



Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Sistemas de Comunicações Digitais - TI0069

Trabalho 01: Modulação Digital

Aluno:

Lucas de Souza Abdalah 385472

Professor: André Almeida

Data de Entrega do Relatório: 28/03/2021

Fortaleza
2021

Sumário

1	Problema 1 - M-QAM	2
1.1	Energia da Constelação	2
1.2	Distância Mínima entre Símbolos	2
1.3	Modulador (Codificação de Gray)	3
1.4	Demodulador	6
2	Problema 2 - Probabilidade de Erro: M-QAM	8
3	Problema 3 - Canal RAGB: M-QAM	9
3.1	Modelo	9
3.2	Experimento de Transmissão	11
4	Problema 4 - Modulação M-PSK	12
4.1	Energia da Constelação	12
4.2	Distância Mínima entre Símbolos	12
4.3	Modulador (Codificação de Gray)	13
4.4	Demodulador	13
5	Problema 5 - Comparativo M-QAM x M-PSK	16
6	Conclusão e Resultados	18
	Referências	19

1 Problema 1 - M -QAM

Na modulação, *quadrature amplitude modulation* (QAM) os símbolos de informação são mapeados nas amplitudes das portadoras em fase e quadratura. Um modelo simplificado do sinal transmitido é visto como a equação 1.

$$s_m(t) = (A_m^{(\text{real})} + jA_m^{(\text{imag})})g(t) \quad (1)$$

desenvolvida de modo a construir o alfabeto como uma matriz para ordenar os símbolos da esquerda para direita em linhas de símbolos ímpares e, da direita para esquerda em linhas pares.

$$A_m = \{(2m - \sqrt{M} - 1)d\}_{m=1}^{\sqrt{M}} \quad (2)$$

1.1 Energia da Constelação

Para calcular a energia média, é suficiente de calcular a equação 3, desenvolvida em [1], [2].

$$\mathcal{E}_{media} = \frac{M-1}{3} \mathcal{E}_g \quad (3)$$

Sendo $g(t)$ o pulso de energia unitária, $\mathcal{E}_g = 1$. O resultado é computado pela função `energia_MQAM.m` para cada constelação QAM e é registrado na Tabela 1.

A relação entre $\mathcal{E}_{media} = \mathcal{E}_b \log_2 M$ permite calcular diretamente a energia média de bit (\mathcal{E}_b), resultando na equação 4

$$\mathcal{E}_b = \frac{M-1}{3 \log_2 M} \mathcal{E}_{media} \quad (4)$$

1.2 Distância Mínima entre Símbolos

O parâmetro d é a distância entre os símbolos adjacentes, e pode ser obtido com o cálculo da distância euclidiana entre estes, como na equação 5.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2} [(A_{mi} - A_{ni})^2 + (A_{mq} - A_{nq})^2]} \\ &= \sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{media}}{2(M-1)}} \end{aligned} \quad (5)$$

Essa distância é computada pela função `d_MQAM.m` e registrada na Tabela 1.

M -QAM	\mathcal{E}_{media}	\mathcal{E}_b	d
M	$\frac{M-1}{3}\mathcal{E}_g$	$\frac{M-1}{3\log_2 M}\mathcal{E}_g$	$\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{media}}{2(M-1)}}$
4	1	1.67×10^{-1}	$\sqrt{2}/2$
16	5	4.67×10^{-1}	$\sqrt{2}/2$
64	21	1.17×10^0	$\sqrt{2}/2$

Tabela 1: Informações gerais calculadas para a modulação M -QAM.

1.3 Modulador (Codificação de Gray)

O mapeador da constelação M -QAM consiste em uma função que recebe uma sequência de bits e retorna o símbolo equivalente: `mapping_MQAM.m`. Dentro desta função, é criado um alfabeto de código binário e na convertido em Gray. `gray_const.m`

Esta codificação é baseada em um algoritmo recursivo 1, cujo recebe uma sequência de bits orientadas pelo bit mais importante (MSB) [3]. A recursão está na operação “ou exclusivo” (*xor*), denotada pelo símbolo (\otimes). Este cálculo é executado na função `mybin2gray.m`.

Algorithm 1: Codificação de Gray

Entrada: Sequência de Bits (b) - MSB

Saída: Sequencia em Código Gray (g) - LSB

$n = 0$;

$K = \text{length}(b)$;

while $K > n$ **do**

if $K == n$ **then**

$g_{(K-n)} = b_{(K-n)}$;

else

$g_{(K-n)} = b_{(K-n+1)} \otimes b_{(K-n)}$;

end

$n = n + 1$;;

end

$g = \text{flip}(g)$;

A 2 mostra um exemplo de conversão para código Gray de uma sequência de 2 bits. Seguindo o mesmo procedimento um alfabeto de qualquer tamanho pode ser criado.

Decimal	Binário	Gray	Decimal
0	00	00	0
1	01	01	1
2	10	11	3
3	11	10	2

Tabela 2: Tabela de tradução de binário para Gray com 2 bits.

As constalações M -QAM para $M = \{4, 16, 64\}$ são apresentadas nas figuras 1, 2 e 3, respectivamente. É possível observar os valores dos símbolos em fase e quadratura, além do equivalente em binário.

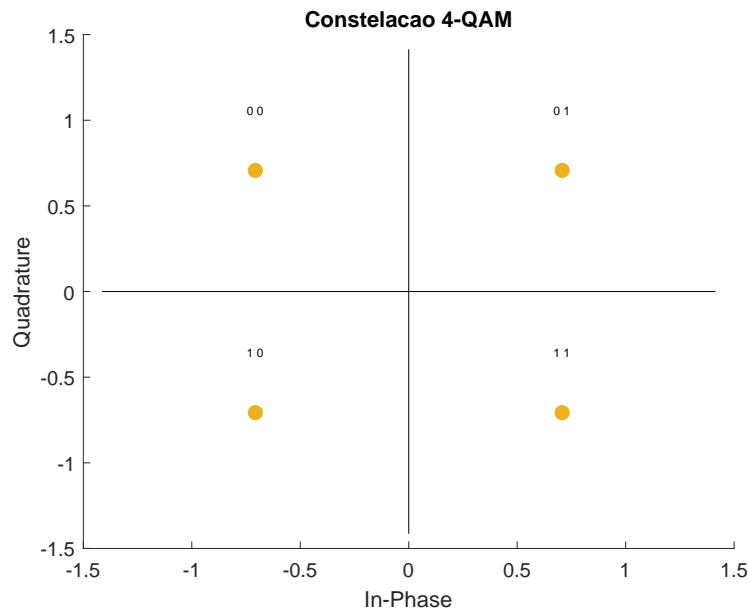


Figura 1: Constelação 4-QAM plot.

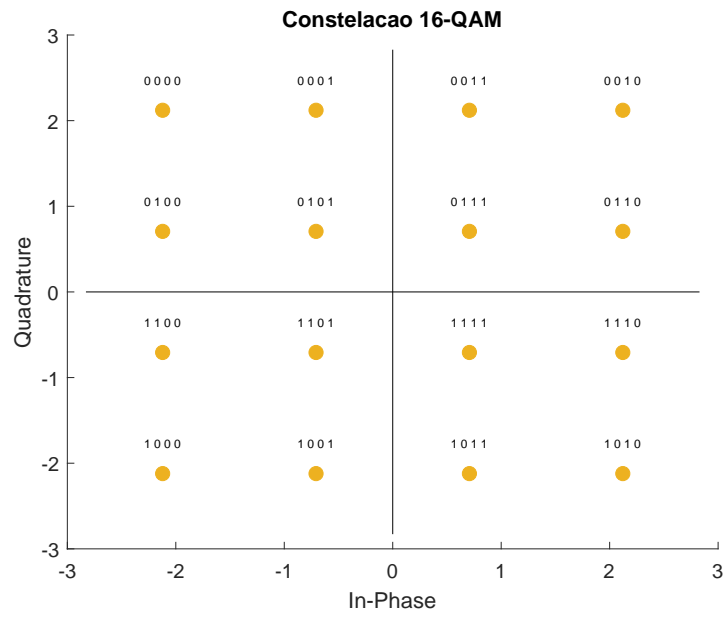


Figura 2: Constelação 16-QAM plot.

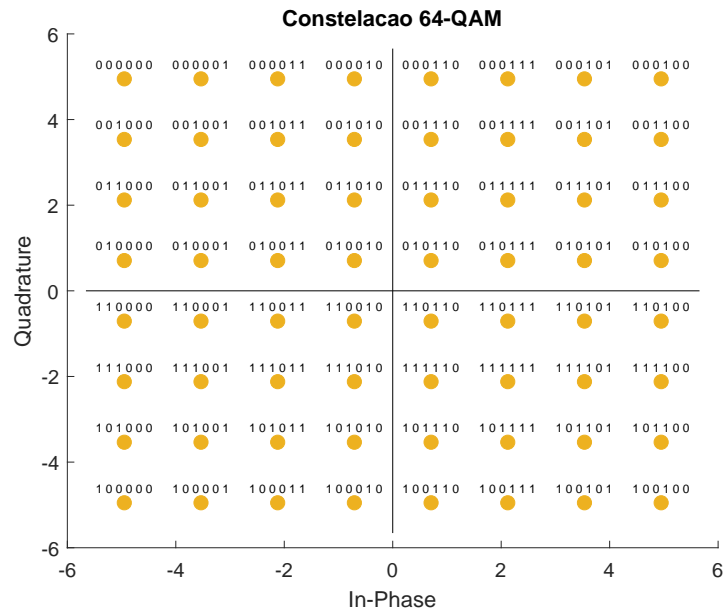


Figura 3: Constelação 64-QAM plot.

1.4 Demodulador

A função que decodifica um símbolo tem como entrada o próprio símbolo: $A_n^{(\text{real})}$ e $A_n^{(\text{imag})}$, M e d .

O alfabeto da constelação M -QAM é gerada e uma vez estes definidos, a área de decisão é desenhada a partir em função de M e d . Basicamente, o símbolo selecionado é aquele que minimiza a distância euclidiana entre o símbolo recebido e o do alfabeto, como mostra a equação 6.

$$d_{mn} = \sqrt{\|s_m - s_n\|^2} \quad (6)$$

A função que executa estes comando é a `demapping_MQAM.m` e ela retorna o símbolo decodificado e os bits equivalente do alfabeto de Gray.

As figuras 4 e 5 mostram uma geração de sequência de 50 símbolos aleatórios (*i.i.d*) passando pelo demodulador com o traçado da distância euclidiana entre o símbolo recebido e o equivalente escolhido na constelação.

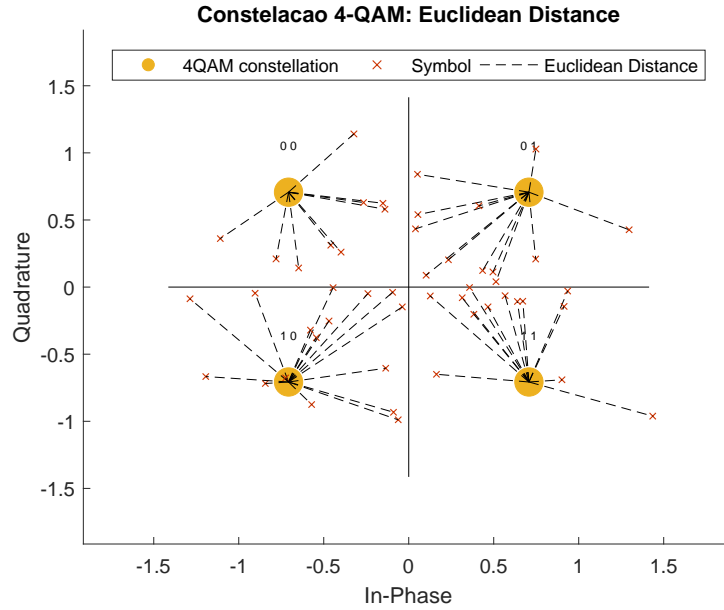


Figura 4: Exemplo de 4-QAM plot.

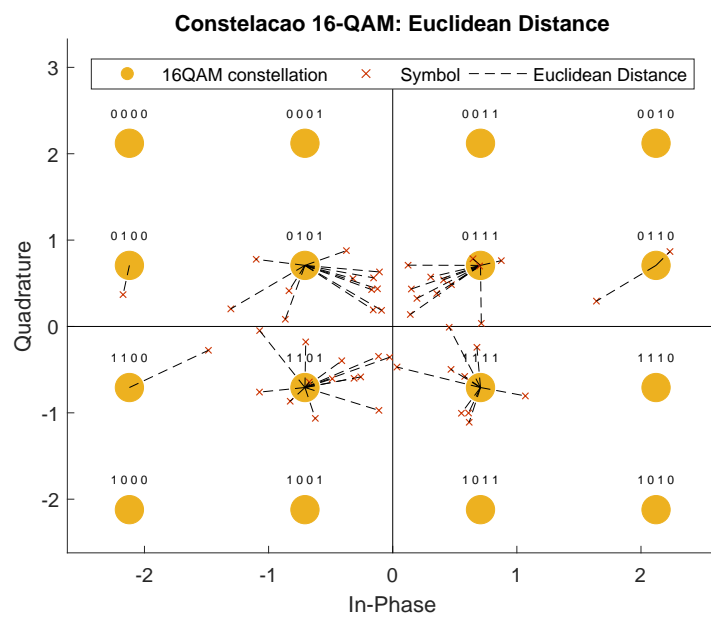


Figura 5: Exemplo de 16-QAM plot.

2 Problema 2 - Probabilidade de Erro: M -QAM

Para calcular a probabilidade de erro $P(e)$ de cada constelação 7 é necessário computar a energia da constelação e do ruído, respectivamente, E_s e N_o , que é desenvolvida em [1]. A função `Pe_MQAM.m` é utilizada para calcular a probabilidade de erro.

$$P(e) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_o}} \right) - 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 Q^2 \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_o}} \right) \quad (7)$$

Para valores mais elevados de relação sinal-ruído (SNR), a equação 7 pode ser reduzida para 8, pois o segundo termo ao quadrado se torna irrelevante.

$$P(e) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_o}} \right) \quad (8)$$

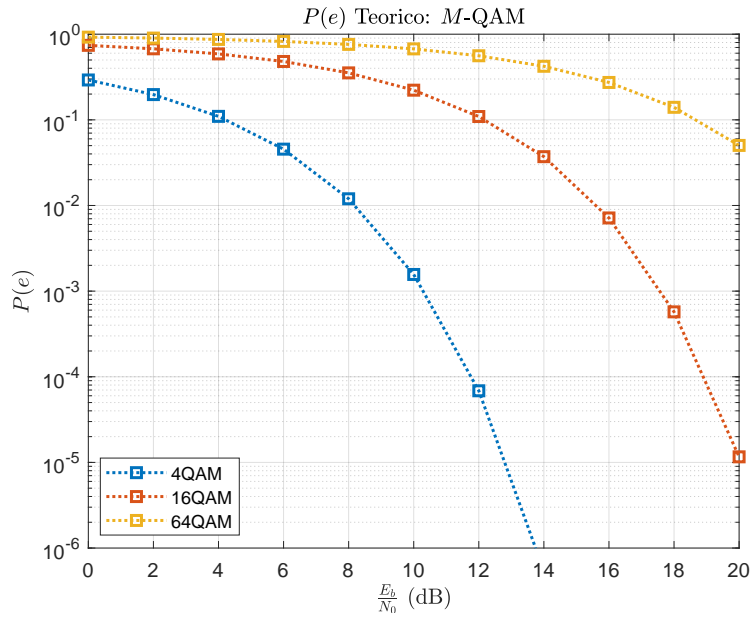


Figura 6: Probabilidade de erro ($P(e)$) teórico M -QAM.

Nas simulações realizadas, os resultados são semelhantes, além de reduzir o custo computacional.

Entretanto, para manter uma fidedignidade dos resultados o gráfico mostrado na figura 6 a probabilidade $P(e)$ é calculada a partir da equação completa 7, variando a SNR de 0:2:20 dB.

3 Problema 3 - Canal RAGB: M -QAM

3.1 Modelo

Considerando que um sinal (s_m) de mensagem passa por um canal de Ruído Aditivo Gaussiano Branco (RAGB), o modelo da Equação 9, onde como uma variável aleatoria, $\mathcal{CN}(0, N_0)$, Gaussiana complexa com média zero e variância N_0 .

$$y_m = s_m + n_m \quad (9)$$

A variância é dada por $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$, representando a potência média do ruído que afeta cada dimensão do sinal em banda base. Consequentemente, o desvio padrão do ruído corresponde a $\sqrt{\frac{N_0}{2}}$, podendo parte real e imaginária. Portanto, tendo um valor de SNR (E_s/N_0) em dB, o termo N_0 pode ser calculado por $N_0 = E_s 10^{-\frac{E_s - N_0}{10}}$, tendo enfim o termo n_m é obtido na equação 10.

$$n_m = \sqrt{\frac{N_0}{2}} (\text{randn}(1) + 1j\text{randn}(1)) \quad (10)$$

Para ilustrar a implementação do modelo, as constelações M -QAM recebem uma sequência de símbolos com SNR de 25dB, como mostrado na figura 7,8 e 9.

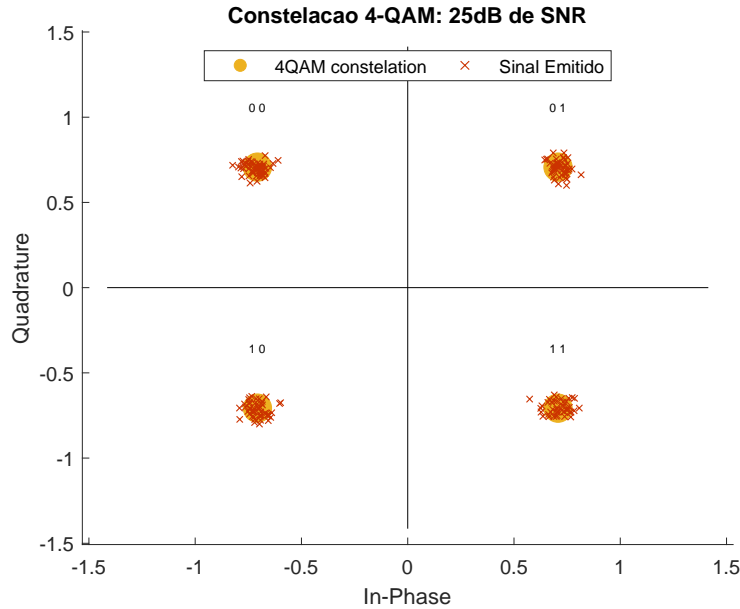


Figura 7: Simulação de transmissão 4-QAM, com SNR de 25dB.

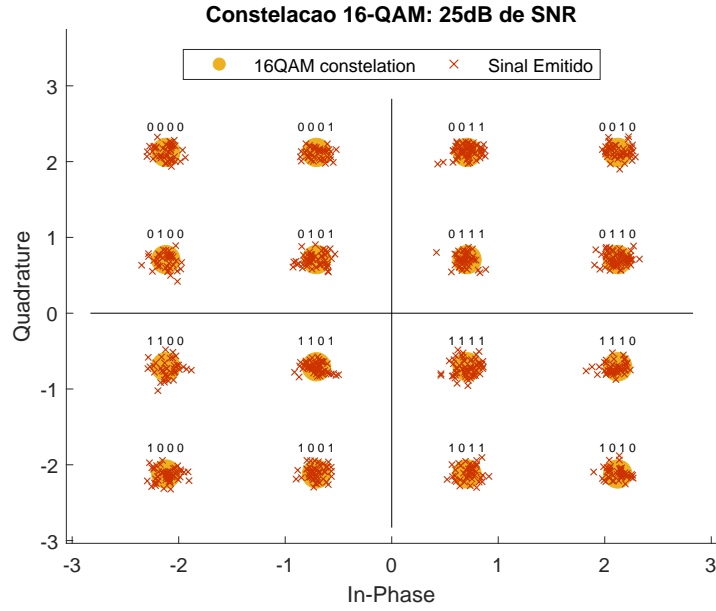


Figura 8: Simulação de transmissão 16-QAM, com SNR de 25dB.

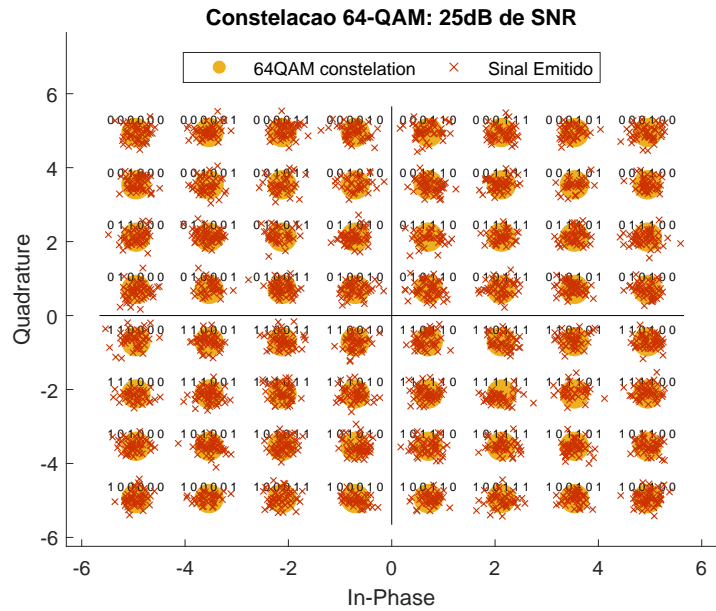


Figura 9: Simulação de transmissão 64-QAM, com SNR de 25dB.

3.2 Experimento de Transmissão

Realizando a transmissão de uma sequência de símbolos s_m de tamanho $L = 264000$ bits pelo modelo do canal RAGB com as constelações M -QAM, variando a SNR de 0 a 20 dB com passo 2.

Ao traçar as curvas de probabilidade de erro de símbolo teórica e a taxa de erro de símbolo SER é possível observar que os valores teóricos e simulados são idênticos. A figura 10

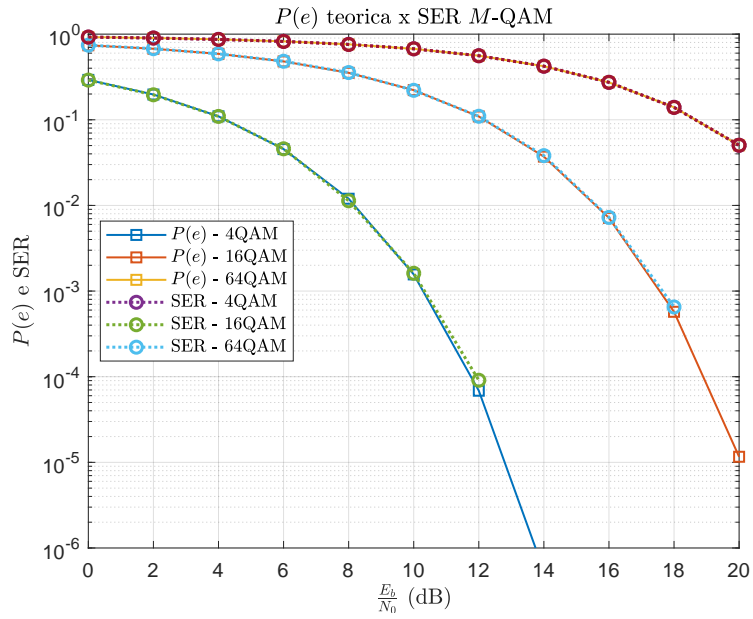


Figura 10: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M -QAM em canal RAGB.

4 Problema 4 - Modulação M -PSK

O conjunto de sinais *phase-shift keying* (PSK) têm a mesma amplitude e fases diferentes para cada mensagem, podendo ser escrito para $M > 2$ de acordo com a equação 11

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t + \frac{(2i-1)\pi}{M}), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (11)$$

Assumindo a energia do pulso de transmissão unitária, $g(t) = 1$, o sinal também pode ser expresso através de uma combinação linear [1], de modo que $s_i(t)$ é reescrito com na equação 12

$$s_i = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\frac{(2i-1)\pi}{M}) \\ \sqrt{\mathcal{E}_s} \sin(\frac{(2i-1)\pi}{M}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, M \quad (12)$$

A função const_MPSK.m.

4.1 Energia da Constelação

4.2 Distância Mínima entre Símbolos

M -PSK	\mathcal{E}_{media}	$\mathcal{E}_{media(bit)}$	d
M	$\frac{1}{2}\mathcal{E}_g$	$\frac{1}{2\log_2 M}\mathcal{E}_g$	$2\sqrt{\mathcal{E}_{media} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$
4	0.5	8.33×10^{-2}	1
8	0.5	5.56×10^{-2}	5.41×10^{-1}

Tabela 3: Informações gerais calculadas para a modulação M -QAM.

4.3 Modulador (Codificação de Gray)

4.4 Demodulador

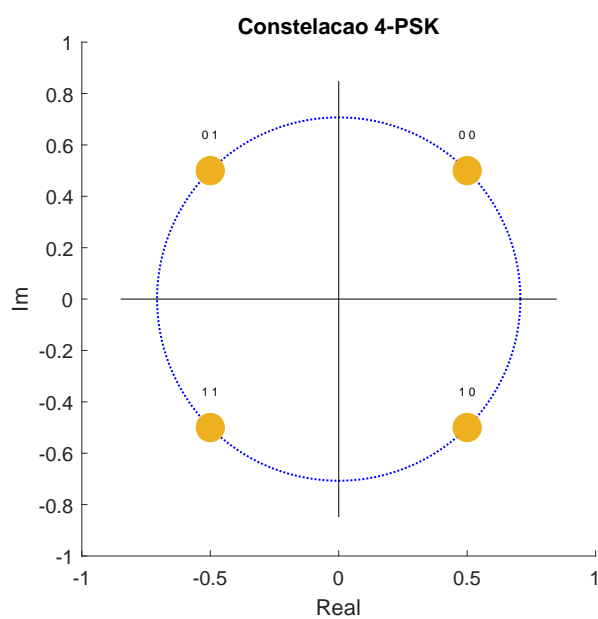


Figura 11: Constelação 4-PSK com codificação de Gray.

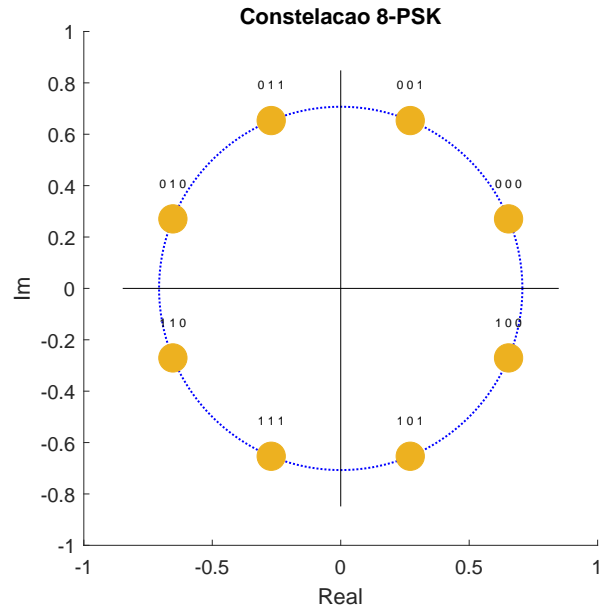


Figura 12: Constelação 8-PSK com codificação de Gray.

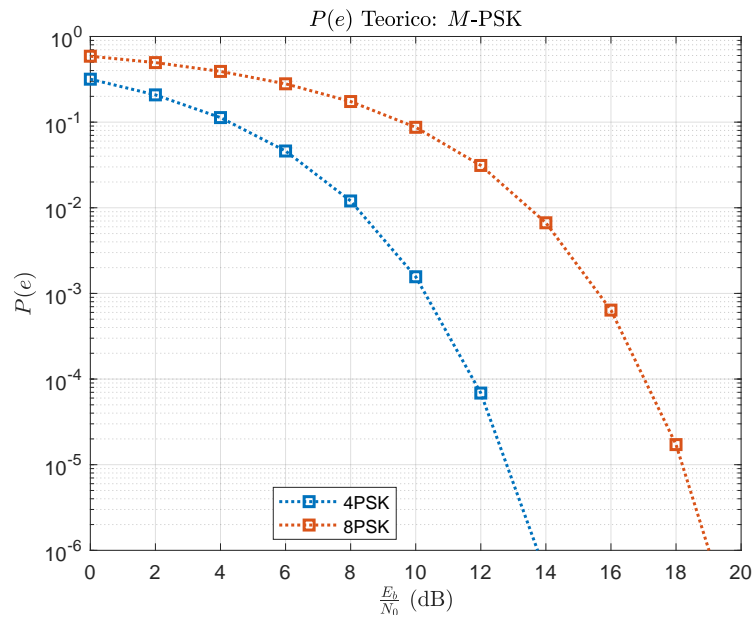


Figura 13: Probabilidade de erro ($P(e)$) teórico M -PSK.

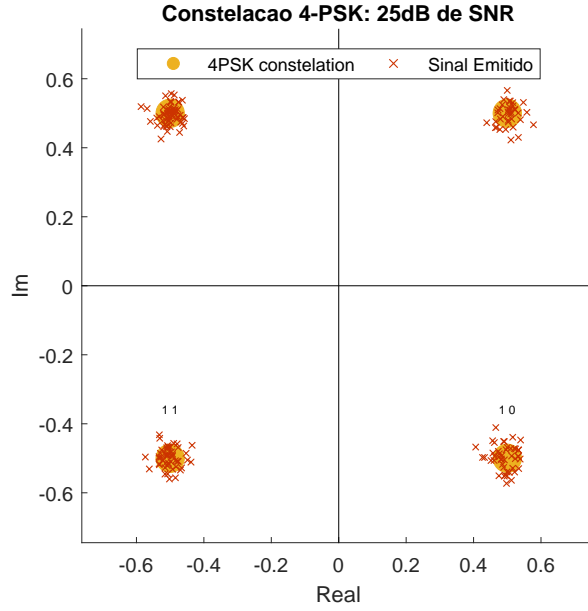


Figura 14: Probabilidade de erro ($P(e)$) teórico M -PSK.

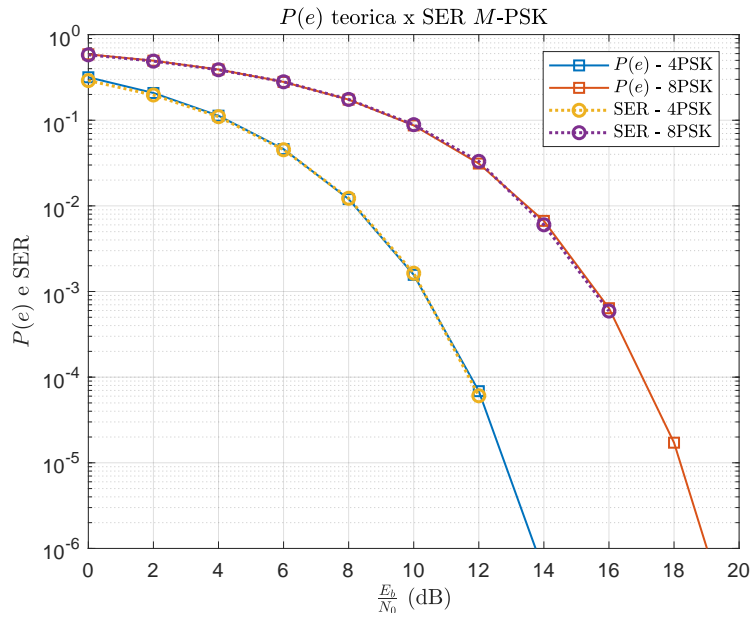


Figura 15: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M -PSK em canal RAGB.

5 Problema 5 - Comparativo M -QAM x M -PSK

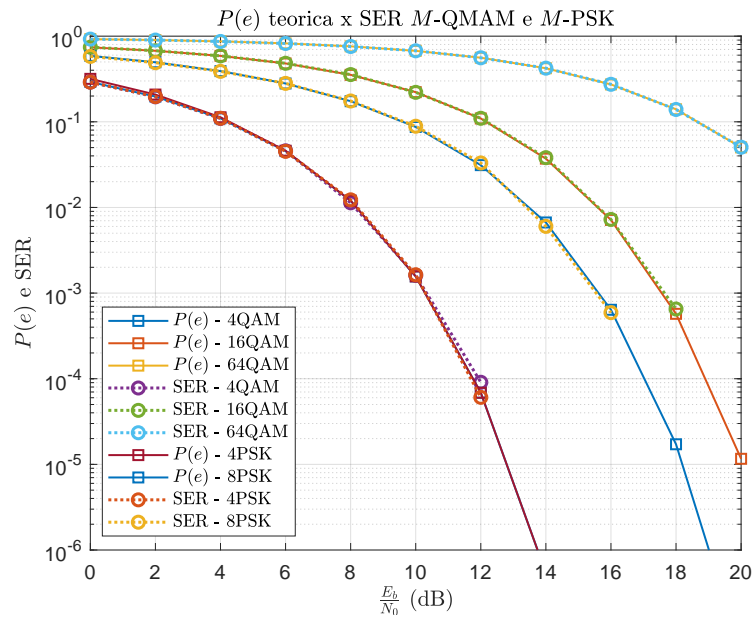


Figura 16: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M -PSK em canal RAGB.

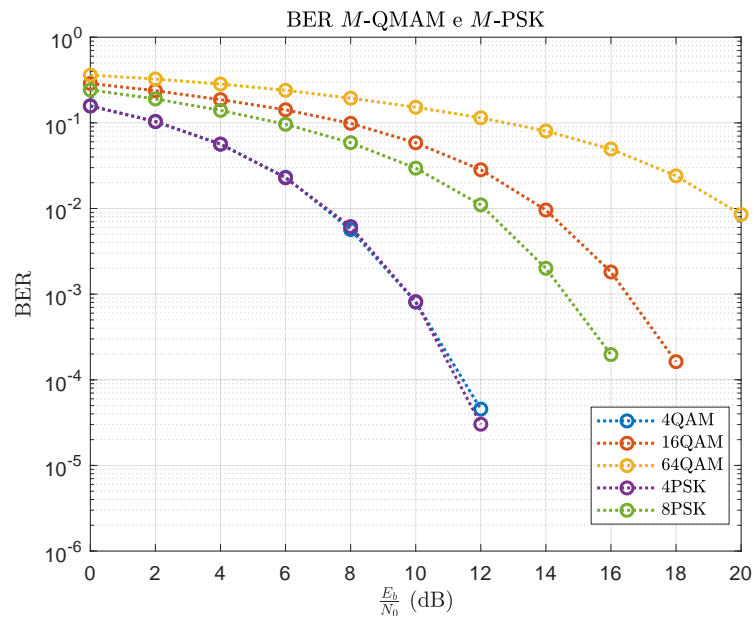


Figura 17: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M -PSK em canal RAGB.

6 Conclusão e Resultados

O para o caso do QAM é possível observar que aumentar o número de símbolos ganhamos em b transmitidos por símbolos, porém a energia média da constelação cresce proporcionalmente saindo de 1, no caso de $m = 4$ e chegando a 21 no caso de $m = 64$. Além disso a exigência de um sistema de transmissão com mais robustez a ruído, pois é aumentando a quantidade de símbolos a influência do ruído aumenta de forma a deteriorar totalmente a informação enviada

Podemos observar que ao aumentarmos a quantidade de símbolos na constelação, é necessário mais energia para tal constelação, em ambos os casos, QAM E PSK. Além disso, uma SNR baixa acarreta bastante perda de informação, chegando ao ponto de errar a taxa de 0.5 dos símbolos enviados no caso 64-QAM para 0dB. Esta taxa só é menor que 0.01 para $\frac{Eb}{N_o} \geq 20\text{dB}$.

Interessante notar também a diferença entre a taxa de erro de bit e a taxa de símbolo, pois a utilizar a codificação de Gray o símbolos decidido apresenta apenas um bit de diferença símbolos vizinhos, garantindo o que mesmo ao selecionar um símbolo equivocado a mensagem será afetada de apenas um bit.

Referências

- [1] C. Pimentel, *Comunicação Digital*, 1^a ed. 2007.
- [2] J. G. Proakis e M. Salehi, *Digital Communications*, 5^a ed. 1995.
- [3] A. Reddy, *Conversion of Binary to Gray Code*, <https://www.tutorialspoint.com/conversion-of-binary-to-gray-code>, Accessed: 2021-03-26.