Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Eletromagnetismo Aplicado - TI0115

Lista 1

Análise Vetorial para Eletromagnetismo

Discente: Lucas de Souza Abdalah
Matrícula: 385472
Docente: Dr. Sérgio Antenor

Fortaleza, 02 de outubro de 2018

Conteúdo

1 Introdução

1.1 Campo Vetorial

Sendo definido que $U \subset \mathbb{R}^m$, então uma função $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^n$ é dita um campo vetorial. Os casos mais recorrentes são os que têm-se m = n. Entretanto, qual a interpretação física que pode ser atribuída a essa definição?

Por exemplo, sendo U a região de um rio, que está no $\mathbb{R}^3$, considera-se que cada partícula dele tem um vetor velocidade e a representação de todos os pontos desta região U será um campo de vetores. A definição é ampla de tal forma que pode-se tratar o campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas analogamente.

1.2 Operador Nabla

Sendo $\hat{\mathbf{a}}_n$ o vetor unitário referente ao sistema de coordenadas e o índice n a direção deste, pode-se definir o operador Nabla (∇) e suas aplicações. Em coordenadas retangulares, o operador é dado como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{a}}_z \tag{1}$$

1.3 Gradiente

O **gradiente** de um campo escalar é um vetor que representa a magnitude e a orientação da máxima taxa espacial de variação, indicando o sentido e a direção de um ponto específico do campo vetorial. É possível observar que o gradiente indica a direção na qual a variação da função estudada é máxima.

Por fim, Sendo um campo escalar $V(x, y, z)$ diferenciável, o cálculo do **gradiente** é dada como mostrado na sequência para o sistema de coordenada necessário neste trabalho.

1.3.1 Coordenadas Cartesianas

O gradiente de um campo escalar V em coordenadas cartesianas relaciona o potencial com as direções do problema e é dado por:

$$\nabla V(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{a}}_z \tag{2}$$

1.3.2 Coordenadas Cilíndricas

O gradiente de um campo escalar V em coordenadas cilíndricas relaciona o potencial com as direções do problema e é dado por:

$$\nabla V(\rho, \phi, z) = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\mathbf{a}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\mathbf{a}}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{a}}_z \tag{3}$$

1.4 Campo Elétrico e Potencial

A relação entre as grandezas do título desta sessão é extremamente conhecida, e parte da interpretação da derivada direcional do potencial elétrico, de tal modo que o resultado é um campo vetorial:

$$dV_e = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{4}$$

Considerando que cada partícula infinitesimal está sob um campo E_s na direção d_s, obtém se a relação da derivada de cada V_e:

$$\begin{aligned} dV_e &= -E_s d_s \\ \frac{dV_e}{d_s} &= -E_s \end{aligned} \tag{5}$$

Por fim, a representação aplicando o operador gradiente:

$$\nabla V_e = -E_s \tag{6}$$

1.5 Transformação de Coordenadas

Por vezes, é interessante relacionar as variáveis espaciais afim de conveniência de um problema analisado. Um exemplo é relacionar (x, y, z) com (r, θ, ϕ) em problemas com simetria esférica.

1.5.1 Cilíndricas para Cartesianas

Utilizando a definição de coordenadas cilíndricas, que é facilitada com um aspecto visual, tem-se que as relações entre as coordenadas são:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= tg^{-1}\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \tag{7}$$

Tendo a transformação dos vetores tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x &= cos\phi\mathbf{a}_\rho - sen\phi\mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_y &= sen\phi\mathbf{a}_\rho + cos\phi\mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_z \end{aligned} \tag{8}$$

1.5.2 Esféricas para Cartesianas

Utilizando a definição das coordenadas esféricas, que é facilitada com um aspecto visual, tem-se que as relações entre as coordenadas são:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= tg^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi &= tg^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned} \tag{9}$$

Tendo a transformação dos vetores tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x &= sen\theta cos\phi \mathbf{a}_r + cos\theta cos\phi \mathbf{a}_\theta - sen\phi \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_y &= sen\theta sen\phi \mathbf{a}_r + cos\theta sen\phi \mathbf{a}_\theta + cos\phi \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_z &= cos\theta \mathbf{a}_r - sen\theta \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \tag{10}$$

2 Problemas

2.1 Questão 1

Um campo potencial é definido por $V_e = (3x + 4y)e^{2x^2+2.2y^2}V$. Faça um gráfico do gradiente e das linhas equipotenciais. Análise os resultados.

Solução: Sabendo que $V_e(x, y)$ é diferenciável no domínio analisado, podemos relacionar o Potencial Infinitesimal dV_e com o Campo Elétrico E_e nos caminhos infinitesimais $d\vec{r}$, como demonstrado nas equações que resultam em 6. Sabemos que o caso analisado tem-se um campo vetorial conservativo. No caso das coordenadas cartesianas, de acordo com a equação 2:

$$E_x = -\frac{\partial V_e}{\partial x} =; E_y = -\frac{\partial V_e}{\partial y}$$

A análise numérica é realizada com o *Matlab*, aplicando o operador gradiente com os dados especificados, tendo o plot da figura 1.

As linhas equipotenciais são bem nítidas de modo que é clara a relação de simetria do problema, entretanto não há nitidez na representação do comportamento do campo elétrico. Portanto, é interessante realizar a normalização dos vetores de campo, como mostrado no plot da figura 2.

É possível também observar uma simetria em relação à linha equipotencial que carrega a informação de relação linear entre X e Y.

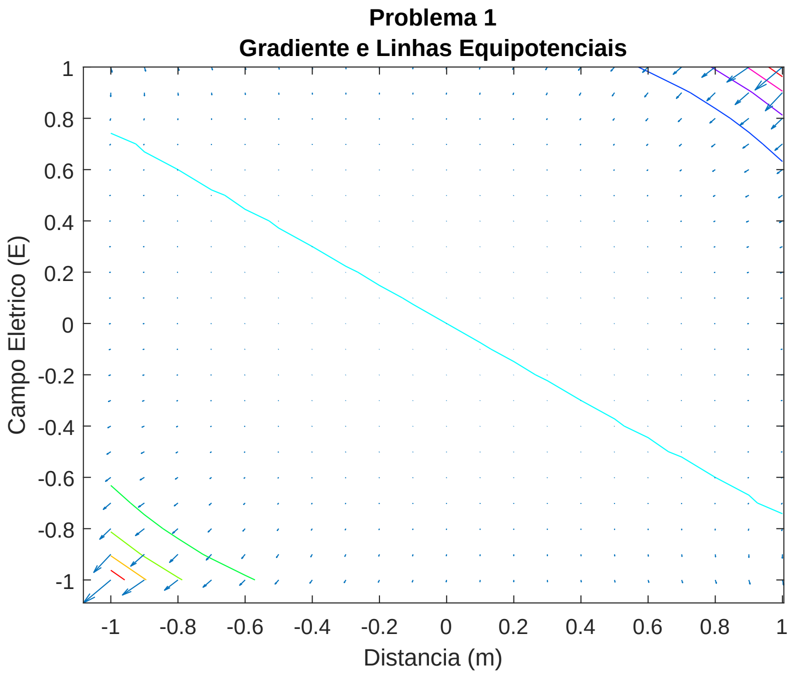

Figura 1: Campo elétrico não normalizado e linhas equipotenciais.

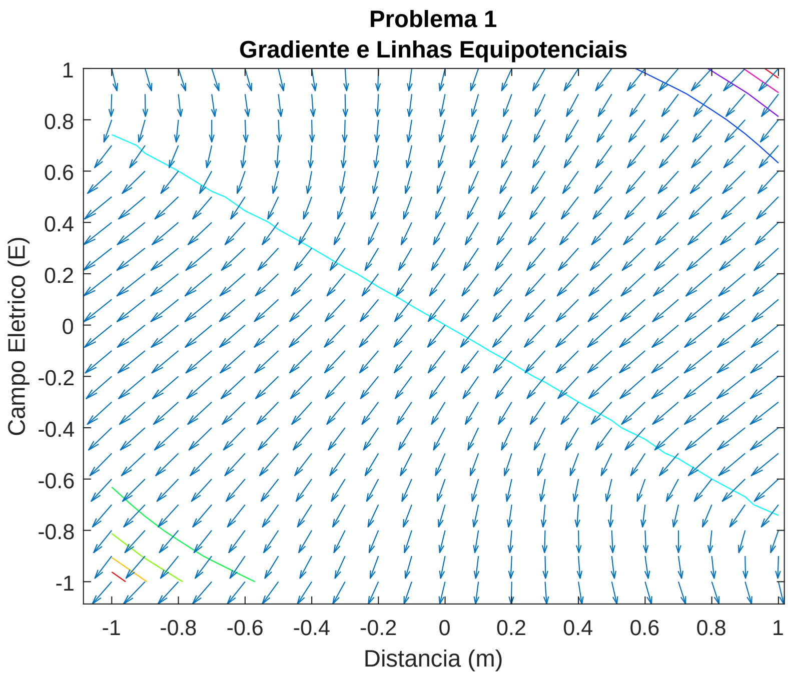

Figura 2: Campo elétrico normalizado e linhas equipotenciais.

2.2 Questão 2

Um campo potencial entre dois semiplanos condutores, isolados entre si ao longo do eixo z e localizados em $\phi = 0$ e $\phi = \dfrac{\pi}{6}$, é definido por $V_e = \dfrac{360\phi}{\pi}V$. Faça um gráfico do gradiente e das superfícies equipotenciais na região $0,1 \leq \rho \leq 0,6m$; $0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{6}$, $z = 0$. Análise os resultados.

Solução: É interessante que o problema propõe a visualização do comportamento do gradiente de V_e sobre o plano XY, quando propõe que $z = 0$. Utilizando a equação 3, é possível calcular o gradiente e verificar a direção do campo no sentido oposto ao potencial justamente referenciado na equação 6. E o resultado é posto no plot da figura 3, exatamente como esperado, onde as linhas equipotenciais formam algo semelhante a um setor circular.

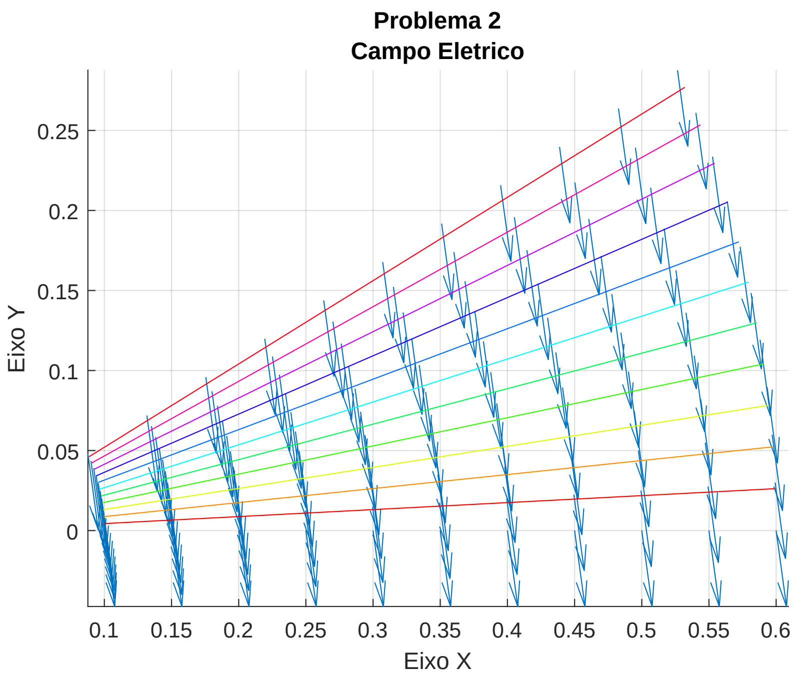

Figura 3: Campo elétrico não normalizado e linhas equipotenciais.

2.3 Questão 3

Um campo elétrico é definido por $\vec{E} = \frac{4y\vec{a_x} + 1,8x\vec{a_y}}{x^2 + y^2 + 8} V/m$. Faça um gráfico no plano $z = 0$ na região definida por $-4.0 < x < 4.0$ e $-4.0 < y < 4.0$ associando a cada ponto o campo $\vec{E}$. Analise o comportamento do campo elétrico.

Solução: O campo Elétrico $\vec{E}$ pode ser decomposto nas componentes de x e y, de forma que possibilite visualizar a ação do campo elétrico numericamente em cada ponto do plano cartesiano. Como a constante que multiplica x é menor, o decaimento é mais rápido em relação ao seu eixo com o crescimento do seu valor absoluto. No eixo y, há decaimento semelhante, porém mais lento devido a multiplicação pela constante. É evidente que há uma tendência com simetria na origem, de forma que se inserida uma carga pontual positiva +q, por exemplo, nos pontos (3,-3) ou (-3,3) a carga tenderia à se movimentar em direção à origem. Já no caso de colocá-la nos pontos (-3,-3) ou (3,3), a tendência seria de afastamento.

$$E_x = \frac{4y}{x^2 + y^2 + 8}\vec{a_x}; E_y = \frac{1,8x}{x^2 + y^2 + 8}\vec{a_y}$$

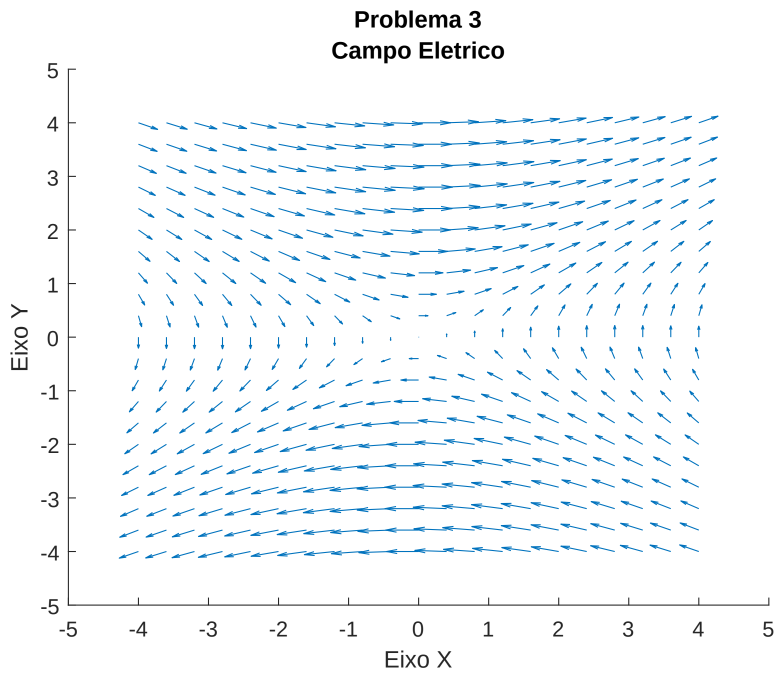

Figura 4: Campo elétrico não normalizado.

2.4 Questão 4

Um campo vetorial é dado por $\vec{E} = \dfrac{4sen\theta\vec{a_r} + 3,5cos\theta\vec{a_\theta}}{r^2 + 6,5} V/m$. Faça um gráfico no plano $x = 0$ na região definida por $-3.0 < y < 3.0$ e $-3.0 < z < 3.0$ associando a cada ponto o campo $\vec{E}$. Analise o comportamento do campo elétrico.

Solução: É necessário fazer a conversão de coordenadas na abordagem proposta em 9. Sendo $x = 0$, $E_x = 0$, por consequência $cos(\phi) = 0$, e $\phi = \dfrac{\pi}{2}$, importante notar que $sen(\phi) = 1$. Essas observações são postas de forma que o plot está no plano YZ, como mostrado na figura 5. O comportamento circular deve-se a dependência da função $\vec{E}$ com seno e cosseno. Há singularidade próximo a origem, onde aparentemente a função assume os maiores valores. A medida que se afasta da origem, ou seja o raio aumenta, o valor absoluto diminui. Há pequenas inflexões ao longo do eixo, quase inperceptíveis com o domínio analisado.

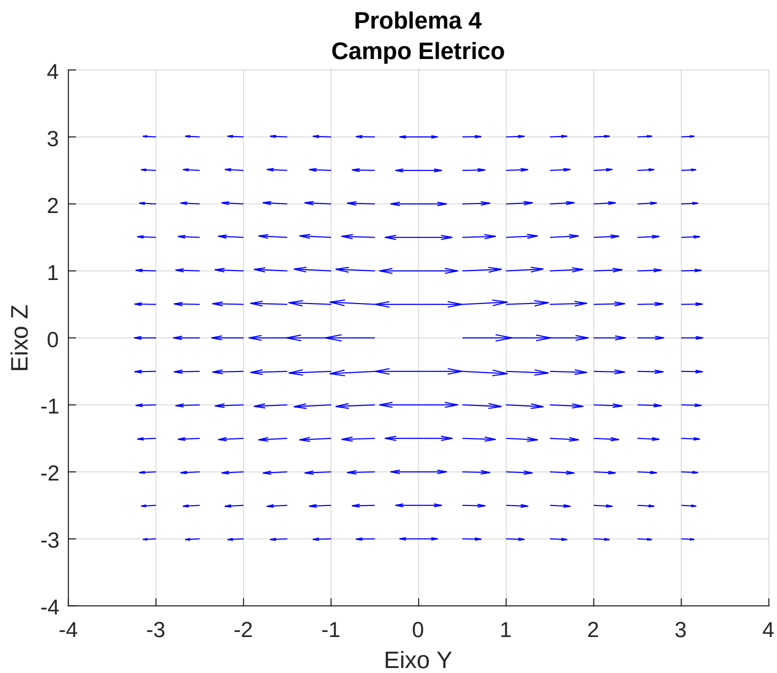

Figura 5: Campo elétrico não normalizado.

Referências

[1] M. N. O. Sadiku. *Elementos de Eletromagnetismo*, 3ª ed Bookman (2012).