

1. Chama BuscaEmProfundidade( $G$ ) para obter os tempos de término  $t[u]$  para cada vértice  $u$ .
2. Ao término de cada vértice, insira-o na frente de uma lista linear encadeada.
3. Retorna a lista encadeada de vértices.

O Programa 7.9 para realizar busca em profundidade pode ser facilmente modificado para obter a ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico  $G = (V, A)$ . Para obter a lista ordenada de vértices basta inserir uma chamada para o procedimento InsLista do Programa 7.13 no procedimento BuscaDfs do Programa 7.9. O local a ser inserido deve ser logo após o momento em que o tempo de término  $t[u]$  é obtido e o vértice é pintado de preto. Ao final da execução do Programa 7.9, basta retornar a lista obtida (ou imprimi-la usando o procedimento Imprime do Programa 3.4).

**Programa 7.13** Insere em uma lista encadeada antes do primeiro item da lista

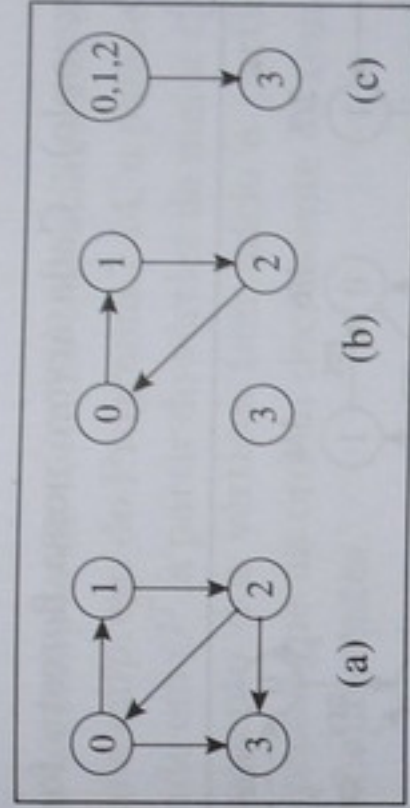
```

procedure InsLista (var Item: TipoItem; var Lista: TipoLista);
{-- Insere antes do primeiro item da lista --}
var Aux: TipoApontador;
begin
    Aux := Lista.Primeiro^.Prox;
    new (Lista.Primeiro^.Prox);
    Lista.Primeiro^.Prox^.Item := Item;
    Lista.Primeiro^.Prox^.Prox := Aux;
end;
    
```

**Análise** A ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico  $G = (V, A)$  tem custo  $O(|V| + |A|)$ , uma vez que a busca em profundidade tem complexidade de tempo  $O(|V| + |A|)$  e o custo para inserir cada um dos  $|V|$  vértices na frente da lista linear encadeada custa  $O(1)$ .

## 7.7 Componentes Fortemente Conectados

Recordando da Seção 7.1, um **componente fortemente conectado** de um grafo direcionado  $G = (V, A)$  é um conjunto maximal de vértices  $C \subseteq V$  tal que, para todo par de vértices  $u$  e  $v$  em  $C$ ,  $u$  e  $v$  são mutuamente alcançáveis a partir de cada um deles. A Figura 7.14 mostra um exemplo de um grafo direcionado  $G$  e seus componentes fortemente conectados. A Figura 7.14(c) mostra o grafo reduzido acíclico obtido pela contração de todas as arestas de cada componente fortemente conectado de  $G$  da Figura 7.14(b), de tal forma que um único vértice é obtido para cada componente.



**Figura 7.14** (a) Grafo direcionado  $G$ ; (b) Componentes fortemente conectados de  $G$ ; (c) Grafo reduzido acíclico.

O algoritmo para obter os componentes fortemente conectados de um grafo direcionado  $G = (V, A)$  usa o **transposto** de  $G$ , definido como sendo o grafo  $G^T = (V, A^T)$ , em que  $A^T = \{(u, v) : (v, u) \in A\}$ , isto é,  $A^T$  consiste das arestas de  $G$  com suas direções invertidas. No caso,  $G$  e  $G^T$  possuem os mesmos componentes fortemente conectados, isto é,  $u$  e  $v$  são mutuamente alcançáveis a partir de cada um em  $G$  se e somente se  $u$  e  $v$  são mutuamente alcançáveis a partir de cada um em  $G^T$ .

O pseudocódigo mostrado a seguir apresenta o algoritmo para obter os componentes fortemente conectados de um grafo direcionado  $G = (V, A)$ :

1. Chama BuscaEmProfundidade( $G$ ) para obter os tempos de término  $t[u]$  para cada vértice  $u$ .
2. Obtém  $G^T$ .
3. Chama BuscaEmProfundidade( $G^T$ ), realizando a busca a partir do vértice de maior  $t[u]$  obtido na linha 1. Se a busca em profundidade não alcançar todos os vértices, inicie uma nova busca em profundidade a partir do vértice de maior  $t[u]$  dentre os vértices restantes.
4. Retorne os vértices de cada árvore da floresta obtida na busca em profundidade na linha 3 como um componente fortemente conectado separado.

A Figura 7.15(a) apresenta o exemplo de um grafo direcionado  $G = (V, A)$ . A execução do algoritmo em  $G$  inicia no vértice 0 e prossegue primeiro para o vértice 1, e os tempos de descoberta  $d[u]$  e de término  $t[u]$  são mostrados ao lado de cada vértice. Após a execução da linha 2 para obter  $G^T$  do grafo direcionado da Figura 7.14(a), obtemos o grafo transposto mostrado na Figura 7.15(b). A Figura 7.15(b) apresenta o resultado da busca em profundidade em  $G^T$ , mostrando os tempos de descoberta e de término indicados ao lado de cada vértice, e com a indicação de cada tipo de aresta (aresta de árvore, de retorno e de cruzamento) ao lado de cada aresta. A busca em profundidade em  $G^T$  resulta na floresta de duas árvores mostrada na Figura 7.15(c), com a indicação do tipo de aresta ao lado de cada aresta. A busca em profundidade em  $G^T$  inicia pelo vértice 0 porque 0 tem o maior  $t[u]$ . A partir da raiz 0, é possível atingir o vértice 2 e depois o vértice 1. A próxima árvore da floresta tem como raiz o vértice 3, uma vez que ele possui o maior tempo de término dentre os vértices restantes (na realidade, é o único