Logo, o espaço total para descrever a função hpm gerada pelo Programa 5.42 é $(2+\epsilon)cn$ bits. Usando c=1,23 e $\epsilon=0,125$, a função hash perfeita mínima necessita aproximadamente 2,62 bits por chave para ser armazenada.

Assim, uma função hash perfeita mínima pode ser armazenada em aproximadamente 2,62 bits por chave. Mehlhorn (1984) mostrou que o limite inferior para armazenar uma função hash perfeita mínima é $N\log e + O(\log N) \approx 1,44N$. Assim, o valor de aproximadamente 2,62 bits por chave é um valor muito próximo do limite inferior de aproximadamente 1,44 bits por chave para essa classe de problemas.

O principal resultado desta seção mostra um algoritmo prático que reduziu a complexidade de espaço para armazenar uma função hash perfeita mínima de $O(N\log N)$ bits para O(N) bits. Isso permite o uso de hashing perfeito em aplicações em que antes não eram consideradas uma boa opção. Por exemplo, Botelho, Lacerda, Menezes e Ziviani (2009) mostraram que uma função hash perfeita mínima apresenta o melhor compromisso entre espaço ocupado e tempo de busca quando comparada com todos os outros métodos de hashing para indexar a memória interna para conjuntos estáticos de chaves.

Notas Bibliográficas

As principais referências para pesquisa em memória interna são Gonnet e Baeza-Yates (1991), Knuth (1973) e Mehlhorn (1984). Outros livros incluem Standish (1980), Wirth (1976; 1986), Aho, Hopcroft e Ullman (1983), Terada (1991). Um estudo mais avançado sobre estruturas de dados e algoritmos pode ser encontrado em Tarjan (1983).

Um dos primeiros estudos sobre inserção e retirada em árvores de pesquisa foi realizado por Hibbard (1962), tendo provado que o comprimento médio do caminho interno após n inserções randônicas é $2 \ln n$. A definição de árvore binária foi extraída de Knuth (1968, p. 315).

A primeira árvore binária de pesquisa com balanceamento foi proposta por Adel'son-Vel'skii e Landis (1962), dois matemáticos russos, a qual recebeu o nome de árvore AVL. Uma árvore binária de pesquisa é uma **árvore AVL** se a altura da subárvore à esquerda de cada nó nunca difere de ± 1 da altura da subárvore à direita. A Figura 5.20 apresenta uma árvore com esta propriedade.

A forma de manter a propriedade AVL é por meio de transformações localizadas no caminho de pesquisa. Como a altura das árvores AVL fica sempre entre $\log_2(n+1)$ e $1.4404\log_2(n+2)-0.328$ (Adel'son-Vel'skii e Landis, 1962), o custo para inserir ou retirar é $O(\log n)$, que é exatamente o custo para percorrer o caminho de pesquisa. Wirth (1976; 1986) apresenta implementações dos algoritmos de inserção e de retirada para as árvores AVL.

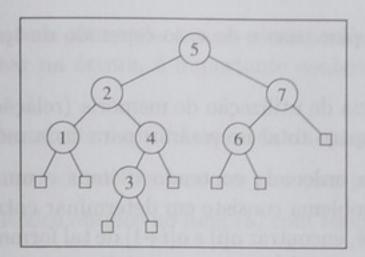


Figura 5.20 Árvore AVL.

O material utilizado na Seção 5.3.2 veio de Bayer (1971; 1972), Olivié (1980), Ziviani e Tompa (1982) e Ziviani, Olivié e Gonnet (1985). Os trabalhos de Bayer apresentam as árvores SBB, o de Olivié sugere uma melhoria para o algoritmo de inserção, e o de Ziviani e Tompa apresentam implementações para os algoritmos de inserção e retirada. A árvore SBB pode ser vista como uma representação binária da árvore 2-3-4, apresentada por Guibas e Sedgewick (1978). Este mesmo trabalho mostra como adaptar vários algoritmos clássicos para árvores de pesquisa balanceadas dentro do esquema árvores red-black.

Sleator e Tarjan (1983) apresentam vários métodos para manutenção de **árvores autoajustáveis**. A ideia é mover os nós mais frequentemente acessados em direção à raiz após cada acesso: embora cada operação isolada possa ter custo mais alto, ao longo de um período maior, o tempo médio de cada operação é menor, isto é, o custo amortizado diminui ao longo do tempo. Em outras palavras, uma operação particular pode ser lenta, mas qualquer sequência de operações é rápida.

A principal referência sobre hashing é Knuth (1973). Existem várias propostas para a construção de funções de transformação perfeitas, como em Fox, Heath, Chen e Daoud (1992). As principais referências utilizadas na seção sobre hashing perfeito com ordem preservada são Czech, Havas e Majewski (1992, 1997). Outras referências são Majewski, Wormald, Havas e Czech (1996) e Witten, Moffat e Bell (1999). As principais referências utilizadas na seção sobre hashing perfeito com espaço quase ótimo são Botelho (2008), Botelho e Ziviani (2007), Botelho, Pagh e Ziviani (2007) e Botelho, Lacerda, Menezes e Ziviani (2010). O algoritmo proposto por Botelho (2008) é o primeiro algoritmo prático descrito na literatura que utiliza O(1) bits por chave para uma função hash perfeita mínima.

Exercícios

- 1. Considere as técnicas de pesquisa sequencial, pesquisa binária e a pesquisa baseada em hashing.
- a) Descreva as vantagens e desvantagens de cada uma dessas técnicas, indicando em que situações você usaria cada uma delas.