1. Chama BuscaEmProfundidade(G) para obter os tempos de término $t[u]$ para cada vértice u.
2. Ao término de cada vértice, insira-o na frente de uma lista linear encadeada.
3. Retorna a lista encadeada de vértices.

O Programa 7.9 para realizar busca em profundidade pode ser facilmente modificado para obter a ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico $G = (V, A)$. Para obter a lista ordenada de vértices basta inserir uma chamada para o procedimento InsLista do Programa 7.13 no procedimento BuscaDfs do Programa 7.9. O local a ser inserido deve ser logo após o momento em que o tempo de término $t[u]$ é obtido e o vértice é pintado de preto. Ao final da execução do Programa 7.9, basta retornar a lista obtida (ou imprimi-la usando o procedimento Imprime do Programa 3.4).

Programa 7.13 *Insere em uma lista encadeada antes do primeiro item da lista*

```
procedure InsLista (var Item: TipoItem; var Lista: TipoLista);
{-- Insere antes do primeiro item da lista --}
var Aux: TipoApontador;
begin
  Aux := Lista.Primeiro^.Prox;
  new (Lista.Primeiro^.Prox);
  Lista.Primeiro^.Prox^.Item := Item;
  Lista.Primeiro^.Prox^.Prox := Aux;
end;
```

Análise A ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico $G = (V, A)$ tem custo $O(|V| + |A|)$, uma vez que a busca em profundidade tem complexidade de tempo $O(|V| + |A|)$ e o custo para inserir cada um dos $|V|$ vértices na frente da lista linear encadeada custa $O(1)$.

7.7 Componentes Fortemente Conectados

Recordando da Seção 7.1, um **componente fortemente conectado** de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um conjunto maximal de vértices $C \subseteq V$ tal que, para todo par de vértices u e v em C, u e v são mutuamente alcançáveis a partir de cada um deles. A Figura 7.14 mostra um exemplo de um grafo direcionado G e seus componentes fortemente conectados. A Figura 7.14(c) mostra o grafo reduzido acíclico obtido pela contração de todas as arestas de cada componente fortemente conectado de G da Figura 7.14(b), de tal forma que um único vértice é obtido para cada componente.

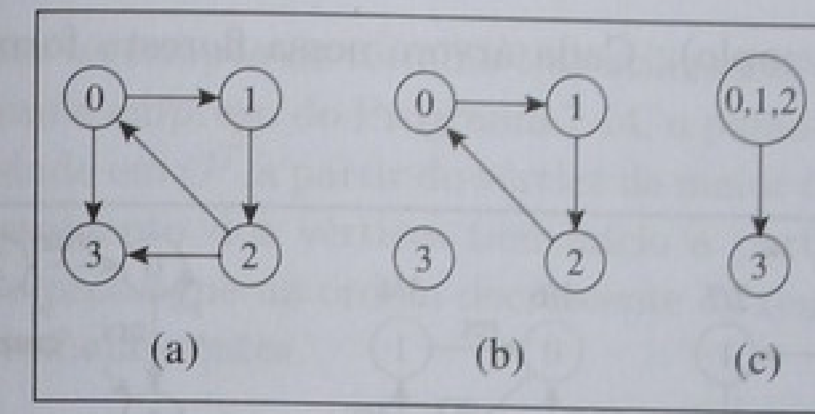

Figura 7.14 *(a) Grafo direcionado G; (b) Componentes fortemente conectados de G; (c) Grafo reduzido acíclico.*

O algoritmo para obter os componentes fortemente conectados de um grafo direcionado $G = (V, A)$ usa o **transposto** de G, definido como sendo o grafo $G^T = (V, A^T)$, em que $A^T = \{(u, v) : (v, u) \in A\}$, isto é, A^T consiste das arestas de G com suas direções invertidas. No caso, G e G^T possuem os mesmos componentes fortemente conectados, isto é, u e v são mutuamente alcançáveis a partir de cada um em G se e somente se u e v são mutuamente alcançáveis a partir de cada um em G^T.

O pseudocódigo mostrado a seguir apresenta o algoritmo para obter os componentes fortemente conectados de um grafo direcionado $G = (V, A)$:

1. Chama BuscaEmProfundidade(G) para obter os tempos de término $t[u]$ para cada vértice u.
2. Obtém G^T.
3. Chama BuscaEmProfundidade(G^T), realizando a busca a partir do vértice de maior $t[u]$ obtido na linha 1. Se a busca em profundidade não alcançar todos os vértices, inicie uma nova busca em profundidade a partir do vértice de maior $t[u]$ dentre os vértices restantes.
4. Retorne os vértices de cada árvore da floresta obtida na busca em profundidade na linha 3 como um componente fortemente conectado separado.

A Figura 7.15(a) apresenta o exemplo de um grafo direcionado $G = (V, A)$. A execução do algoritmo em G inicia no vértice 0 e prossegue primeiro para o vértice 1, e os tempos de descoberta $d[u]$ e de término $t[u]$ são mostrados ao lado de cada vértice. Após a execução da linha 2 para obter G^T do grafo direcionado da Figura 7.14(a), obtemos o grafo transposto mostrado na Figura 7.15(b). A Figura 7.15(b) apresenta o resultado da busca em profundidade em G^T, mostrando os tempos de descoberta e de término indicados ao lado de cada vértice, e com a indicação de cada tipo de aresta (aresta de árvore, de retorno e de cruzamento) ao lado de cada aresta. A busca em profundidade em G^T resulta na floresta de duas árvores mostrada na Figura 7.15(c), com a indicação do tipo de aresta ao lado de cada aresta. A busca em profundidade em G^T inicia pelo vértice 0 porque 0 tem o maior $t[u]$. A partir da raiz 0, é possível atingir o vértice 2 e depois o vértice 1. A próxima árvore da floresta tem como raiz o vértice 3, uma vez que ele possui o maior tempo de término dentre os vértices restantes (na realidade, é o único