



Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Sistemas de Comunicações Digitais - TI0069

Trabalho 01: Modulação Digital

Aluno:

Lucas de Souza Abdalah 385472

Professor: André Almeida

Data de Entrega do Relatório: 28/03/2021

Fortaleza
2021

Sumário

1	Problema 1 - M-QAM	2
1.1	Energia da Constelação	2
1.2	Distância Mínima entre Símbolos	2
1.3	Modulador (Codificação de Gray)	4
1.4	Demodulador	7
2	Problema 2 - Probabilidade de Erro: M-QAM	8
3	Problema 3 - Canal RAGB: M-QAM	9
4	Problema 4 - Modulação M-PSK	12
4.1	Energia da Constelação	12
4.2	Distância Mínima entre Símbolos	12
4.3	Modulador (Codificação de Gray)	13
4.4	Demodulador	13
5	Problema 5 - Comparativo M-QAM x M-PSK	16
6	Conclusão e Resultados	18
	Referências	19

1 Problema 1 - M -QAM

Na modulação ,*quadrature amplitude modulation* (QAM) os símbolos de informação são mapeados nas amplitudes das portadoras em fase e quadratura. Um modelo simplificado do sinal transmitido é visto como a equação 1.

$$s_m(t) = (A_m^{(\text{real})} + jA_m^{(\text{imag})})g(t) \quad (1)$$

No caso especial em que amplitudes $A_m^{(\text{real})}$ e $A_m^{(\text{imag})}$ assumem valores discretos no conjunto da equação 2, a constelação é chamada QAM retangular. O QAM retangular se aplica ao caso estudado a seguir, pois a quantidade de símbolos utilizados ($M = \{4, 16, 64\}$) se encaixam na condição e é utilizado para construção do alfabeto da modulação [1]. A função `const_MQAM.m` foi desenvolvida de modo a construir o alfabeto como uma matriz para ordenar os símbolos da esquerda para direita em linhas de símbolos ímpares e, da direita para esquerda em linhas pares.

$$A_m = \{(2m - \sqrt{M} - 1)d\}_{m=1}^{\sqrt{M}} \quad (2)$$

1.1 Energia da Constelação

Para calcular a energia média, é suficiente de calcular a equação 3, desenvolvida em [1], [2].

$$\mathcal{E}_{\text{media}} = \frac{M-1}{3}\mathcal{E}_g \quad (3)$$

Sendo $g(t)$ o pulso de energia unitária, $\mathcal{E}_g = 1$. O resultado para cada constelação QAM é registrado na Tabela 1.

A relação entre $\mathcal{E}_{\text{media}} = \mathcal{E}_b \log_2 M$ permite calcular diretamente a energia média de bit (\mathcal{E}_b), resultando na equação 4

$$\mathcal{E}_b = \frac{M-1}{3\log_2 M}\mathcal{E}_{\text{media}} \quad (4)$$

1.2 Distância Mínima entre Símbolos

O parâmetro d é a distância entre os símbolos adjacentes, e pode ser obtido com o cálculo da distância euclidiana entre estes, como na Equação 5.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}[(A_{mi} - A_{ni})^2 + (A_{mq} - A_{nq})^2]} \\ &= \sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{\text{media}}}{2(M-1)}} \end{aligned} \quad (5)$$

Como calcular os coeficiente para constelação M -QAM retangular, onde \sqrt{M} assume valores inteiros. Os coeficientes em quadratura a_i e b_i são obtidos através da equação: $\{(2i - \sqrt{M} - 1)d\}_{i=1}^{\sqrt{M}}$

A distância eucladiana entre os sinais na modulação QAM é

$$\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{media}}{2(M-1)}}$$

M -QAM	\mathcal{E}_{media}	$\mathcal{E}_{media(bit)}$	d
M	$\frac{M-1}{3}\mathcal{E}_g$	$\frac{M-1}{3\log_2 M}\mathcal{E}_g$	$\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{media}}{2(M-1)}}$
4	1	1.67×10^{-1}	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
16	5	4.67×10^{-1}	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
64	21	1.17×10^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Tabela 1: Informações gerais calculadas para a modulação M -QAM.

1.3 Modulador (Codificação de Gray)

O mapeador da constelação M -QAM consiste em uma função que recebe uma sequência de bits

A codificação de binário para Gray [3] é baseada em um algoritmo recursivo 1, cujo recebe uma sequência de bits orientadas pelo bit mais importante (MSB). A recursão está na operação “ou exclusivo” (xor), denotada pelo símbolo (\otimes).

Algorithm 1: Codificação de Gray

Entrada: Sequência de Bits (b) - MSB

Saída: Sequencia em Código Gray (g) - LSB

$n = 0$;

$K = \text{length}(b)$;

while $K > n$ **do**

if $K == n$ **then**

$g_{(K-n)} = b_{(K-n)}$;

else

$g_{(K-n)} = b_{(K-n+1)} \otimes b_{(K-n)}$;

end

$n = n + 1$;;

end

$g = \text{flip}(g)$;

Decimal	Binário	Gray	Decimal
0	00	00	0
1	01	01	1
2	10	11	3
3	11	10	2

Tabela 2: Tabela de tradução de binário para Gray com 2 bits.

A função `mybin2gray.m`.

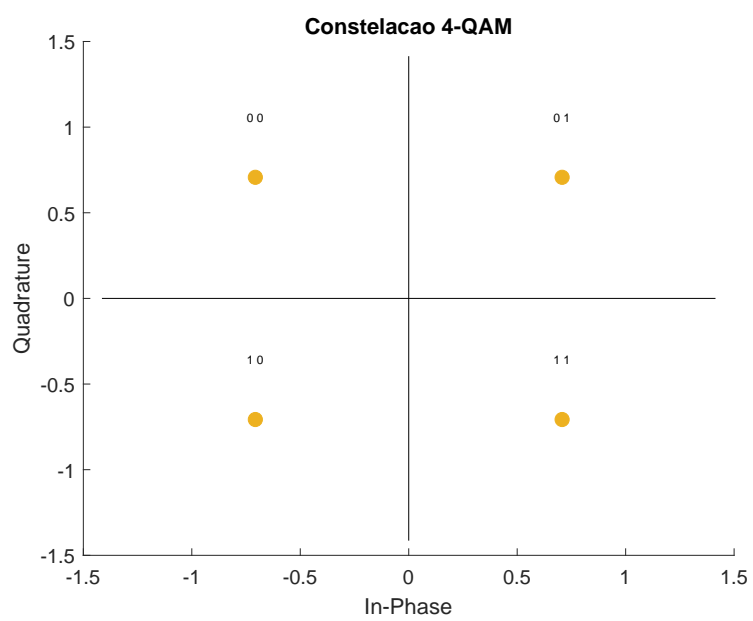


Figura 1: Exemplo de 4-QAM plot.

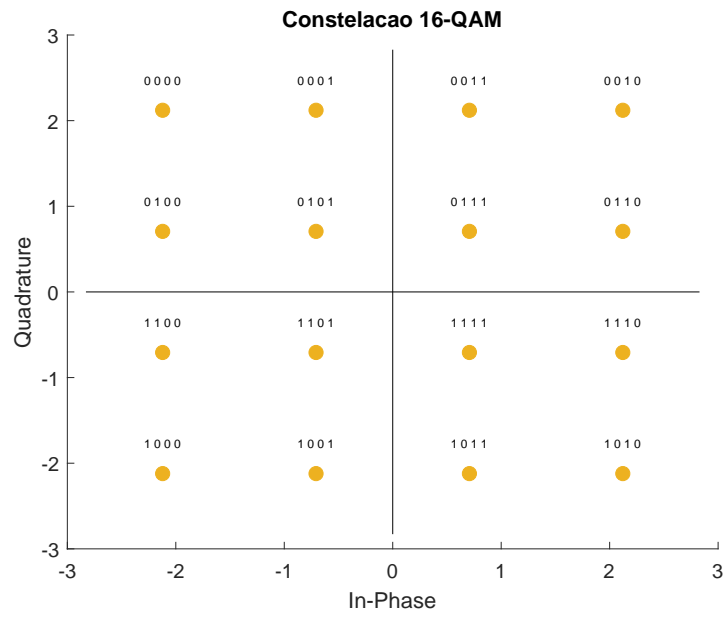


Figura 2: Exemplo de 16-QAM plot.

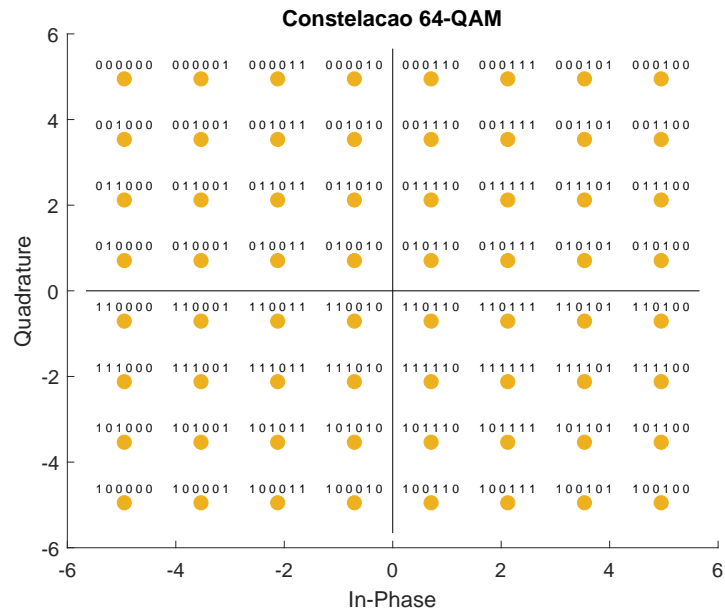


Figura 3: Exemplo de 64-QAM plot.

1.4 Demodulador

A função que decodifica um símbolo tem como entrada o próprio símbolo: $A_m^{(\text{real})}$ e $A_m^{(\text{imag})}$, M e d .

constelação M -QAM consiste em uma função que recebe uma sequência de bits

com 6

$$d_{mn} = \sqrt{\|s_m - s_n\|^2} \quad (6)$$

A função demapping_MQAM.m.

Uma vez definidos os símbolos da constelação, a área de decisão é definida também. De forma prática, ao símbolo selecionado é aquele que minimiza a distância euclidiana entre o símbolo do alfabeto. Essa região de decisão é definida pelo parâmetro, formado regiões com os símbolos do alfabeto no centro, altura e comprimento d .

Dado essa distância d , é possível calcular a energia média da constelação com a função

Que computa a equação

2 Problema 2 - Probabilidade de Erro: M -QAM

Para calcular a probabilidade de erro $P(e)$ de cada constelação 7 desenvolvida em [1].

$$P(e) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_0}} \right) - 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 Q^2 \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_0}} \right) \quad (7)$$

Para valores mais elevados de SNR , a equação da probabilidade do M -QAM pode ser reduzida para 8, pois o segundo termo ao quadrado passa a ser irrelevante.

$$P(e) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_0}} \right) \quad (8)$$

Nas simulações realizadas, as curvas utilizando ambas as equações são bem semelhantes, principalmente para constelação 4-QAM, além de reduzir o custo computacional. Entretanto, para manter a fidedignidade do gráfico mostrado na 4, a probabilidade $P(e)$ é calculada a partir da equação completa 7.

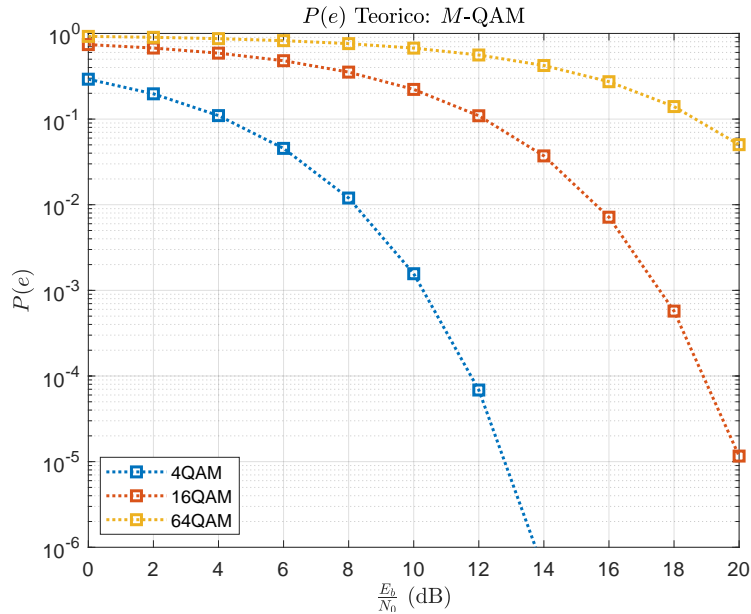


Figura 4: Probabilidade de erro ($P(e)$) teórico M -QAM.

3 Problema 3 - Canal RAGB: M -QAM

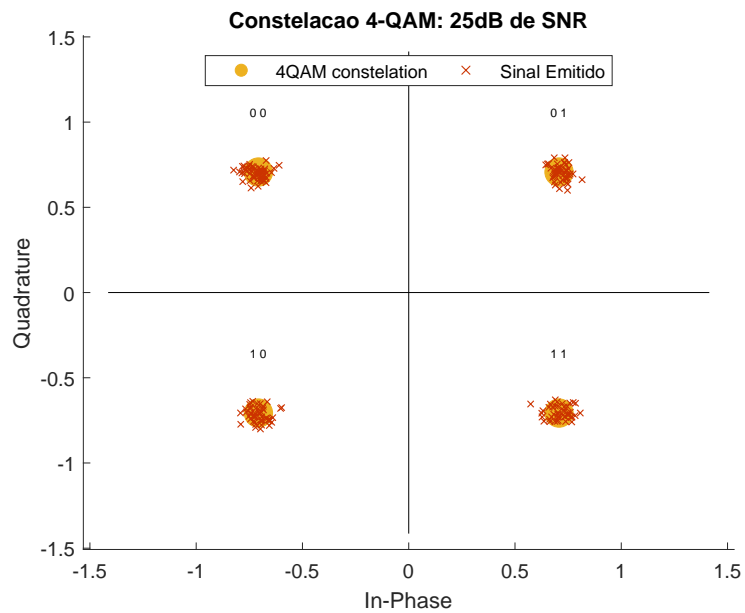


Figura 5: Simulação de transmissão 4-QAM, com SNR de 25dB.

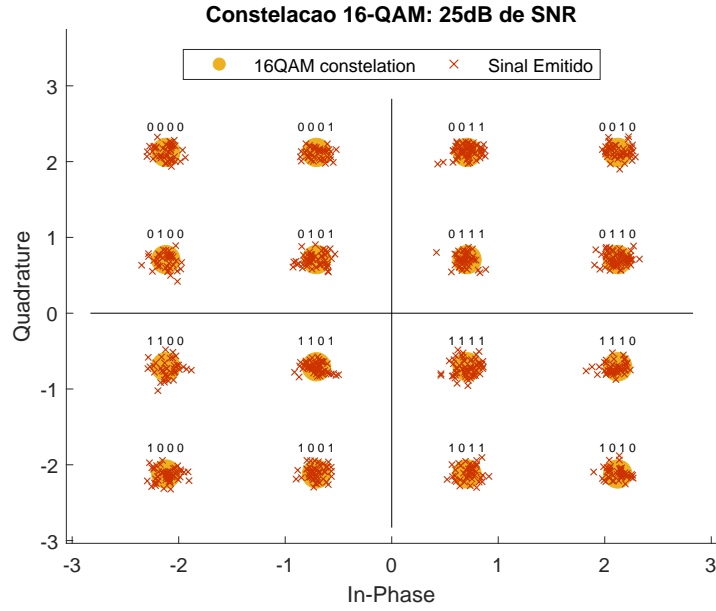


Figura 6: Simulação de transmissão 16-QAM, com SNR de 25dB.

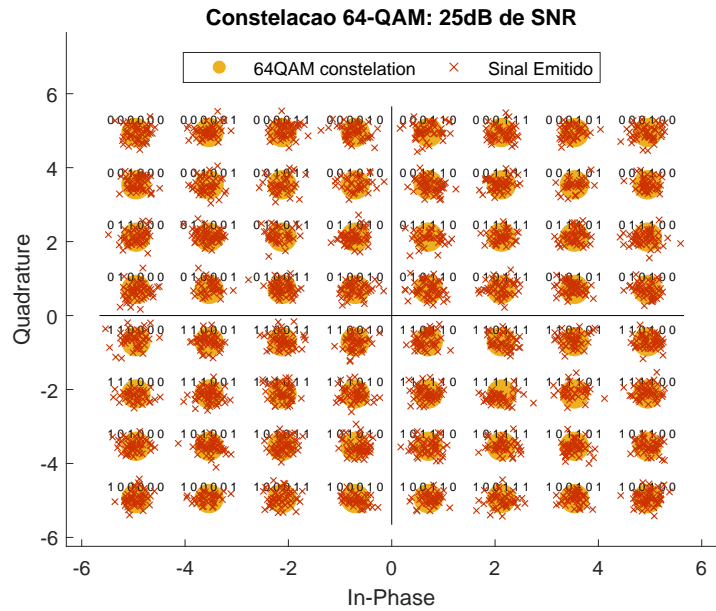


Figura 7: Simulação de transmissão 64-QAM, com SNR de 25dB.

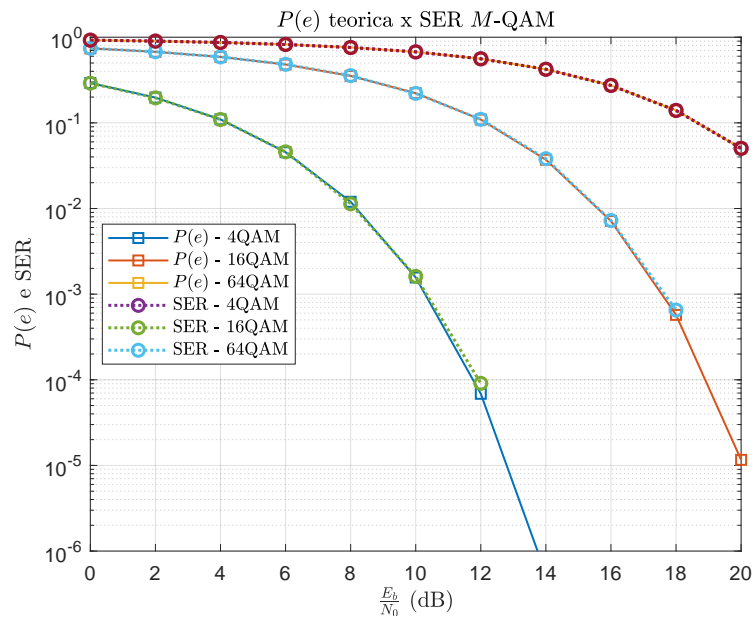


Figura 8: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M -QAM em canal RAGB.

4 Problema 4 - Modulação M -PSK

O conjunto de sinais *phase-shift keying* (PSK) têm a mesma amplitude e fases diferentes para cada mensagem, podendo ser escrito para $M > 2$ de acordo com a equação 9

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t + \frac{(2i-1)\pi}{M}), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

Assumindo a energia do pulso de transmissão unitária, $g(t) = 1$, o sinal também pode ser expresso através de uma combinação linear [1], de modo que $s_i(t)$ é reescrito com na equação 10

$$s_i = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\frac{(2i-1)\pi}{M}) \\ \sqrt{\mathcal{E}_s} \sin(\frac{(2i-1)\pi}{M}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, M \quad (10)$$

A função const_MPSK.m.

4.1 Energia da Constelação

4.2 Distância Mínima entre Símbolos

M -PSK	\mathcal{E}_{media}	$\mathcal{E}_{media(bit)}$	d
M	$\frac{1}{2}\mathcal{E}_g$	$\frac{1}{2\log_2 M}\mathcal{E}_g$	$2\sqrt{\mathcal{E}_{media} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$
4	0.5	8.33×10^{-2}	1
8	0.5	5.56×10^{-2}	5.41×10^{-1}

Tabela 3: Informações gerais calculadas para a modulação M -QAM.

4.3 Modulador (Codificação de Gray)

4.4 Demodulador

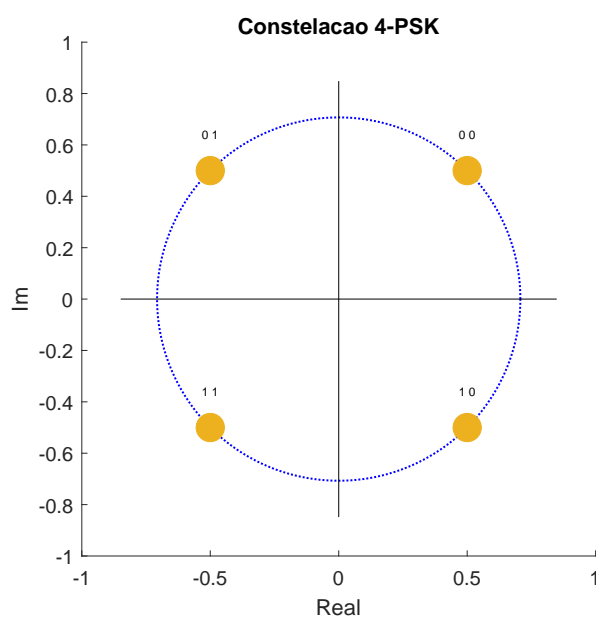


Figura 9: Constelação 4-PSK com codificação de Gray.

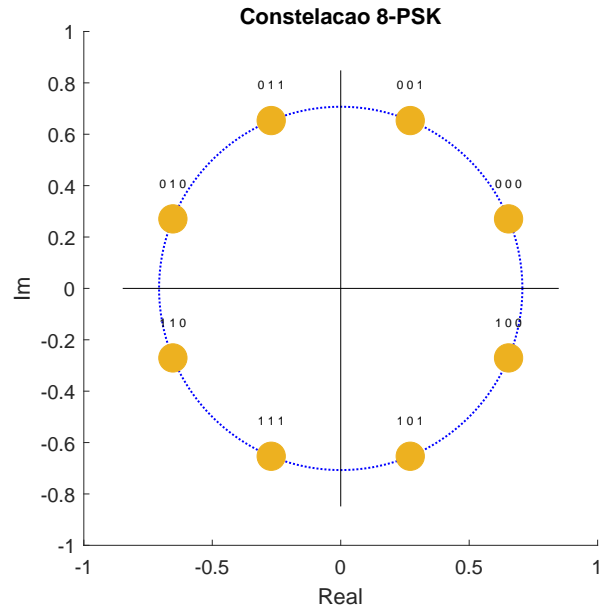


Figura 10: Constelação 8-PSK com codificação de Gray.

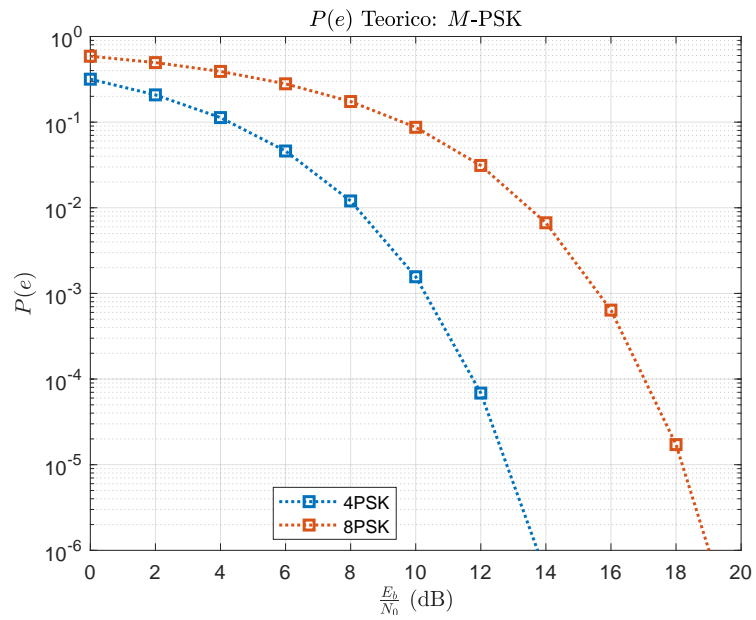


Figura 11: Probabilidade de erro ($P(e)$) teórico M -PSK.

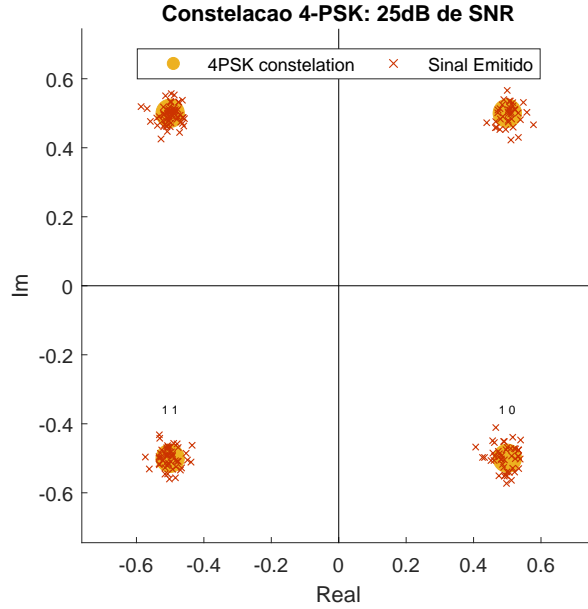


Figura 12: Probabilidade de erro ($P(e)$) teórico M -PSK.

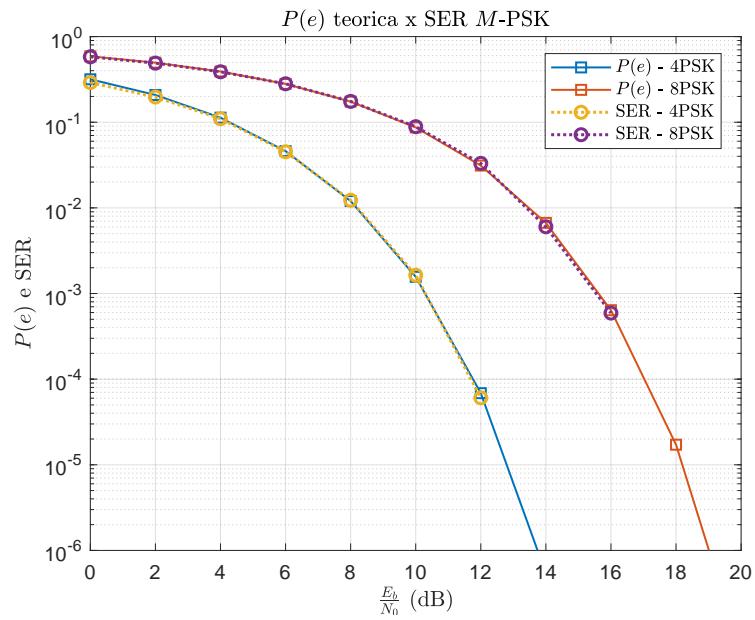


Figura 13: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M -PSK em canal RAGB.

5 Problema 5 - Comparativo M -QAM x M -PSK

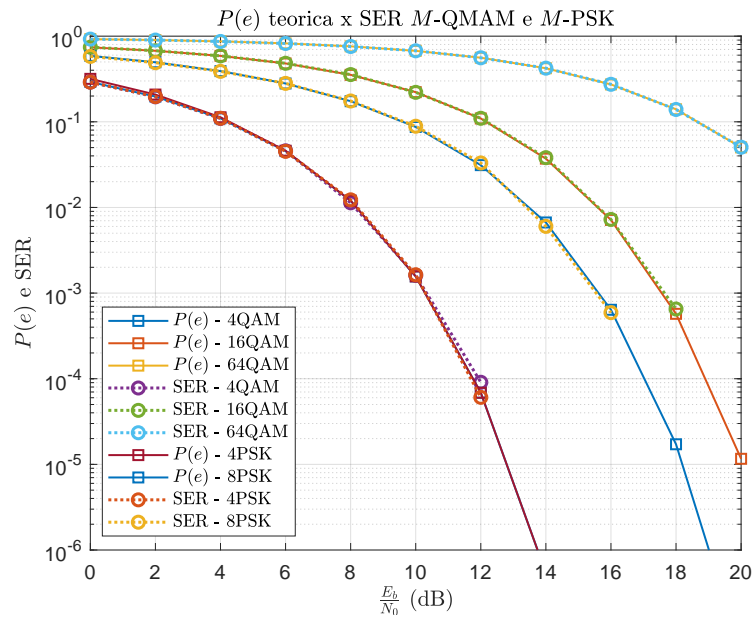


Figura 14: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M -PSK em canal RAGB.

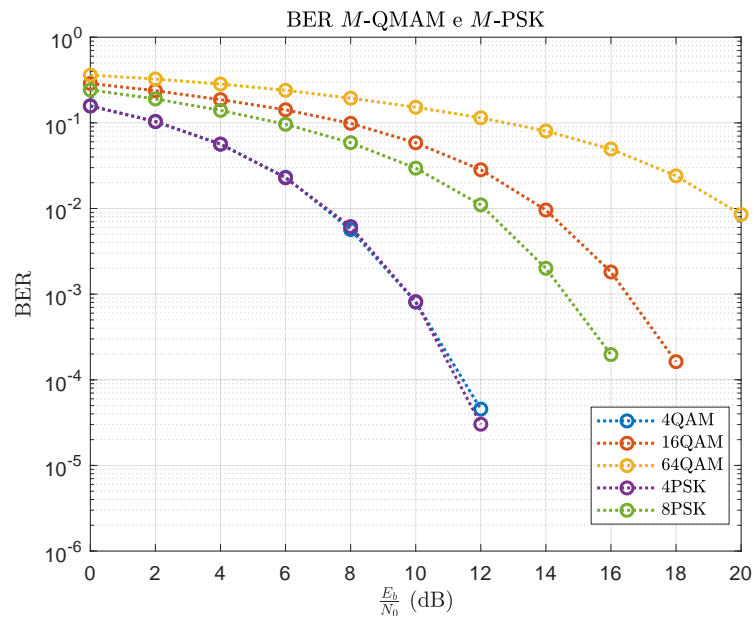


Figura 15: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M -PSK em canal RAGB.

6 Conclusão e Resultados

O para o caso do QAM é possível observar que aumentar o número de símbolos ganhamos em b transmitidos por símbolos, porém a energia média da constelação cresce proporcionalmente saindo de 1, no caso de $m = 4$ e chegando a 21 no caso de $m = 64$. Além disso a exigência de um sistema de transmissão com mais robustez a ruído, pois é aumentando a quantidade de símbolos a influência do ruído aumenta de forma a deteriorar totalmente a informação enviada

Podemos observar que ao aumentarmos a quantidade de símbolos na constelação, é necessário mais energia para tal constelação, em ambos os casos, QAM E PSK. Além disso, uma SNR baixa acarreta bastante perda de informação, chegando ao ponto de errar a taxa de 0.5 dos símbolos enviados no caso 64-QAM para 0dB. Esta taxa só é menor que 0.01 para $\frac{Eb}{N_o} \geq 20\text{dB}$.

Interessante notar também a diferença entre a taxa de erro de bit e a taxa de símbolo, pois a utilizar a codificação de Gray o símbolos decidido apresenta apenas um bit de diferença símbolos vizinhos, garantindo o que mesmo ao selecionar um símbolo equivocado a mensagem será afetada de apenas um bit.

Referências

- [1] C. Pimentel, *Comunicação Digital*, 1^a ed. 2007.
- [2] J. G. Proakis e M. Salehi, *Digital Communications*, 5^a ed. 1995.
- [3] A. Reddy, *Conversion of Binary to Gray Code*, <https://www.tutorialspoint.com/conversion-of-binary-to-gray-code>, Accessed: 2021-03-26.