ACH2024

Aulas 11 – Grafos:
Árvore Geradora Mínima
Algoritmo de Prim

Prof Helton Hideraldo Bíscaro

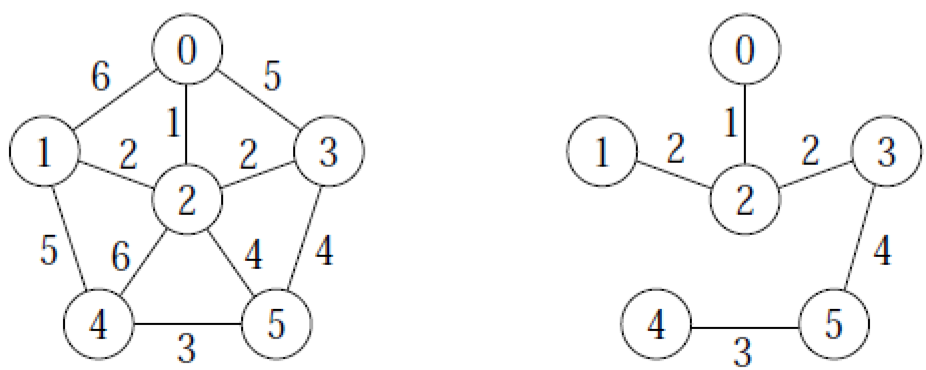
Árvore Geradora Mínima - Motivação

- Projeto de redes de comunicações conectando n localidades.
- Arranjo de $n-1$ conexões, conectando duas localidades cada.
- Objetivo: dentre as possibilidades de conexões, achar a que usa menor quantidade de cabos.
- Modelagem:
  - $G = (V, A)$: grafo conectado, não direcionado.
  - V: conjunto de cidades.
  - A: conjunto de possíveis conexões
  - $p(u, v)$: peso da aresta $(u, v) \in A$, custo total de cabo para conectar u a v.
- Solução: encontrar um subconjunto $T \subseteq A$, acíclico, que conecta todos os vértices de G e cujo peso total $p(T) = \sum_{(u,v)\in T} p(u, v)$ é minimizado.

Árvore Geradora Mínima

- Como $G' = (V, T)$ é acíclico e conecta todos os vértices, T forma uma árvore chamada **árvore geradora** de G.
- O problema de obter a árvore T é conhecido como **árvore geradora mínima** (AGM).

Ex.: Árvore geradora mínima T cujo peso total é 12. T não é única, pode-se substituir a aresta $(3, 5)$ pela aresta $(2, 5)$ obtendo outra árvore geradora de custo 12.



(a) (b)

Slide do livro do Ziviani – cap 7

AGM - Algoritmo Genérico

```
void GenericoAGM()
{  S = ∅;
   while(S não constitui uma árvore geradora mínima)
   { (u,v) = seleciona(A);
      if(aresta (u,v) é segura para S) S = S+ {(u,v)} }
   return S;
}
```

No final será o conjunto de arestas que formam a AGM

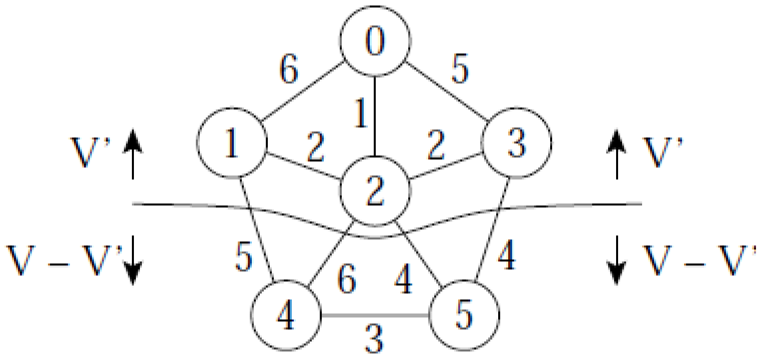
- Uma estratégia **gulosa** permite obter a AGM adicionando uma aresta de cada vez.
- Invariante: Antes de cada iteração, S é um subconjunto de uma árvore geradora mínima.
- A cada passo adicionamos a S uma aresta (u, v) que não viola o invariante. (u, v) é chamada de uma **aresta segura**.
- Dentro do **while**, S tem que ser um subconjunto próprio da AGM T, e assim tem que existir uma aresta $(u, v) \in T$ tal que $(u, v) \notin S$ e (u, v) é seguro para S.

isto é, assim que se entra no while,

Slide do livro do Ziviani – cap 7

AGM - Definição de Corte

- Um **corte** $(V', V - V')$ de um grafo não direcionado $G = (V, A)$ é uma partição de V.
- Uma aresta $(u, v) \in A$ *cruza* o corte $(V', V - V')$ se um de seus vértices pertence a V' e o outro vértice pertence a $V - V'$.
- Um corte *respeita* um conjunto S de arestas se não existirem arestas em S que o cruzem.
- Uma aresta cruzando o corte que tenha custo mínimo sobre todas as arestas cruzando o corte é uma *aresta leve*.



Slide do livro do Ziviani – cap 7

AGM - Teorema para Reconhecer Arestas Seguras

- Considere $G = (V, A)$ um grafo conectado, não direcionado, com pesos p sobre as arestas V.
- Considere S um subconjunto de *A* que está incluído em alguma AGM para G.
- Considere $(V', V - V')$ um corte qualquer que respeita S.
- Considere (u, v) uma aresta leve cruzando $(V', V - V')$.
- Satisfeitas essas condições, (u, v) é uma aresta segura para S.

Algoritmo de Prim para Obter Uma AGM

- O algoritmo de Prim para obter uma AGM pode ser derivado do algoritmo genérico.
- O subconjunto S forma uma única árvore, e a aresta segura adicionada a S é sempre uma aresta de peso mínimo conectando a árvore a um vértice que não esteja na árvore.
- A árvore começa por um vértice qualquer (no caso 0) e cresce até que "gere" todos os vértices em V.

Para fazer o corte V' (inicialmente V' = {0}), e S é tal que respeita esse corte

- A cada passo, uma aresta leve é adicionada à árvore S, conectando S a um vértice de $G_S = (V, S)$.
- De acordo com o teorema anterior, quando o algoritmo termina, as arestas em S formam uma árvore geradora mínima.

Exemplo

Como gerar a AGM a partir do grafo do slide 3?

Como seria a implementação desse algoritmo?

Algoritmo de Prim

Uma importante questão é: como selecionar essa aresta leve…

Como faço isso de modo eficiente?

Algoritmo de Prim

Uma importante questão é: como selecionar essa aresta leve…para isso:

Q: fila de prioridade contendo os vértices de G que ainda estão fora da AGM.

Qual deveria ser o vértice de maior prioridade?

Algoritmo de Prim

Uma importante questão é: como selecionar essa aresta leve…para isso:

Q: fila de prioridade contendo os vértices de G que ainda estão fora da AGM.

- Qual deveria ser o vértice de maior prioridade?
  - Aquele que é a ponta de uma aresta leve naquele dado momento

Algoritmo de Prim

Uma importante questão é: como selecionar essa aresta leve…para isso:

Q: fila de prioridade contendo os vértices de G que ainda estão fora da AGM.

- Qual deveria ser o vértice de maior prioridade?
  - Aquele que é a ponta de uma aresta leve naquele dado momento
- Então o que deveria ser a chave desses vértices?

Algoritmo de Prim

Uma importante questão é: como selecionar essa aresta leve…para isso:

Q: fila de prioridade contendo os vértices de G que ainda estão fora da AGM.

Qual deveria ser o vértice de maior prioridade?

Aquele que é a ponta de uma aresta leve naquele dado momento

Então o que deveria ser a chave desses vértices?

key[v]: peso da aresta de menor peso que conecta o vértice v (que ainda não está na AGM parcial) a um vértice que já se encontra nela. Quanto menor key[v] maior a prioridade nesta fila

π[v]: (antecessor) vértice da outra ponta desta aresta (que já está na AGM)

Quando um vértice u sai de Q (porque tem o menor key),(u, π[u]) é a aresta leve que acaba de entrar

G: grafo

w: pesos das arestas

r: raiz

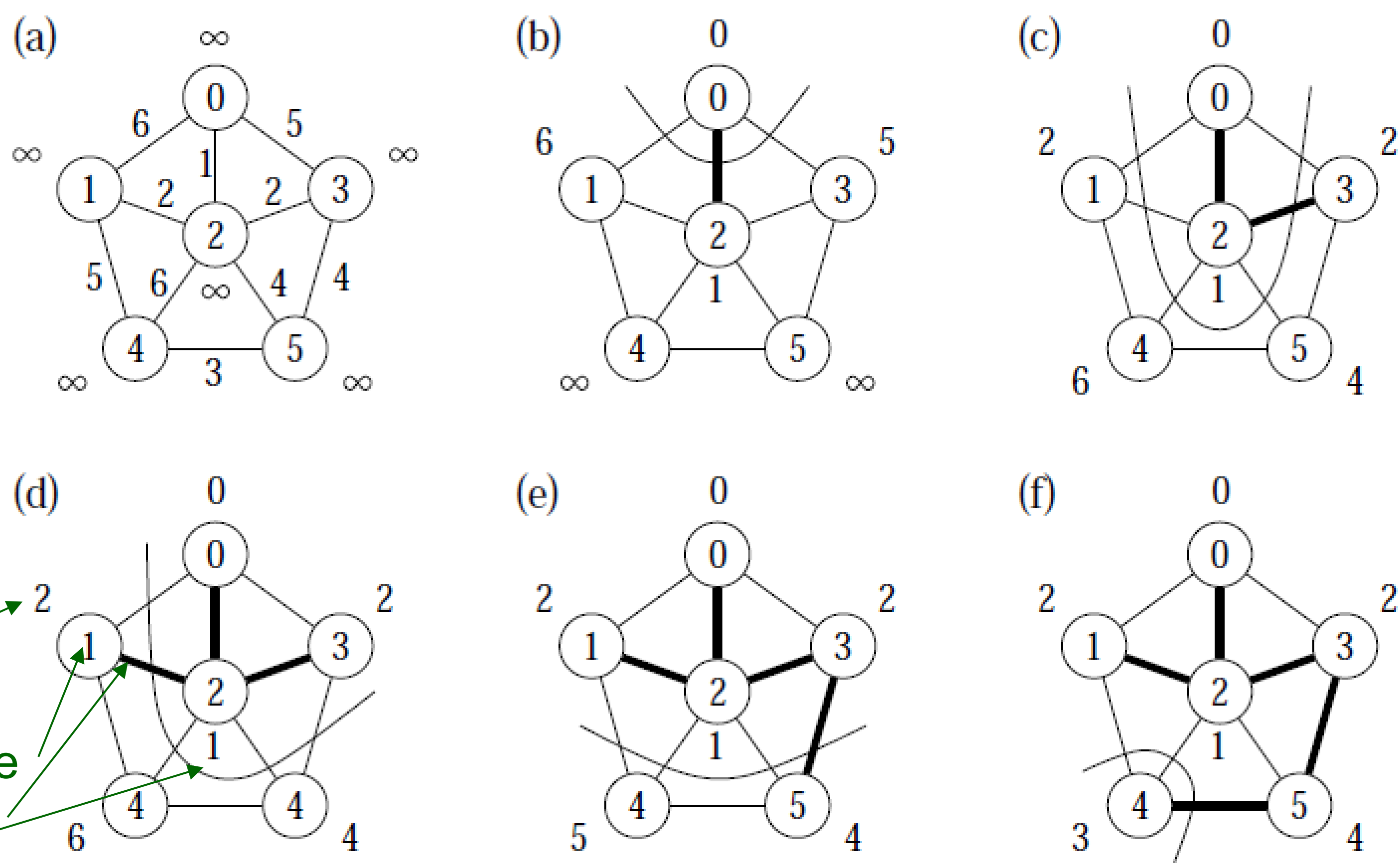
Referência: Cormen, Rivest, Leiserson: Introduction to Algorithms

```
MST-PRIM(G, w, r)
for each u ∈ V[G]
      do key[u] ← ∞
         π[u] ← NIL
key[r] ← 0
Q ← V[G]
while Q ≠ ∅
      do u ← EXTRACT-MIN(Q)
         for each v ∈ Adj[u]
             do if v ∈ Q and w(u, v) < key[v]
                   then π[v] ← u
                        key[v] ← w(u, v)
```

Isso significa que eu vou adicionar u à AGM parcial, com a aresta (u,Π[u]) .

Já que u agora faz parte da AGM parcial, todas as arestas que conectam u a um vértice em Q (ie, que estão fora da AGM parcial) são "candidatas" a arestas leves, por isso preciso atualizar o key dos vértices v adjacentes a u de forma a considerar a aresta (u, v) como possível aresta leve

Algoritmo de Prim: Exemplo



key
rótulo do vértice
Π (antecessor)
corte

Slide do livro do Ziviani – cap 7

Outro exemplo

http://www.each.usp.br/lauretto/ACH2024_2015/Exemplo_Algoritmo_Prim.pdf

Complexidade

Depende da implementação de Q….

```
MST-PRIM(G, w, r)
for each u ∈ V[G]
        do key[u] ← ∞
           π[u] ← NIL
key[r] ← 0
Q ← V[G]
while Q ≠ Ø
        do u ← EXTRACT-MIN(Q)
           for each v ∈ Adj[u]
               do if v ∈ Q and w(u, v) < key[v]
                     then π[v] ← u
                          key[v] ← w(u, v)
```

Complexidade

Depende da implementação de Q….

```
MST-PRIM(G, w, r)
 1  for each u ∈ V[G]
 2       do key[u] ← ∞
 3          π[u] ← NIL
 4  key[r] ← 0
 5  Q ← V[G]
 6  while Q ≠ Ø
 7       do u ← EXTRACT-MIN(Q)
 8          for each v ∈ Adj[u]
 9              do if v ∈ Q and w(u, v) < key[v]
10                    then π[v] ← u
11                         key[v] ← w(u, v)
```

Se Q for uma lista linear simples não ordenada:

Linhas 1 a 5: O(V)
Loop da linha 6: V vezes
Linha 7: O(V)
    Linha 6-7: O(V^2)
Linhas 8-11: O(A) no total
(assumindo lista de adjacência)

Complexidade: O(V) + O(V^2) +O(A)
= O(V^2)

Complexidade

Depende da implementação de Q….

```
MST-PRIM(G, w, r)
1  for each u ∈ V[G]
2      do key[u] ← ∞
3         π[u] ← NIL
4  key[r] ← 0
5  Q ← V[G]
6  while Q ≠ Ø
7      do u ← EXTRACT-MIN(Q)
8         for each v ∈ Adj[u]
9             do if v ∈ Q and w(u, v) < key[v]
10                then π[v] ← u
11                     key[v] ← w(u, v)
```

Se Q for uma lista linear simples não ordenada:

Linhas 1 a 5: O(V)
Loop da linha 6: V vezes
Linha 7: O(V)
    Linha 6-7: $O(V^2)$
Linhas 8-11: O(A) no total
(assumindo lista de adjacência)

Complexidade: $O(V) + O(V^2) + O(A)$
$= O(V^2)$

Arg! Precisa melhorar….

Heap no algoritmo de Prim

```
MST-PRIM(G, w, r)
for each u ∈ V[G]
    do key[u] ← ∞
       π[u] ← NIL
key[r] ← 0
Q ← V[G]
while Q ≠ Ø
    do u ← EXTRACT-MIN(Q)
       for each v ∈ Adj[u]
           do if v ∈ Q and w(u, v) < key[v]
                 then π[v] ← u
                      key[v] ← w(u, v)
```

Construção do Heap (O(V))

Extrai do heap elemento de maior prioridade e reajuste o heap (O(lgV))

Vetor de bits para saber em O(1) se v está em Q

Aumenta prioridade de um elemento (O(lgV))

Complexidade

Depende da implementação de Q….

```
MST-PRIM(G, w, r)
 1  for each u ∈ V[G]
 2      do key[u] ← ∞
 3         π[u] ← NIL
 4  key[r] ← 0
 5  Q ← V[G]
 6  while Q ≠ Ø
 7      do u ← EXTRACT-MIN(Q)
 8         for each v ∈ Adj[u]
 9             do if v ∈ Q and w(u, v) < key[v]
10                   then π[v] ← u
11                        key[v] ← w(u, v)
```

Bem melhor….

Se Q for um heap binário:

Linhas 1 a 5: O(V)
Loop da linha 6: V vezes
Linha 7: O(lg V)
    Linha 6-7: O(V lg V)
Loop 8: O(A) no total
Linha 11: O(lg V)
    Linhas 8-11: O(A lg V) no total (assumindo lista de adjacência)

Complexidade: O(V) + O(V lg V) +O(A lg V) = O(A lg V)

Complexidade

Depende da implementação de Q….

```
MST-PRIM(G, w, r)
1  for each u ∈ V[G]
2       do key[u] ← ∞
3          π[u] ← NIL
4  key[r] ← 0
5  Q ← V[G]
6  while Q ≠ Ø
7       do u ← EXTRACT-MIN(Q)
8          for each v ∈ Adj[u]
9              do if v ∈ Q and w(u, v) < key[v]
10                    then π[v] ← u
11                         key[v] ← w(u, v)
```

Se Q for um heap binário:

Linhas 1 a 5: O(V)
Loop da linha 6: V vezes
Linha 7: O(lg V)
    Linha 6-7: O(V lg V)
Loop 8: O(A) no total
Linha 11: O(lg V)
    Linhas 8-11: O(A lg V) no total (assumindo lista de adjacência)

Complexidade: O(V) + O(V lg V) +O(A lg V) = O(A lg V)

Bem melhor….

Por que essa última igualdade?

Complexidade

Depende da implementação de Q….

```
MST-PRIM(G, w, r)
1   for each u ∈ V[G]
2        do key[u] ← ∞
3           π[u] ← NIL
4   key[r] ← 0
5   Q ← V[G]
6   while Q ≠ Ø
7        do u ← EXTRACT-MIN(Q)
8           for each v ∈ Adj[u]
9               do if v ∈ Q and w(u, v) < key[v]
10                     then π[v] ← u
11                          key[v] ← w(u, v)
```

Se Q for um heap binário:

Linhas 1 a 5: O(V)
Loop da linha 6: V vezes
Linha 7: O(lg V)
 Linha 6-7: O(V lg V)
Loop 8: O(A) no total
Linha 11: O(lg V)
 Linhas 8-11: O(A lg V) no total
  (assumindo lista de adjacência)

Complexidade: O(V) + O(V lg V) +O(A lg V) = O(A lg V)

Bem melhor….

Por que essa última igualdade?
Assumindo que G é conexo…

Complexidade

Depende da implementação de Q….

```
MST-PRIM(G, w, r)
 1  for each u ∈ V[G]
 2      do key[u] ← ∞
 3         π[u] ← NIL
 4  key[r] ← 0
 5  Q ← V[G]
 6  while Q ≠ Ø
 7      do u ← EXTRACT-MIN(Q)
 8         for each v ∈ Adj[u]
 9             do if v ∈ Q and w(u, v) < key[v]
10                   then π[v] ← u
11                        key[v] ← w(u, v)
```

Se Q for um heap binário:

Linhas 1 a 5: O(V)
Loop da linha 6: V vezes
Linha 7: O(lg V)
    Linha 6-7: O(V lg V)
Loop 8: O(A) no total
Linha 11: O(lg V)
    Linhas 8-11: O(A lg V) no total (assumindo lista de adjacência)

Complexidade: O(V) + O(V lg V) +O(A lg V) = O(A lg V)

Se usar heap Fibonacci, O(A + V lg V), que é ainda melhor caso quando |V| < |A|

Algoritmo de Prim

Uma árvore, inicialmente vazia, cresce até chegar a ser uma AGM

A cada passo um vértice é acrescentado a essa árvore

Referências

Livro do Cormen cap 23 (3ª ed)

Livro do Ziviani cap 7

(ver demais)