MAT 1120 Obligatorisk oppgave 1

Kenneth Ramos Eikrehagen

27. september 2017

Innhold

1 Oppgave 1

Jeg har brukt boka Linear algebra and it's applications 5th editon av David C. Lay, Steven R. Lay og Judi J. McDonald og kommer til å referere til teoremer og definisjoner i denne boka.

1.1 a)

Vi har fått oppgitt en matrise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Jeg bruker MatLab til å radredusere denne matrisene $A \sim B$ der

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I følge Teorem 6 på side 214 i boka gir pivot kolonnene til B (pga $A \sim B$) basis for Col(A).

Vi ser her at basisene for kolonnerommet til A blir:

$$Col(A) = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_5}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

For å finne radrommet til A kan jeg bruke Teorem 13 på side 233 i boka. Hvis to matriser A og B er rekke ekvivalente er rekkerommet det samme. Hvis B er den reduserte trappematrisen til A, vil de rekkene som er $\neq 0$ gi basisene til rekkerommet til A.

Ser fra matrise B at rekkerommet til matrise A kan skrives som:

$$row(A) = \{(1\ 0\ 1\ 1\ 0), (0\ 1\ -1\ 1\ 0), (0\ 0\ 0\ 0\ 1)\}$$

For å finne rank(A) kan jeg bruke definisjonen på side 235 i boka. rank(A) er dimensjonen til kolonnerommet til A

Dette gir meg at :

$$rank(A) = dim(Col(A)) = 3$$

Oppsummering :

$$Col(A) = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_5}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$row(A) = \{(1\ 0\ 1\ 1\ 0), (0\ 1\ -1\ 1\ 0), (0\ 0\ 0\ 0\ 1)\}$$

$$rank(A) = dim(Col(A)) = 3$$

1.2 b)

For å finne Nul(A) må jeg løse ligningen $A\vec{x} = 0$ Siden $A \sim B$ er rekke ekvivalente kan jeg løse ligningen $B\vec{x} = 0$ i stede og likevel finne en basis for Nul(A)

Jeg definerer

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + x_4 \\ x_2 - x_3 + x_4 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Skriver ut matrisen som ligning settet :

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_1 = -x_3 - x_4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_2 = x_3 - x_4 \\ x_5 = 0 \end{aligned}$$

Ser at x_3 og x_4 er frie variable setter disse som $x_3 = S$ og $x_4 = T$ og setter inn verdiene i $\vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S - T \\ S - T \\ S \\ T \\ 0 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S\vec{v_1} + T\vec{v_2}$$

hvor $\vec{v_1}$ og $\vec{v_2}$ er basiser for Nul(A)

Jeg vet at $dim(Nul(A))$ er antall frie variable det er i ligningen $A\vec{x} = 0$. Med dette har jeg $dim(Nul(A)) = 2$

Oppsummering :

$$Nul(A) = (\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dim(Nul(A)) = 2$$

2 0ppgave 2

$$W = Span\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$$

2.1 a)

$$\mathbf{B} = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$$

For at **B** skal kunne kalles en basis for W må den tilfredstille disse 2 kravene:
1. **B** må være lineært uavhengig
2. At vektorene i **B** genererer vektorene i W. Altså **B** $= span\{\text{vektorene i W}\}$

Jeg observerer at ingen av funksjonene i **B** er multiplum av hverandre, som betyr at de er lineært uavhengige. For å kontrollere dette kan jeg sette opp

$$1C_1 + \sin xC_2 + \cos xC_3 + \sin 2xC_4 + \cos 2xC_5 = 0$$

jeg får da 5 ligninger med 5 ukjente, det enkleste er å sette disse opp i en matrise A

$$A\vec{C} = \begin{pmatrix} 1C_1 & \sin xC_2 & \cos xC_3 & \sin 2xC_4 & \cos 2xC_5 \\ 1C_1 & \sin xC_2 & \cos xC_3 & \sin 2xC_4 & \cos 2xC_5 \\ 1C_1 & \sin xC_2 & \cos xC_3 & \sin 2xC_4 & \cos 2xC_5 \\ 1C_1 & \sin xC_2 & \cos xC_3 & \sin 2xC_4 & \cos 2xC_5 \\ 1C_1 & \sin xC_2 & \cos xC_3 & \sin 2xC_4 & \cos 2xC_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos 2x \\ 1 & \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos 2x \\ 1 & \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos 2x \\ 1 & \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos 2x \\ 1 & \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Hvis jeg nå velger ut $x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{4}$ får jeg matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 0 & \cos 0 & \sin 2*0 & \cos 2*0 \\ 1 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & \sin 2\frac{\pi}{2} & \cos 2\frac{\pi}{2} \\ 1 & \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} & \sin 2\frac{3\pi}{2} & \cos 2\frac{3\pi}{2} \\ 1 & \sin\pi & \cos\pi & \sin 2\pi & \cos 2\pi \\ 1 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & \sin 2\frac{\pi}{4} & \cos 2\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_5$$

Siden det ble identitets matrisen kan jeg se at om jeg multipliserer med $\vec{C}$ og det skal bli lik $\vec{0}$ får jeg at $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$
Jeg har fått oppgitt at $\mathbf{B} = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$ som nettopp er det W genererer. Dermed er **B** en basis for W.

2.2 b)

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\frac{\pi}{2}) \\ 2f(0) - f(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

For å vise at T(f) er en lineær avbildning må den være lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon.

$$\begin{aligned} T(f+g) &= \begin{pmatrix} (f+g)(0) \\ (f+g)(\frac{\pi}{2}) \\ 2(f+g)(0) - (f+g)(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0)+g(0) \\ f(\frac{\pi}{2}) + g(\frac{\pi}{2}) \\ 2(f(0)+g(0)) - (f(\frac{\pi}{2}) + g(\frac{\pi}{2})) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(0)+g(0) \\ f(\frac{\pi}{2}) + g(\frac{\pi}{2}) \\ 2f(0) + 2g(0) - f(\frac{\pi}{2}) - g(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0)+g(0) \\ f(\frac{\pi}{2}) + g(\frac{\pi}{2}) \\ 2f(0) - f(\frac{\pi}{2}) + 2g(0) - g(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\frac{\pi}{2}) \\ 2f(0) - f(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(0) \\ g(\frac{\pi}{2}) \\ 2g(0) - g(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = T(f) + T(g) \end{aligned}$$

Dette viser at den er lukket under addisjon.

$$T(cf) = \begin{pmatrix} (cf)(0) \\ (cf)(\frac{\pi}{2}) \\ 2(cf)(0) - (cf)(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(f(0)) \\ c(f(\frac{\pi}{2})) \\ 2c(f(0)) - c(f(\frac{\pi}{2})) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} f(0) \\ f(\frac{\pi}{2}) \\ 2f(0) - f(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = cT(f)$$

Som viser at den også er lukket under skalarmultiplikasjon. Dette medfører at T(f) er en lineær avbildning, som var det jeg skulle vise.

2.3 c)

For å finne ker(T) må jeg løse:

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\frac{\pi}{2}) \\ 2f(0) - f(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Jeg har jukset litt å regnet ut hva disse verdiene blir. Jeg får en matrise:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 0 & \cos 0 & \sin 2*0 & \cos 2*0 \\ 1 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & \sin 2\frac{\pi}{2} & \cos 2\frac{\pi}{2} \\ & & 2f(0) - f(\frac{\pi}{2}) & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2-1 & 0-1 & 2-0 & 0-0 & 2-(-1) \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

Jeg setter $N\vec{c} = \vec{0}$ som gir meg ligning settet :

$$C_1 + C_3 + C_5 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_3 - C_5$$
$$C_2 - C_3 - 2C_5 = 0 \Rightarrow C_2 = C_3 + 2C_5$$

Da blir:

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_3 - C_5 \\ C_3 + 2C_5 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siden T nå generer en matrise ($T(\vec{x}) = A\vec{x}$) blir ker(T) og range(T) nullrommet og kolonnerommet til denne matrisen. Da blir:

$$ker(T) = Nul(G) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$rangt(T) = Col(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

Jeg har kontrollert dette ved å multiplisere det inn med f(x) hvor $x = 0, \frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
&-C_3 - C_5 + (C_3 + 2C_5)\sin x + C_3 \cos x + C_4 \sin 2x + C_5 \cos 2x \\
&C_3(\sin x + \cos x - 1) + \sin 2x C_4 + C_5(2\sin x + \cos 2x - 1) \\
&x = 0 \\
&C_3(\sin 0 + \cos 0 - 1) + \sin 2 * 0 C_4 + C_5(2\sin 0 + \cos 2 * 0 - 1) \\
&C_3(0 + 1 - 1) + 0C_4 + C_5(0 + 1 - 1) = 0 \\
&x = \frac{\pi}{2} \\
&C_3(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - 1) + \sin \cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}} C_4 + C_5(2\sin\frac{\pi}{2} + \cos \cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}} - 1) \\
&C_3(1 + 0 - 1) + 0C_4 + C_5(2 - 1 - 1) = 0
\end{aligned}
$$

Så uansett hva $\vec{C}$ er i dette tilfellet så vil man få 0.

Jeg har også sjekket ved å ta en av basisene til Nul(G) og multiplisert med G selv og får da ut 0. (Hvor G er den matrisen T(f) genererer.)

2.4 d)

Her skal jeg vise at $\cos^2 x$ og $\sin^2 x$ er i underrommet W.

$$\cos^2 x = \frac{1 + cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}(1 + cos(2x))$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$$

Men $1, cos(2x) \in W$ som viser at $\cos^2 x,\ \sin^2 x \in W$

Jeg har at $\mathbf{B}$ =Koordinatvektorene til $\cos^2 x$ og $\sin^2 x$ blir da følgende:

$$[\cos^2 x]_B = \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{\cos 2x}{2}\right]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\sin^2 x]_B = \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{\cos 2x}{2}\right]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.5 e)

Er ikke helt sikker på fremgangs måten men jeg prøver. Jeg går ut i fra at $f = 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x$ og deriverer denne to ganger.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\sin x - \cos x - 4\sin 2x - 4\cos 2x$$

Jeg definerer $S(f) = f'' + 4f$, jeg får at

$$\begin{aligned}
S(f) &= -\sin x - \cos x - 4\sin 2x - 4\cos 2x + 4(1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x) \\
&= \cancel{-\sin x} \cancel{-\cos x} \cancel{-4\sin 2x} \cancel{-4\cos 2x} + 4 + \cancel{4}^3 \sin x + \cancel{4}^3 \cos x + \cancel{4\sin 2x} + \cancel{4\cos 2x} \\
&= 4 + 3\sin x + 3\cos x
\end{aligned}$$

Dette kan jeg skrive som

$$\begin{pmatrix} 4 & 3\sin x & 3\cos x \\ 4 & 3\sin x & 3\cos x \\ 4 & 3\sin x & 3\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Jeg prøver med forskjellige verdier $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3\sin 0 & 3\cos 0 \\ 4 & 3\sin\frac{\pi}{2} & 3\cos\frac{\pi}{2} \\ 4 & 3\sin\pi & 3\cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Dette blir identitets matrisen og det betyr hvis dette skal bli 0 må $C_1 = C_2 = C_3 = 0$

$$ker(S) = \vec{0}$$

Som sagt er jeg veldig usikker på om det jeg har gjort her stemmer.

2.6 f)

For å vise at $\mathbf{C} = \{\sin^2 x, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos^2 x\}$ er med i W må jeg vise at:
1. At vektorene i C sammenfaller med vektorene i W
2. De er lineært uavhengige

1.
$\sin x, \cos x, \sin 2x \in W$. W består jo av disse vektorene, og at $\cos^2 x, \sin^2 x \in W$ viste jeg i oppgave 2d).

2.
Da gjenstår det å vise at disse er lineært uavhengige.

$$\emptyset\vec{C} = \begin{pmatrix} \sin^2 xC_1 & \sin xC_2 & \cos xC_3 & \sin 2xC_4 & \cos^2 xC_5 \\ \sin^2 xC_1 & \sin xC_2 & \cos xC_3 & \sin 2xC_4 & \cos^2 xC_5 \\ \sin^2 xC_1 & \sin xC_2 & \cos xC_3 & \sin 2xC_4 & \cos^2 xC_5 \\ \sin^2 xC_1 & \sin xC_2 & \cos xC_3 & \sin 2xC_4 & \cos^2 xC_5 \\ \sin^2 xC_1 & \sin xC_2 & \cos xC_3 & \sin 2xC_4 & \cos^2 xC_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2 x & \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos^2 x \\ \sin^2 x & \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos^2 x \\ \sin^2 x & \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos^2 x \\ \sin^2 x & \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos^2 x \\ \sin^2 x & \sin x & \cos x & \sin 2x & \cos^2 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Jeg velger $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 0 & \sin 0 & \cos 0 & \sin 2 * 0 & \cos^2 0 \\ \sin^2 \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & \sin 2\frac{\pi}{4} & \cos^2 \frac{\pi}{4} \\ \sin^2 \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & \sin 2\frac{\pi}{2} & \cos^2 \frac{\pi}{2} \\ \sin^2 \pi & \sin \pi & \cos \pi & \sin 2\pi & \cos^2 \pi \\ \sin^2 \frac{3\pi}{2} & \sin \frac{3\pi}{2} & \cos \frac{3\pi}{2} & \sin 2\frac{3\pi}{2} & \cos^2 \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

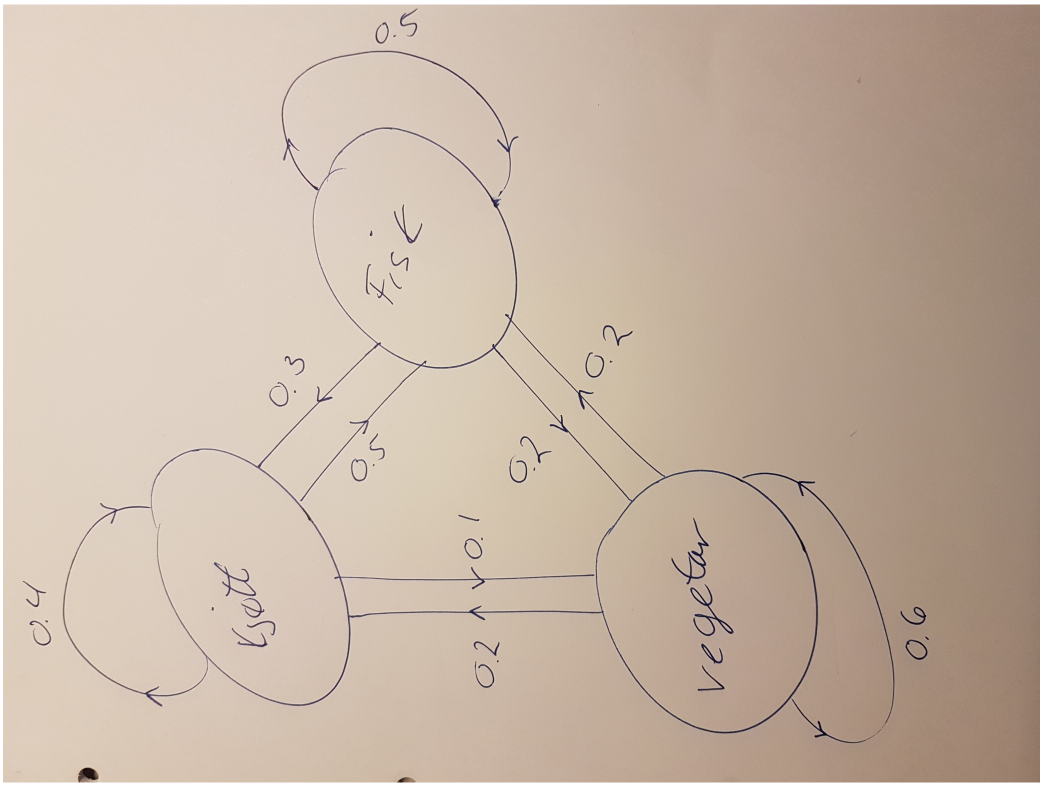
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_5$$

Determinanten til identitets-matrisen er forskjellig fra null og om jeg nå multipliserer inn $\vec{C}$ her får jeg at $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$ som betyr at **C** er lineært uavhengig og det medfører at det er en basis for W

3 Oppgave 3

3.1 a)

For å finne P studerer jeg tegning 1 på neste side. Første linje er alle som kommer til å spise kjøtt neste gang, andre linje er de som kommer til å spise fisk neste gang og den tredje linjen er de som kommer til å spise vegetar neste



Figur 1: Skisse av forandringen i spisevaner

gang. Da får jeg en matrise:

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

3.2 b)

Definisjonen på en stokastisk matrise er at det skal være en kvadratisk matrise der alle kolonnene er sannsynlighets vektorer.
Siden matrise P er en 3x3 matrise er den kvadratisk.
Hvis jeg skriver $P = \vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_1}$ ser man at alle vektorene i P har summen 1.
Siden disse vektorene har sum lik 1 er de sannsynlighets vektorer.
Dette betyr at matrise P er en stokastisk matrise, og alle stokastiske matriser har en likevekts-vektor slik at $P\vec{q} = \vec{q}$

For å finne denne likevekts-vektoren må jeg løse denne ligningen.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$P\vec{v} = \vec{v} \Rightarrow P\vec{v} - \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (P - I)\vec{v} = \vec{0}$$

$$(P - I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & -0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Jeg brukte MatLab til å radreduserer $(P - I) = 0$

$$\begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & -0.4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jeg multipliserer den radreduserte matrisen med $\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{16}{15} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{22}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Dette gir meg ligning settet

$$v_1 - \frac{16}{15}v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{16}{15}v_3$$
$$v_2 - \frac{22}{15}v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{22}{15}v_3$$

Som vi ser blir v_3 en fri variabel, jeg velger den til å være 15 slik at jeg får en enkel basis.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ 15 \end{pmatrix}$$

For at dette skal bli en sannsynlighets-vektor $\vec{q}$ deler jeg alle verdiene i $\vec{v}$ på summen av vektoren $\vec{v}$. Dette er fordi at alle løsningene $P\vec{q} = \vec{q}$ er et multiplum av $\vec{v}$ $\sum_{i=1}^{n} v_i = 53$. Sannsynlighets-vektoren $\vec{q}$ blir da:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{53} \\ \frac{22}{53} \\ \frac{15}{53} \end{pmatrix}$$

Hvis jeg lar

$$\vec{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Fra teorem 18 side 261 i boka. Har jeg at en hvilken som helst $\vec{v}_0$ slik at $\vec{v}_{n+1} = P\vec{v}_n$ hvor $n \in \mathbb{N}$. Så vil Markov kjeden gå mot $\vec{q}$ når $n \to \infty$

Jeg kontroll sjekket at $\vec{q}$ var korrekt i MatLab ($P\vec{q} = \vec{q}$), se figur 2 på neste side.

3.3 c)

Her skulle jeg lage et program som beregnet hvor mange som spiste, kjøtt-, fisk- og vegetar-middag de neste 20 dagene. Jeg skulle også skrive ut resultatet for dag 4, 10 og 20, også skulle jeg sammenligne resultatene med det jeg fant i oppgave b).

Jeg ser at når dagene går så stabiliserer de som spiser kjøtt-, fisk- og vegetar-middager seg. Det går mot at 16000 spiser kjøttmiddag, 22000 spiser fiskemiddag og 15000 spiser vegetarmiddag når dagene øker(n øker). Dette er i godt samsvar med det jeg fant i oppgave b). Likevekts vektoren gir meg akkurat dette svaret når jeg multipliserer den med befolkningen. Du kan se hva programmet mitt ga meg på figur 3 på neste side

Jeg kodet programmet mitt i python.

```
Tid = 20 #Dager
```

```
>> P ,q

P =

    0.4000    0.3000    0.2000
    0.5000    0.5000    0.2000
    0.1000    0.2000    0.6000


q =

    0.3019
    0.4151
    0.2830

>> P*q

ans =

    0.3019
    0.4151
    0.2830
```

Figur 2: Kontroll av sannsynlighets-vektoren $\vec{q}$

```
Dag 4
[[ 16182.]
 [ 22417.]
 [ 14401.]]
Dag 10
[[ 16001.151246]
 [ 22002.651061]
 [ 14996.197693]]
Dag 20
[[ 16000.00025041]
 [ 22000.00057664]
 [ 14999.99917295]]
Analytisk svar. likevekts-vektor*befolkning
[[ 16000.]
 [ 22000.]
 [ 15000.]]
```

Figur 3: Terminal vindu

```python
x = zeros((Tid,3,1)) #Xn-vektor
P = array((
    [0.4,0.3,0.2],
    [0.5,0.5,0.2],
    [0.1,0.2,0.6]))
#Likevekts-vektor
q = array((
    [16/53.0],
    [22/53.0],
    [15/53.0]))
#Initialbetingelser
x[0] = array((
    [2*10**4],
    [2.5*10**4],
    [8000]))

for i in range(Tid-1):
    x[i+1] = dot(P,x[i]) #matrise multiplikasjon

print 'Dag 4'
print x[3]
print 'Dag 10'
print x[9]
print 'Dag 20'
print x[19]
print'Analytisk svar. likevekts-vektor*befolkning'
print q * 53000
```