7.1 Definições Básicas

Um **grafo** é constituído de um conjunto de vértices e um conjunto de arestas conectando pares de vértices. Um vértice é um objeto simples que pode ter nome e outros atributos. Para um grafo contendo $|V|$ vértices, os nomes dos vértices terão valores entre 0 e $|V|-1$. Quando os vértices têm nomes arbitrários, para os algoritmos apresentados neste capítulo é necessário criar um mapeamento 1 – 1 entre os nomes arbitrários e os $|V|$ inteiros entre 0 e $|V|-1$.

Um **grafo direcionado** G é um par (V, A), em que V é um conjunto finito de vértices e A é um conjunto de arestas com uma relação binária em V. A Figura 7.1(a) apresenta um grafo direcionado sobre o conjunto de vértices $V = \{0,1,2,3,4,5\}$ e de arestas $A = \{(0,1),(0,3),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,0),(5,4)\}$. Vértices são representados por círculos e arestas são representadas por setas. Em grafos direcionados podem existir arestas de um vértice para si mesmo, chamadas ***self-loops***.

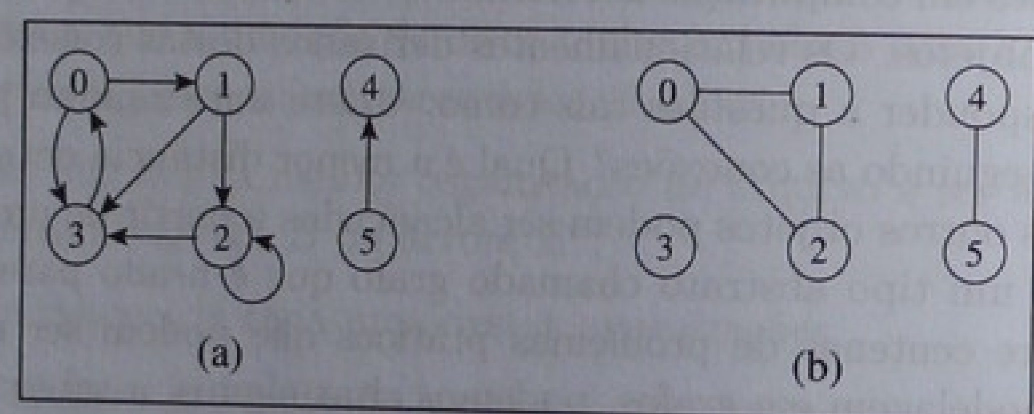

Figura 7.1 (a) Grafo direcionado; (b) Grafo não direcionado.

Um **grafo não direcionado** G é um par (V, A), em que o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados. As arestas (u, v) e (v, u) são consideradas como uma única aresta. Em um grafo não direcionado, *self-loops* não são permitidos. A Figura 7.1(b) apresenta um grafo não direcionado sobre o conjunto de vértices $V = \{0,1,2,3,4,5\}$ e de arestas $A = \{(0,1),(0,2),(1,2),(4,5)\}$.

Em um grafo direcionado, a aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. Por exemplo, na Figura 7.1(a) os arcos que saem do vértice 2 são $(2,2)$ e $(2,3)$, e os arcos que incidem sobre o vértice 2 são $(1,2)$ e $(2,2)$. Se (u, v) é uma aresta no grafo $G = (V, A)$, o vértice v é **adjacente** ao vértice u. Quando o grafo é não direcionado, a relação de adjacência é simétrica. Em grafos direcionados, a relação de adjacência não é necessariamente simétrica. Nas partes (a) e (b) da Figura 7.1 o vértice 1 é adjacente ao vértice 0, uma vez que a aresta $(0,1)$ pertence aos dois grafos. Entretanto, o vértice 0 não é adjacente ao vértice 1 na Figura 7.1(a), uma vez que a aresta $(1,0)$ não pertence ao grafo.

Importante observar que a notação utilizada no decorrer do livro para representar uma aresta é a mesma para grafos direcionados e grafos não direcionados. Assim, a aresta direcionada $(0,1)$ na Figura 7.1(a) é diferente da aresta não direcionada $(0,1)$ na Figura 7.1(b), apesar da notação ser igual para os dois casos.

O **grau de um vértice** em um grafo não direcionado é o número de arestas que incidem nele. Por exemplo, o vértice 1 na Figura 7.1(b) tem grau 2. Um vértice de grau 0, tal como o vértice 3 na Figura 7.1(b), é dito **isolado** ou **não conectado**. Em um grafo direcionado, o grau de um vértice corresponde ao número de arestas que saem do vértice (***out-degree***) mais o número de arestas que chegam ao vértice (***in-degree***). Por exemplo, o vértice 2 da Figura 7.1(a) tem *in-degree* 2, *out-degree* 2 e grau 4.

Um **caminho** de **comprimento** k de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V, A)$ é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $x = v_0$, $y = v_k$ e $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. O **comprimento** de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ e as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$. Se existir um caminho c de x a y, então y é **alcançável** a partir de x via c, o qual algumas vezes escrevemos como $u \overset{c}{\leadsto} v$ se G for direcionado. Um caminho é **simples** se todos os vértices do caminho forem distintos. Na Figura 7.1(a), o caminho $(0,1,2,3)$ é simples e tem comprimento 3. O caminho $(1,3,0,3)$ não é simples.

Em um grafo direcionado, um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um **ciclo** se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta. O ciclo é **simples** se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos. O *self-loop* é um ciclo de tamanho 1. Na Figura 7.1(a), o caminho $(0,1,2,3,0)$ forma um ciclo. Dois caminhos $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ e $(v'_0, v'_1, \ldots, v'_k)$ formam o mesmo ciclo se existir um inteiro j tal que $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Na Figura 7.1(a), o caminho $(0,1,3,0)$ forma o mesmo ciclo que os caminhos $(1,3,0,1)$ e $(3,0,1,3)$. Em um grafo não direcionado, um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um **ciclo** se $v_0 = v_k$ e o caminho contiver pelo menos três arestas. O ciclo é **simples** se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ forem distintos. Por exemplo, na Figura 7.1(b) o caminho $(0,1,2,0)$ é um ciclo. Um grafo sem ciclos é um grafo **acíclico**.

Um grafo não direcionado é **conectado** se cada par de vértices estiver conectado por um caminho. Os **componentes conectados** são conjuntos de vértices sob a relação "é alcançável a partir de", isto é, são porções conectadas de um grafo. O grafo na Figura 7.1(b) tem três componentes: $\{0,1,2\}$, $\{4,5\}$ e $\{3\}$. Um grafo não direcionado é conectado se ele tiver exatamente um componente conectado, isto é, cada vértice for alcançável a partir de qualquer outro vértice.

Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer forem alcançáveis a partir um do outro. Os **componentes fortemente conectados** de um grafo direcionado são as classes de equivalência de vértices sob a relação "são mutuamente alcançáveis". O grafo na Figura 7.1(a) tem três componentes fortemente conectados: $\{0,1,2,3\}$, $\{4\}$ e $\{5\}$. Todos os pares em $\{0,1,2,3\}$ são mutuamente alcançáveis, e os vértices $\{4,5\}$ não formam um componente fortemente conectado porque o vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4. Um **grafo direcionado fortemente conectado** tem apenas um componente fortemente conectado.

Dois grafos $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ são **isomorfos** se existir uma bijeção $f : V \to V'$, tal que $(u, v) \in A$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in A'$. Em outras pala-