Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Sistemas de Comunicações Digitais - TI0069

Trabalho 01: Modulação Digital

Aluno:
Lucas de Souza Abdalah 385472

Professor: André Almeida
Data de Entrega do Relatório: 28/03/2021

Fortaleza
2021

Sumário

1 Problema 1 - M-QAM

Na modulação ,*quadrature amplitude modulation* (QAM) os símbolos de informação são mapeados nas amplitudes das portadoras em fase e quadratura. Um modelo simplificado do sinal transmitido é visto como a equação 1.

$$s_m(t) = (A_m^{(\text{real})} + jA_m^{(\text{imag})})g(t) \tag{1}$$

No caso especial em que amplitudes $A_m^{(\text{real})}$ e $A_m^{(\text{imag})}$ assumem valores discretos no conjunto da equação 2, a constelação é chamada QAM retangular. O QAM retangular se aplica ao caso estudado a seguir, pois a quantidade de símbolos utilizados ($M = \{4, 16, 64\}$) se encaixam na condição e é utilizado para construção do alfabeto da modulação [1]. A função const_MQAM.m foi desenvolvida de modo a construir o alfabeto como uma matriz para ordenar os símbolos da esquerda para direita em linhas de símbolos ímpares e, da direita para esquerda em linhas pares.

$$A_m = \{(2m - \sqrt{M} - 1)d\}_{m=1}^{\sqrt{M}} \tag{2}$$

1.1 Energia da Constelação

Para calcular a energia média, é suficiente de calcular a equação 3, desenvolvida em [1], [2].

$$\mathcal{E}_{media} = \frac{M-1}{3}\mathcal{E}_g \tag{3}$$

Sendo $g(t)$ o pulso de energia unitária, $\mathcal{E}_g = 1$. O resultado é computado pela função função energia_MQAM.m para cada constelação QAM e é registrado na Tabela 1.

A relação entre $\mathcal{E}_{media} = \mathcal{E}_b \log_2 M$ permite calcular diretamente a energia média de bit ($\mathcal{E}_b$), resultando na equação 4

$$\mathcal{E}_b = \frac{M-1}{3\log_2 M}\mathcal{E}_{media} \tag{4}$$

1.2 Distância Mínima entre Símbolos

O parâmetro d é a distância entre os símbolos adjacentes, e pode ser obtido com o cálculo da distância euclidiana entre estes, como na equação 5.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}[(A_{mi} - A_{ni})^2 + (A_{mq} - A_{nq})^2]} \\ &= \sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{media}}{2(M-1)}} \end{aligned} \tag{5}$$

Essa distância é computada pela função d_MQAM.m e registrada na Tabela 1.

M-QAM	$\mathcal{E}_{media}$	$\mathcal{E}_b$	d
M	$\frac{M-1}{3}\mathcal{E}_g$	$\frac{M-1}{3\log_2 M}\mathcal{E}_g$	$\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{media}}{2(M-1)}}$
4	1	1.67×10^{-1}	$\sqrt{2}/2$
16	5	4.67×10^{-1}	$\sqrt{2}/2$
64	21	1.17×10^{0}	$\sqrt{2}/2$

Tabela 1: Informações gerais calculadas para a modulação M-QAM.

1.3 Modulador (Codificação de Gray)

O mapeador da constelação M-QAM consiste em uma função que recebe uma sequência de bits e retorna o símbolo equivalente: mapping_MQAM.m. Dentro desta função, é criado um alfabeto de código binário e na convertido em Gray. gray_const.m

Esta codificação é baseada em um algoritmo recursivo 1, cujo recebe uma sequência de bits orientadas pelo bit mais importante (MSB) [3]. A recursão está na operação "ou exlusivo" (xor), denotada pelo símbolo ($\otimes$). Este cálculo é executado na função mybin2gray.m.

Algorithm 1: Codificação de Gray

Entrada: Sequência de Bits (b) - MSB
Saída: Sequencia em Código Gray (g) - LSB
$n = 0$;
$K = \text{length}(b)$;
while $K > n$ **do**
  if $K == n$ **then**
    $g_{(K-n)} = b_{(K-n)}$;
  else
    $g_{(K-n)} = b_{(K-n+1)} \otimes b_{(K-n)}$;
  end
  $n = n + 1$;;
end
$g = flip(g)$;

A 2 mostra um exemplo de conversão para código Gray de uma sequência de 2 bits. Seguindo o mesmo procedimento um alfabeto de qualquer tamanho pode ser criado.

Decimal	Binário	Gray	Decimal
0	00	00	0
1	01	01	1
2	10	11	3
3	11	10	2

Tabela 2: Tabela de tradução de binário para Gray com 2 bits.

As constalações M-QAM para $M = \{4, 16, 64\}$ são apresentadas nas figuras 1, 2 e 3, respectivamente. É possível observar os valores dos símbolos em fase e quadratura, além do equivalente em binário.

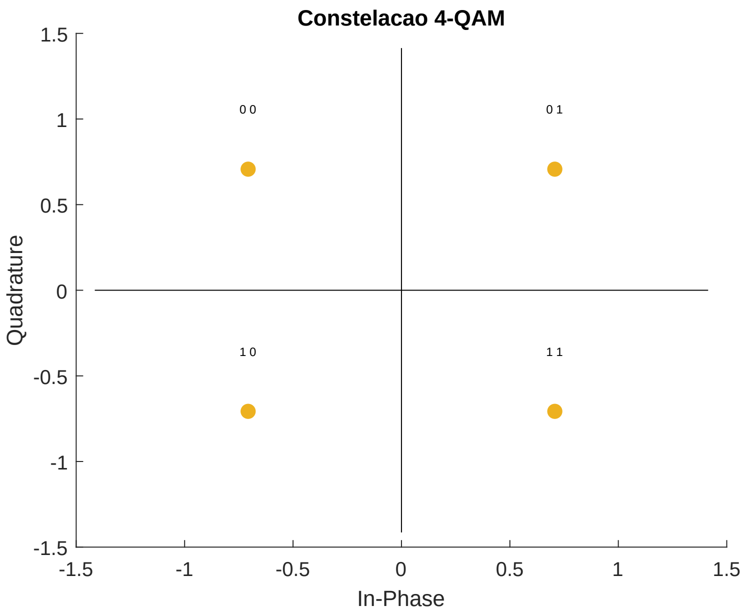

Figura 1: Constelação 4-QAM plot.

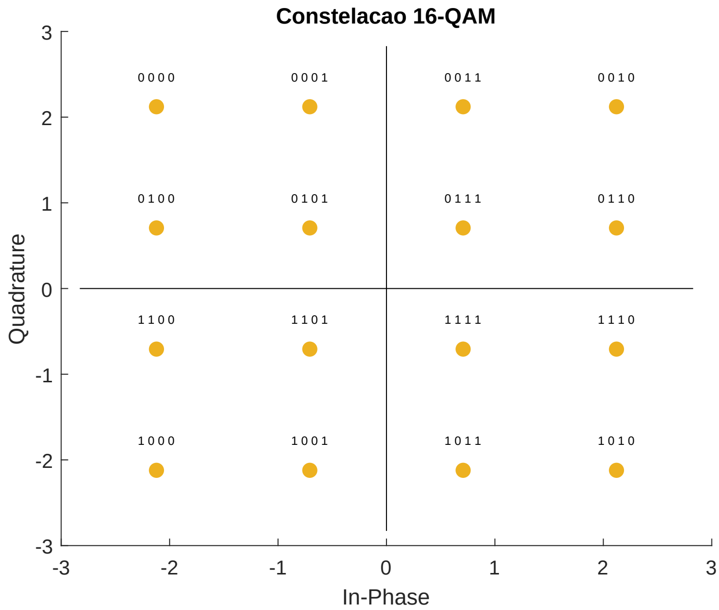

Figura 2: Constelação 16-QAM plot.

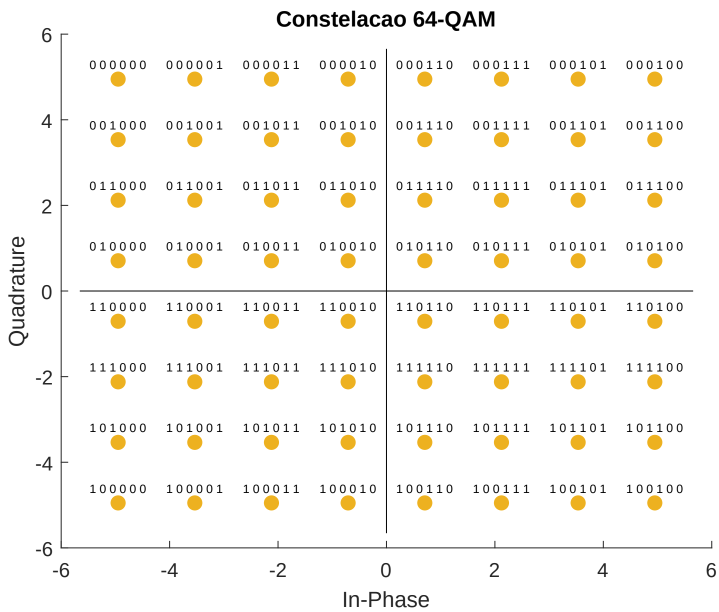

Figura 3: Constelação 64-QAM plot.

1.4 Demodulador

A função que decodifica um símbolo tem como entrada o próprio símbolo: $A_n^{(\text{real})}$ e $A_n^{(\text{imag})}$, M e d.

O alfabeto da constelação M-QAM é gerada e uma vez estes definidos, a área de decisão é desenhada a partir em função de M e d. Basicamente, o símbolo selecionado é aquele que minimiza a distância euclidiana entre o símbolo recebido e o do alfabeto, como mostra a equação 6.

$$d_{mn} = \sqrt{||s_m - s_n||^2} \tag{6}$$

A função que executa estes comando é a demapping_MQAM.m e ela retorna o símbolo decodificado e os bits equivalente do alfabeto de Gray.

As figuras 4 e 5 mostram uma geração de sequência de 50 símbolos aleatórios $(i.i.d)$ passando pelo demodulador com o traçado da distância euclidiana entre o símbolo recebido e o equivalente escolhido na constelação.

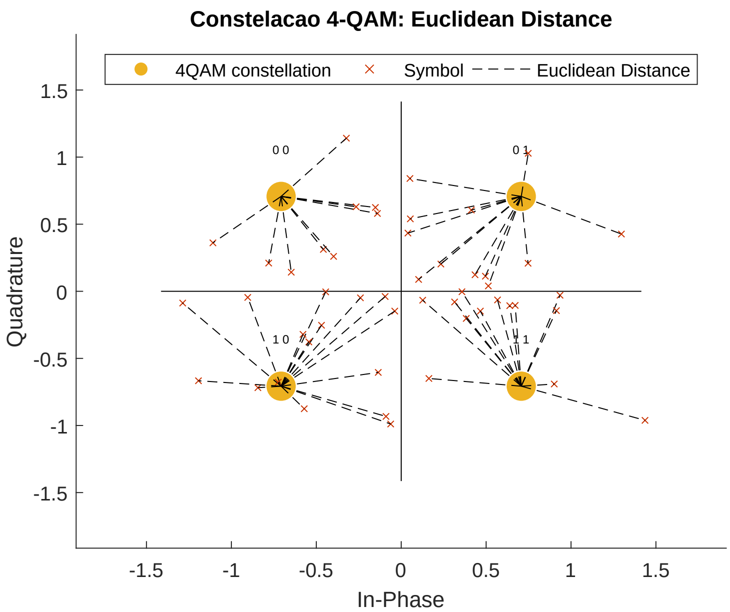

Figura 4: Exemplo de 4-QAM plot.

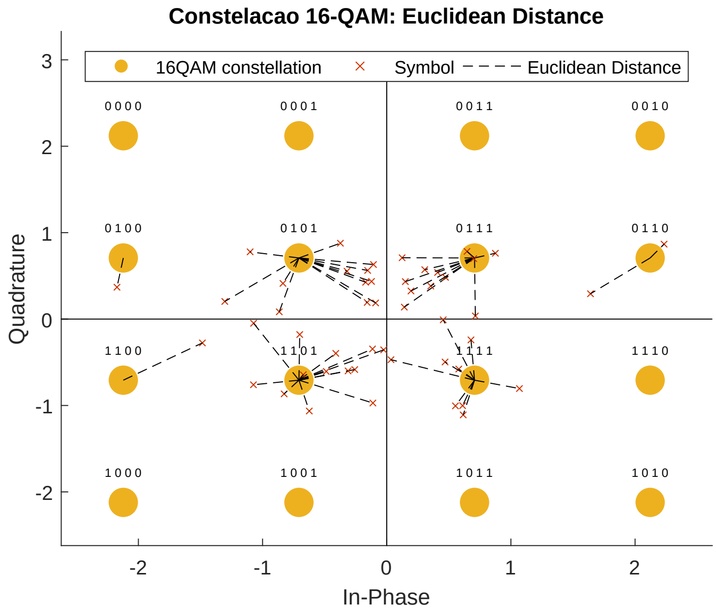

Figura 5: Exemplo de 16-QAM plot.

2 Problema 2 - Probabilidade de Erro: M-QAM

Para calcular a probabilidade de erro $P(e)$ de cada constelação 7 desenvolvida em [1].

$$P(e) = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{E_s}{N_0}}\right)-4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2Q^2\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{E_s}{N_0}}\right) \tag{7}$$

Para valores mais elevados de SNR, a equação da probabilidade do M-QAM pode ser reduzida para 8, pois o segundo termo ao quadrado passa a ser irrelevante.

$$P(e) = 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{E_s}{N_0}}\right) \tag{8}$$

Nas simulações realizadas, as curvas utilizando ambas as equações são bem semelhantes, principalmente para constelação 4-QAM, além de reduzir o custo computacional. Entretanto, para manter a fidedignidade do gráfico mostrado na 6, a probabilidade $P(e)$ é caculada a partir da equação completa 7.

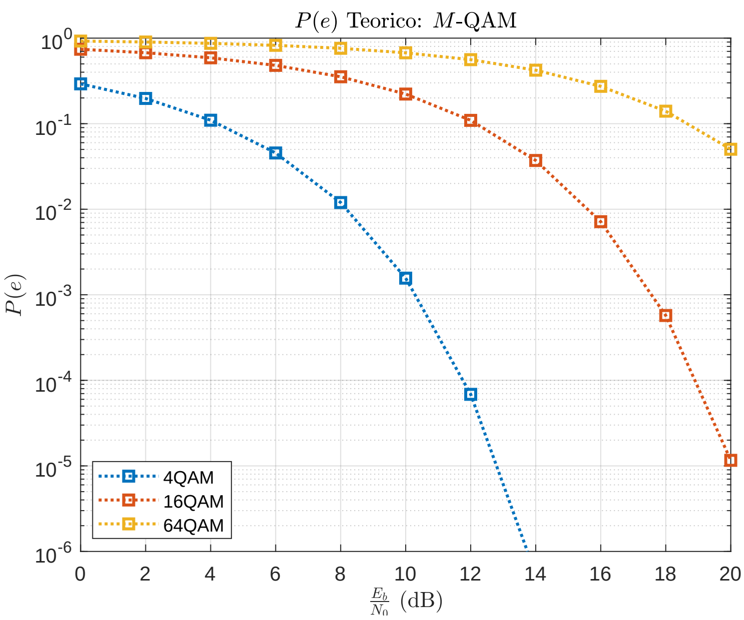

Figura 6: Probabilidade de erro ($P(e)$) teórico M-QAM.

3 Problema 3 - Canal RAGB: M-QAM

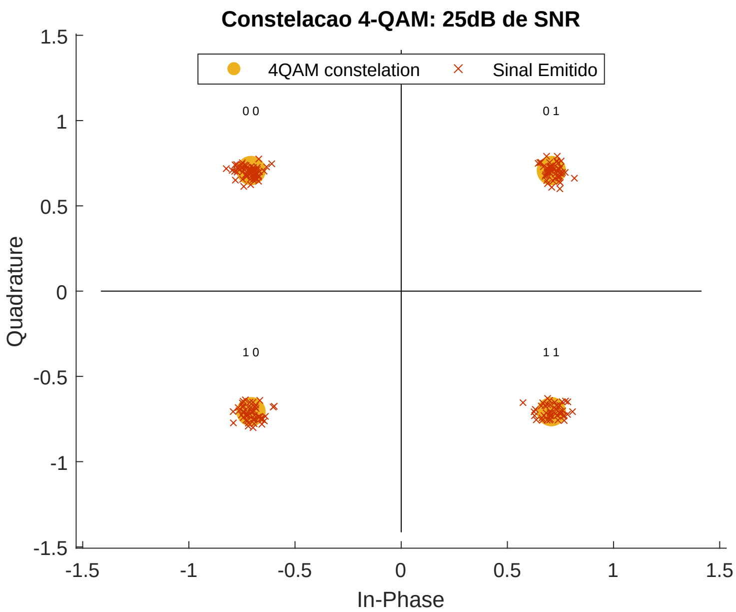

Figura 7: Simulação de transmissão 4-QAM, com SNR de 25dB.

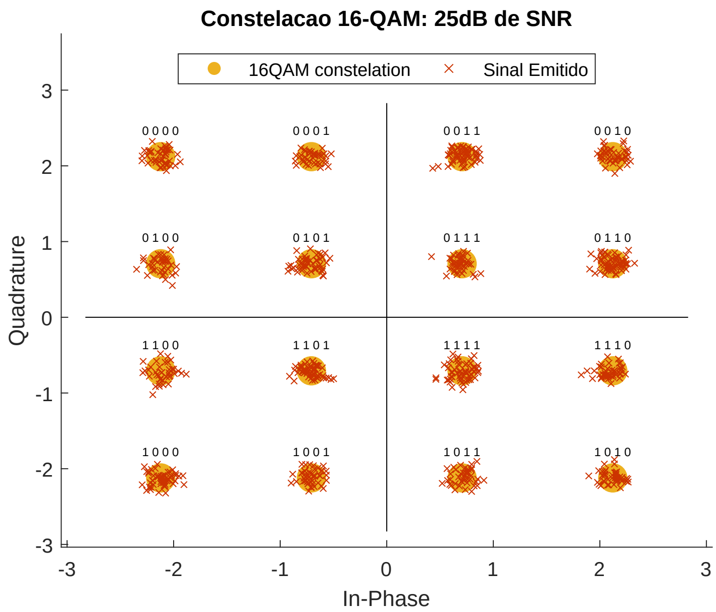

Figura 8: Simulação de transmissão 16-QAM, com *SNR* de 25dB.

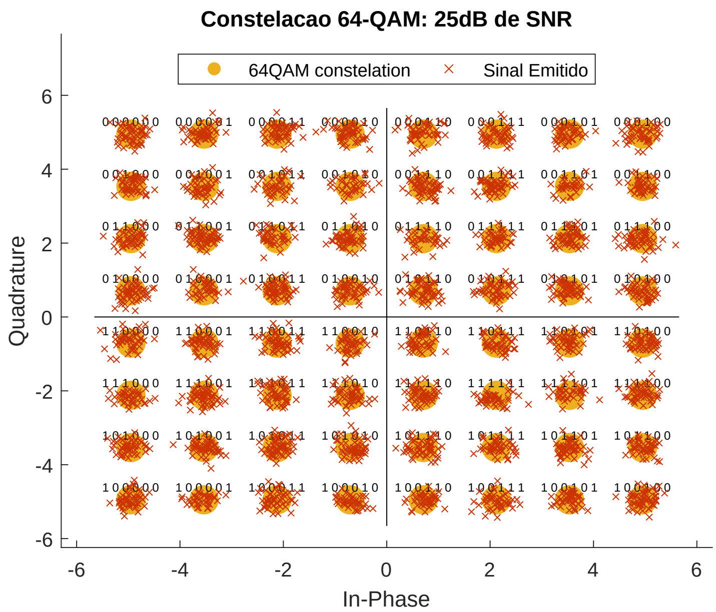

Figura 9: Simulação de transmissão 64-QAM, com *SNR* de 25dB.

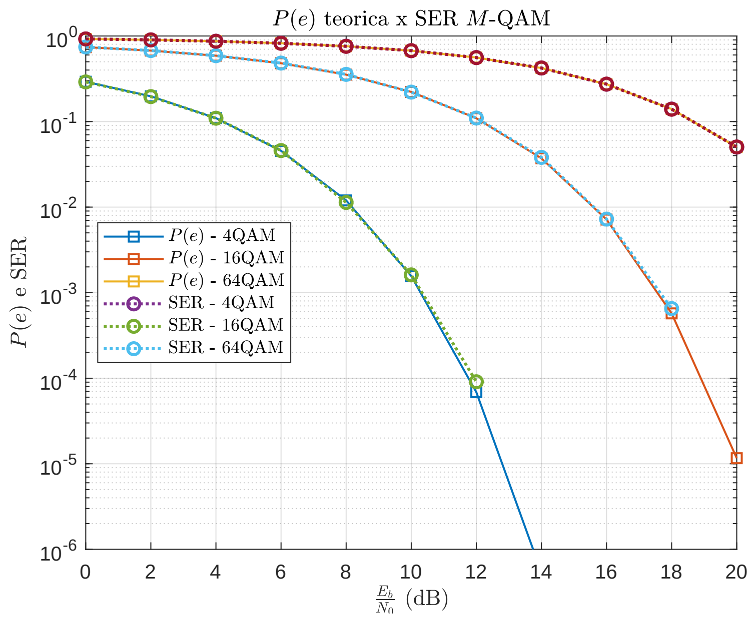

Figura 10: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M-QAM em canal RAGB.

4 Problema 4 - Modulação M-PSK

O conjunto de sinais *phase-shift keying* (PSK) têm a mesma amplitude e fases diferentes para cada mensagem, podendo ser escrito para $M > 2$ de acordo com a equação 9

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_g}} g(t) cos(2\pi f_c t + \frac{(2i-1)\pi}{M}),\ 0 \leq t \leq T,\ i = 1, 2, \ldots, M, \quad (9)$$

Assumindo a energia do pulso de transmissão unitária, $g(t) = 1$, o sinal também pode ser expresso através de uma combinação linear [1], de modo que $s_i(t)$ é reescrito coom na equação 10

$$s_i = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathcal{E}_s} cos(\frac{(2i-1)\pi}{M}) \\ \\ \sqrt{\mathcal{E}_s} sin(\frac{(2i-1)\pi}{M}) \end{bmatrix},\ i = 1, \ldots, M \quad (10)$$

A função const_MPSK.m.

4.1 Energia da Constelação

4.2 Distância Mínima entre Símbolos

M-PSK	$\mathcal{E}_{media}$	$\mathcal{E}_{media(bit)}$	d
M	$\frac{1}{2}\mathcal{E}_g$	$\frac{1}{2\log_2 M}\mathcal{E}_g$	$2\sqrt{\mathcal{E}_{media} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$
4	0.5	8.33×10^{-2}	1
8	0.5	5.56×10^{-2}	5.41×10^{-1}

Tabela 3: Informações gerais calculadas para a modulação M-QAM.

4.3 Modulador (Codificação de Gray)

4.4 Demodulador

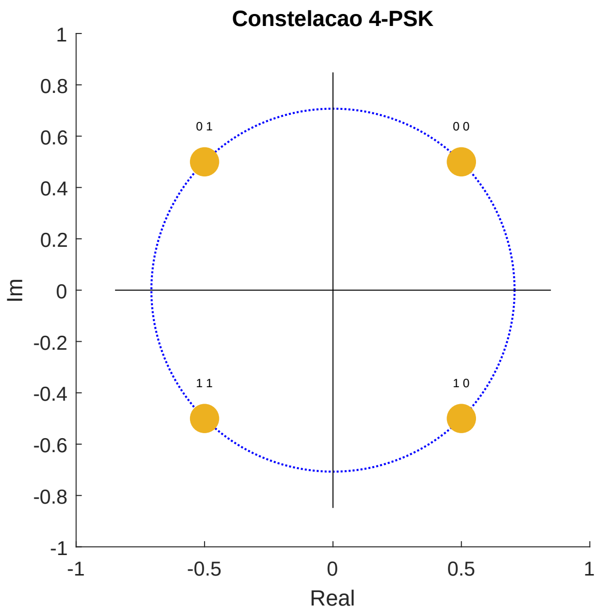

Figura 11: Constelação 4-PSK com codificação de Gray.

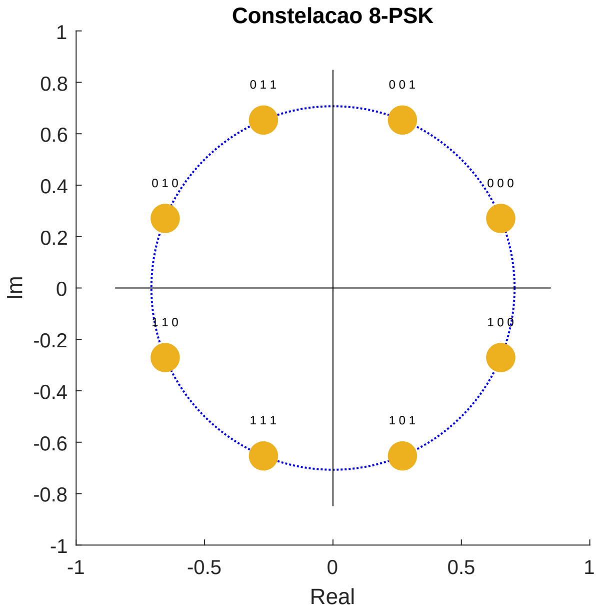

Figura 12: Constelação 8-PSK com codificação de Gray.

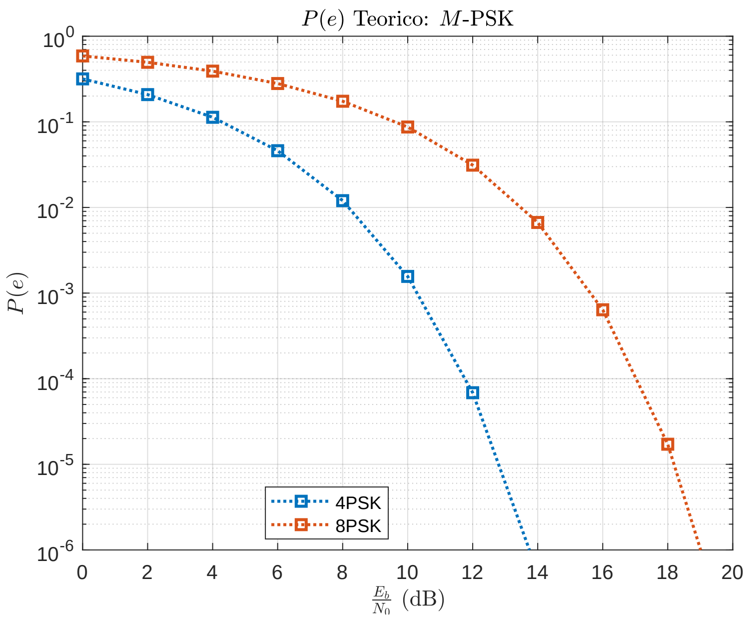

Figura 13: Probabilidade de erro ($P(e)$) teórico M-PSK.

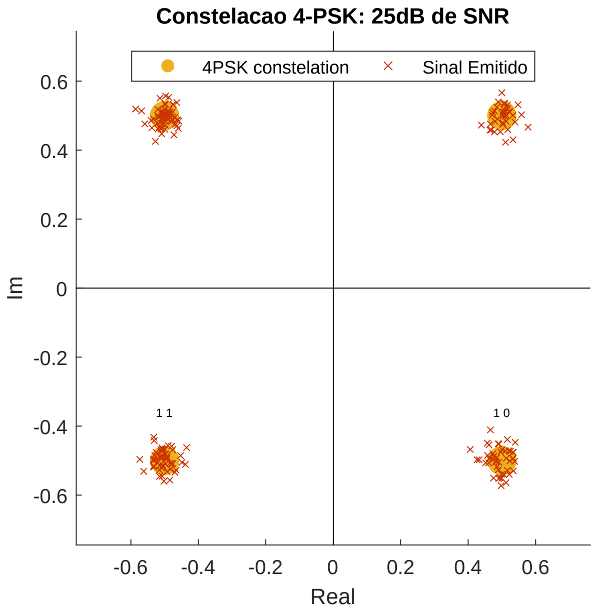

Figura 14: Probabilidade de erro ($P(e)$) teórico M-PSK.

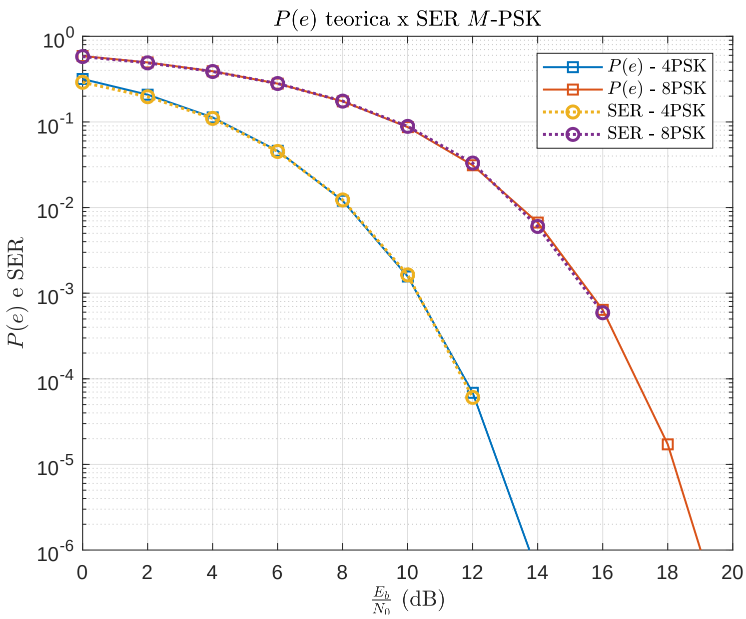

Figura 15: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M-PSK em canal RAGB.

5 Problema 5 - Comparativo M-QAM x M-PSK

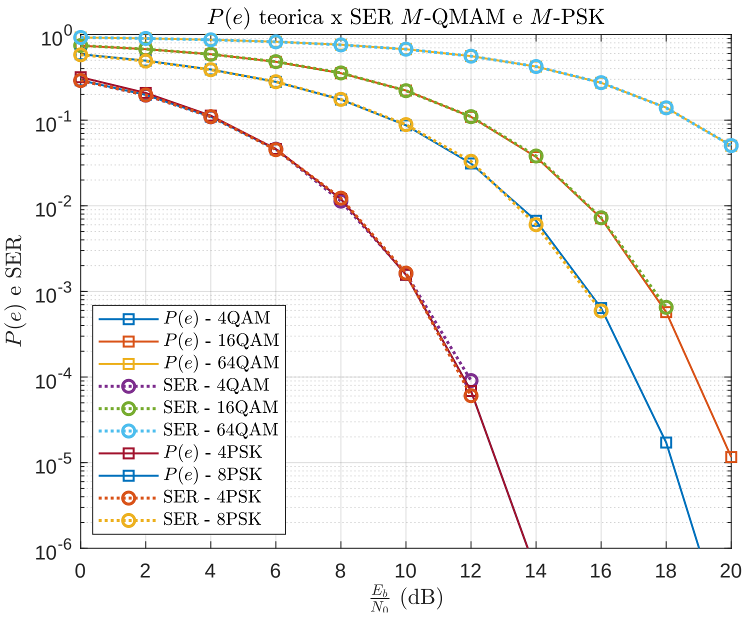

Figura 16: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M-PSK em canal RAGB.

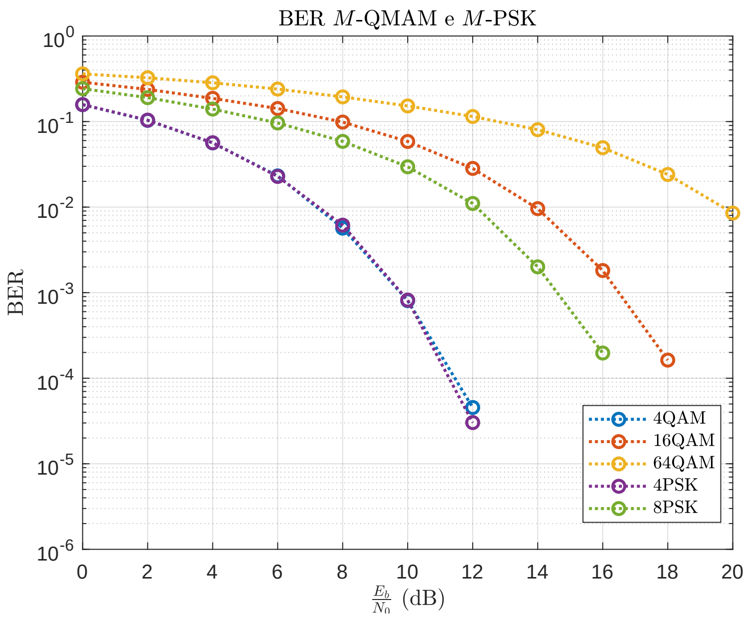

Figura 17: Probabilidade teórica de erro vs. simulação de transmissão M-PSK em canal RAGB.

6 Conclusão e Resultados

O para o caso do QAM é possível observar que aumentar o número de símbolos ganhamos em b transmitidos por símbolos, porém a energia média da constelação cresce porporcional mente saindo de 1, no caso de m = 4 e chegando a 21 no caso de m = 64. Além disso a exigência de um sistema de transmissão com mais robustez a ruído, pois é aumentando a quantidade de símbolos a influência do ruído aumenta de forma a a deteriorar totalmente a informação enviada

Podemos observar que ao aumentarmos a quantidade de símbolos na constelação, é necessário mais energia para tal constelação, em ambos os casos, QAM E PSK. Além disso, uma SNR baixa acarreta bastante perda de informação, chegando ao ponto de errar a taxa de 0.5 dos símbolos enviados no caso 64-QAM para 0dB. Esta taxa só é menor que 0.01 para $\frac{Eb}{N_o} \geq 20\text{dB}$.

Interessante notar também a diferença entre a taxa de erro de bit e a taxa de símbolo, pois a utilizar a codificação de Gray o símbolos decidido apresenta apenas um bit de diferença símbolos vizinhos, garantindo o quê mesmo ao selecionar um símbolo equivocado a mensagem será afetada de apenas um bit.

Referências

[1] C. Pimentel, *Comunicação Digital*, 1ª ed. 2007.

[2] J. G. Proakis e M. Salehi, *Digital Communications*, 5ª ed. 1995.

[3] A. Reddy, *Conversion of Binary to Gray Code*, https://www.tutorialspoint.com/conversion-of-binary-to-gray-code, Accessed: 2021-03-26.