \frac{1}{2}M\mathbf{x}_n$ gi neste tidsenhet.

1.2 b)

Denne løste jeg ved hjelp av matlab.

Som vi ser på figur 1 på neste side er egen vektorene:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Med tilhørende egenverdier:

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, \ \lambda_3 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

1.3 c)

Fordi at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ er forskjellige vet jeg at disse lager en basis. Start fasen x_0 kan derfor skrives som en lineærkombinasjon av egenvektorene:

$$x_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

Hvis vi lar kulene bare flytte seg fritt vet jeg at jeg da kan uttrykke $x_m = M^m x_0$ (bruker m siden n er allerede brukt) Ganger jeg nå M^m på begge sider av x_0 får jeg :

```
M =

[ 1, 0, 1]
[ 1, 1, 0]
[ 0, 1, 1]

>> [U,V] = eig(M)

U =

[ 1,   (3^(1/2)*1i)/2 - 1/2, - (3^(1/2)*1i)/2 - 1/2]
[ 1, - (3^(1/2)*1i)/2 - 1/2,   (3^(1/2)*1i)/2 - 1/2]
[ 1,                      1,                      1]


V =

[ 2,                    0,                    0]
[ 0, 1/2 - (3^(1/2)*1i)/2,                    0]
[ 0,                    0, (3^(1/2)*1i)/2 + 1/2]
```

Figur 1: u = egen vektorene, v = egenverdiene

$$\begin{aligned} x_m &= M^m x_0 = c_1 M^m \mathbf{v}_1 + c_2 M^m \mathbf{v}_2 + c_3 M^m \mathbf{v}_3 \\ &= c_1 \lambda_1^m \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{v}_2 + c_3 \lambda_3^m \mathbf{v}_3 \\ &= c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)^m \mathbf{v}_2 + c_3 \Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)^m \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Jeg må nå finne hva c_1, c_2, c_3 er. Dette kan jeg gjøre ved å sette inn verdien

$$x_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og løse:

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-c_2\begin{pmatrix}-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\\-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\1\end{pmatrix}-c_3\begin{pmatrix}-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\0\\0\end{pmatrix}$$

Dette er ekvivalent med ligningssystemet:

$$\begin{aligned}c_1+\Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)c_2+\Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)c_3&=100\\c_1+\Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)c_2+\Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)c_3&=0\\c_1+c_2+c_3&=0\end{aligned}$$

Løser dette ligningssystemet

$$c_1+c_2+c_3=0\Rightarrow \underline{c_1=-c_2-c_3}$$

Setter dette inn i neste ligning:

$$\begin{aligned}c_1+\Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)c_2+\Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)c_3&=0\\-c_2-c_3+\Big(\frac{c2+c2\sqrt{3}i}{2}\Big)+\Big(\frac{c3-c3\sqrt{3}i}{2}\Big)&=0\mid\cdot 2\\-2c_2-2c_3+c_2+c_2\sqrt{3}i+c_3-c_3\sqrt{3}i&=0\\c_2-c_2\sqrt{3}i&=-c_3-c_3\sqrt{3}i\\c_2(1-\sqrt{3}i)&=-c_3(1+\sqrt{3}i)\\c_2&=\underline{\left(\frac{(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)}\right)(-c_3)}\end{aligned}$$

ganger jeg med den konjugerte til nevneren oppe å nede får jeg

$$\begin{aligned}\text{Teller }(1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)&=1+2\sqrt{3}i-3=-2+2\sqrt{3}i\\\text{Nevner }(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{(}3)i)&=1^2+\sqrt{3}^2=1+3=4\\c_2=-\frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{4}c_3&=\underline{\frac{(1-\sqrt{3}i)}{2}c_3}\end{aligned}$$

setter dette inn i neste ligning:

$$
\begin{aligned}
c_1 + \Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)c_2 + \Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)c_3 &= 100 \\
-c_2 - c_3 + \Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)c_2 + \Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)c_3 &= 100 \\
-\Big(\frac{(1-\sqrt{3}i)}{2}\Big)c_3 - c_3 + \Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)\Big(\frac{(1-\sqrt{3}i)}{2}\Big)c_3 + \Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)c_3 &= 100 \\
-\Big(\frac{(1-\sqrt{3}i)}{2}\Big)c_3 - c_3 - \Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)c_3 + \Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)c_3 &= 100 \mid \cdot 2 \\
-(1-\sqrt{3}i)c_3 - 2c_3 &= 200 \\
c_3(-3+\sqrt{3}i) &= 200 \\
c_3 = -\frac{200}{3-\sqrt{3}i} = -\frac{200(3+\sqrt{3}i)}{(3-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)} = -\frac{200(3+\sqrt{3}i)}{12} &= \underline{\underline{-\frac{50(3+\sqrt{3}i)}{3}}}
\end{aligned}
$$

Nå har jeg bare igjen å sette inn verdien å finne hva c_1 og c_2 er.

$$
\begin{aligned}
c_2 = \frac{(1-\sqrt{3}i)}{2}c_3 = \Big(\frac{(1-\sqrt{3}i)}{2}\Big)\Big(-\frac{50(3+\sqrt{3}i)}{3}\Big) = -\frac{50(3-\sqrt{3}i)}{3} &= \underline{\underline{-50 + \frac{50\sqrt{3}}{3}i}} \\
c_1 = -c2 - c3 = \frac{50(3-\sqrt{3}i)}{3} + \frac{50(3+\sqrt{3}i)}{3} &= \frac{50(3-\sqrt{3}i)+50(3+\sqrt{3}i)}{3} \\
&= (50+50) + \frac{50\sqrt{3}i - 50\sqrt{3}i}{3} = \underline{\underline{100}}
\end{aligned}
$$

For å oppsummere så er

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 100 \\
c_2 &= -\frac{50(3-\sqrt{3}i)}{3} \\
c_3 &= -\frac{50(3+\sqrt{3}i)}{3}
\end{aligned}
$$

For å finne $\mathbf{x}_5$ setter jeg det jeg har funnet inn i ligningen:

$$\mathbf{x}_m = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)^m \mathbf{v}_2 + c_3\Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)^m \mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{x}_5 = 100\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \Big(\frac{50(3-\sqrt{3}i)}{3}\Big)\Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)^5\begin{pmatrix}-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\\-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\1\end{pmatrix} -$$

$$\Big(\frac{50(3+\sqrt{3}i)}{3}\Big)\Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)^5\begin{pmatrix}-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\\1\end{pmatrix} \text{ jeg faktoriserer ut minustegnet fra } \mathbf{v}_2 \text{ og } \mathbf{v}_3$$

$$= 100\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \Big(\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}\Big)\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\\\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\-1\end{pmatrix} + \Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\\-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}$$

Dette kan jeg skrive om til ligningssettet:

$$x_5 = 100 + 1 + 1 = \underline{\underline{102}}$$

$$y_5 = 100 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \underline{\underline{99 - \sqrt{3}i}}$$

$$z_5 = 100 - \frac{1-\sqrt{3}i}{2} - \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \underline{\underline{99 + \sqrt{3}i}}$$

Nå ser vi at

$$\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix}102\\99-\sqrt{3}i\\99+\sqrt{3}i\end{pmatrix}$$

1.4 d)

For å finne $lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n$ ser jeg på uttrykket jeg fant tidligere for $\mathbf{x}_m$:

$$\mathbf{x}_m = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\Big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)^m \mathbf{v}_2 + c_3\Big(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)^m \mathbf{v}_3$$

Setter vi inn n for m i dette utrykket å tar grensen når $lim_{n\to\infty}$ ser vi at andre og tredje ledd forsvinner. Det er fordi $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) < 1$ og $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) < 1$ så når $n \to \infty$ blir disse tallene så små at de praktisk talt er 0. Da står vi igjen med $c_1\mathbf{v}_1$. Dette betyr at $\underline{\underline{\mathbf{x}_n \to c_1\mathbf{v}_1 \text{ når } n \to \infty}}$

2 Oppgave 2

2.1 a)

$$A_5 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Jeg ser at denne matrisen er symmetrisk som betyr at alle egenverdiene til A er reelle. Determinanten til en symmetrisk matrise er alltid 0, dette medfører at determinanten til A_n alltid vil være 0 for hvilken som helst verdi av n. Siden determinanten er 0 vil også 0 være en egenverdi til matrisen. Jeg brukte matlab til å finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen A_n for $n = 4, 5, 7, 10$, og kom fram til at for en $\lambda_n = 0$ av A_n vil $\mathbf{v}_n^0$ være:

$$\mathbf{v}_n^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

med n enere.

2.2 b)

For å vise at $\mathbf{v}^k$ er en egenvektor til A_n må jeg vise at

$$A_n \mathbf{v}^k = \lambda \mathbf{v}^k$$

dette må jeg gjøre generelt slik at det gjelder for en hver n. Jeg ser at på matrisen så er den første og siste raden forskjellig fra de andre. Radene i midten følger ett mønster, alle andre plasser unntatt foran og bak tallene nedover diagonalen er null. Jeg er interessert hva som skjer på den j-te raden, for å vise $\mathbf{v}_j^k$.
Skriver opp matrisen $A_n \mathbf{v}^k$:

$$A_n \mathbf{v}^k = \begin{pmatrix} -2\mathbf{v}_0^k + \mathbf{v}_1^k + \mathbf{v}_{n-1}^k & \text{for } j = 0 \\ \vdots & \\ \mathbf{v}_{j-1}^k - 2\mathbf{v}_j^k + \mathbf{v}_{j+1}^k & \text{for } 1 \leq j < n-1 \\ \vdots & \\ \mathbf{v}_0^k + \mathbf{v}_{n-2}^k - 2\mathbf{v}_{n-1}^k & \text{for } j = n-1 \end{pmatrix}$$

Jeg begynner med å skrive ned hva $\mathbf{v}^k$ er oppgitt som, og en trigonometrisk likhet som jeg kommer til å bruke.

$$\mathbf{v}^k = \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}kj + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$sin(\alpha \pm \beta) = sin(\alpha)cos(\beta) \pm cos(\alpha)sin(\beta)$$

Regner ut første rad i matrisen:

$$\begin{aligned}
-2\mathbf{v}_0^k + \mathbf{v}_1^k + \mathbf{v}_{n-1}^k =& -2\sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}kj + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}k(j+1) + \frac{\pi}{4}\right) \\
&+ \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}k(n-1) + \frac{\pi}{4}\right) \\
=& -2\sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}kj + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi kj}{n} + \frac{2\pi k}{n} + \frac{\pi}{4}\right) \\
&+ \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi kn}{n} - \frac{2\pi k}{n} + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Jeg vet at i første rad er $k = 0$ derfor blir $\frac{2\pi kj}{n} = \frac{2\pi kn}{n} = 0$ (Legg merke til at jeg ikke tok med $\frac{2\pi k}{n}$, det er fordi jeg har bruk for denne senere.) Disse gir ingen bidrag og da blir $\mathbf{v}_0^k = \sqrt{2}sin(\frac{\pi}{4})$
Jeg setter $\frac{\pi}{4} = \alpha$ og $\frac{2\pi k}{n} = \beta$

$$\begin{aligned}
=& -2\sqrt{2}sin(\alpha) + \sqrt{2}sin(\alpha+\beta) + \sqrt{2}sin(\alpha-\beta) \\
=&\sqrt{2}[-2sin(\alpha) + sin(\alpha)cos(\beta) + \cancel{cos(\alpha)sin(\beta)} + sin(\alpha)cos(\beta) - \cancel{cos(\alpha)sin(\beta)}] \\
=&\sqrt{2}[-2sin(\alpha) + 2sin(\alpha)cos(\beta)] = 2[cos(\beta)-1]\sqrt{2}sin(\alpha) = 2\left[cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 1\right]\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
=&\underline{\underline{2\left[cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 1\right]\mathbf{v}_0^k}}
\end{aligned}$$

Regner ut midterste rad:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_{j-1}^k - 2\mathbf{v}_j^k + \mathbf{v}_{j+1}^k =& \sqrt{2} sin\left(\frac{2\pi}{n}k(j-1)+\frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2} sin\left(\frac{2\pi}{n}kj+\frac{\pi}{4}\right) \\
&+ \sqrt{2} sin\left(\frac{2\pi}{n}k(j+1)+\frac{\pi}{4}\right) \\
=& \sqrt{2} sin\left(\frac{2\pi kj}{n} - \frac{2\pi k}{n} + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2} sin\left(\frac{2\pi}{n}kj+\frac{\pi}{4}\right) \\
&+ \sqrt{2} sin\left(\frac{2\pi kj}{n} + \frac{2\pi k}{n} + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

På samme måte som for første rad definerer jeg en α og β;

$$
\frac{2\pi kj}{n} + \frac{\pi}{4} = \alpha \text{ og } \frac{2\pi k}{n} = \beta
$$

$$
\begin{aligned}
=& \sqrt{2} sin(\alpha - \beta) - 2\sqrt{2} sin(\alpha) + \sqrt{2} sin(\alpha + \beta) \\
=& \sqrt{2}[sin(\alpha)cos(\beta) - \cancel{cos(\alpha)sin(\beta)} - 2sin(\alpha) + sin(\alpha)cos(\beta) + \cancel{cos(\alpha)sin(\beta)}]] \\
=& \sqrt{2}[2sin(\alpha)cos(\beta) - 2sin(\alpha)] = 2\sqrt{2}[cos(\beta) - 1]sin(\alpha) \\
=& 2\left[cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 1\right]\sqrt{2} sin\left(\frac{2\pi kj}{n} + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{2\left[cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 1\right]\mathbf{v}_j^k}}
\end{aligned}
$$

Regner ut siste rad:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_0^k + \mathbf{v}_{n-2}^k + \mathbf{v}_{n-1}^k =& \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}kj + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}k(n-2) + \frac{\pi}{4}\right) \\
& - 2\sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi}{n}k(n-2) + \frac{\pi}{4}\right) \\
=& \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi kj}{n} + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi kn}{n} - 2\frac{2\pi k}{n} + \frac{pi}{4}\right) \\
& - 2\sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi kn}{n} - \frac{2\pi k}{n} + \frac{\pi}{4}\right) \\
=& \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi kj}{n} + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi k\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{\pi}{4}\right) cos\left(2\frac{2\pi k}{n}\right) \\
& - \sqrt{2}cos\left(\frac{2\pi k\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{\pi}{4}\right) sin\left(2\frac{2\pi k}{n}\right) - 2\sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi k\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{\pi}{4}\right) cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
& - 2\sqrt{2}cos\left(\frac{2\pi k\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
=& \sqrt{2}sin\left(\frac{2\pi kj}{n} + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{4}\right) cos\left(2\frac{2\pi k}{n}\right) \\
& - \sqrt{2}cos\left(2\pi k + \frac{\pi}{4}\right) sin\left(2\frac{2\pi k}{n}\right) - 2\sqrt{2}sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{4}\right) cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
& - 2\sqrt{2}cos\left(2\pi k + \frac{\pi}{4}\right) sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Her velger jeg å bruke en regel som sier at $sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$ (dette gjelder også for cos). Jeg vet også at $j = 0$ i det første leddet. Jeg definerer $\frac{\pi}{4} = \alpha$ og $\frac{2\pi k}{n} = \beta$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2}sin(\alpha) + \sqrt{2}sin(\alpha)cos(2\beta) - \sqrt{2}cos(\alpha)sin(2\beta) - 2\sqrt{2}sin(\alpha)cos(\beta) - 2\sqrt{2}cos(\alpha)sin(\beta) \\
&= \sqrt{2}[sin(\alpha) + sin(\alpha)cos(2\beta) - cos(\alpha)sin(2\beta) - 2sin(\alpha)cos(\beta) - 2cos(\alpha)sin(\beta)]
\end{aligned}
$$

Jeg vet ikke hva jeg skal gjøre med $cos(2\beta)$ eller $sin(2\beta)$. Hvis jeg kan si at 2 multiplisert med 2π bare er en ekstra runde i cosinus og sinus funksjonen spiller ikke 2 tallet noen rolle for resultatet, den bare spinner en ekstra runde som er det samme som å gange resultatet med 1. Hvis dette holder kan jeg si at:

$$= \sqrt{2}[sin(\alpha) + \cancel{sin(\alpha)cos(\beta)} - cos(\alpha)sin(\beta) - \cancel{2}sin(\alpha)cos(\beta) - 2cos(\alpha)sin(\beta)]$$
$$= \sqrt{2}[sin(\alpha) - 3cos(\alpha)sin(\beta) - sin(\alpha)cos(\beta)]$$
$$= \sqrt{2}sin(\alpha)\left[1 - \frac{3cos(\alpha)sin(\beta)}{sin(\alpha)} - cos(\beta)\right] = \underline{\underline{\mathbf{v}_n^k\left[1 - \frac{3cos(\alpha)sin(\beta)}{sin(\alpha)} - cos(\beta)\right]}}$$

Jeg har nå vist at $\mathbf{v}^k$ er en egenvektor. Er usikker på den siste raden, for egenverdien skal være $2\left[cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - 1\right]$

2.3 c)

Jeg henvender til **Spektralteoremet**.
Siden A_n er en symmetrisk $n \times n$ matrise. Er alle egenverdiene til A reelle, og det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer til A. Derfor er mengden $\{\mathbf{v}\}_{k=0}^{n-1}$ en basis for $\mathbb{R}^n$.

3 Oppgave 3

Her har jeg tenkt å bruke **Lagranges multiplikatormetode** .

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

Her er

$$f(x,y,z) = log(x) + log(y) + 3log(z)$$

og bi betingelsen kan skrives som

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

der $g(x,y,z) = 5r^2$
Starter med å finne partiell deriverte til begge funksjonene.

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)\right) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{3}{z}\right)}}$$
$$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}g(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y}g(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z}g(x,y,z)\right) = \underline{\underline{(2x,\ 2y,\ 2z)}}$$

Bruker nå Lagranges multiplikatormetode.

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{3}{z} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Nå kan jeg sette opp et ligning system med fire ukjente som også skal tilfredstille at $g(x, y, z) = 5r^2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \lambda 2x \\
\frac{1}{y} &= \lambda 2y \\
\frac{3}{z} &= \lambda 2z \\
x^2 + +y^2 + z^2 &= 5r^2
\end{aligned}$$

Ser fort at jeg kan skrive

$$\lambda = \frac{1}{2x^2}$$

Setter dette inn i neste ligning:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} &= \lambda 2y & &|\lambda = \frac{1}{2x^2} \\
\frac{1}{y} &= \frac{1}{2x^2} 2y & &| \div 2y \\
\frac{1}{2y^2} &= \frac{1}{2x^2} & &| \ 2y^2 2x^2 \\
2x^2 &= 2y^2 \Rightarrow \underline{x = y}
\end{aligned}$$

Setter det jeg nå har funnet inn i $x^2 + +y^2 + z^2 = 5r^2$ og løser denne for y:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= 5r^2 \ |x = y \\
y^2 + y^2 + z^2 &= 5r^2 \\
2y^2 &= 5r^2 - z^2 \\
x = y &= \underline{\sqrt{\frac{5r^2 - z^2}{2}}}
\end{aligned}$$

Setter dette inn i den siste ligningen jeg har og løser for z

$$\frac{3}{z} = \lambda 2z \qquad |\lambda = \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{3}{z} = \frac{1}{2x^2}2z \qquad |x = \sqrt{\frac{5r^2 - z^2}{2}}$$

$$\frac{3}{z} = \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{5r^2-z^2}{2}}\right)^2}2z \qquad | \div 2z$$

$$\frac{3}{2z^2} = \frac{1}{\cancel{2}\frac{5r^2-z^2}{\cancel{2}}} \qquad |(5r^2 - z^2)2z^2$$

$$3(5r^2 - z^2) = 2z^2$$

$$15r^2 = 5z^2 \Rightarrow z = \sqrt{3r^2} = \underline{\sqrt{3}r}$$

Nå gjenstår det bare å fylle inn:

$$\begin{aligned} x = y &= \sqrt{\frac{5r^2 - z^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{5r^2 - (\sqrt{3}r)^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{5r^2 - 3r^2}{2}} = \sqrt{\frac{2r^2}{2}} = \sqrt{r^2} = r \end{aligned}$$

Dermed har jeg funnet at

$$\underline{\underline{x = y = r \text{ og } z = \sqrt{3}r}}$$

For å vise ulikheten under vet jeg at, $x, y, z > 0$ dermed kan jeg gjøre følgende.

$$log(x) + log(y) + 3log(z) \leq log(r) + log(r) + 3log(\sqrt{3}r) = 2log(r) + 3log\sqrt{3}r$$

$$e^{log(x)+log(y)+3log(z)} \leq e^{2log(r)+3log\sqrt{3}r}$$

$$e^{log(x)}e^{log(y)}e^{log(z^3)} \leq e^{log(r^2)}e^{log((\sqrt{3}r)^3)}$$

$$xyz^3 \leq r^2(\sqrt{3}r)^3 = r^2 3\sqrt{3}r^3 = r^5\sqrt{27}$$

Jeg bruker nå at jeg kan skrive

$$r = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}} = \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$xyz^3 \leq \sqrt{27}\left(\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^5 = \sqrt{27}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Siden begge sidene er positive kan vi opphøye begge sider i 2.

$$x^2y^2(z^2)^3 \leq 27\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^5$$

for at dette skal bli det jeg skal vise setter jeg $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$ der a, b, c er positive tall.

$$abc^3 \leq 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$$

4 Oppgave 4

4.1 a)

For å løse ligningen f(x) = x skriver jeg

$$\begin{pmatrix} x^2 - y^2 + \alpha \\ 2xy + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix}$$

Dette gir to ligninger med 2 ukjente, sidenα og β er konstanter.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + \alpha &= x \\ 2xy + \beta &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2xy + \beta &= y && \mid \div y \\ 2x + \frac{\beta}{y} &= 1 \\ \frac{\beta}{y} &= 1 - 2x && |\text{jeg snur brøkene og ganger med } \beta \\ y &= \frac{\beta}{1-2x} \end{aligned}$$

Setter dette inn for y

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + \alpha &= x \\ x^2 - \left(\frac{\beta}{1-2x}\right)^2 + \alpha &= x \\ x^2 - \frac{\beta^2}{(1-2x)^2} + \alpha &= x \end{aligned}$$

Jeg tror jeg er på vill spor her. Regner jeg ut dette får jeg et 4.grads polynom. Tror ikke det er det jeg skal gjøre.

4.2 b)

$$|f(x_n)| \geq |x_n|^2 + |c|$$
$$\left|\begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right| \geq \left|\begin{pmatrix} x_n^2 - y_n^2 \\ 2x_n y_n \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right|$$

Jeg forstår ikke hvordan jeg skal regne videre på denne ulikheten.
Fikk dessverre ikke tid til å jobbe skikkelig med oppgave 4 før innlevering.
Dette gjenspeiler nok svarene, fikk heller ikke tid til å programmere. Veldig skuffet over det!