

水下机器人非线性控制

摘要 本文首先简述了水下机器人（Remote Operated Vehicle, ROV）的数学模型的建立过程，采用滑动模态控制方法设计深度控制器，并引入边界层以消除抖振现象。采用反馈线性化的方法设计艏向控制器，对局部线性化的系统运用极点配置法进行控制。最后将所设计的控制器运用到 ROV，对系统整体进行了全面分析以评估其性能，并对报告进行了总结。

关键词 ROV，数学模型，滑模控制，反馈线性化

Abstract This paper first describes the process of establishing the mathematical model of Remote Operated Vehicle(ROV). Then applies the sliding-mode control theory to design the depth controller, and utilizes the boundary layer to eliminate chattering phenomenon. Adopting the feedback linearization method to design the angle controller as well as configuring the locally linearized system by means of pole assignment. Finally, implementing the controllers at ROV to evaluate the system's dynamic performance comprehensively, then summarize the total design.

Key words ROV, mathematical model, sliding-mode control, feedback linearization

DOE ROV 模型简述

数学模型

本任务所针对的 ROV 模型为四自由度简化模型。

其动力学方程如下：

$$(M_{RB} + M_A)\dot{V} + [C_{RB}(V) + C_A(V)]V + D(V)V + g(\eta) = \tau$$

其运动学方程如下：

$$\dot{\eta} = J(\Theta)V$$

其中仅考虑纵荡，横荡，垂荡，艏摇四个自由度的运动。即：

$$V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ r \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M \end{bmatrix}$$

η 为 NED 坐标系下 ROV 的位置及姿态向量， V 为载体坐标系（原点位于浮心）原点的速度， τ 为作用于载体坐标系原点的控制力向量（在载体坐标系下表示）。方程中有关电机、螺旋桨等其余矩阵的具体形式及相关参数值，详见文档《DOE ROV 的动力学建模》，这里不作赘述。

通过对各系数矩阵的形式进行分析可知，无论是动力学方程还是运动学方程，垂荡自由度上的运动是与其三个自由度相互解耦的。故在设计控制器时，也可将模型解耦，对垂荡运动和其它三自由度的运动分别独立设计深度控制器和艏向控制器。

Simulink 仿真模型

由上述数学模型，在 Simulink 建立仿真模型，如下图：

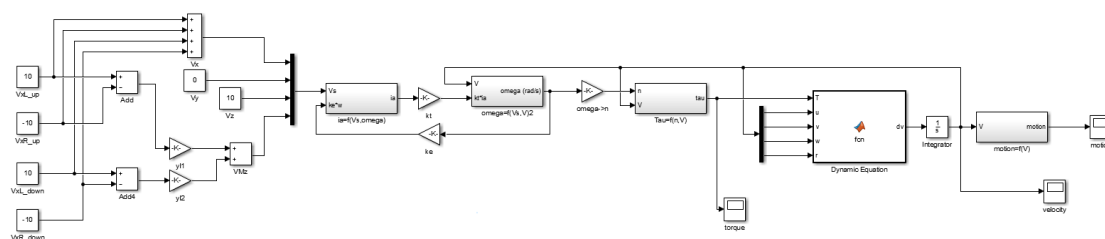


图 1 动力学方程模型

该模型表达了从给定电压 V_s 至速度 V 及位移的关系式，其中框图的最左边是 ROV 纵左右两对螺旋桨的给定电压输入，经过关系解算后分别作为 x 轴的推力 T_x 及回转转矩 M_z 输入至模型中，同时 y 轴推力 T_y 及 z 轴推力 T_z 也能通过输入给定电压实现。中间部分为电机—螺旋桨模型的建模；最右端自定义模块 Dynamic Equation 为动力学方程，程序内容详见实时脚本 Dynamic Equation.mlx 文件，其输出经过两次积分和换算后能够得到纵荡，横荡，垂荡，艏摇四个自由度的运动。

深度控制器设计

被控系统数学建模

首先写出解耦后，垂荡运动自由度上的运动方程。

动力学方程如下：

$$(m - Z_{\dot{w}})\dot{w} - (Z_w + Z_{w|w|}|w|)w = T_z$$

运动学方程如下：

$$\dot{z} = w$$

螺旋桨模型为：

$$T = \rho D^4 K_T (J_0) n^2$$

$$Q = \rho D^5 K_Q (J_0) n^2$$

其中 $K_T = \alpha_1 + \alpha_2 J_0$, $K_Q = \alpha_3 + \alpha_4 J_0$, $J_0 = \frac{V_a}{nD}$, $V_a = (1 - w)V$, w 为伴流系数。于是代入系数可得：

$$T = \rho D^4 \alpha_1 n^2 + 0.7 \rho D^3 \alpha_2 n V$$

又根据电机模型：

$$e = V_s - u_f$$

$$u_f = k_e \omega$$

$$L \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = e$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = k_t i_a - B\omega - T_L$$

$$T_L = Q$$

由转速—角速度换算关系： $n = \frac{60\omega}{2\pi}$ (r/min)，并代入上式可得状态方程组：

$$\dot{i}_a = \frac{V_s - R_a i_a - k_e \omega}{L}$$

$$\dot{\omega} = \frac{k_t i_a - B\omega - \rho[\alpha_3 n^2 D^5 + 0.7 V \alpha_4 n D^4]}{J}$$

$$\dot{V} = \frac{\rho D^4 \alpha_1 \left(\frac{30\omega}{\pi}\right)^2 + 0.7 \rho D^3 \alpha_2 \frac{30\omega}{\pi} V - Z_w V - Z_{w|w|}|V|V}{M}$$

其中 V 为 ROV 的垂向速度。

选择状态变量：

$$\begin{aligned}x_1 &= D - D_{ref} \\x_2 &= \dot{x}_1 = V \\x_3 &= \omega \\x_4 &= i_a \\u &= V_s \\y &= x_1\end{aligned}$$

其中 D_{ref} 为预期深度， D 为当前深度，代入相关系数后可得状态方程组：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\x_2 &= \dot{V} = 0.0416x_3^2 - 0.0037x_2 + 1.1875|x_2|x_2 \\x_3 &= \dot{\omega} = 430.1887x_4 - 1.0782x_3 - 221.7790x_3^2 + 61.9946x_3x_2 \\x_4 &= \dot{i}_a = -252.1368x_4 - 8.5705x_3 + 21.3675u \\y &= x_1\end{aligned}$$

可以看出该方程组具有非线性和强耦合性，因此应使用非线性控制方法设计控制器。

控制器设计

该系统为非线性单输入系统，按任务书要求，采取滑动模态控制方法对该系统进行控制器设计。

滑动模态控制属于变结构控制，其核心思想在于设计一个滑动流形超平面，吸引相图上的状态变量进入滑动流形之后以一定的关系移动至原点并收敛，前提是滑动流形上的状态组合具有 Lyapunov 稳定性^[1]。

由于本次设计的对象为具有强耦合性，且输入 u 项仅出现在 x_4 的微分方程中，因此选择滑动流形应具有形式 $s = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ，这里我设计为超平面方程形式：

$$s = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4$$

初始选择 $\alpha = [4; 2; 1; 1]$ ，得：

$$s = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$$

取 Lyapunov 函数 $V(s) = \frac{1}{2}s^2$ ，由 $\dot{V}(s) = s\dot{s}$ 得：

$$\begin{aligned}\dot{s} &= 21.3675u + 3.9926x_2 - 9.6487x_3 + 1780.519x_4 - 61.9946x_2x_3 \\&\quad + 2.375x_2|x_2| - 221.8622x_3^2\end{aligned}$$

为使滑动流形具有 Lyapunov 稳定性，需令 $\dot{V}(s)$ 负定，于是选 u 为：

$$u = \frac{1}{21.3675} [-3.9926x_2 + 9.6487x_3 - 1780.519x_4 + 61.9946x_2x_3 - 2.375x_2|x_2| + 221.8622x_3^2 - k\text{sgn}(s)]$$

当状态变量进入到滑动流形后 $\dot{V}(s) = -ks \cdot \text{sgn}(s)$, $\text{sgn}(s)$ 为符号函数, 输出绝对值为 1, 符号与 s 相同的量, 当 $k > 0$ 时, 可知 $\dot{V}(s)$ 不大于 0。由于 $\text{sgn}(s)$ 在过零点会发生突变, 容易引起抖振现象^[2], 因此我利用饱和函数 $\text{sigmoid}(s)$ 代替了 $\text{sgn}(s)$, 其动作特性如下图, 定义程序详见 sigmoid.m :

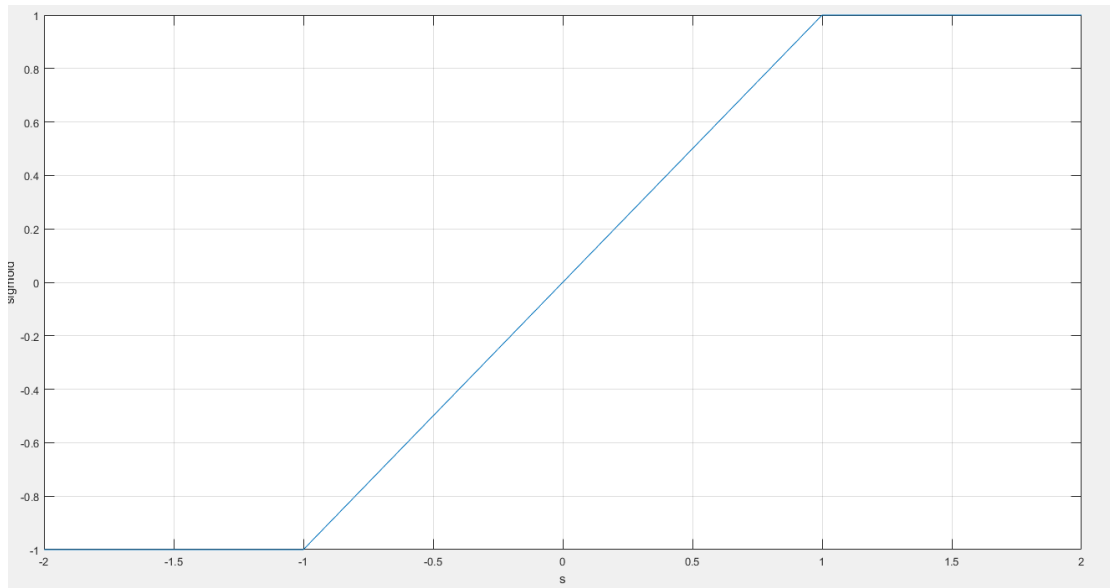


图 2 sigmoid(s)函数动作特性

于是可得加入滑动模态控制器实现闭环控制后的垂荡运动模型如下图, simulink 模型详见 $\text{Slidingmode_Controller.slx}$:

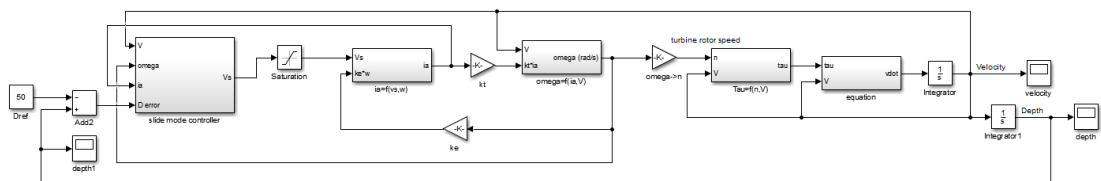


图 3 深度控制器模型

图 3 中最左侧的模块为上述设计的滑模控制器, 其输入为 4 个状态变量, 输出为预期的给定电压 V_s 。选取初始值 $\alpha = [4; 2; 1; 1]$ 及 $k = 10000$, 可得预期深度为 50 米的响应情况如下图:

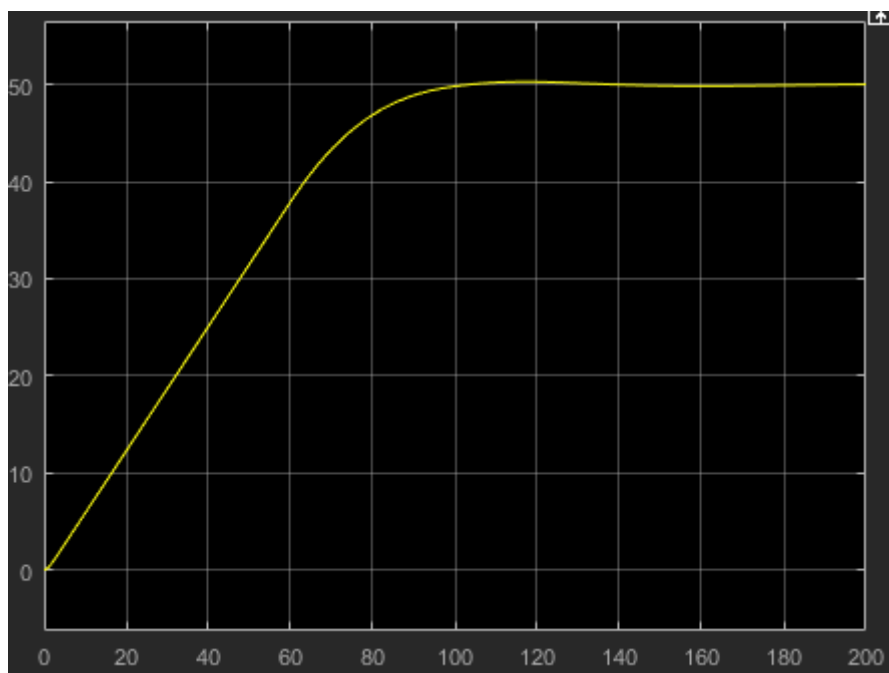


图 4 初始参数下的深度响应

其中横轴为时间，纵轴为深度，可见在 110s 左右到达预定深度并能保持稳定，且超调量较小，满足设计预定要求。

下面分析各参数变化对调节时间、稳定误差的影响。

(1) 改变 α_1 :

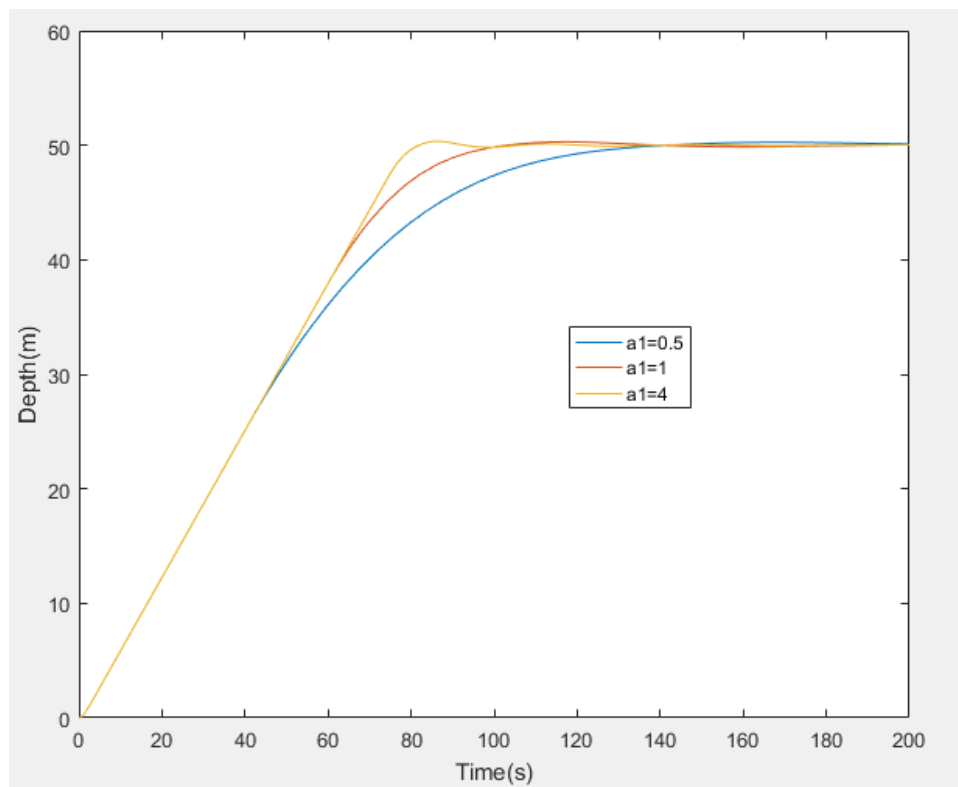


图 5 不同 α_1 的深度响应 ($\alpha_1 = 0.5$ 、 1.0 、 4.0)

(2) 改变 α_2 :

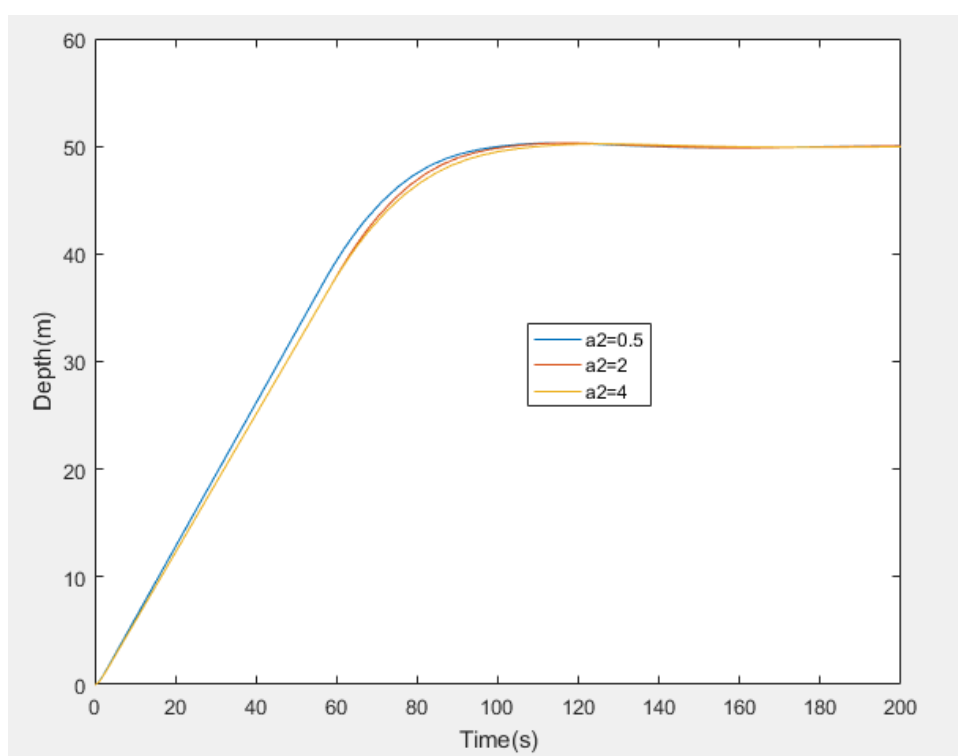


图 6 不同 α_2 的深度响应 ($\alpha_2 = 0.5$ 、1.0、4.0)

(3) 改变 α_3 :

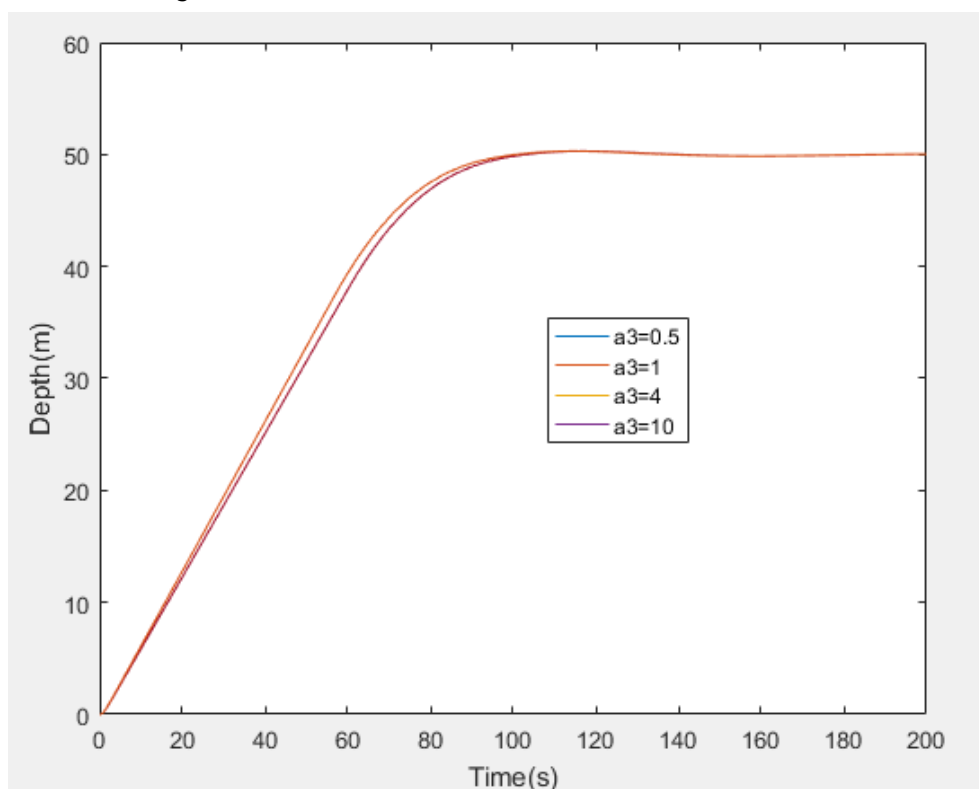


图 7 不同 α_3 的深度响应 ($\alpha_3 = 0.5$ 、1.0、4.0、10.0)

(4) 改变 α_4 :

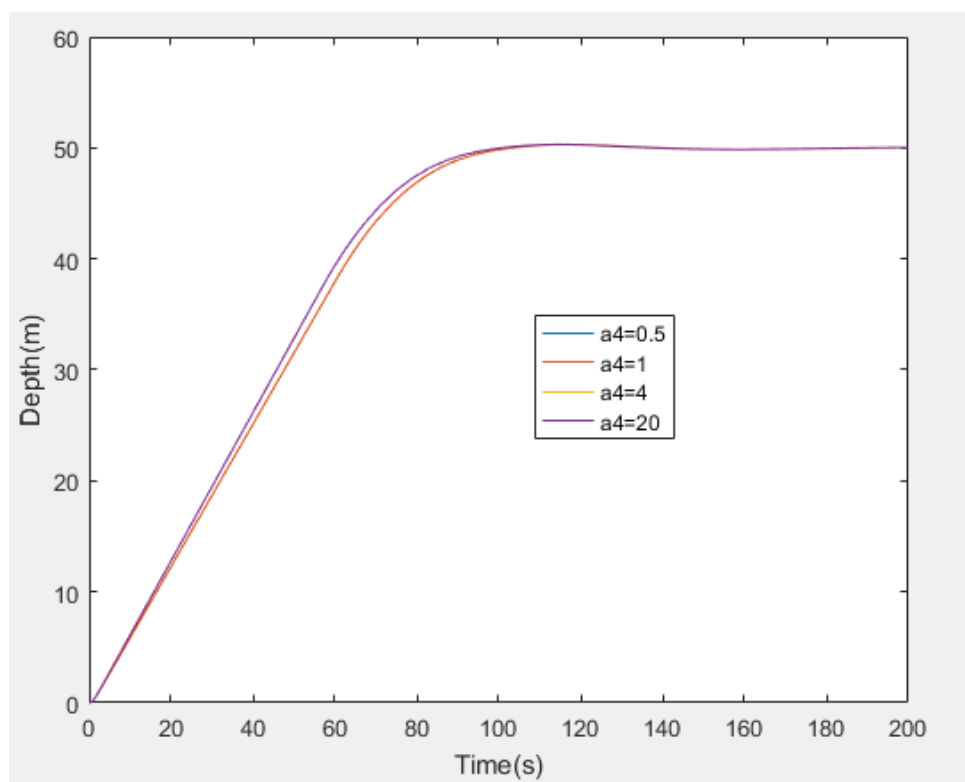


图 8 不同 α_4 的深度响应 ($\alpha_4 = 0.5$ 、 1.0 、 4.0 、 20.0)

(5) 改变 k :

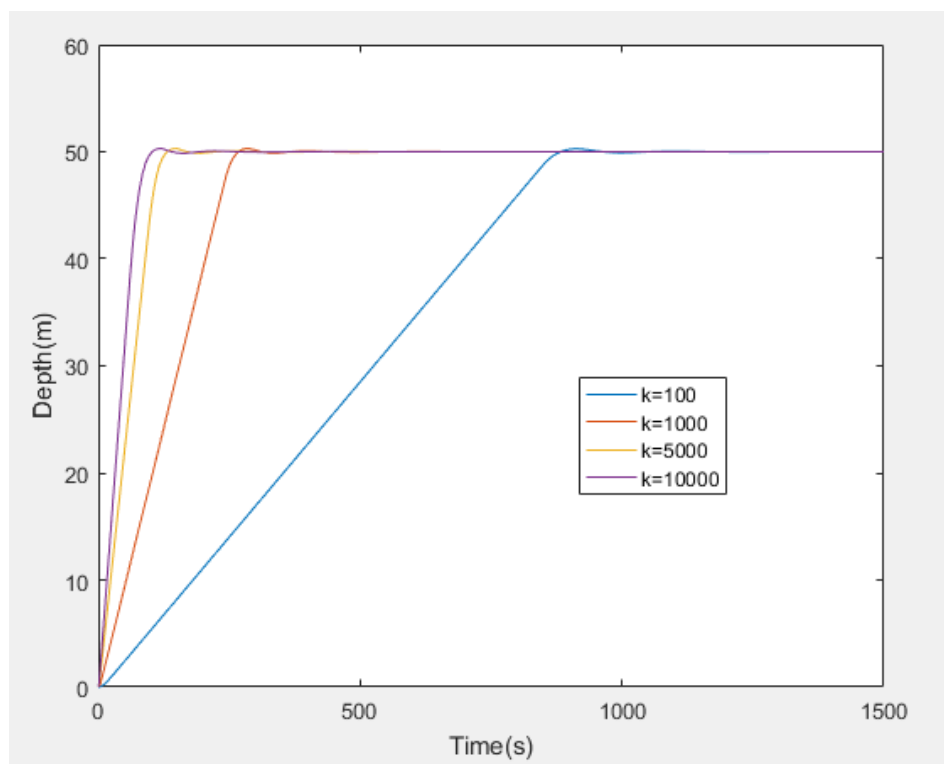


图 8 不同 k 的深度响应 ($k = 100$ 、 1000 、 5000 、 10000)

结果分析:

α_1 : 由于 α_1 是直接跟受控量相关的系数, 因此 4 个系数中改变 α_1 是对深度调节响应影响最明显的, 可以看到随着 α_1 增加, 系统达到稳定的时间缩短, 同时超调量、稳态误差也增加; 因此在实际参数镇定时应同时综合考虑超调量与调节时间的影响, 选取最合适的值。

α_2 : α_2 跟受控量的微分量——速度有关, 因此 α_2 的变化是对深度调节响应影响仅次于 α_1 的参数; 与 α_1 相反, 当 α_2 增大时稳定时间下降, 超调量减小, 稳态误差减小。这是由于给定电压 V_s 存在上限 100V, 同时也限制了下潜速度的最大值, 当 α_2 较大时, 限制的存在使得爬升阶段速度没办法达到更大值, 然而减小阶段收敛到 0 的速度又比较快, 因此最终使得整体到达稳态的时间减小。

α_3, α_4 : 由于 α_2 影响着螺旋桨转速, 进而影响下潜速度, 因此 α_3 、 α_4 对系统的影响与 α_2 是相似的, 但是没有 α_2 明显。

k : k 是饱和函数sigmoid(s)的增益, 影响着系统整体收敛的速度。当 k 增大时系统到达稳定的时间显著缩短, 同时超调量也增加, 稳态误差增加。

艏向控制器设计

被控系统数学建模

写出其余三自由度上的运动方程。

动力学方程如下：

$$A\dot{V} + N(V)V = \tau$$

其中： $A = M_{RB} + M_A = \begin{bmatrix} m - X_{\dot{u}} & 0 & -my_G \\ 0 & m - Y_{\dot{v}} & mx_G \\ -my_G & mx_G & I_z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix}$,

$$N(V) = C_{RB}(V) + C_A(V) + D(V)$$

$$= \begin{bmatrix} -X_u - X_{u|u||u|} & 0 & m(x_G r + v) - (Y_v v + Y_r r) \\ 0 & -Y_v - Y_{v|v||v|} & m(y_G r - u) + X_{\dot{u}} u \\ -m(x_G r + v) + (Y_v v + Y_r r) & -m(y_G r - u) - X_{\dot{u}} u & -N_r - N_{r|r||r|} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix}$$

由于在其余自由度上，我们的仅对艏摇角 ψ 有控制要求，经对 ROV 运动方程分析可知， ψ 仅与 u, v, r 有关，而与 x, y 无关，故我们可忽略在 x, y 自由度上的运动学方程，简化后的运动学方程如下：

$$\dot{\psi} = r$$

由于对 τ 的控制是通过在船尾的四个纵向布置的螺旋桨来间接实现的，所以 F_x, F_y, M_z 三者并不是相互独立的。故我们需建立它们与四个螺旋桨推力之间的关系。分别记左上，左下，右上，右下四个螺旋桨的推力为 $T_{x1}, T_{x2}, T_{x3}, T_{x4}$ ；记上方，下方螺旋桨距中纵剖面的距离分别为 d_1, d_2 。易得如下关系：

$$\begin{cases} F_x = T_{x1} + T_{x2} + T_{x3} + T_{x4} \\ F_y = 0 \\ M_z = (T_{x1} - T_{x3})d_1 + (T_{x2} - T_{x4})d_2 \end{cases}$$

根据题意，为了简化起见，单独分析回转过程时可令 $|T_{x1}| = |T_{x2}| = |T_{x3}| = |T_{x4}|$ ，且 T_{x1}, T_{x2} 方向与 T_{x3}, T_{x4} 相反。因此简化得：

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 2T_{x1}(d_1 + d_2) \end{cases}$$

除此之外，还有电机—螺旋桨模型，可详见上文，这里不再赘述。

控制器设计

按任务书要求，采取反馈线性化的方法对该系统进行控制器设计。经过分析后可知动力学方程模型与电机—螺旋桨模型联系的纽带为 M_z ，因此可以 M_z 为中介，对系统进行分部线性化。

(1) 将动力学方程组归纳如下：

$$\begin{aligned} A\dot{V} + N(V)V &= \tau \\ N(V) &= C_{RB}(V) + C_A(V) + D(V) \\ A &= M_{RB} + M_A \end{aligned}$$

可得：

$$\dot{V} = A^{-1}(\tau - N(V)V)$$

由于 $\tau = [0; 0; M_z]$ ，上式展开后得：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= f(x) \\ \dot{r} &= f(u, v, r) + g(u, v, r)M_z \end{aligned}$$

令：

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi - \psi_{ref} \\ x_2 &= \dot{x}_1 = r \\ x_3 &= u \\ x_4 &= v \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

对 r 所在的方程进行局部线性化，令 $\tau = Av + N(V)V$ ，得 $\dot{V} = v$ ，实现反馈线性化。

(2) 将电机—螺旋桨方程组归纳如下：

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{k_t i_a - B\omega - T_L}{J} \\ \dot{i}_a &= \frac{V_s - R_a i_a - k_e \omega}{L} \\ \frac{T_L}{T} &= \frac{DK_Q}{K_T} \end{aligned}$$

这里将 T_L 视作某个输入的常值，且令：

$$\begin{aligned} x_1 &= T - T_{ref} \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{T} \\ x_3 &= \omega \\ x_4 &= i_a \\ u &= V_s \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

对其进行局部线性化，令 $V_s = u = vL + R_a i_a + k_e \omega$ ，可得 $\dot{i}_a = v$

由此，整个系统以转矩 M_z 为中介被拆分为两部分，并分别完成了局部线性化，可对关心的状态量实行线性化控制。本次设计中运用的是极点配置法。

极点配置法

极点配置，即通过设计状态反馈矩阵 K ，改变原系统的极点位置，进而改变极点的动态性能^[3]。易判断，该线性系统完全能控，故可以任意配置极点，只需将所有极点配置在复平面左半平面即可，且极点位置越靠左，收敛速度越大。

设 $v = -K \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = -[k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{bmatrix}$ ，期望的极点位置分别为 s_1, s_2 。由单输入系统的极点配置算法“比较系数法”^[2]，可解出反馈矩阵 K ：

$$\begin{cases} k_1 = s_1 s_2 \\ k_2 = -(s_1 + s_2) \end{cases}$$

将 K 代回可得 v 的具体表达式，于是，得到最终设计的控制器：

$$T_z = -b(w)w - a[k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} z - z_d \\ w \end{bmatrix}$$

在本例中，令动力学状态方程组 $\dot{r} = v = -k_1 x_1 - k_2 x_2$ ，将其极点配置在左半平面，使其能够收敛。电机—螺旋桨状态方程组 $\dot{r}_a = v = -k_3(T - T_{ref})$ ，目的使其快速跟踪期望转矩，进而输出相应的给定电压 V_s 。

初始参数选为 $k = [k_1; k_2; k_3] = [0.3; 1.0; 0.3]$ ，可得艏向控制模型如下，具体模型详见Feedback_Linearization_Controller.slx：

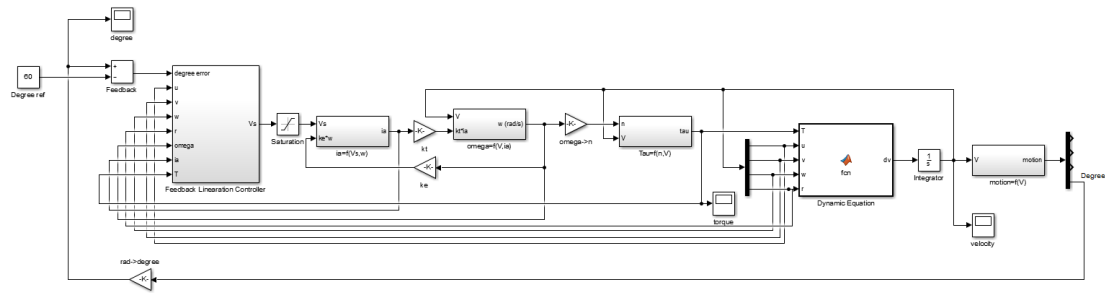


图 9 艏向控制器模型

控制器的输入为期望深度 $D_{ref} = 60^\circ$ ，输出为给定电压 V_s ， V_s 经过方程解算后得到相应的角度值 D ，并与给 D_{ref} 进行闭环输入实现定艏向控制。其在初始参数的响应如下：

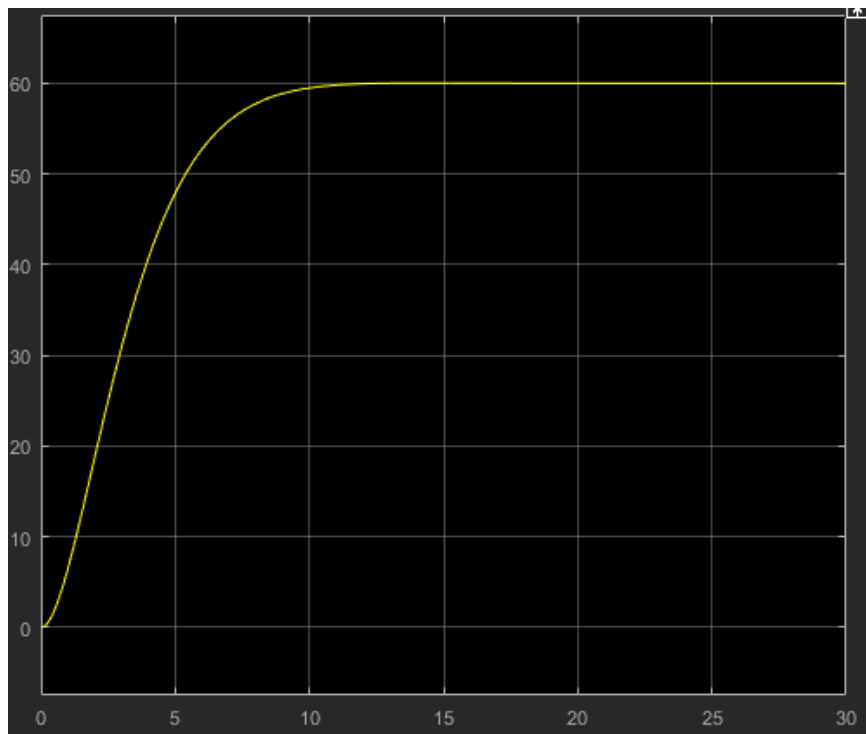


图 10 初始参数下的艏向角响应

其中横轴为时间，纵轴为艏向角，可见在 15s 左右到达预定角度并能保持稳定，且超调量较小，满足设计预定要求。

下面分析各参数变化对调节时间、稳定误差的影响。

(1) 改变 k_1 :

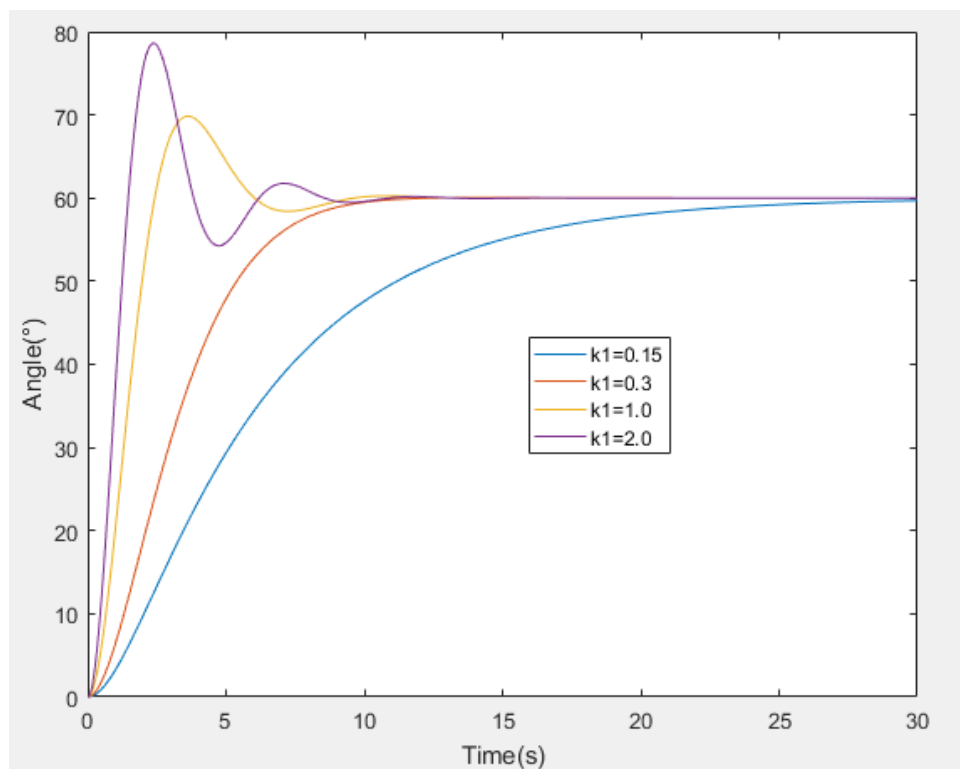


图 11 不同 k_1 的艏向角响应 ($k_1 = 0.15、0.3、1.0、2.0$)

(2) 改变 k_2 :

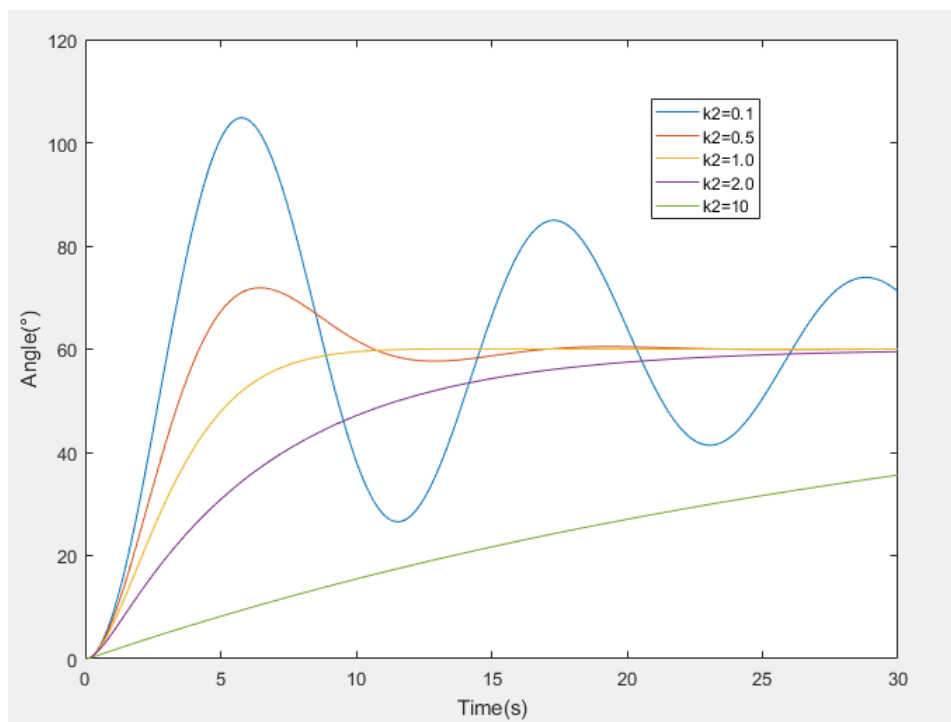


图 12 不同 k_2 的艏向角响应 ($k_2 = 0.1、0.5、1.0、2.0、10.0$)

(3) 改变 k_3 :

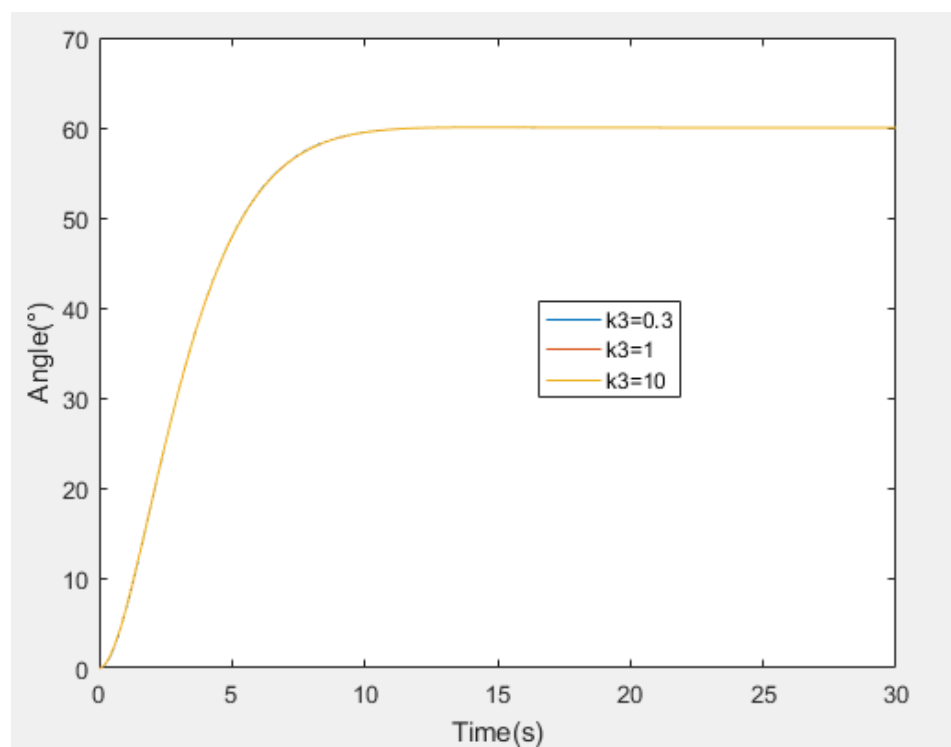


图 13 不同 k_3 的艏向角响应 ($k_3 = 0.3、1.0、10.0$)

结果分析:

k_1 : k_1 是直接跟受控量相关的系数,可以看到随着 k_1 增加,系统达到稳定的时间缩短,同时超调量、稳态误差也增加。

k_2 : k_2 与 k_1 共同影响着系统极点的位置,可以看到随着 k_2 增加系统调节时间上升,超调量减小,稳态误差减小,当 k_2 减小时调节时间减小,同时超调量也增加,波动增大。由于 k_2 影响着极点的位置,因此当 k_2 接近 0 时系统极点接近复平面的 i 轴,体现在响应接近等幅震荡,当 k_2 小于 0 时系统极点处于复平面的右半平面,此时系统响应幅值随时间增大而增大,因此应综合考虑调节时间和系统的稳定性,选取最好的 k_2 。

k_3 : k_3 是电机—螺旋桨模型的收敛系数,随着 k_3 的增大,艏向角响应的波形基本不变,因此可知在系统稳定的前提下 k_3 的参数变化对系统响应影响不大,具有较强的鲁棒性。

控制系统性能分析

整体控制系统模型

将深度控制器和艏向控制器加到 ROV 模型中，可得系统综合仿真模型如下，详见 UUV_4DOE_Depth_Angle.slx:

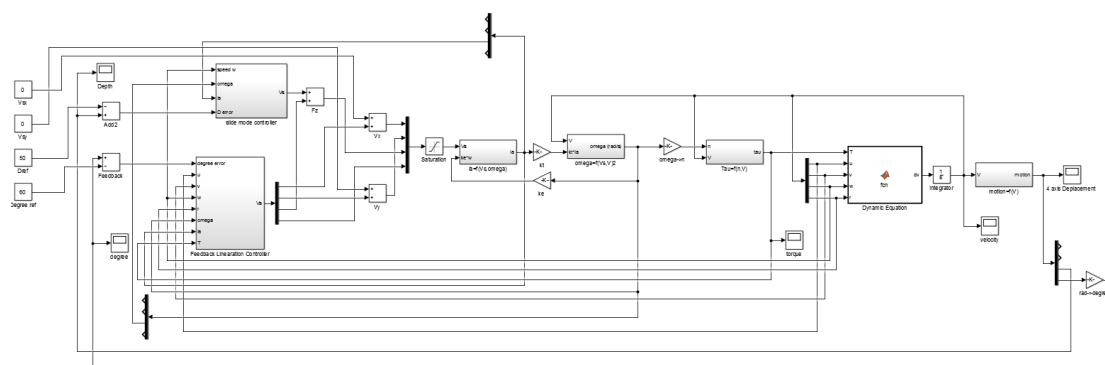


图 14 ROV 四自由度整体模型

系统最左边的输入自上而下分别为纵向、侧向螺旋桨的给定电压 V_{sx} 和 V_{sy} ，目标深度 D_{ref} 和目标艏向角度 $Degree_{ref}$ 。由于角度的控制涉及到纵向、侧向速度的耦合量，因此角度控制器输出回转转矩对应的给定电压 V_{Mz} 以外，还会输出部分用于控制纵向、侧向螺旋桨的给定电压 V_{sx1} 和 V_{sy1} ，因此最终输入到纵向、侧向螺旋桨的给定电压的值为 $V_{sx} + V_{sx1}$ 及 $V_{sy} + V_{sy1}$ 。

整体控制系统性能分析

将初始条件设为： $V_{sx} = V_{sy} = 0$ ，深度为 0m，艏向为 0 度；控制目标设为：深度为 50m，艏向为 60 度。

将控制参数设为： $\alpha = [4; 2; 1; 1]$ ， $k = [0.3; 1.0; 0.3]$ ，进行仿真，其运行结果如下：

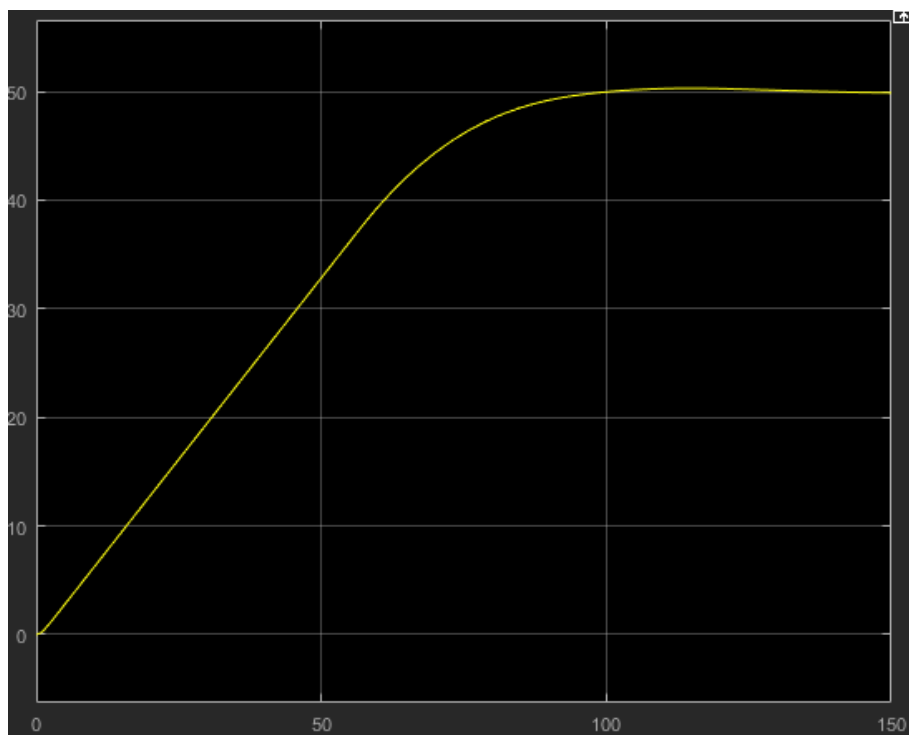


图 15 ROV 深度响应

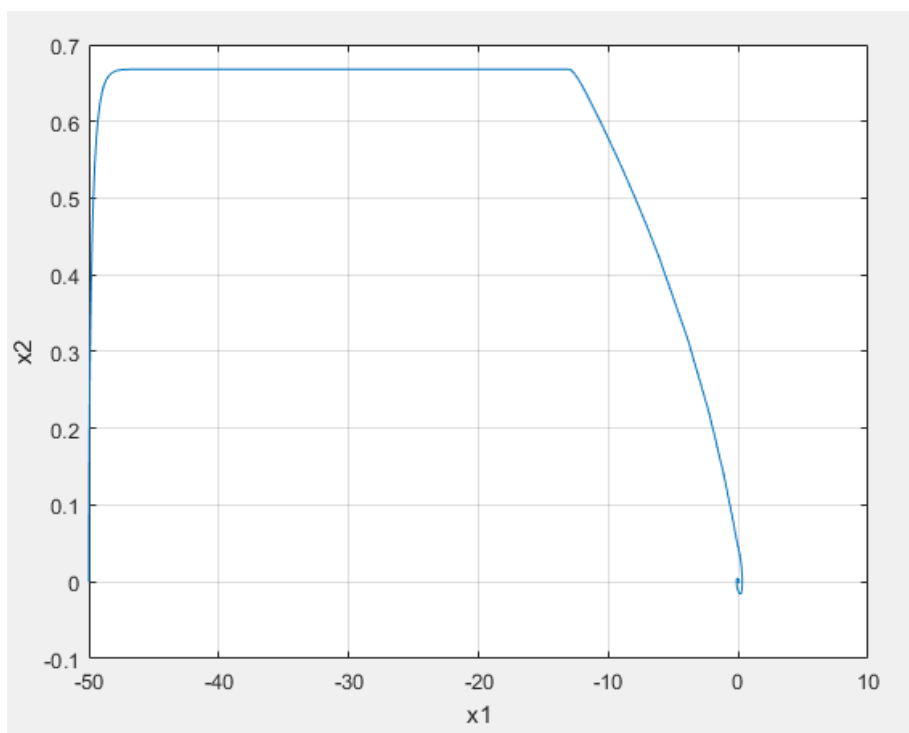


图 16 ROV 深度响应状态变量轨迹 ($x_1 - x_2$)

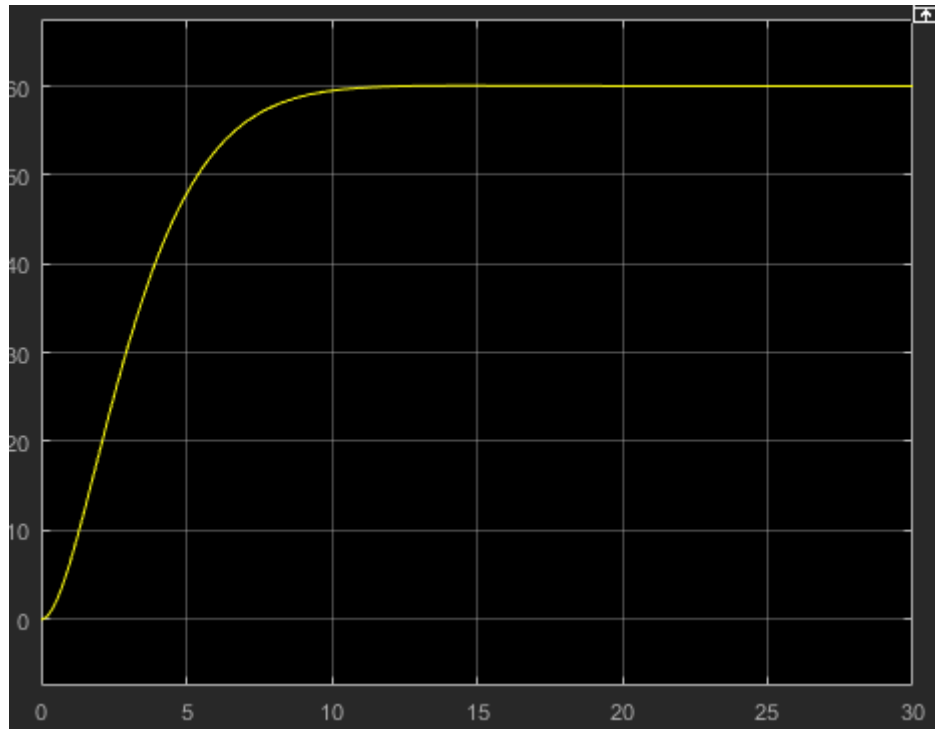


图 17 ROV 艏向角响应

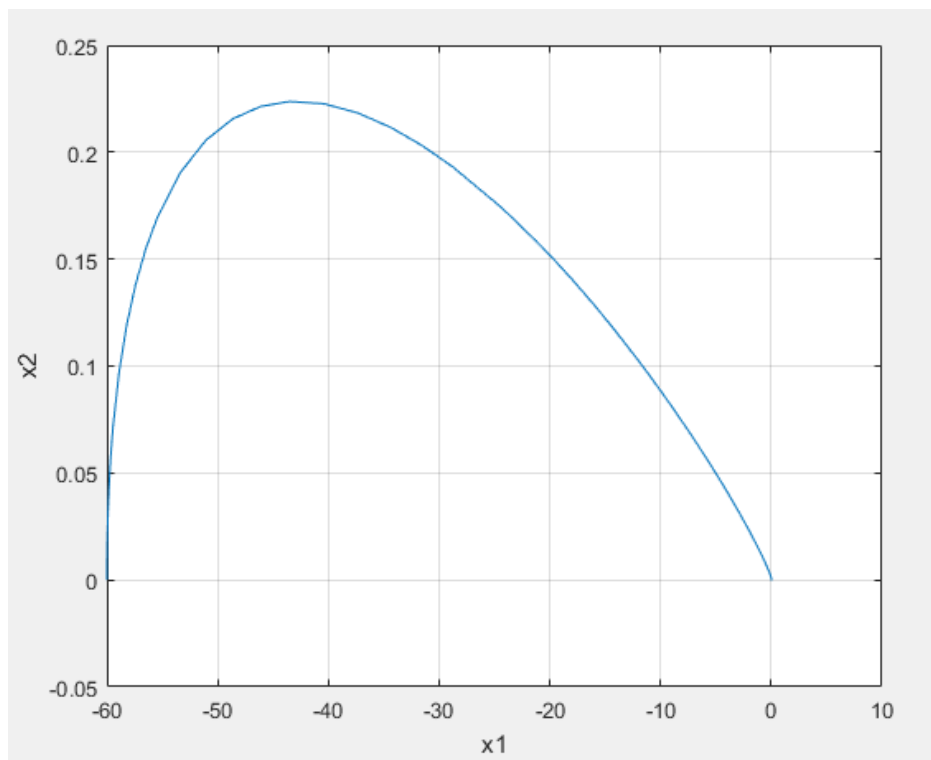


图 18 ROV 艏向角响应状态变量轨迹 ($x_1 - x_2$)

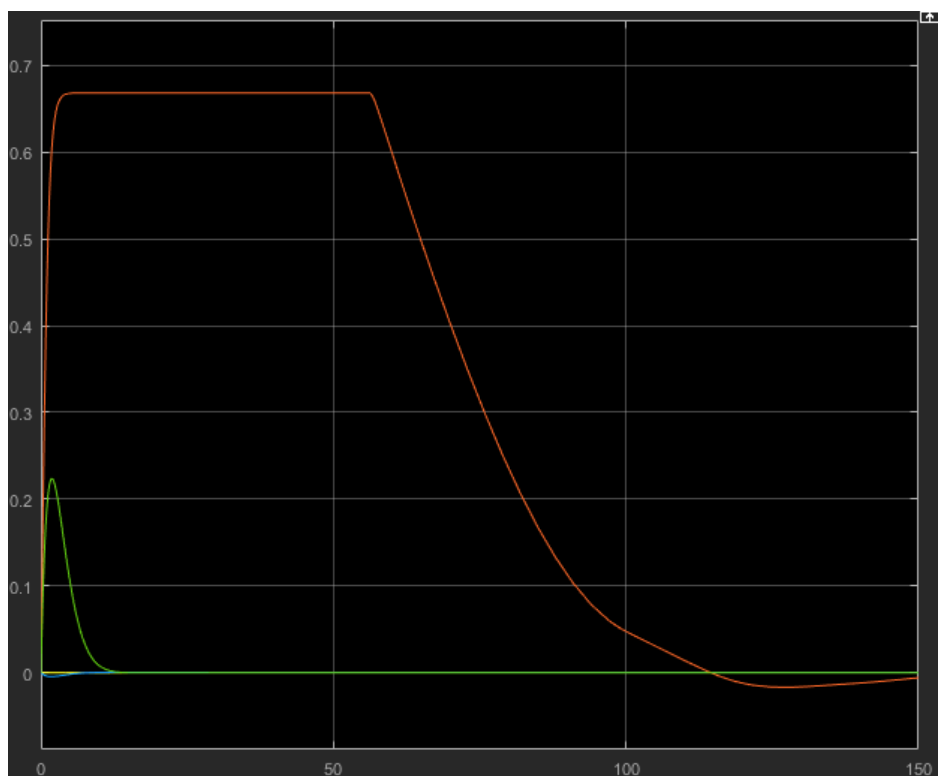


图 19 ROV 四自由度速度响应

由上图分析结果分析可知 ROV 在整体运行时依然能够良好的实现预期的控制效果,说明控制器运转良好;由于垂荡运动与其他三个自由度的运动完全解耦,因此波形响应只与垂向螺旋桨的运动有关,其结果与控制器单独仿真时相同;而回转运动与纵向、侧向的运动具有强耦合性,因此即便该两个方向的电机给定电压为 0,其对应方向的速度依然不恒为 0,而是略微偏离 0 值,因此有必要分析纵向、侧向电机给定电压不为 0 时 ROV 回转运动的响应。

仅改变 V_{sx} 、 V_{sy} 的值,目标角度为 60° , 可得结果如图所示:

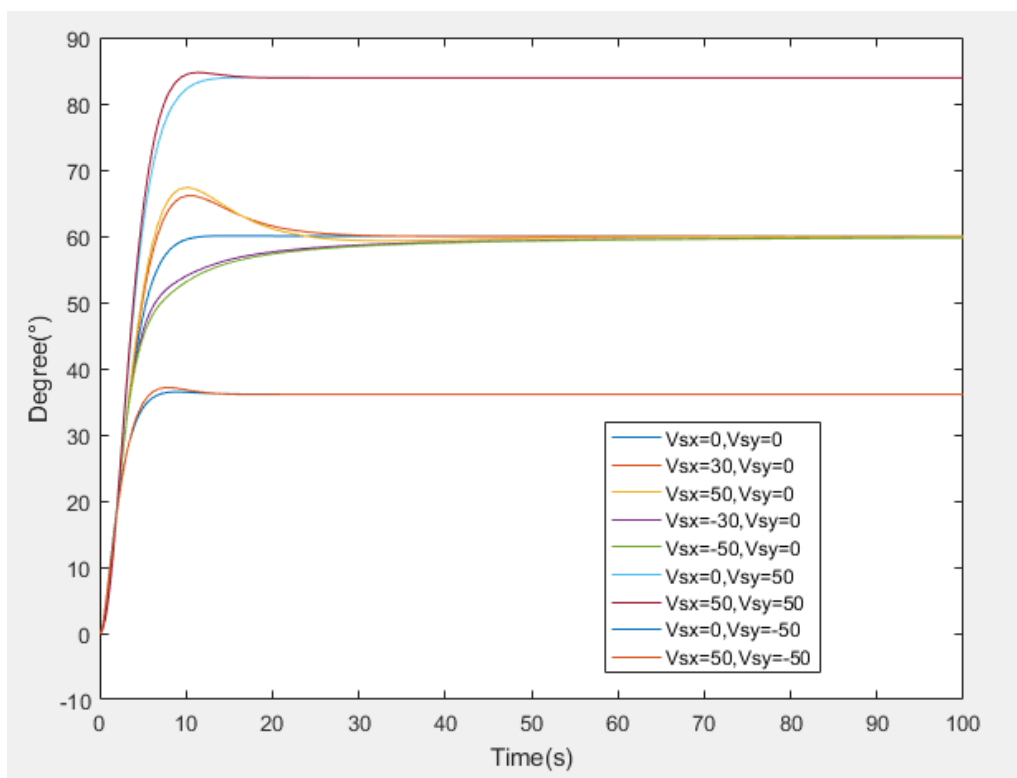


图 20 ROV 四自由度整体回转响应

由图可知若保持 $V_{sy} = 0$ ，仅施加 V_{sx} ，则回转运动依然能够最终稳定到目标角度，纵向运动对回转运动的影响体现在响应的调节时间和超调量上。若 $V_{sy} \neq 0$ ，则会直接影响到回转运动最终稳定的角度，使其稳态时偏离目标控制角；实际的模型会由于各种难以建模的因素产生无法预知的响应^[4]，因此在控制时尽可能避免人为因素造成的耦合工况发生，可知实际控制 ROV 回转时应尽量保持 $V_{sy} = 0$ ，这样能够增强系统的动作准确度。

总结

本次设计主要完成了以下工作：

1. 参考文档《DOE ROV 的动力学建模》，建立 ROV 的数学模型，具体包括动力学方程和运动学方程，并且建立了 ROV 的 **Simulink 仿真模型**（包括电机模型和螺旋桨模型），对开环模型进行了响应测试。
2. 根据任务书要求，将 ROV 深度方向运动和水平面运动解耦，建立对应的状态方程，得到两个非线性系统，分别作为理论依据设计深度控制器和艏向控制器。
3. 深度控制器的设计采用**滑动模态**方法，实现了完全的非线性深度控制，同时分析了控制参数对系统动态性能的影响，并通过引入**边界层**减小了抖振现象，改善了系统综合性能。
4. 艏向控制器的设计采用**反馈线性化**方法，通过系统分块线性化及局部反馈线性化的方法，选取适当的输入以消去系统中非线性项，得到等价的局部线性系统，针对该线性系统，采用**极点配置法**进行设计，并分析了控制参数对系统动态性能的影响。
5. 建立完整的控制系统模型。具体为包括：“ROV 运动模型”，“深度控制器”，“艏向控制器”，“电机+螺旋桨模型”四个部分，最后针对任务书所述目标，对整个系统进行 **Simulink 仿真**，测试了实际场景中四个自由度同时施加给定电压时系统的运动情况，同时更改参数进行比较，全面验证了所设计运动控制系统的性能。

参考文献

- [1]. H. K. Khalil, Nonlinear Systems, NJ, Upper Saddle River:Prentice-Hall, 2002.
- [2]. 贺云波,崔尚增.永磁直线电机的滑模控制与非线性效应补偿[J].计算机仿真,2021,38(04):172-176+441.
- [3]. 施颂椒,陈学中,杜秀华. 现代控制理论基础[M].北京;高等教育出版社,2009.
- [4]. 李繁飙,黄培铭,阳春华,廖力清,桂卫华.基于非线性干扰观测器的飞机全电刹车系统滑模控制设计[J/OL].自动化学报:1-14[2021-06-26].