Universidade Federal do Ceará
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Teleinformática
Engenharia de Teleinformática

Lista de Exercícios 02

Aluno Kenneth Brenner dos Anjos Benício – 519189

Professor Guilherme de Alencar Barreto
Disciplina Reconhecimento de Padrões- TIP8311

Fortaleza, 2021

1) SOLUÇÃO:

Classificar a matriz de covariância como definida positiva implica no fato de que todos os seus autovalores serão sempre positivos. Ademais, o determinante também será sempre positivo como consequência direta dos autovalores serem sempre positivos. Embora não esteja relacionado com o fato de ser definida positivo, também é necessário que a matriz de covariância seja simétrica. Desse modo, é possível definir uma matriz de covariância válida seguindo simplesmente a estrutura da matriz identidade de ordem qualquer, pois essa matriz irá ser definida positiva e simétrica.

2) SOLUÇÃO:

Se considerarmos a primeira matriz ela não será uma matriz de covariância válida pois, mesmo que seu determinante seja de fato positivo, não é uma matriz simétrica. Já a segunda matriz embora seja simétrica, possui determinante nulo então também não será uma matriz de covariância válida. Por fim, a última matriz será uma matriz covariância válida uma vez que é simétrica e definida positiva visto que seu determinante seja positivo.

3) SOLUÇÃO:

Uma vez que a matriz de covariância já é simétrica então precisamos nos preocupar apenas em torná-la definida positiva. Para isso, inicialmente precisaremos garantir um valor de k que torne seu determinante positivo. Isso pode ser realizado resolvendo a equação de segundo grau abaixo

$$3k^2 - 6 = 0, \tag{1}$$

$$k = \pm\sqrt{2}. \tag{2}$$

Entretanto, uma vez que estamos trabalhando com uma matriz de covariância não há sentido matemático em dizer que determinado conjunto de dados terá variância negativa. Desse modo, descartamos a solução com raiz negativa e o valor obtido será $k = +\sqrt{2}$.

4) SOLUÇÃO:

5) SOLUÇÃO:

Pede-se para obter a matriz de covariância para o pequeno conjunto de dados fornecido utilizando-se três diferentes equações para o cálculo da matriz de covariância. Antes de dar continuidade é interessante obter o valor da média do conjunto de dados visto que seu valor será necessário em breve. Sendo assim, temos

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}(n) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\4/3\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Considerando o primeiro método

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{x}} &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[\boldsymbol{x}(n)-\boldsymbol{m}][\boldsymbol{x}(n)-\boldsymbol{m}]^{\mathrm{T}},\\
\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{x}} &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}4/9 & 4/9\\ 4/9 & 4/9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}16/9 & 20/9\\ -20/9 & 25/9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4/9 & -14/9\\ -14/9 & 49/9\end{bmatrix}\right),\\
\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{x}} &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}8/3 & -10/3\\ -10/3 & 26/3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}8/9 & -10/9\\ -10/9 & 26/9\end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Considerando o segundo método

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{x}} &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n),\\
\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{x}} &= \hat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}},\\
\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{x}} &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)-\begin{bmatrix}1/9 & 4/9\\ 4/9 & 16/9\end{bmatrix},\\
\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix}1 & -2/3\\ -2/3 & 14/3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/9 & 4/9\\ 4/9 & 16/9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8/9 & -10/9\\ -10/9 & 26/9\end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Por fim, considerando o último método

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{x}} &= \frac{1}{N}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}},\\
\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{x}} &= \hat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{m}\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}},\\
\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix}1 & -2/3\\ -2/3 & 14/3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/9 & 4/9\\ 4/9 & 16/9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8/9 & -10/9\\ -10/9 & 26/9\end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$