MAT 1120 Obligatorisk oppgave 2

Kenneth Ramos Eikrehagen

31. oktober 2017

Innhold

Jeg har brukt boka Linear algebra and it's applications 5th editon av David C. Lay, Steven R. Lay og Judi J. McDonald og kommer til å referere til teoremer og definisjoner i denne boka.

1 Oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4]$$

1.1 a)

Jeg skal definere W = Col A. For å gjøre dette bruker jeg Matlab til å radredusere $A \sim B$ fordi jeg vet at pivot kolonnene i B gir meg basisene til kolonnerommet til A (Col A) dermed også basisene til W. Hvordan jeg gjorde dette i matlab kan du se på figur 1, her ser man også at basisene til W = Col A = $\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right]$.

Nå skal jeg finne en ortogonal basis $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ for W ved hjelp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsprosess.

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{a}_1 \\
\vec{v}_2 &= \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 \\
\vec{v}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}\vec{v}_2
\end{aligned}$$

Jeg må nå løse dette for å finne basisene.

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{bmatrix}}}$$

Jeg setter $\vec{v_2} = 3\vec{v_2}$ for å få penere regning fremover.

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{15}\begin{bmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 - 1/3 + 2/15\\3/15\\0 - 1/3 - 1/15\\1 - 1/3 - 1/15\end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}-3\\3\\-6\\9\end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\\3\end{bmatrix}}}$$

Command Window

```
>> A = [
1 1 0 2
0 1 0 1
1 0 0 1
1 0 1 2]

A =

     1     1     0     2
     0     1     0     1
     1     0     0     1
     1     0     1     2

>> B = rref(A)

B =

     1     0     0     1
     0     1     0     1
     0     0     1     1
     0     0     0     0
```

Figur 1: Hvordan jeg radreduserer i matlab.

Jeg setter $\vec{v_3} = 5\vec{v_3}$ for å få penere regning fremover. Nå har jeg funnet den ortogonale basisen

$$\underline{\underline{B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}}$$

1.2 b)

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I denne oppgaven skal jeg finne $\mathrm{proj}_W(\vec{y})$ og en $\vec{v_4}$ slik at $C = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ er en ortogonal basis. Da bruker jeg følgende

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z} \Rightarrow \vec{z} = \vec{y} - \hat{y}$$

hvor $\hat{y} = \mathrm{proj}_W(\vec{y})$, $\vec{z} = \vec{v_4}$ som jeg begrunner senere. Siden B er den ortogonale basisen til W velger jeg å skrive $\mathrm{proj}_B(\vec{y})$. For å løse denne ligningen, så velger jeg å finne verdiene for $\hat{y}, \vec{z}$

$$\hat{y} = \mathrm{proj}_B(\vec{y}) = \frac{\vec{y} \cdot \vec{v_1}}{\vec{v_1} \cdot \vec{v_1}}\vec{v_1} + \frac{\vec{y} \cdot \vec{v_2}}{\vec{v_2} \cdot \vec{v_2}}\vec{v_2} + \frac{\vec{y} \cdot \vec{v_3}}{\vec{v_3} \cdot \vec{v_3}}\vec{v_3} = \frac{3}{3}\vec{v_1} + \frac{1}{5}\vec{v_2} + \frac{1}{15}\vec{v_3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

$$\vec{z} = \vec{y} - \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{v_4}}}$$

$$\underline{\underline{C = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Vi kan lett se at dette også er en ortogonal basis, siden vi vet at de 3 første vektorene er ortogonale siden de ut spenner B. Det er lett å se at prikkproduktet mellom alle de 4 vektorene blir 0 som betyr at alle disse står ortogonalt på hverandre.

1.3 c)

For å finne en minste kvadraters løsning på $A\vec{x} = \vec{y}$ bruker jeg Teorem 13 på side 363 i boka, som sier at mengden med løsninger av $A\vec{x} = \vec{y}$ er det samme som mengden av løsninger av $A^T A\vec{x} = A^T\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T\vec{y}$.
Jeg regnet ut dette i matlab, legger ved koden under

```
A = [
    1 1 0 2
    0 1 0 1
    1 0 0 1
    1 0 1  2];
y = [
    1
    1
    1
     1];
AT = transpose(A);

x = rats(inv(AT*A)*AT*y)
```

Dette ga meg

$$\vec{x} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Jeg fikk også en feil melding om at matrisen kunne gi meg feil siden den var nesten singulær (~ 0). Jeg gjorde derfor utregningen for hand å fikk noe annet.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \ A^Ty = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 & | & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 10 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x + w = 2/3 \\ y + w = 2/3 \\ z + w = 1/3 \\ w = \text{ fri} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2/3 - w \\ y = 2/3 - w \\ z = 1/3 - w \\ w = \text{ fri} \end{matrix} \text{velger w = 1}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 - 1 \\ 2/3 - 1 \\ 1/3 - 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}}}$$

Jeg mener den siste utregningen er korrekt fordi selv om determinanten var forskjellig fra null så var den tilnærmet lik null ($-2.3e^{-17}$) og derfor ikke invertibel.

2 Oppgave 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

2.1 a)

For å finne de karakteristiske polynomene bruker jeg at $p_A(A) = det(A - \lambda I)$ og tilsvarende for B.

$$
\begin{aligned}
p_A(A) = det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 0-\lambda & -3 & -3 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 2-\lambda \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda((2-\lambda)(1-\lambda) - 2) + 3((\lambda - 1) - 2) - 3(2 - (2\lambda - 4)) \\
&= -\lambda((\lambda^2 - 3\lambda + \cancel{2}) - \cancel{2}) + 3\lambda - 9 - 18 + 6\lambda \\
&= \underline{-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_B(B) = det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 & -6 \\ -1 & 0-\lambda & 0 \\ -2 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -6 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 0 \cancel{\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}} \\
&= ((9 - 3\lambda) - 36) - \lambda((\lambda^2 - 3\lambda) - 12) \\
&= -3\lambda - 27 - (\lambda^3 - 3\lambda^2 - 12\lambda) \\
&= -3\lambda - 27 - \lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda = \underline{-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27}
\end{aligned}
$$

Jeg får at de karakteristiske polynomene blir like:

$$\underline{\underline{p_A(A) = p_B(B) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27}}$$

Hvis jeg nå faktoriserer ut -1 fra det karakteristiske polynomet ser jeg at jeg kan faktorisere det videre til

$$(-1)p_A(A) = (-1)(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27) = (-1)((\lambda - 3)^2(\lambda + 3))$$

Nå har det blitt enklere å se hva som blir egenverdiene (λ) til både A og B :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \ , \ \lambda_3 = -3$$

2.2 b)

For å vise at $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ løser jeg $(A - \lambda I)(\vec{x}) = 0$ hvor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Der y og z er fri, velger jeg y = 1 og z = -1 får jeg:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{v}$$

Som var det jeg skulle vise, vi kan også se at bidraget for basisene til egenrommet E_A blir $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ for λ_1.

Siden jeg skal finne alle basisene til egenrommet til både A og B, fortsetter jeg å finne neste basis for egenrommet til A.

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x \quad -y - z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & y + z \\ z & = & 2y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 3y \\ z & = & 2y \end{array}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ y \\ 2y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Setter jeg $y = 1$ blir bidraget for basisen til egenrommet her $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ for λ_3

Samler jeg bidragene for basisene til egenrommet fra alle λ'ene får jeg

$$\underline{\underline{E_A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Jeg bruker samme fremgangsmåte for å finne basisene til egenrommet E_B til B.

$$B - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -x & +y - 2z & = 0 \\ & -2y + z & = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x & = & y - 2z \\ y & = & \frac{1}{2}z \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x & = & -\frac{3}{2}z \\ y & = & \frac{1}{2}z \end{matrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix} = \frac{z}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Her er z fri og velger jeg $z = 2$ blir bidraget til basisen for egenrommet $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ for λ_1

$$B - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x & +y - 2z & = 0 \\ & 2y - z & = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x & = & -y + 2z \\ y & = & \frac{1}{2}z \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{3}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{matrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix} = \frac{z}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Her er z fri og velger jeg $z = 2$ blir bidraget til basisen for egenrommet $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ for λ_3

Samler jeg bidragene for basisene til egenrommet fra alle λ'ene får jeg

$$\underline{\underline{E_B = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Oppsummering:

Egenverdiene til A og B fant jeg i oppgave a) der jeg viste at $p_A(A) =$

$p_B(B) = (\lambda-3)^2(\lambda+3)$. Her ser vi at $\lambda = 3$ og $\lambda = -3$ Jeg viste at $\vec{v}$ var en egenvektor ved å regne ut $(A-\lambda_1 I)$ og sette de frie variablene $y = -z = -1$. Kom frem til at basisene til egenrommet til A og B ble:

$$E_A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

$$\underline{\underline{E_B = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}}$$

2.3 c)

I følge teorem 5 på side 284 i boka er det kun matrise A som tilfredsstiller kravene til å være diagonaliserbar.

$$P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Dette kan kontrolleres ved at $AP = PD$ (siden $A = PDP^{-1}$)

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Jeg gjorde matrise multiplikasjonen i matlab.

3 Oppgave 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A er ortogonalt diagonaliserbar hvis det finnes en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^T$. Jeg ser også at A er symmetrisk ($A = A^T$). For å finne P og D begynner jeg med å finne egenverdiene til A.

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 2 - \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) = \underline{(\lambda-2)^2(\lambda+1)}$$

Vi ser her at egenverdiene blir $\lambda = 2$ og $\lambda = -1$
For $\lambda = 2$ har vi :

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \sqrt{2}z$$
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Velger jeg $y = z = 1$ har jeg at bidraget for basisene til egenrommet E_A blir $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
For $\lambda = -1$ har vi:

$$(A - I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}z \\ y = 0 \end{matrix}$$
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Setter jeg $z = \sqrt{2}$ får jeg $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$ som er bidraget for basisen til egenrommet E_A. Samler jeg bidragene sammen får jeg at

$$E_A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

Siden A er symmetrisk er i følge teorem 1, på side 397 i boka, basisene til egenrommet E_A ortogonale. For å finne den ortogonale matrisen P må jeg normalisere vektorene til E_A Dermed blir

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrisen består av egenverdiene derfor er den

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hvis jeg nå har funnet en P og D som diagonaliserer A så er AP = PD.

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

Som vi ser stemmer dette overens dermed har jeg funnet en ortogonal matrise P og en diagonal matrise D som diagonaliserer A. Dermed er A også ortogonalt diagonaliserbar ved definisjon jeg ga i starten av oppgaven.

4 Oppgave 4

Jeg har laget et skript i matlab som jeg har lagt ved under. Jeg har også lagt ved svarene jeg fikk for parametervektorene- og $||\epsilon||$- for designmatrisene X og A på figur 2 3

```
% (AT)*A*(betta) = (AT)*y -> Normalligningen
% betta = inv(AT*A)*AT*y -> gir meg parametervektoren
% y-vektor = observasjonsvektor
y = [
4.05
4.15
```

```
3.85
-0.22];
% x-vektor
x = [
0.08
0.12
0.20
0.38];

%Oppgave a)
X = zeros(4,3); %Designmatrise X

for i = 1:4
    X(i,:) = [1 x(i) x(i)^2];
end

XT = transpose(X);     %X-transponert
betta = inv(XT*X)*XT*y %Parametervektor

%%
%Oppgave b)
A = zeros(4,2); %Designmatrise A

for i = 1:4
    A(i,:) = [sin(2*pi*x(i)) cos(2*pi*x(i))];
end

AT = transpose(A);     %A-transponert
alpha = inv(AT*A)*AT*y %Parametervektor
%%


%%
%Oppgave c)
Xbetta = X*betta;
Aalpha = A*alpha;
Epsi_X = zeros(4,1); %residualvektor for X
Epsi_A = zeros(4,1); %residualvektor for A
for i= 1:4
    Epsi_X(i) = y(i) - Xbetta(i);
    Epsi_A(i) = y(i) - Aalpha(i);
end

norm(Epsi_X), norm(Epsi_A)
```

For at tilnærmingen skal være best mulig vil jeg at $||\epsilon||$ skal være minst mulig. Som vi ser på firgur 3 har jeg fått at $||\epsilon_X||$ er minst, derfor er også dette den beste tilnærmingen i følge min kode.

```
betta = 3x1 double

    3.0473
   17.8362
  -69.5494

alpha = 2x1 double

    2.9636
    3.0123
```

Figur 2: Øverst: Parametervektor for X
Nederst: Parametervektor for A

```
norm_Epsi_X = 0.0453
norm_Epsi_A = 0.1370
```

Figur 3: Øverst: $||\epsilon_X||$
Nederst: $||\epsilon_A||$