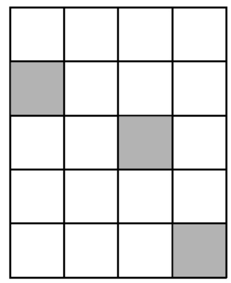
Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Problemas para convocatoria 2025

1. Problemas

Problema 1.1 (Sugerido para II o III nivel). En base a la siguiente figura.



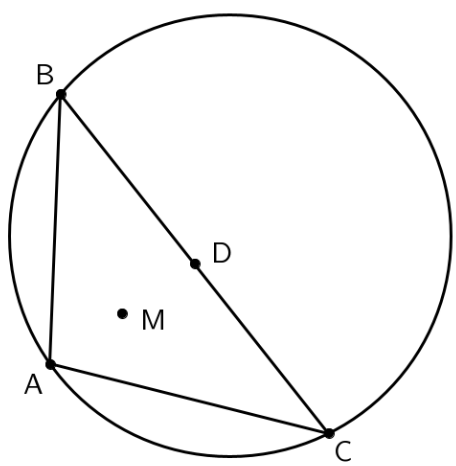
Se quiere que tenga dos ejes de simetría ¿cuál es la cantidad minima de cuadritos que deben pintarse para este fin?

Problema 1.2 (Sugerido para III o IV nivel). Un niño llamado Tato al aprender matemáticas inventó la operación numeral (#), cuyo resultado es la suma de dos números dividida entre su resta. Por ejemplo, $9 \# 3 = \frac{9+3}{9-3} = \frac{12}{6} = 2$. Hallar $(1 \# 2025) \# 1$.

Problema 1.3 (Sugerido para IV nivel). Si $x^2 - 2x + 11$ se hace cero cuando $x = n$, entonces, sin hallar n, calcular el valor numérico de

$$\frac{n^3 + 7n + 2047}{2}.$$

Problema 1.4 (Sugerido para IV nivel). En la figura, se tiene que $AB = AC = 40$ y $BC = 60$, donde D es un punto medio de BC y M es punto medio de AD. Si se traza una cuerda PQ paralela a BC que pasa por M, hallar la longitud de PQ.



Problema 1.5 (Sugerido para IV nivel). Diego enúmero las páginas de su cuaderno de matemáticas una por una, comenzando desde la página 1 y terminando en la página 2025 ¿cuántas veces escribió la cifra 2 al enúmerar su cuaderno?

Problema 1.6 (Sugerido para IV o V nivel)**.** Fabiana compró lápices y carpetas a 11 y 9 córdobas, respectivamente. ¿Cuántos artículos compró, sabiendo que la cantidad está entre 80 y 120 artículos, y que pagó la misma cantidad en lápices y en carpetas?

Problema 1.7 (Sugerido para IV o V nivel)**.** Naho tiene muchos amigos, tantos que no sabe la cantidad exacta. Si tuviera 2 amigos menos, la cantidad sería múltiplo de 3. Si tuviera 3 amigos menos, la cantidad sería múltiplo de 10. ¿Cuántos amigos tiene Naho si la cantidad de amigos es mayor a 60 y menor a 100?

Problema 1.8 (Sugerido para IV o V nivel)**.** $R(k)$ es una máquina que recibe entradas enteras y produce salidas enteras positivas. Si se tiene que $R(-1) \cdot R(2) = 4$ y

$$R(a)^2 = R(a-b) \cdot R(b)$$

para a, b enteros cualesquieras, hallar $R(k)$.

Problema 1.9 (Sugerido para IV o V nivel)**.** Hallar $U(t^2 + 7t + 10)$ en términos de t, sabiendo que $U(t^2 + t - 2) = t^3 - 27$ se cumple para cualquier número t.

Problema 1.10 (Sugerido para IV o V nivel)**.** Hallar todos los enteros m, n tales que

$$m^2 + mn + n^2 = m - 2n - 1.$$

Problema 1.11 (Sugerido para V nivel)**.** Brisa Marina quiere pagarle una deuda a Gerald, si ella solo tiene monedas de 3 y 5 córdobas y la deuda es un monto mayor a 7 córdobas ¿es posible pagar la deuda sea cual sea el monto? (la deuda es una cantidad entera)

Solución (Problema 1). Un rectángulo de estas características solo puede tener un eje vertical y horizontal de simetría. Trazando una línea vertical y reflejando llegamos a la siguiente configuración. Análogamente, trazando una línea horizontal y reflejando llegamos a la configuración. Luego, se necesitan como mínimo x cuadritos pintados ■

Solución (Problema 2). Realizando la operación $m\#n = \frac{m+n}{m-n}$, sustituyendo.

$$\begin{aligned}(m \# n) \# 1 &= \left(\frac{m+n}{m-n}\right) \# 1 = \frac{\frac{m+n}{m-n}+1}{\frac{m+n}{m-n}-1} \\ &= \frac{\frac{m+n+m-n}{m-n}}{\frac{m+n-m+n}{m-n}} = \frac{\frac{2m}{m-n}}{\frac{2n}{m-n}} \\ &= \frac{m}{n}\end{aligned}$$

Luego, se tiene que $(1 \# 2025) \# 1 = \frac{1}{2025}$. ■

Solución (Problema 3). Por dato tenemos la siguiente ecuación

$$n^2 - 2n + 11 = 0.$$

Convenientemente, podemos despejar $n^2 + 7 = 2n - 4 = 2(n-2)$, multiplicando este resultado por n se obtiene que $n^3 + 7n = 2(n^2 - 2n)$. Rápidamente, notamos $n^2 - 2n = -11$, usando este valor encontramos $n^3 + 7n = 2(-11) = -22$. Luego, al sustituir

$$\frac{n^3 + 7n + 2047}{2} = \frac{-22 + 2047}{2} = \frac{2025}{2}.$$ ■

Solución (Problema 4). ■

Solución (Problema 5). ■

Solución (Problema 6). Sean m y n las cantidades de lápices y carpetas, respectivamente, por dato tenemos que $11m = 9n$. De esta ecuación, es claro que 9 no divide a 11, por lo cual 9 divide a m, por tanto $m = 9k$. Sustituyendo, tenemos que $11(9k) = 9n$ lo que implica que $n = 11k$. Es decir, que la cantidad total de artículos está dado por $m+n = 11k+9k = 20k$, así el problema se reduce a encontrar k. Como la cantidad total está entre 80 y 120, tenemos que $80 < 20k < 120$ lo que implica $4 < k < 6$, luego como k es entero se tiene que $k = 5$. Luego, compró $20(5) = 100$ artículos. ■

Solución (Problema 7). ■

Solución (Problema 8). Haciendo $b = 0$, tenemos que $R(a)^2 = R(a)R(0)$ lo cual implica $R(a)^2 - R(a)R(0) = R(a)\left[R(a) - R(0)\right] = 0$. De esta ecuación aparecen dos casos, $R(a) = 0$ y $R(a) = R(0)$, el primer caso no puede ser, puesto que la definición dice que las salidas son positivas y 0 no es positivo, luego

$$R(a) = R(0) \text{ para todo entero } a,$$

así el problema se reduce a encontrar $R(0)$. Haciendo $a = 1$ y $b = -1$ en la ecuación original se tiene que $R(1)^2 = R(2)R(-1) = 4$ lo que implica que $R(1) = \pm 2$, así $R(1) = 2$. Finalmente, con $a = 1$ se tiene $R(1) = R(0) = 2$, luego $R(a) = 2$ para todo entero a. ■

Solución (Problema 9). Notamos que $U(t^2 + 7t + 10) = U\left[(t+2)(t+5)\right]$. Factorizando el argumento de $U(t^2 + t - 2) = t^3 - 27$ se tiene $U\left[(t-1)(t+2)\right] = t^3 - 27$, como estamos trabajando en los reales se puede tomar el cambio de variable $t = a+3$, con lo cual $U\left[(a+3-1)(a+3+2)\right] = (a+3)^3 - 27$, es decir

$$\begin{aligned}
U\left[(a+2)(a+5)\right] &= (a+3)^3 - 27\\
U\left[(a+2)(a+5)\right] &= (a^3 + 9a^2 + 27a + 27) - 27\\
U(a^2 + 7a + 10) &= a^3 + 9a^2 + 27a.
\end{aligned}$$

Como t es real, se tiene que a también lo es, luego $U(t^2 + 7t + 10) = t^3 + 9t^2 + 27t$ para todo real t. ■

Solución (Problema 10). Multiplicando por dos y reordenando vemos que

$$\begin{aligned}
m^2 + mn + n^2 &= m - 2n - 1\\
2m^2 + 2mn + 2n^2 &= 2m - 4n - 2\\
(m^2 - 2m) + (n^2 + 4n) + (m^2 + 2mn + n^2) &= -2\\
(m^2 - 2m + 1) + (n^2 + 4n + 4) + (m+n)^2 &= 3\\
(m-1)^2 + (n+2)^2 + (m+n)^2 &= 3
\end{aligned}$$

Como estamos trabajando en enteros la única opción es que todos los cuadrados de la izquierda sean iguales a 1. En caso contrario la ecuacíon no tendría soluciones enteras. Con lo cual se obtiene que $m = 2$ y $n = -1$. ■

Solución (Problema 11). ■