Aula 2 –

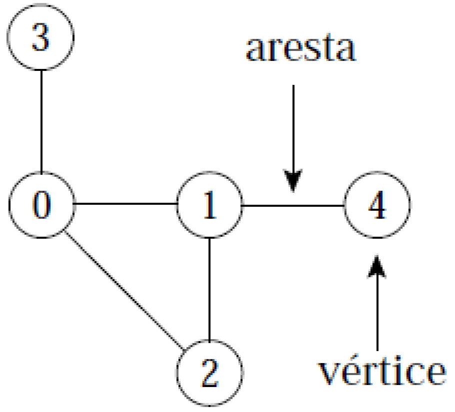
Conceitos básicos de grafos

Prof. Helton Hideraldo Bíscaro

BREVE revisão

Grafos

- **Grafo**: conjunto de vértices e arestas.
- **Vértice**: objeto simples que pode ter nome e outros atributos.
- **Aresta**: conexão entre dois vértices.



As arestas também podem ter atributos (normalmente um “peso”)

- Notação: $G = (V, A)$
  - G: grafo
  - V: conjunto de vértices
  - A: conjunto de arestas

PAR ORDENADO!

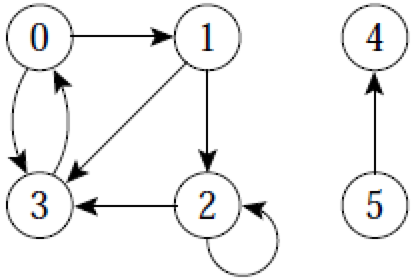
Grafos Direcionados

- Um **grafo direcionado** G é um par (V, A), onde V é um conjunto finito de vértices e A é uma relação binária em V.
  - Uma aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. O vértice v é **adjacente** ao vértice u. (adjacente vem depois)
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de *self-loops*.

Como descrever?

Descreva matematicamente (formalmente) esse grafo:

G = (V,A)
V = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
A = {(0,1), (0,3), (1,2), (1,3),
(2,2), (2,3), (3,0), (5,4)}



(u, u)

Também chamados **Digrafos** (sem acento)

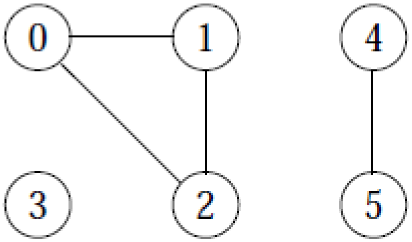
Grafos Não Direcionados

- Um **grafo não direcionado** G é um par (V, A), onde o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados.
  - As arestas (u, v) e (v, u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  - *Self-loops* não são permitidos.

(apenas uma participa da definição do grafo)

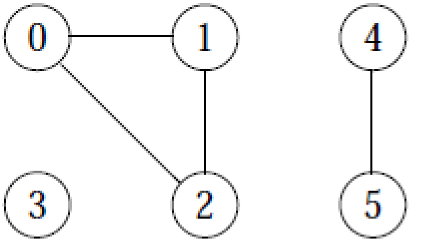
Descreva matematicamente (formalmente) esse grafo:

G = (V,A)
V = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
A = {(0,1), (1,2), (2,0), (4,5)}

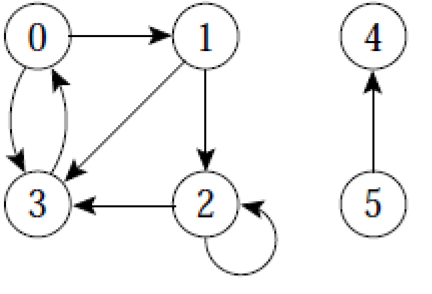


Grau de um Vértice

- Em grafos não direcionados:
  - O grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele.
  - Um vérice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.
  - Ex.: O vértice 1 tem grau 2 e o vértice 3 é isolado.



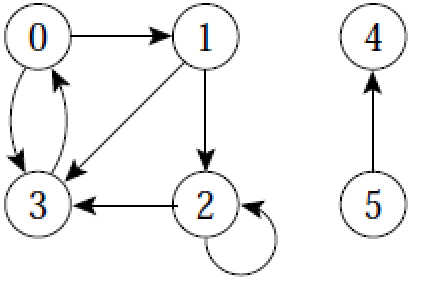
- Em grafos direcionados
  - O grau de um vértice é o número de arestas que saem dele (*out-degree*) mais o número de arestas que chegam nele (*in-degree*).
  - Ex.: O vértice 2 tem *in-degree* 2, *out-degree* 2 e grau 4.



Caminho entre Vértices

- Um caminho de **comprimento** k de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V, A)$ é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $x = v_0$ e $y = v_k$, e $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ e as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.
- Se existir um caminho c de x a y então y é **alcançável** a partir de x via c.
- Um caminho é **simples** se todos os vértices do caminho são distintos.

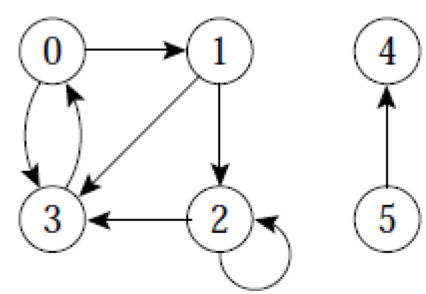
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 3)$ é simples e tem comprimento 3. O caminho $(1, 3, 0, 3)$ não é simples.



Ciclos

- Em um grafo direcionado:
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.
  - O *self-loop* é um ciclo de tamanho 1.
  - Dois caminhos $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ e $(v'_0, v'_1, \ldots, v'_k)$ formam o mesmo ciclo se existir um inteiro j tal que $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

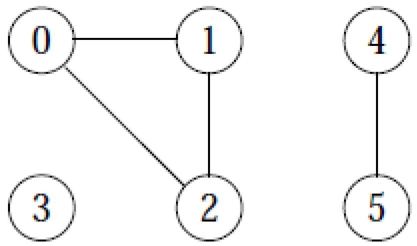
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 3, 0)$ forma um ciclo.
O caminho$(0, 1, 3, 0)$ forma o mesmo ciclo que os caminhos $(1, 3, 0, 1)$ e $(3, 0, 1, 3)$.



Aula de hoje

Ciclos

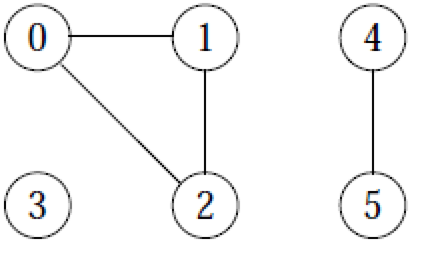
- Em um grafo não direcionado:



Ciclos

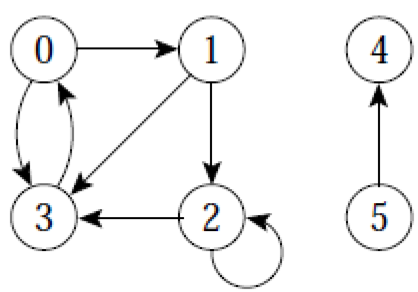
- Em um grafo não direcionado:
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos três arestas.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.

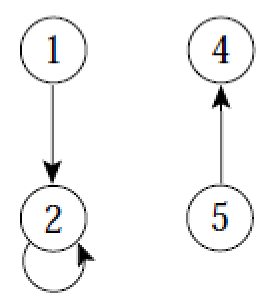
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 0)$ é um ciclo.



Subgrafos

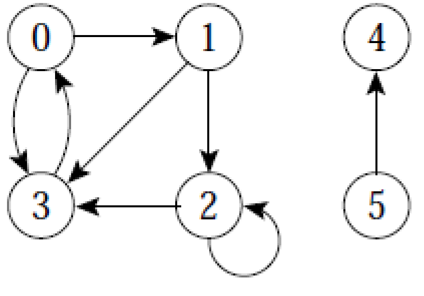
- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.

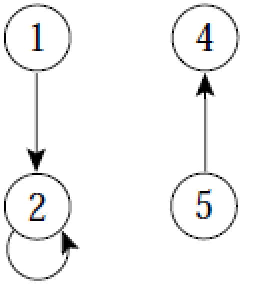




Subgrafos

- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.

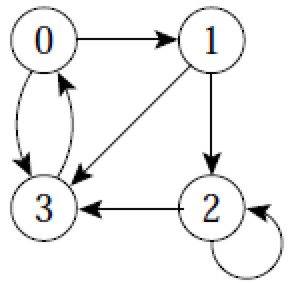


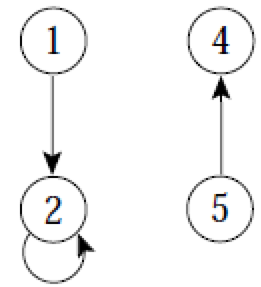


Um subgrafo pode ter uma aresta sem uma das pontas?

Subgrafos

- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.

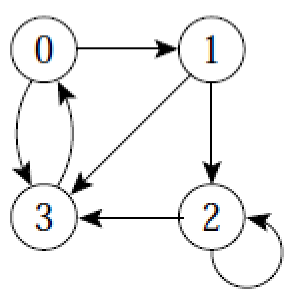


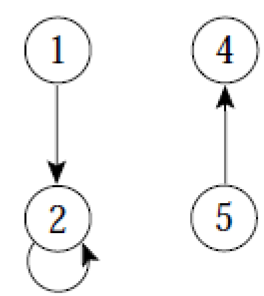


Um subgrafo pode ter uma aresta sem uma das pontas?
NÃO! Se não não seria um grafo! (lembre da definição de aresta e de grafo)

Subgrafos

- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.

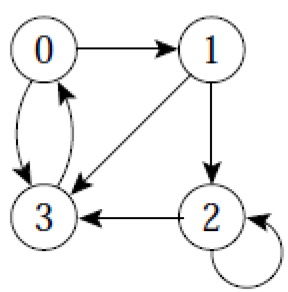


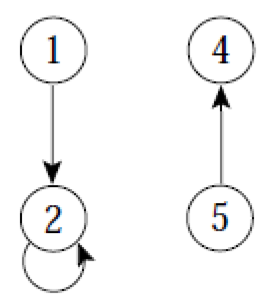


Um subgrafo é próprio quando

Subgrafos

- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.



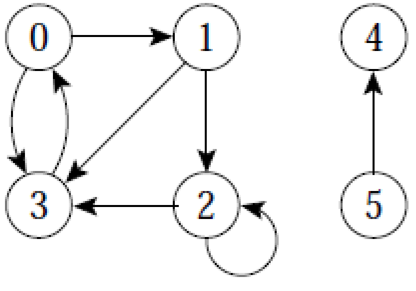


Um subgrafo é próprio quando V' ≠ V OU A' ≠ A

Subgrafos

- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.
- Dado um conjunto $V' \subseteq V$, o subgrafo induzido por V' é o grafo $G' = (V', A')$, onde $A' = \{(u, v) \in A | u, v \in V'\}$.

Ex.: Subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 4, 5\}$.



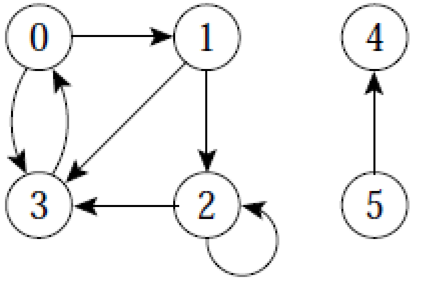
?

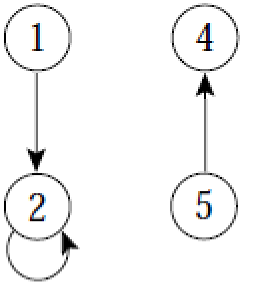
Subgrafos

- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.

- Dado um conjunto $V' \subseteq V$, o subgrafo induzido por V' é o grafo $G' = (V', A')$, onde $A' = \{(u, v) \in A | u, v \in V'\}$.

Ex.: Subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 4, 5\}$.

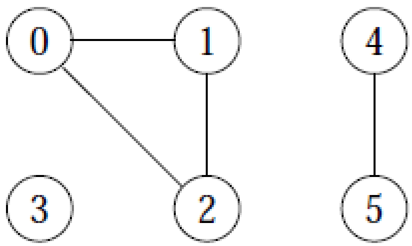




Grafo conectado (ou conexo)

- Um grafo não direcionado é conectado se cada par de vértices está conectado por um caminho.

Ex: esse grafo é conectado?

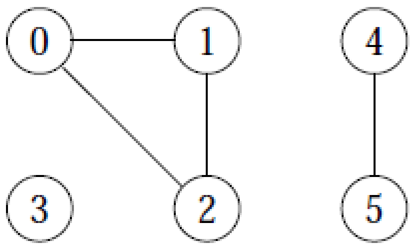


Grafo conectado (ou conexo)

- Um grafo não direcionado é conectado se cada par de vértices está conectado por um caminho.

Ex: esse grafo é conectado?

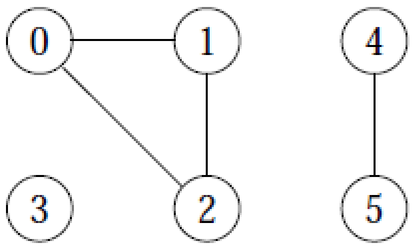
Não!



Componentes conectados (ou componentes conexos)

Um subgrafo conexo H de um grafo G é **maximal** se H não é subgrafo próprio de algum subgrafo conexo de G. Um **componente** (ou **componente conexo**) de um grafo G é qualquer subgrafo conexo maximal de G. É claro que cada vértice de um grafo pertence a um e um só componente. É claro também que um grafo é conexo se e somente se tem um único componente.

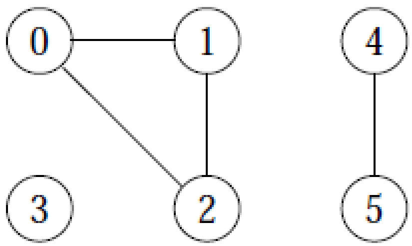
Ex.: Os componentes são: ?



Componentes conectados (ou componentes conexos)

Um subgrafo conexo H de um grafo G é **maximal** se H não é subgrafo próprio de algum subgrafo conexo de G. Um **componente** (ou **componente conexo**) de um grafo G é qualquer subgrafo conexo maximal de G. É claro que cada vértice de um grafo pertence a um e um só componente. É claro também que um grafo é conexo se e somente se tem um único componente.

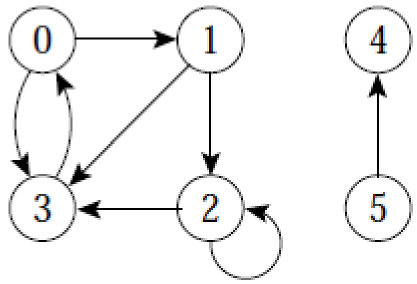
Ex.: Os componentes são: $\{0, 1, 2\}$, $\{4, 5\}$ e $\{3\}$.



Componentes Fortemente Conectados

- Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.
- Os **componentes fortemente conectados** de um grafo direcionado G são os subgrafos fortemente conexos maximais de G.
- Um **grafo direcionado fortemente conectado** tem apenas um componente fortemente conectado.

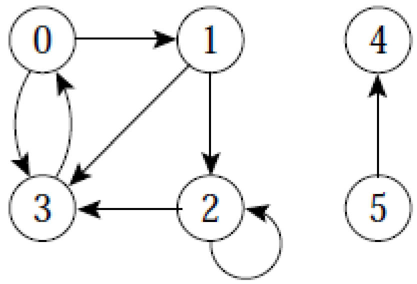
Quais são os componentes fortemente conectados deste grafo?



?

Componentes Fortemente Conectados

- Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.
- Os **componentes fortemente conectados** de um grafo direcionado G são os subgrafos fortemente conexos maximais de G.
- Um **grafo direcionado fortemente conectado** tem apenas um componente fortemente conectado.

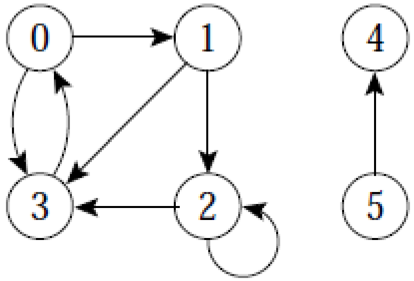


Ex.: $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{4\}$ e $\{5\}$ são os componentes fortemente conectados, $\{4, 5\}$ não o é pois o vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4.

Componentes Fortemente Conectados

- Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.
- Os **componentes fortemente conectados** de um grafo direcionado G são os subgrafos fortemente conexos maximais de G.

- Um **grafo direcionado fortemente conectado** tem apenas um componente fortemente conectado.



Ex.: $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{4\}$ e $\{5\}$ são os componentes fortemente conectados, $\{4, 5\}$ não o é pois o vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4.

Existiria grafo direcionado conectado porém não fortemente?

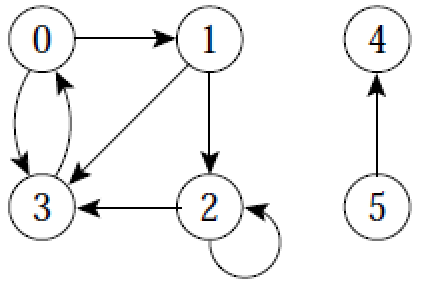
Grafos fracamente conexos

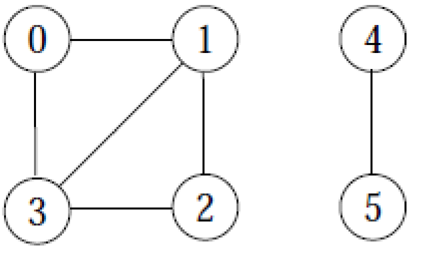
Um grafo direcionado é fracamente conexo se sua versão não direcionada for conexa

Versão Não Direcionada de um Grafo Direcionado

- A versão não direcionada de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um grafo não direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u, v) \in A'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in A$.

- A versão não direcionada contém as arestas de G sem a direção e sem os *self-loops*.

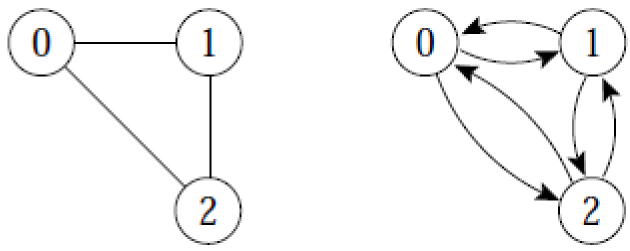




Versão Direcionada de um Grafo Não Direcionado

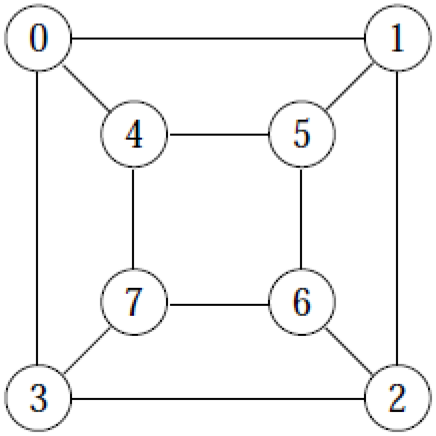
- A versão direcionada de um grafo não direcionado $G = (V, A)$ é um grafo direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u, v) \in A'$ se e somente se $(u, v) \in A$.

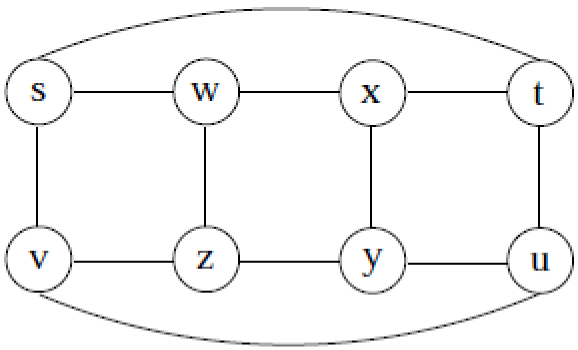
- Cada aresta não direcionada (u, v) em G é substituída por duas arestas direcionadas (u, v) e (v, u)



Grafos Isomorfos

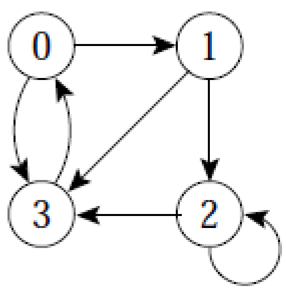
- $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ são isomorfos se existir uma bijeção $f : V \rightarrow V'$ tal que $(u, v) \in A$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in A'$.
- Em outras palavras, é possível re-rotular os vértices de G para serem rótulos de G' mantendo as arestas correspondentes em G e G'.

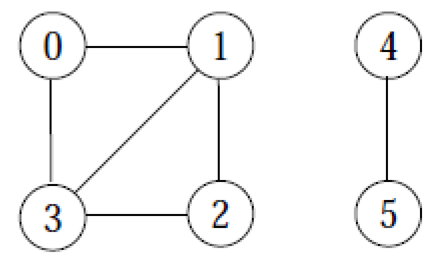




Vizinhos e adjacentes

- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.



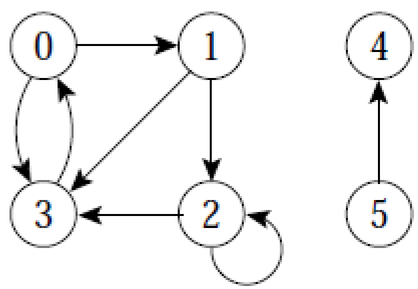


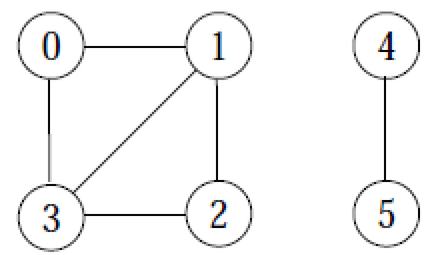
1 é adjacente a 3 ?
1 é vizinho de 3 ?
3 é adjacente a 1 ?
3 é vizinho de 1 ?

1 é adjacente a 3 ?
1 é vizinho de 3 ?
3 é adjacente a 1 ?
3 é vizinho de 1 ?

Vizinhos e adjacentes

- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.



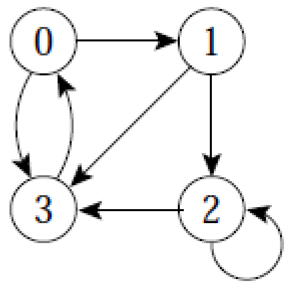


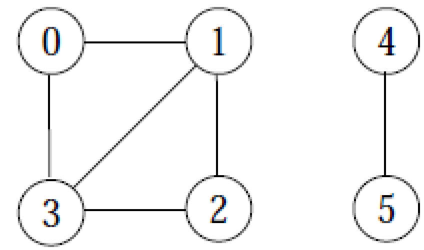
1 é adjacente a 3 ? Não
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ?
3 é vizinho de 1 ?

1 é adjacente a 3 ? Sim
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ?
3 é vizinho de 1 ?

Vizinhos e adjacentes

- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.



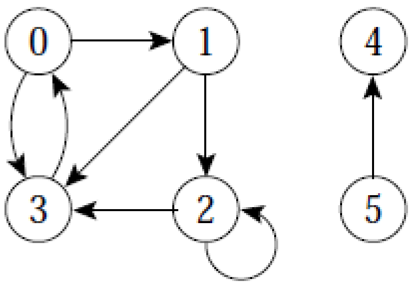


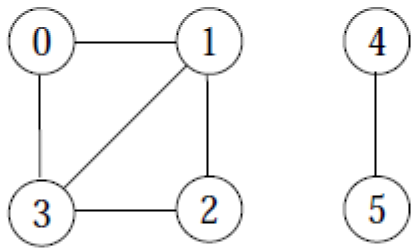
1 é adjacente a 3 ? Não
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ? Sim
3 é vizinho de 1 ? Sim

1 é adjacente a 3 ? Sim
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ? Sim
3 é vizinho de 1 ? Sim

Vizinhos e adjacentes

- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.





1 é adjacente a 3 ? Não
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ? Sim
3 é vizinho de 1 ? Sim

1 é adjacente a 3 ? Sim
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ? Sim
3 é vizinho de 1 ? Sim

1 e 4 não são adjacentes nem vizinhos

Grafos Completos

- Um grafo completo é um grafo não direcionado no qual todos os pares de vértices são adjacentes.
- Possui quantas arestas ?

Grafos Completos

- Um grafo completo é um grafo não direcionado no qual todos os pares de vértices são adjacentes.
- Possui $(|V|^2 - |V|)/2 = |V|(|V| - 1)/2$ arestas, pois do total de $|V|^2$ pares possíveis de vértices devemos subtrair $|V|$ *self-loops* e dividir por 2 (cada aresta ligando dois vértices é contada duas vezes).
- O número total de **grafos diferentes** com $|V|$ vértices é $2^{|V|(|V|-1)/2}$ (número de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de $|V|(|V| - 1)/2$ possíveis arestas).

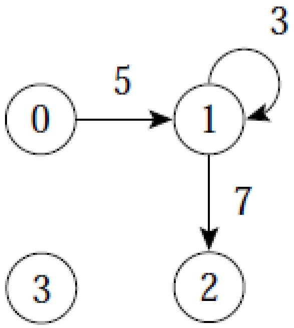
Grafos Completos

- Um grafo completo é um grafo não direcionado no qual todos os pares de vértices são adjacentes.
- Possui $(|V|^2 - |V|)/2 = |V|(|V| - 1)/2$ arestas, pois do total de $|V|^2$ pares possíveis de vértices devemos subtrair $|V|$ *self-loops* e dividir por 2 (cada aresta ligando dois vértices é contada duas vezes).
- O número total de **grafos diferentes** com $|V|$ vértices é $2^{|V|(|V|-1)/2}$ (número de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de $|V|(|V| - 1)/2$ possíveis arestas).

Faria sentido falarmos em grafos completos direcionados?

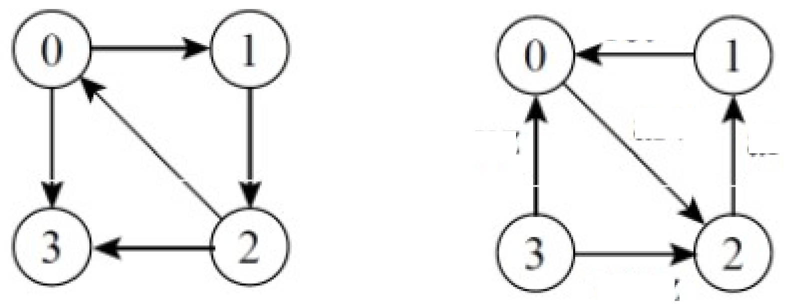
Grafo ponderado

possui pesos associados às arestas.



Grafo transposto

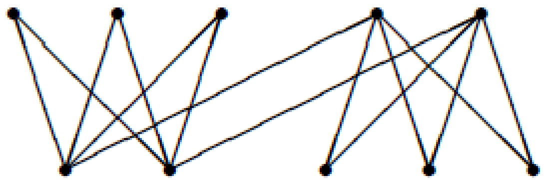
O grafo transposto G' de um grafo direcionado G é obtido a partir da inversão da direção das arestas de G



(a) Grafo original (b) Grafo transposto

Grafo Bipartido

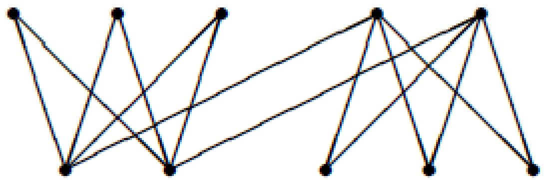
- **Grafo bipartido**: grafo não direcionado $G = (V, A)$ no qual V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tal que $(u, v) \in A$ implica que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou $u \in V_2$ e $v \in V_1$ (todas as arestas ligam os dois conjuntos V_1 e V_2).



bipartido

Grafo Bipartido

- **Grafo bipartido**: grafo não direcionado $G = (V, A)$ no qual V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tal que $(u, v) \in A$ implica que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou $u \in V_2$ e $v \in V_1$ (todas as arestas ligam os dois conjuntos V_1 e V_2).



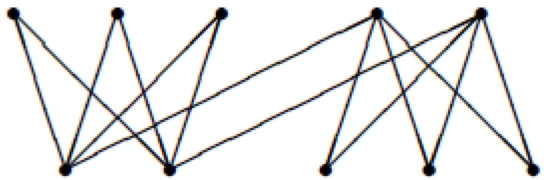
bipartido

?

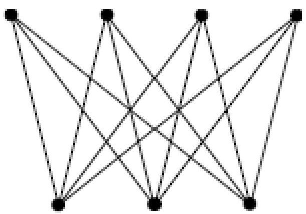
bipartido completo

Grafo Bipartido

- **Grafo bipartido**: grafo não direcionado $G = (V, A)$ no qual V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tal que $(u, v) \in A$ implica que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou $u \in V_2$ e $v \in V_1$ (todas as arestas ligam os dois conjuntos V_1 e V_2).



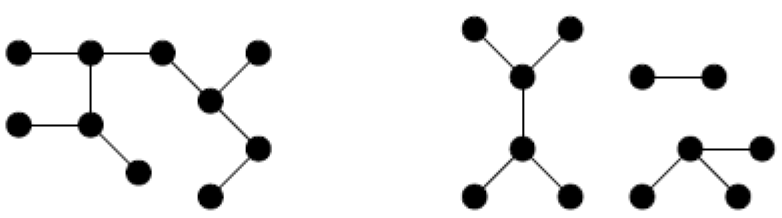
bipartido



bipartido completo

Árvores

- **Árvore livre**: grafo não direcionado acíclico e conectado. É comum dizer apenas que o grafo é uma árvore omitindo o "livre".
- **Floresta**: grafo não direcionado acíclico, podendo ou não ser conectado.
- **Árvore geradora** de um grafo conectado $G = (V, A)$: subgrafo que contém todos os vértices de G e forma uma árvore.
- **Floresta geradora** de um grafo $G = (V, A)$: subgrafo que contém todos os vértices de G e forma uma floresta.



(a) árvore (b) floresta

Implementações

O Tipo Abstratos de Dados Grafo

- Importante considerar os algoritmos em grafos como **tipos abstratos de dados**.
- Conjunto de operações associado a uma estrutura de dados.
- Independência de implementação para as operações.

Operações

Exemplos….

Operadores do TAD Grafo

1. *InicializaGrafoVazio(Grafo)*: Inicializa um grafo vazio (sem arestas)
2. *InsereAresta(V1,V2,Peso, Grafo)*: Insere uma aresta no grafo.
3. *ExisteAresta(V1,V2,Grafo)*: Verifica se existe uma determinada aresta.
4. Obtem a lista de vértices adjacentes a um determinado vértice (tratada a seguir).
5. *RetiraAresta(V1,V2,Peso, Grafo)*: Retira uma aresta do grafo.
6. *LiberaGrafo(Grafo)*: Liberar o espaço ocupado por um grafo.
7. *ImprimeGrafo(Grafo)*: Imprime um grafo.
8. *GrafoTransposto(Grafo,GrafoT)*: Obtém o transposto de um grafo direcionado.
9. *RetiraMin(A)*: Obtém a aresta de menor peso de um grafo com peso nas arestas.

Operações sobre a lista de adjacentes

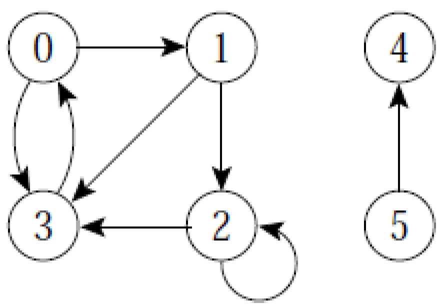
- Se está vazia
- Primeiro da lista
- Próximo da lista (iterador)

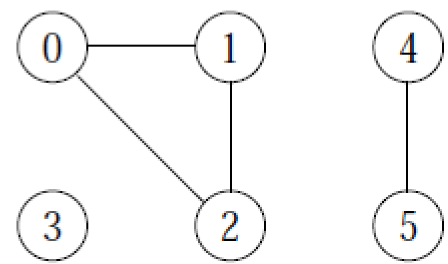
Como poderíamos implementar um grafo?

Matriz de Adjacência

- A matriz de adjacência de um grafo $G = (V, A)$ contendo n vértices é uma matriz $n \times n$ de *bits*, onde $A[i, j]$ é 1 (ou verdadeiro) se e somente se existe um arco do vértice i para o vértice j.
- Para grafos ponderados $A[i, j]$ contém o rótulo ou peso associado com a aresta e, neste caso, a matriz não é de *bits*.
- Se não existir uma aresta de i para j então é necessário utilizar um valor que não possa ser usado como rótulo ou peso.

Matriz de Adjacência: Exemplo





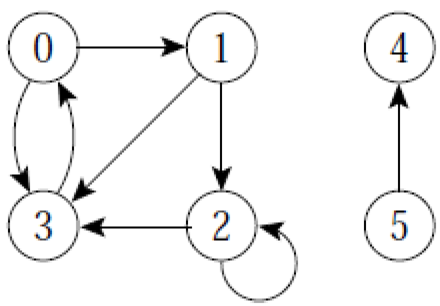
	0	1	2	3	4	5
0		1		1		
1			1	1		
2			1	1		
3	1					
4						
5					1	

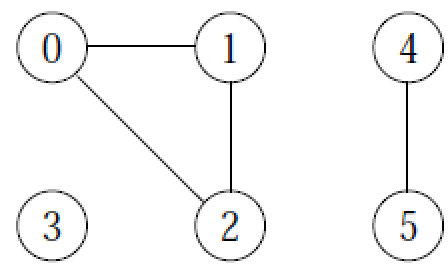
(a)

	0	1	2	3	4	5
0		1	1			
1	1		1			
2	1	1				
3						
4						1
5					1	

(b)

Matriz de Adjacência: Exemplo





	0	1	2	3	4	5
0		1		1		
1			1	1		
2			1	1		
3	1					
4						
5					1	

(a)

	0	1	2	3	4	5
0		1	1			
1	1		1			
2	1	1				
3						
4						1
5					1	

(b)

Matriz simétrica!
Poderíamos armazenar apenas
a parte triangular inferior ou superior,
mas não compensa

Referências

Livro do Ziviani (cap 7)