UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

Engenharia de Telecomunicações

Professor: Charles Casimiro Cavalcante
Disciplina: Processos Estocásticos – TI0112

Separação Supervisionada de Fontes Independentes

JÚLIO CÉSAR GAMA FEITOSA FREITAS- 385467
KENNETH BRENNER DOS ANJOS BENÍCIO – 385468
LUCAS DE FREITAS SOUZA – 385471
LUCAS DE SOUZA ABDALAH – 385472

Fortaleza, 7 de julho de 2017

Sumário

Introdução ao Problema

Somos apresentados a um problema, encontrado por uma perícia forense. Nesse problema, dois microfones distintos, utilizados pela perícia, realizam gravações de áudio de participantes de uma reunião, em uma mesma sala. Cada microfone capta a mesma informação, porém com diferentes intensidades de cada sinal de voz, assumindo então que estão distribuídos de forma diferente dentro da sala. Em meio a este cenário caótico, temos a informação da presença de um locutor específico, do qual temos conhecimento de sua contribuição final por um terceiro áudio. Sabendo disso, temos a separação das vozes contidas no áudio como objetivo principal. Consequentemente, devemos estimar o número de locutores, presentes em ambos os microfones, e fazer uma estimação, de forma que cada voz seja inteligível para o usuário. Podemos perceber, de antemão, que se trata de um caso parecido com o "*Cocktail Party Problem*", onde temos vários convidados em uma mesma sala.

Antes de tudo, devemos identificar as fontes fornecidas pela perícia. Pelo problema apresentado, temos a informação da existência de dois microfones (*Mic1* e *Mic2*) e de um áudio final (*Y*) de uma das vozes separadas e sem ruído (limpa). Como temos o conhecimento da existência de um dos sinais de voz isolados, sabe-se que se trata de um problema de separação de áudio assistida, onde nos é fornecida a informação de, pelo menos, uma das componentes da mistura. Durante este processo, definimos dois passos importantes para a separação de vozes dos áudios, a fim de solucionar o problema. Primeiramente, com a informação do áudio *Y*, devemos retirar o sinal de voz do locutor específico do *Mic1* e do *Mic2*. Com isso, podemos seguir para o segundo passo, onde separamos os sinais de vozes restantes e analisamos suas relações estatísticas.

Visto isso, devemos adotar uma abordagem de solução para cada problema. Na primeira parte, resolvemos o empecilho observando a média do áudio *Y* e por meio de manipulações estatísticas (descritas posteriormente) que reduzem o problema de um sistema de 2 equações (número de misturas) com 3 incógnitas (número de fontes) para um de apenas 2 incógnitas. Já na segunda parte, adotamos um método de solução de separação supervisionada aplicando conhecimentos adquiridos de Álgebra Aplicada e utilizando conceitos de separação a cegas para obter os áudios originais.

Após encontrar as contribuições originais para a mistura, nossa missão se reduz a analisar os resultados obtidos. Devemos calcular e plotar o gráfico de autocorrelação e a densidade espectral de potência (DEP) dos sinais de áudio, verificar se é possível e, se sim, o que se pode inferir dos sinais do *Mic1* a partir de sua Função de Autocorrelação.

Não somente isso, desejamos, também, identificar as principais características dos sinais das Fontes e gerar variáveis aleatórias que emulam o comportamento estatístico dos sinais. Por fim, chegamos a uma conclusão em relação a "inteligibilidade sonora" dos áudios.

Todos os pontos abordados acima serão expostos ao longo do trabalho.

Metodologia Empregada (Procedimento)

No seguinte projeto, foram utilizadas implementações do Octave , análises algébricas, por meio de matrizes, e noções probabilísticas conhecidos de longa data (Média, variância, Autocorrelação, Funções de distribuição etc) e referenciados ao longo do mesmo. Por fim, nota-se como principal fundamento, motivação e desenvolvimento do trabalho o uso de conhecimentos a cerca de Processos Estocásticos, adquiridos na disciplina.

Fundamentos da Solução Proposta

Parte 1 - Removendo o *y* de Cada Microfone

I) O ponto inicial é a modelagem do problema. Como sabemos exatamente o sinal y, podemos modelar os vetores *Mic1* e *Mic2* como valores aleatórios P_1 e P_2 quaisquer somados a *y* multiplicado por constantes k_1 e k_2.

$$Mic1 = P_1 + k_1 * y$$
$$Mic2 = P_2 + k_2 * y$$

II) Desenvolvendo os cálculos de algumas propriedades estatísticas pros sinais podemos observar as constantes k_1 *e* k_2. Temos que observar também que P_1 e *y* são eventos independentes. Sabemos que média μ_y e variância θ_y^2 são definidas como: $\mu_y = \mathbb{E}\{y\}$; $\theta_y^2 = \mathbb{E}\{y^2\} - \mu_y^2$Sabemos que a média μ_y é bem próxima de zero, então podemos fazer as seguintes afirmações:

i) $\mu_y \rightarrow 0$ ii) $\theta_y^2 \rightarrow \mathbb{E}\{y^2\}$

Fazendo a correlação entre os vetores de áudios:

Mic1 e y:
$R_y(Mic1,y) = \mathbb{E}\{Mic1*y\}$
$\ldots = \mathbb{E}\{(P_1 + k_1*y)*y\}$
$\ldots = \mathbb{E}\{y*P_1\} + k_1\mathbb{E}*\{y^2\}$
$\ldots = \mathbb{E}\{y\}*\mathbb{E}\{P_1\} + k_1*\mathbb{E}\{y^2\}$
$\ldots = k_1*\mathbb{E}\{y^2\}$
$k_1 = R_y(Mic1,y)/\theta_y^2$

Mic2 e y:
$R_y(Mic2,y) = \mathbb{E}\{Mic2*y\}$
$\ldots = \mathbb{E}\{(P_2 + k_2*y)*y\}$
$\ldots = \mathbb{E}\{y*P_2\} + k_2\mathbb{E}*\{y^2\}$
$\ldots = \mathbb{E}\{y\}*\mathbb{E}\{P_2\} + k_2*\mathbb{E}\{y^2\}$
$\ldots = k_2*\mathbb{E}\{y^2\}$
$k_2 = R_y(Mic2,y)/\theta_y^2$

III) Sabendo as constantes k_1 e k_2 podemos multiplicar pelo vetor de variáveis *y* e obter aproximadamente os valores de *y* contido nos vetores Mic1 e Mic2.

$$y_1 = k_1 * y$$
$$y_2 = k_2 * y$$

Restando apenas subtrair y_1 e y_2 de Mic1 e Mic2, respectivamente:

$$M_1 = Mic1 - y_1$$
$$M_2 = Mic2 - y_2$$

Assim finaliza a primeira parte e é visível que ao soar os vetores M_1 e M_2, o locutor *y* não será mais notado.

Parte 2 - Estimando as Vozes Restantes

I) Inicialmente uma análise sobre as componentes restantes do microfones é feita e o seguinte modelo é proposto:

$$S_1 = aP_1 + bP_2$$
$$S_2 = cP_1 + dP_2$$

Sendo S_1 e S_2 são os sinais de áudio após a retirada do locutor *y.* Já P_1 e P_2 são as diferentes vozes identificadas na modelagem do problema. Por últimos teremos os coeficientes do sistema linear: *a, b, c* e *d*.

II) Representando matricialmente o sistema:

$$S = AP$$

A é definida como a matriz de mistura do sistema e assim como o nome indica, a responsável por concatenar os vetores das vozes em uma mistura linear dos microfones. Assim, podemos afirmar que umas das formas de estimar as vozes da modelagem é calculando a matriz de "desmistura" do sistema, que seria o inverso da matriz de mistura:

$$P = A^{-}S$$

Sendo S a Matriz dos microfones, P a Matriz das vozes propostas na modelagem, A é Matriz dos coeficientes, finalmente A^{-1} que é a Matriz inversa de A.

III) Interpretando estatisticamente a matriz A:

Os coeficientes do sistema inicial fornecem uma pista do que essa matriz pode significar. Cada microfone contém "pedaços" de informações das vozes P_1 e P_2. Sendo assim, uma forma de se obter a representação mais verossímil possível da reconstrução dessas vozes acontece quando juntamos as informações dessas em cada microfone. Uma forma de quantificar isso é através de uma matriz de correlação. Logo, uma boa alternativa para resolver o problema é interpretar essa matriz A como uma matriz de correlação dos microfones com as vozes.

IV) Analisando mais a fundo como as características dos sinais moldarão a matriz de correlação:

Sabe-se que uma matriz de correlação tem relação com uma matriz de covariância pela seguinte associação. (No caso a matriz qualquer M_{2x2}):

$$C_x = R_x - \mu_1 * \mu_2$$

Sabendo que μ_1 e μ_2 representam os valores médios dos vetores aleatórios que compõem M1 e M2 (que são os microfones 1 e 2 com o locutor *y* já removido). Como é possível ver na imagem abaixo, são praticamente nulos. Concluindo assim que a correlação tende à covariância:

$$C_x \rightarrow R_x$$

Fazendo com que a matriz de correlação possua as mesmas propriedades da matriz de covariância, o problema reduz-se a calcular a matriz de covariância dos microfones.

V) Calculando a matriz de Covariância (Correlação) por meio do operador esperança $\mathbb{E}\{\ \}$:
As operações são realizadas sabendo médias são nulas e que $S = AP$.

$$C_x = \mathbb{E}\{(S-\mu)(S-\mu)^T\}$$
$$C_x = \mathbb{E}\{SS^T\} - \mu\mu^T$$
$$C_x \rightarrow R_x = \mathbb{E}\{SS^T\}$$
$$R_x = \mathbb{E}\{(AP)(AP)^T\}$$
$$R_x = \mathbb{E}\{APA^TP^T\}$$

Além de que as matrizes A e A^T são constantes, já que podem ser interpretadas como a forma que o operador do sistema embaralha as fontes sonoras.

$$Rx = A\,\mathbb{E}\{PP^T\}\,A^T$$

Onde $\mathbb{E}\{PP^T\} = \mathbb{E}\{I\} = I$. Isso ocorre porque a matriz das vozes possui duas fontes que são estatisticamente descorrelacionadas, algebricamente isso se reflete na ortogonalidade dos vetores das vozes. Sendo assim, sabe-se que caso os dois vetores sejam ortogonais vale o resultado

$$PP^T = \text{Matriz Identidade.}$$

Por consequência:

$$R_x = A\,I\,A^T$$

É fácil visualizar que a matriz identidade é o elemento de multiplicação neutro em espaços matriciais, logo teremos as seguintes consequências.

$$AI = A$$
$$R_x = AA^T$$

Lembrando que a matriz A é, por propriedade da matriz de correlação simétrica, então $A=A^T$

$$R_x = A^2$$

Por fim, teremos a seguinte relação, onde A é a matriz de mistura e A^- é a matriz de separação.

$$A = R_x^{1/2}$$
$$A^- = R_x^{-1/2}$$

VI) Reescrevendo a matriz $\mathbf{A}^-$ elemento a elemento:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}\{S1\text{^}2\} & \mathbb{E}\{S1*S2\} \\ \mathbb{E}\{S1*S2\} & \mathbb{E}\{S2\text{^}2\} \end{pmatrix}^{-1/2}$$

Implementação usando OCTAVE

Inicialmente, é necessário carregar as variáveis fornecidas no manual do trabalho. Habilitando o diretório desejado no Gerenciador de Arquivos do Octave e dando duplo clique nos arquivos de extensão ".mat" os mesmos são carregados no *Ambiente de Trabalho.*

Assim sucessivamente, até carregar todos os arquivos.

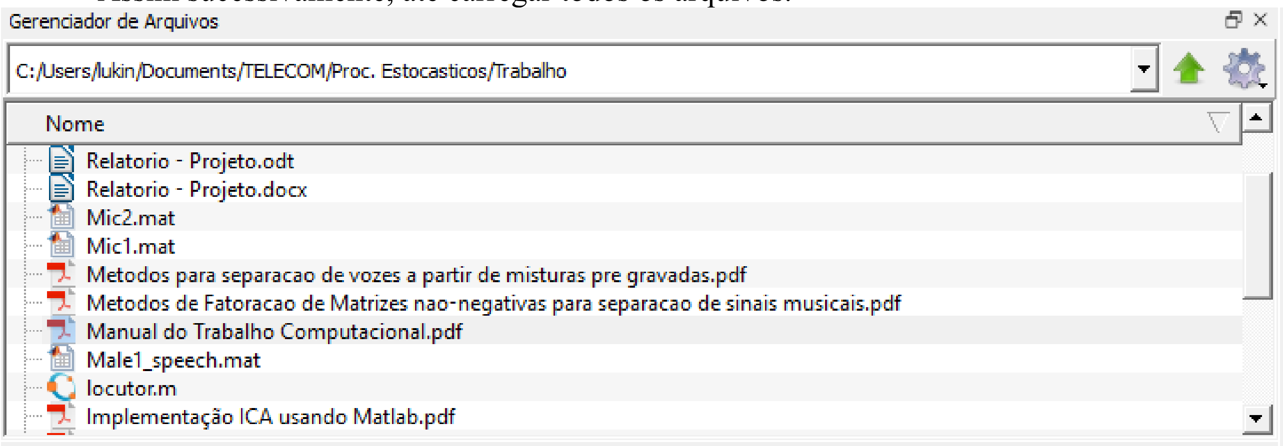

Figura 1: Área de Trabalho do Octave

Nome	Classe	Dimensão	Valor	Atributo
y	double	318769x1	[5.7983e-004; 0.0013123; 8.5449e-0...	
Mic2	double	1x276625	[-0.0014795, 0.012447, 0.0029898, -...	
Mic1	double	1x276625	[0.013140, 0.0027240, 0.0011891, -0...	
Fs	double	1x1	8000	

Figura 2: Variáveis Carregadas

Fs é a taxa de amostragem que é fornecida junto aos sinais de áudio. *Y* é um sinal de áudio com a voz do narrador, sinal esse que também está presente nos vetores *Mic1* e *Mic2* que contém a captação de diversas vozes em um ambiente com ruído.

Como podemos ver, *Y* é uma matriz linha, logo temos que transpô-la para podermos trabalhar com ela. É visível que o vetor de variáveis y está contido em ambos os áudios captados, porém em menor intensidade, logo há constantes *a* e *b* multiplicando o vetor y, sendo 0 < (*a,* b) < 1.

```
>> y = y(1:k);
>> clear ans
>> for i = 1:1:k
c(i) = Mic1(i)*y(i);
end
>> cor1y = mean(c)
cor1y =   0.0031404
>> a = (cor1y)/var(y);
>> ya = a*y;
>> Mic1a = Mic1 - ya;
>> sound(Mic1a)
```

```
>> for i = 1:1:k
d(i) = Mic2(i)*y(i);
end
>> cory2 = mean(d)
cory2 =   0.0015784
>> b = (cory2)/var(y);
>> yb = b*y;
>> Mic2b = Mic2 - yb;
>> sound(Mic2b)
```

Figura 3: Implementação da retirada do locutor *y* dos Mic1 e 2.

```
>> Mic1 - ya;
>> sound(ans)

>> mean(ans)
ans =  -7.7435e-005
```

```
>> Mic2 - yb;
>> sound(ans)

>> mean(ans)
ans =  -1.2087e-004
```

Figura 4: Médias de M_1 e M_2, embasam a segunda parte da separação de vozes

```
>> e11 = corr(Mica1, Mica1)
e11 =  1.0000
>> e12 = corr(Mica1, Micb2)
e12 =  0.89537
>> e21 = corr(Micb2, Mica1)
e21 =  0.89537
>> e22 = corr(Micb2, Micb2)
e22 =  1.00000
```

Figura 5: Cálculo das correlações

```
>> M = [e11 e12; e21 e22]
M =

   1.00000   0.89537
   0.89537   1.00000
```

Figura 6: Criação da Matriz *A*

```
>> M = M^(-0.5)
M =

   1.9089  -1.1826
  -1.1826   1.9089
```

Figura 7: Cálculo da Matriz $A^{-1/2}$

```
>> x1 = (M(1,1))*Mica1 + (M(1,2))*Micb2;
>> x2 = (M(2,1))*Mica1 + (M(2,2))*Micb2;
```

Figura 8: Estimando os sinais X1 e X2, os sinais das vozes

Nas páginas seguintes teremos o script do códigos e os plots necessários.

```matlab
%PROBLEMAS 1 e 2
% (PARTE 1)  Separacao do Male1_speech
% Aqui carregamos os vetores
load('Mic1.mat');
load('Mic2.mat');
load('Male1_speech.mat');

% Fazendo a transposicao e "corte" do vetor y
y = y';
y = y(1:length(Mic1));

%A partir de agora utilizamos os calculos demonstrados anteriormente
%Mic1
for i = 1:1:length(Mic1)
  c(i) = y(i)*Mic1(i);
end;
cory1 = mean(c);
k1 = cory1/var(y);
M1 = Mic1 - k1*y;
%Aqui temos o Mic1 sem a voz do Locutor

%Mic2
for i = 1:1:length(Mic2)
  d(i) = y(i)*Mic2(i);
end;
cory2 = mean(d);
k2 = cory2/var(y);
M2 = Mic2 - k2*y;
%Aqui temos o Mic2 sem a voz do Locutor
% (PARTE 2)  Aplicacoes Algebricas
%Calculo dos coeficientes de correlacao
e11 = corr(M1,M1);
e12 = corr(M1,M2);
e21 = corr(M2,M1);
e22 = corr(M2,M2);

%Aqui construimos a matriz dos coeficientes de Correlacao

%entre os microfones (Sem o sinal de Y)
M = [e11 e12; e21 e22];

%Fazemos a opecao da raiz da Matriz M
M = M^(-0.5);

%Agora utilizamos os coeficientes das matrizes obtidas
X1 = (M(1,1))*M1 + (M(1,2))*M2;
X2 = (M(2,1))*M1 + (M(2,2))*M2;

%PROBLEMA 3
acy = xcorr(y);
acM1 = xcorr(X1);
acM2 = xcorr(M2);

%Plot das autocorrelacoes
%y
plot(acy);
title('Autorrelacao de y');
xlabel('Amostras');
%X1
plot(X1);
title('Autorrelacao de X1');
xlabel('Amostras');
%X2
plot(X2);
title('Autorrelacao de X2');
xlabel('Amostras');
```

Script dos problemas 1, 2 e 3.

Funções de Autocorrelação

Como se pode ver, todos os gráficos têm uma forma bem próxima umas das outras. A partir da análise desses gráficos é visível que o nível de correlação desses sinais uns com os outros é baixo, impossibilitando uma interpretação empírica desses sinais no estado em que se encontram. Isso deve principalmente ao alto grau de aleatoriedade presente na fala de uma pessoa(frequência, timbre), dificultando a modelagem de uma voz usando apenas um tipo de função.

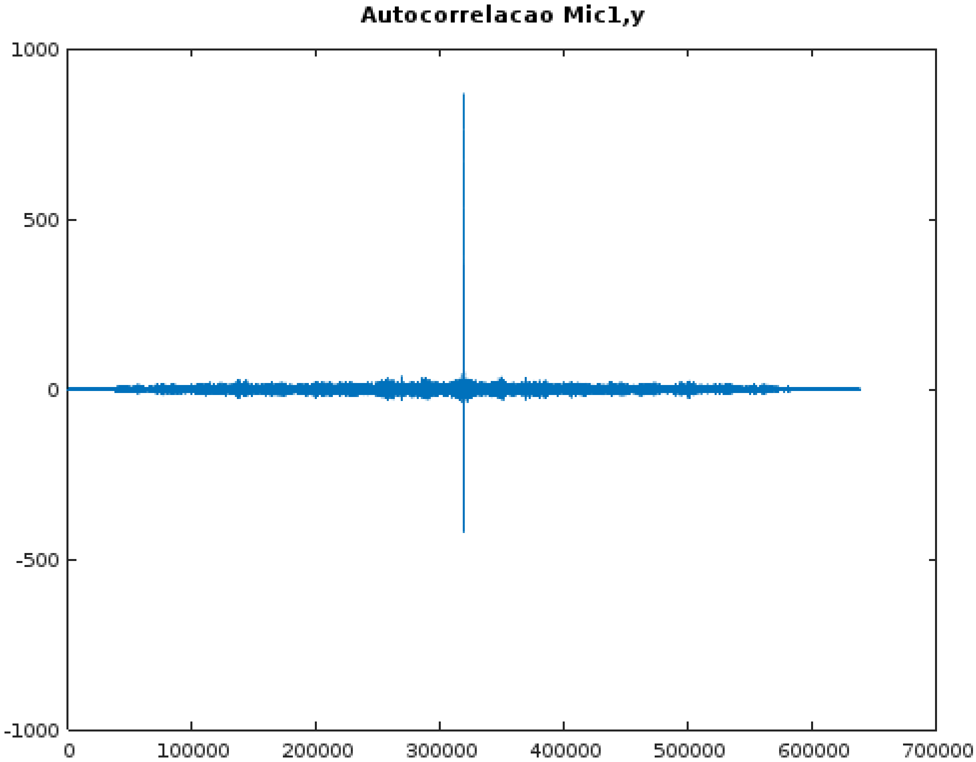

Figura 9: Plot da Autocorrelação de Mic1, Y

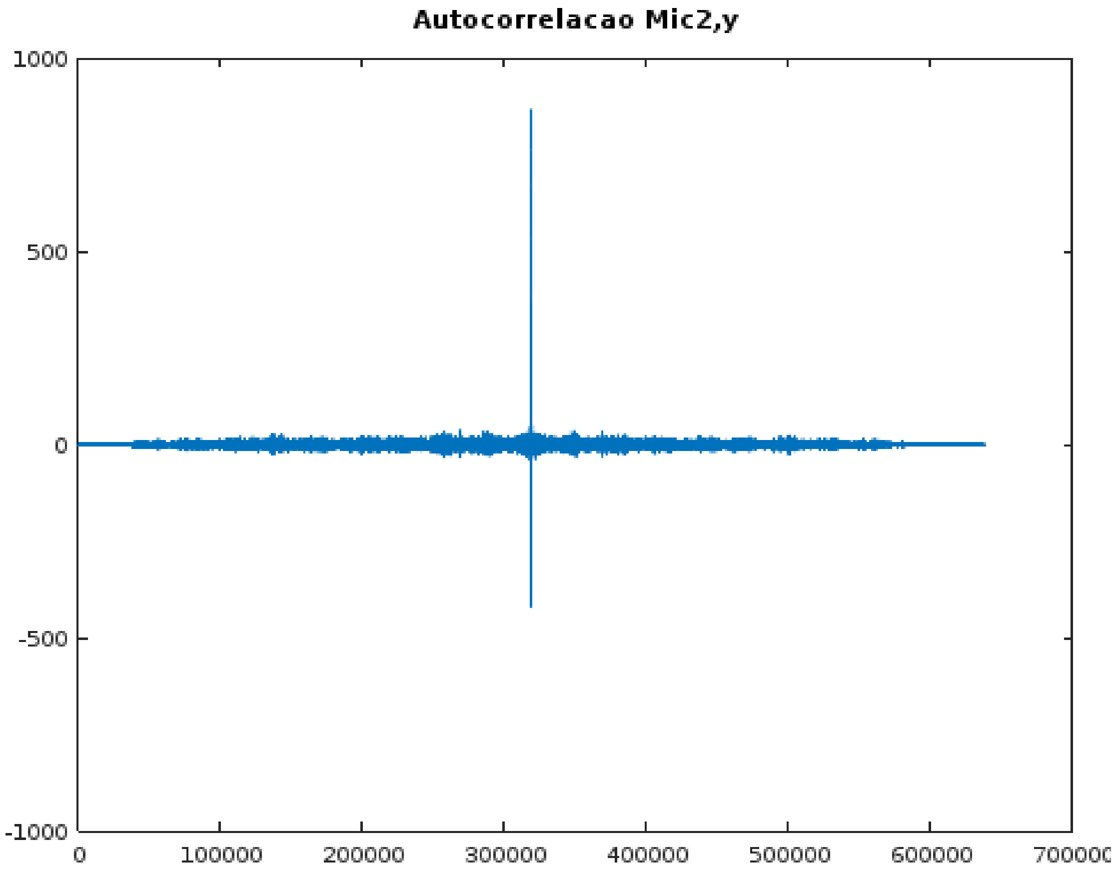

Figura 10: Plot da Autocorrelação de Mic2, Y

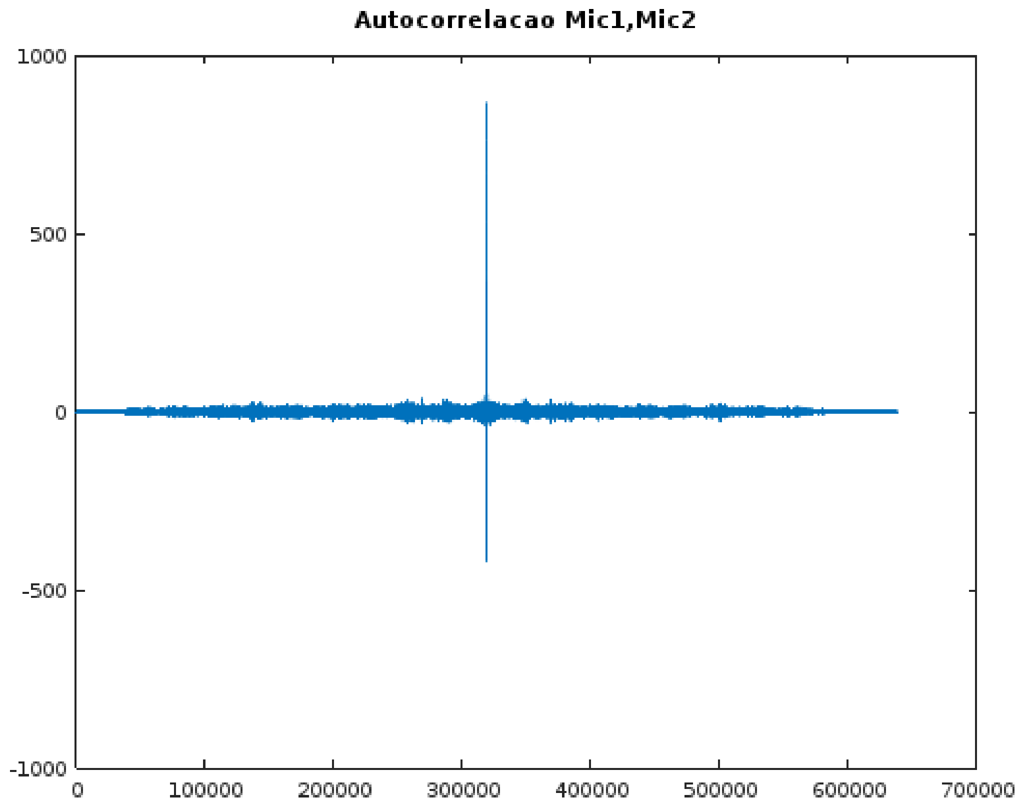

Figura 11: Plot da Autocorrelação de Mic1, Mic2

Densidade Espectral de Potência (DEP)

Aqui vemos o cálculo(plot) da função de densidade espectral de potência(DEP). Ele é realizado através da transformada de Fourier aplicada na função de correlação do processo estocástico. Desse modo, podemos garantir a existência dessa operação tratando o processo estocástico como sendo estacionário, recorrendo ao Teorema de Wiener–Khinchin para garantir a validade dessa suposição. Essa opção é utilizada quando o sinal de áudio não possui uma integral quadrada calculável, o que significaria que o sinal possuiria força media não nula.

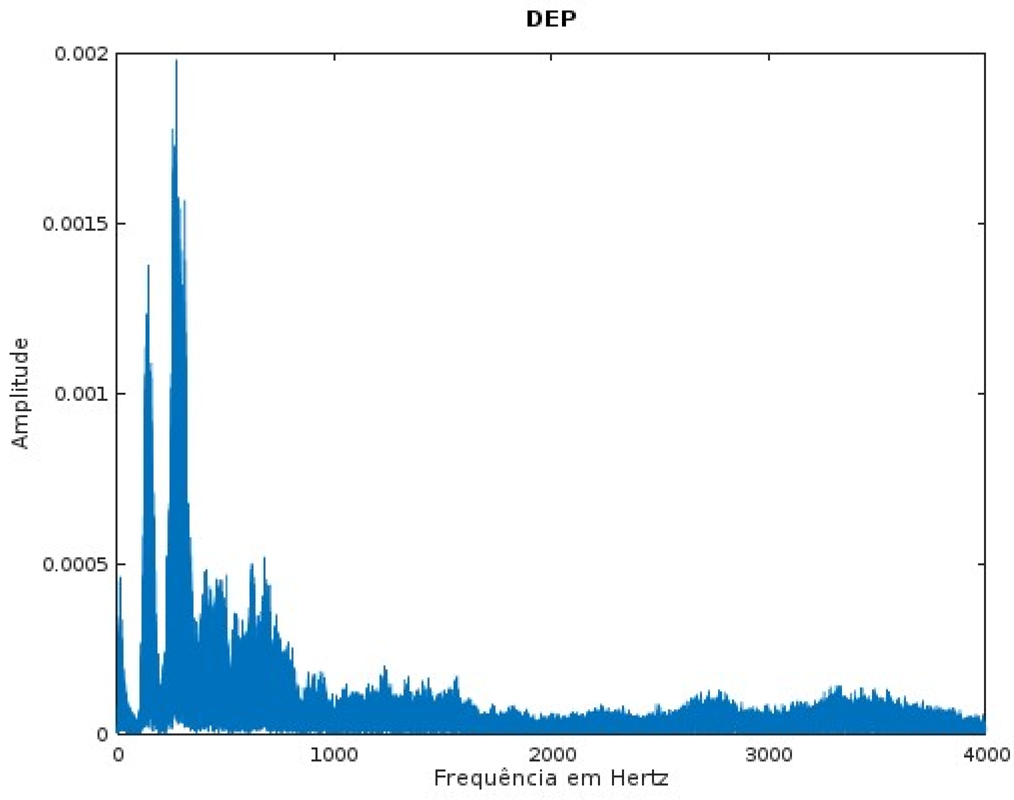

Figura 12: Cálculo da DEP do locutor *y*

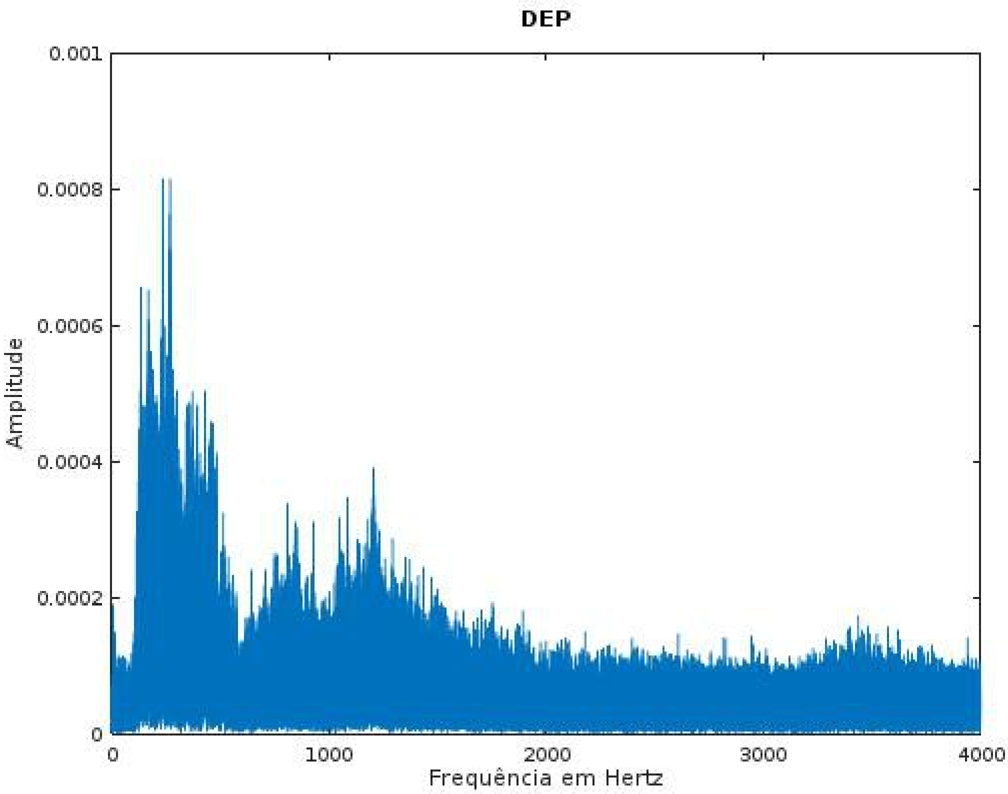

Figura 13: Cálculo da DEP do áudio X1 (voz 1 separada)

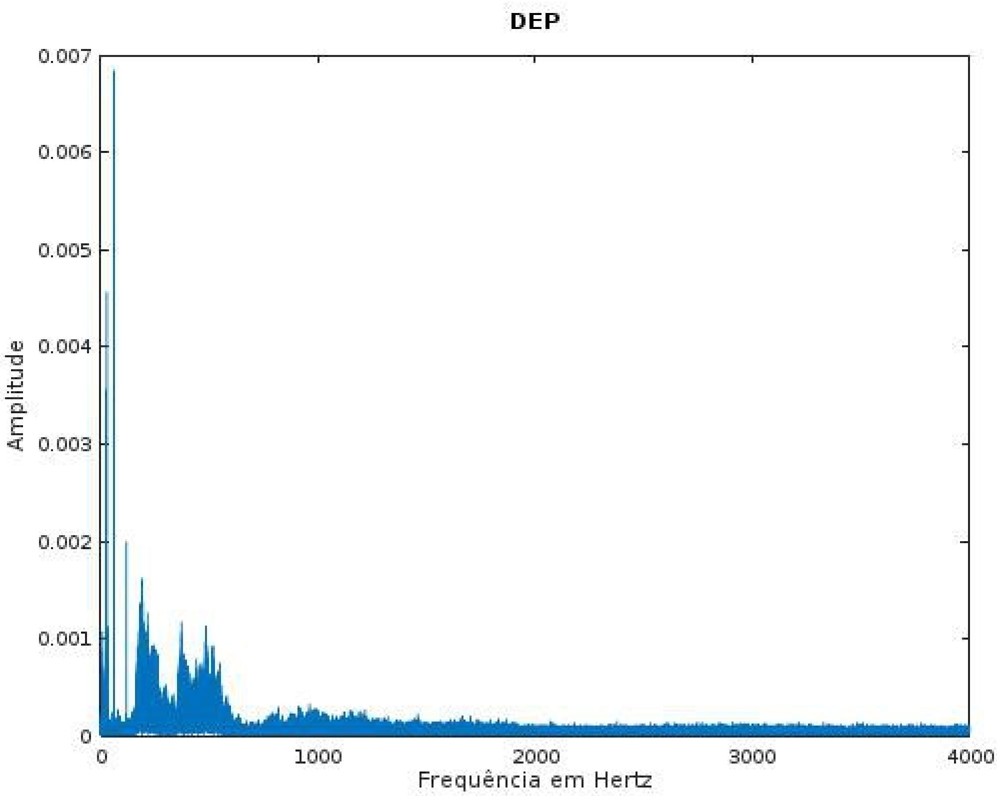

Figura 14: Cálculo da DEP do áudio X2 (voz 2 separada)

Gerador Aleatório

Geramos os histogramas de cada um dos áudios separados, com o objetivo de analisar suas características estatísticas. Pelo que se pode perceber, ambos possuem uma forte semelhança com a distribuição de Cauchy. Sendo assim, geramos a variável aleatória, emulando o resultado obtido por ambos os áudios. Abaixo podemos visualizar os histogramas:

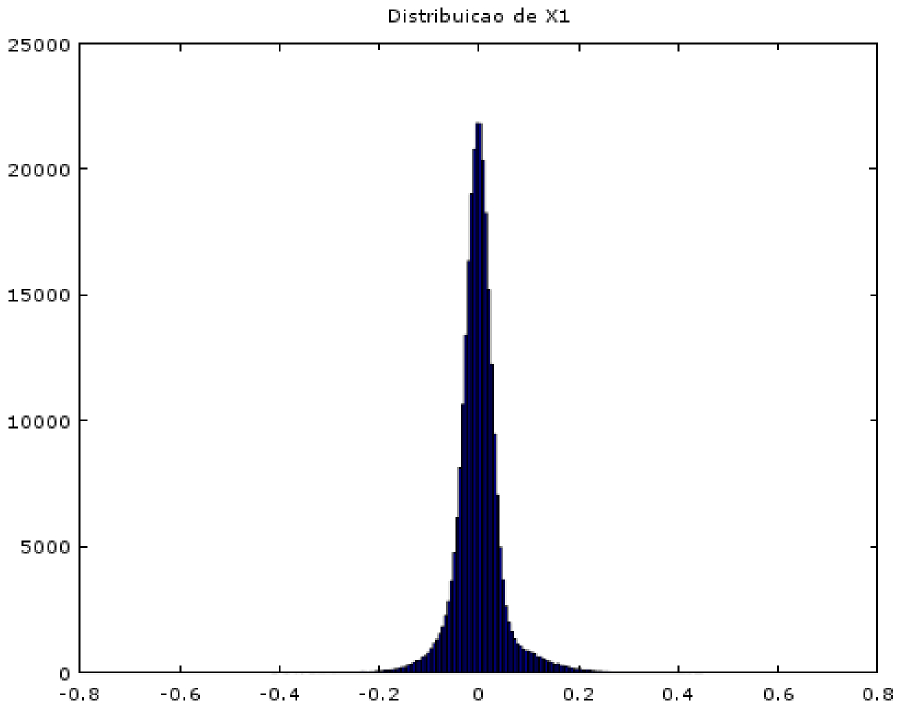

Figura 12: Histograma do áudio X1

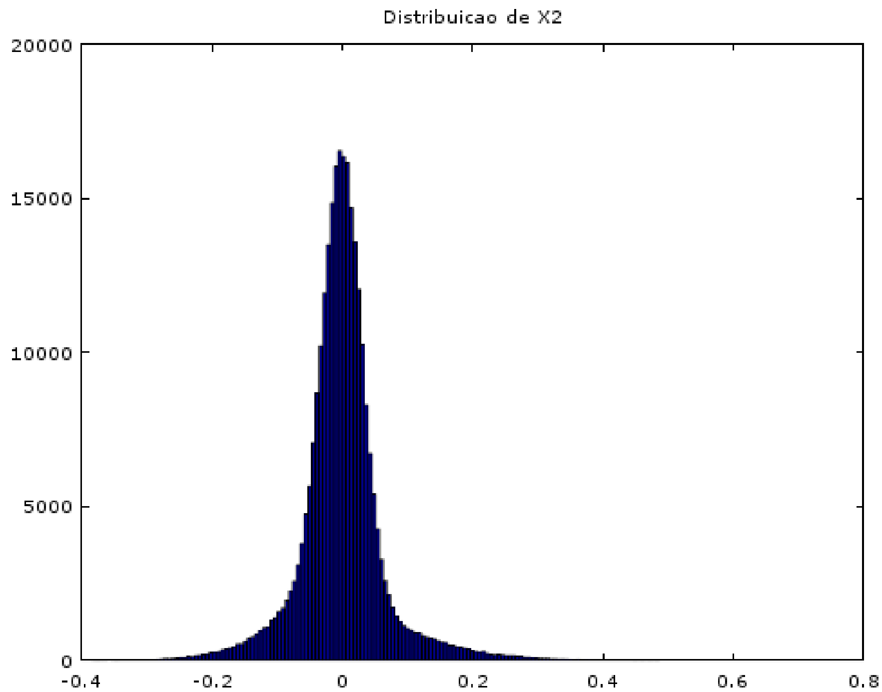

Figura 13: Histograma do áudio X2

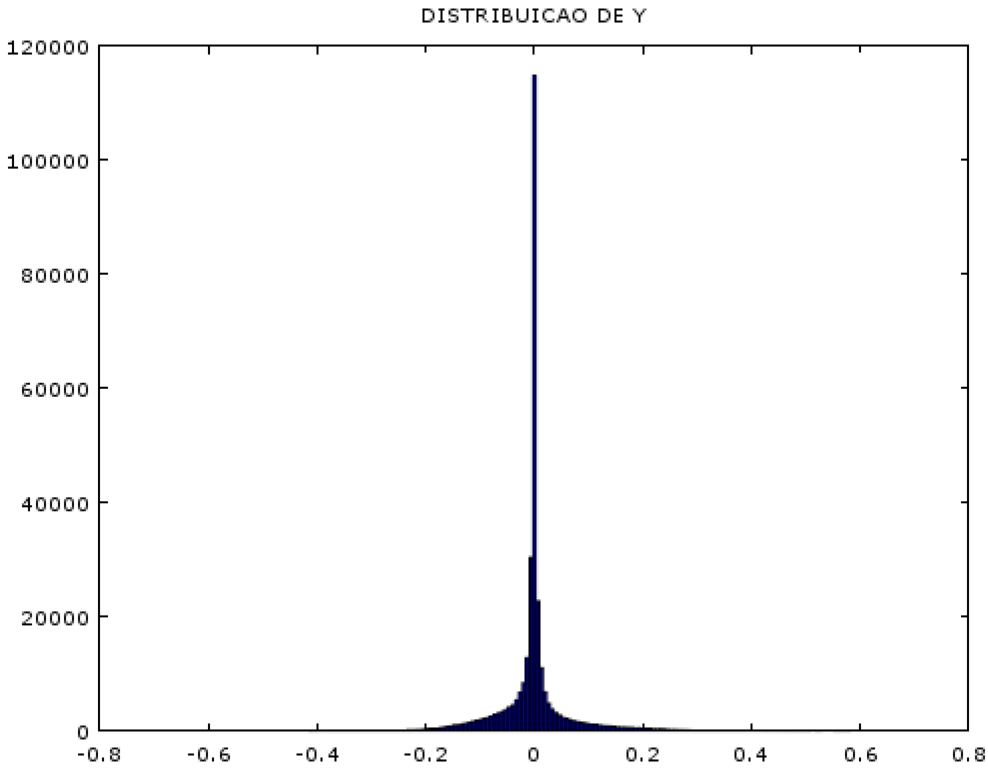

Figura 14: Histograma do áudio Y

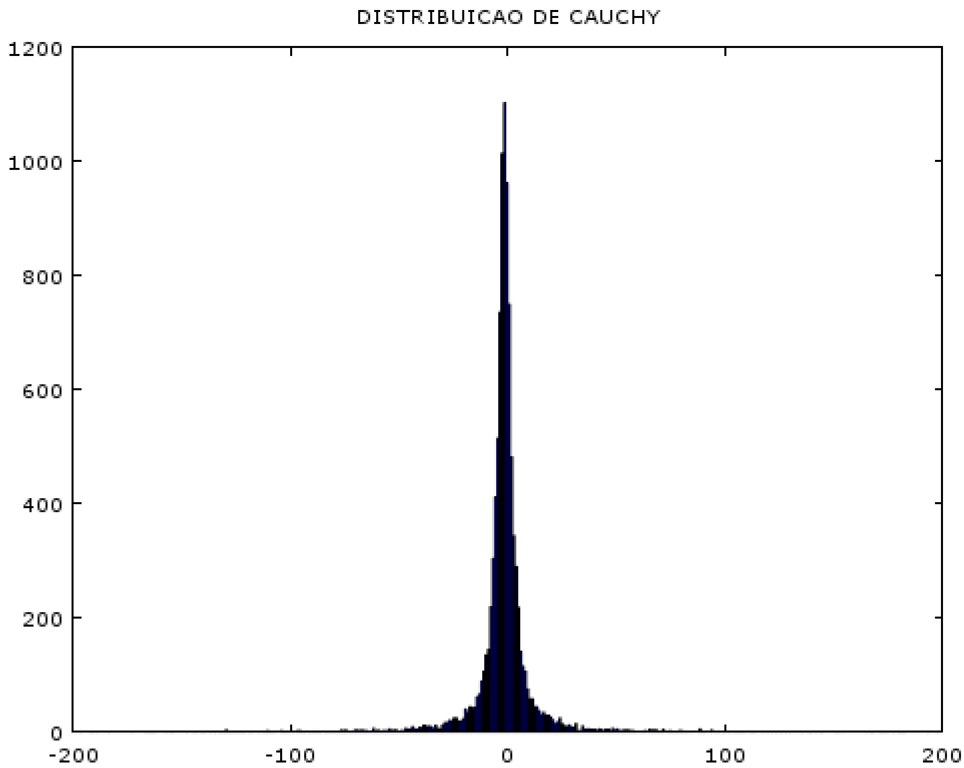

Figura 15: Histograma da distribuição de Cauchy gerada a partir de uma variável aleatória

A seguir podem ser vistos os comandos executados para gerar cada um dos histogramas e para gera uma a variável aleatória com distribuição de Cauchy:

```
hist(X1,150); %Histograma de x1 em um intervalo de 150 divisões
title('DISTRIBUICAO DE X1')

hist(X2,150); %Histograma de x2 em um intervalo de 150 divisões
title('DISTRIBUICAO DE X2')

hist(y,150); %Histograma de y em um intervalo de 150 divisões
title('DISTRIBUICAO DE Y')
```

Figura 16: Geração dos Histogramas X1, X2 e Y

```
function y = unifor_GenRan(N = 1, inf = 0, sup = 1); %Exerce a mesma função de unifor_Gen
%Alterando apenas os limites inferior e superior para 0 e 1
clc;
%Diferente do problema anterior, a exponencial acontece nos intervalos de 0 a 1
a = 7;
b = 11;
m = 2^32;
seed = clock;
seed = ((10^3)*seed(6));
x = zeros(1,N);
x(1) = seed;

for h = 2:N
    x(h) = mod((a*x(h-1)+b),m);
end
x = x/(m-1);

y = (x*(sup-inf))+inf;

endfunction
%Utilizada para alimentar as outras funções de distribuição (Gaussiana, exponencial e Cauchy)
```

Figura 17: Geração de uma variável aleatória

```
function Y = unifor_GenCauchy() %Função de geração da distribuição de Cauchy
alfa = 3; %Atribui valor 4 ao lambda
k = 10000; %10000 amostras
z = unifor_GenRan(10000,-10,10); %A variável z recebe valores gerados pela função uniforme 2
x = sort(z); %Atribui à variável x o vetor ordenado de z

for i = 1:k; %Laço que percorre do primeiro vetor ao vetor 10000
    Y(i) = alfa*tan(x(i)*pi)-(pi/2); %Função inversa da Cauchy
%Utilizada para gerar as sequências com a distribuição
end
figure 1;
hist (Y,50000); %Histograma de distribuição cauchy por 50 000 divisões
title ('DISTRIBUICAO DE CAUCHY')
med = 0; %Atribui valor inicial 0 a média
```

Figura 18: Função para Plotagem de Histograma de uma Função de Distribuição de Cauchy

Como as fontes de áudio possuem uma distribuição próxima a de Cauchy, podemos afirmar que não existe inteligibilidade sonora, visto que se trata de um gerador aleatório. Sendo assim, nos áudios executados a partir dessa geração seria observado apenas ruído.

Análise dos Resultados

O problema inicialmente se mostra bem complexo e exige uma boa “bagagem” de estudo estatístico e algébrico para modelar e utilizar qualquer proposta de resolução. O desenvolvimento e aplicação do primeiro método se mostrou extremamente eficaz, pois foram utilizadas aproximações bem razoáveis e condizentes com a proposta de estimar os sinais. As vozes mostraram fidelidade ao que supõe-se ter sido gravado individualmente.

Ao aplicar o método estatístico na primeira parte da solução temos uma margem de erro muito baixa e que apesar do ruído observado, é perceptível que o locutor *y* foi totalmente separado e não influencia mais os vetores de áudio M_1 e M_2.

Já no segundo método empregado, tivemos uma margem de erro um pouco maior devido a aproximações mais “grosseiras” devido o método utilizado, porém conseguindo estimar de forma bastante satisfatória cada áudio gravado.

A questão do ruído ser tratado ou não foge do escopo do trabalho, já que o ruído contido é branco, logo está em todas as frequências e seria muito difícil, talvez impossível, de reduzi-lo de forma totalmente satisfatória.

Com o uso do Octave foi possível observar características em cada sinal de voz e tomar conclusões descritas durante todo o projeto. E além disso pudemos observar que a distribuição das vozes se assemelha a uma distribuição de probabilidade conhecida e anteriormente estudada.

Bibliografia

[1] ALMEIDA PAGGI,T. **Decomposição de sinais eletromiográficos de superfície misturados linearmente utilizando análise de componentes independentes.** 2012. 175f. Dissertação(Mestrado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, Campinas, 2012.

[2] TYGEL FREIHOF,A. **Métodos de fatoração de matrizes não-negativas para separação de sinais musicais.** 2009. 122f. Dissertação(Mestrado em Engenharia Elétrica) - Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia , UFRJ, Rio de Janeiro, 2009.

[3] CHAME MAGRANI,I. **Métodos para separação de vozes a partir de misturas pré-gravadas.** 2016. 161f. Projeto de graduação(Graduação em Engenharia Eletrônica e de Computação) - Curso de Engenharia Eletrônica e de Computação da Escola Politécnica, UFRJ, Rio de Janeiro, 2016.

[4] Laporte Menezes Victorio,L. **Algoritmos de separação cega de sinais de áudio no domínio da frequência em ambientes reverberantes: Estudo e comparações.** 2010. 143f. Dissertação(Mestrado em Engenharia Elétrica) - Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia , UFRJ, Rio de Janeiro, 2010.

[5] OLIVEIRA RODRIGUES,B;QUEIROZ APARECIDO,M;FILHO VIEIRA,J. **Blind source separation by multiresolution analysis using AMUSE algorithm.** Multi-Science Journal ,40-45,2015.

[6] SANTOS BORBA,M;MAGALHÃES,F;FERREIRA,F;PEIXOTO MYRIAM,Z. **Análise da fatoração de matrizes não-negativas para a separação de fontes acústicas via distância euclidiana quadrática e divergência de Kullback-Leibler**, In: Congresso de Engenharia de Áudio, 13, 2015, São Paulo(SP).

[7] LIMA, Elon L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA , 2014.

[8] KAY, Steven M. **Intuitive Probability and Random Process Using MATLAB.** New York: Springer,2006.

[9] ALBUQUERQUE, Paulo J. **Probabilidades,Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos.** Rio de Janeiro: PUC-Rio,2008.