Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #10

Encuentro: 12
Curso: Polinomios
Fecha: 22 de junio de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Cristian Castilblanco

Contenido: Clase práctica #2

Aquí se exponen pista sobre cómo resolver los ejercicios y problemas de la clase #1.

1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Sea $P(x)$ un polinomio mónico de grado 3 tal que

$$P(x+1) = P(x) + nx + 2.$$

Hallar la suma de coeficientes del término cuadrático y lineal, sabiendo que su término independiente igual a 5.

* **Pista.** Considerar un polinomio generico que cumpla las condiciones y utilzar las evaluaciones $P(0)$ y $P(1)$.

Ejercicio 1.2. Determine todos los posibles valores que puede tomar $\dfrac{x}{y}$ si se cumple la ecuación $6x^2 + xy = 15y^2$ con $x, y \neq 0$.

* **Pista.** Formar una ecuación cuadrática y resolverla.

Ejercicio 1.3 (Con correciones)**.** Hallar $K \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = K^2(x-1)(x-2)$ tiene raíces reales iguales.

* **Pista.** Considerar el discriminante de la ecuación.

Ejercicio 1.4. Encontrar todas las soluciones de la ecuación $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$, con $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

* **Pista.** Formar una ecuación cuadrática tomando una de las letras como variable. Factorizar o usar la fórmula general cuadrática.

Ejercicio 1.5. Sea el polinomio $P(x)$ tal que

$$P(x^2+1) = x^4 + 4x^2,$$

encontrar $P(x^2-1)$.

* **Pista.**

1. Hallar una transformación para x de tal manera que se obtenga el resultado deseado. Apoyarse en una ecuación.

2. Encontrar $P(x)$ por medio de un cambio de variable.

Ejercicio 1.6. Sea $S(x)$ un polinomio cúbico tal que $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, $S(3) = 3$ y $S(4) = 5$, encontrar $S(6)$.

* **Pista.** Considerar un polinomio auxiliar que tenga a cierto valores cómo raíces. Expresar $S(x)$ en función de ese polinomio auxiliar.

Ejercicio 1.7. Para que la división de $6x^4 - 11x^2 + ax + b$ entre $3x^2 - 3x - 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

* **Pista.** Realizar una división larga.

Ejercicio 1.8. Calcular la suma de coeficientes del resto que deja $x^{3333} - 9$ entre $x^2 - 729$.

* **Pista.** Utilizar el teorema de resto.

Ejercicio 1.9. Probar que para todo n entero positivo se cumple que

1. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

* **Pista.** Utilizar inducción matemática.

Ejercicio 1.10. Con la ayuda del teorema de la raíz racional, encontrar todas las raíces de los siguientes polinomios

1. $2x^3 - 21x^2 + 52x - 21$

2. $x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 103x + 210$

* **Pista.** Utilizar el teorema de la raíz racional.

Ejercicio 1.11 (Con correciones)**.** Dado el polinomio $P(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a$ expresarlo en términos de los polinomios simétricos elementales y en función de sí mismo.

* **Pista.** Probar con el producto de σ_1 y σ_2. Considerar permutaciones de variables en la defინción de P.

Problema 1.1. Sea r una raíz de $x^2 - x + 7$. Hallar el valor de $r^3 + 6r + \pi$.

* **Pista.** Apoyarse en las propiedades de r evaluado en el polinomio.

Problema 1.2. Si $a + b + c = \sqrt{2023}$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 2021$, hallar el valor de

$$E = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}.$$

* **Pista.** Utilizar Vieta e identidades algébraicas.

Problema 1.3. El cociente de la división $\dfrac{x^{n+1}+2x+5}{x-3}$ es $Q(x)$, la suma de coeficientes de Q es $\dfrac{9^{10}+3}{2}$. Hallar el valor de n.

* **Pista.** Utilizar el teorema del resto.

Problema 1.4. Sean a, b y c las raíces reales de la ecuación $x^3+3x^2-24x+1=0$. Probar que

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0.$$

* **Pista.** Utilizar Vieta e identidades algébraicas.

Problema 1.5. Si la división

$$\frac{x^{80}-7x^{30}+9x^5-mx+1}{x^3+x-2}$$

Deja como resto a $R(x)=x^2+x-1$, hallar el valor de m.

* **Pista.** Utilizar el teorema del resto (apoyarse en el teorema de la raíz racional para encontrar las raíces del divisor.)

Problema 1.6. Sean r_1, r_2 y r_3 raíces distintas del polinomio $y^3-22y^2+80y-67$. De tal manera que existen números reales α, β y θ tal que

$$\frac{1}{y^3-22y^2+80y-67}=\frac{\alpha}{y-r_1}+\frac{\beta}{y-r_2}+\frac{\theta}{y-r_3}$$

para toda $y\notin\{r_1,r_2,r_3\}$. ¿Cuál es valor de $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\theta}$?

* **Pista.** Factorizar el polinomio y deshacer todas las fracciones tratando de encontrar $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ y $\frac{1}{\theta}$ de manera separada. Utilizar una idea parecida al teorema de la raíz racional.

Problema 1.7. La ecuación

$$2^{333x-2}+2^{111x+2}=2^{222x+1}+1$$

tiene tres raíces reales. Dado que su suma es $\dfrac{m}{n}$ con $m,n\in\mathbb{Z}^+$ y $mcd(m,n)=1$. Calcular $m+n$.

* **Pista.** Cambio de variable con la ayuda de las propiedades de potencia. Reducirlo a una ecuación cúbica y encontrar sus raíces.

Problema 1.8. Si $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ es un polinomio tal que $P(1)=10$, $P(2)=20$ y $P(3)=30$, determine el valor de

$$\frac{P(12)+P(-8)}{10}.$$

* **Pista.** Considerar un polinomio auxiliar y factorizarlo. Operar sobre ese polinomio auxiliar para obtener el valor de la expresión.

Problema 1.9. Sea $F(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a, b, c y d tal que $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$, entonces no existe un entero k tal que $F(k) = 8$.

* **Pista.** Suponer lo contrario y llegar a una contradicción. Utilizar las propiedades de raíces.

Problema 1.10. Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$. ¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{20}(x)$?

* **Pista.** Ver que pasa con casos pequeños de n y generalizar.

Problema 1.11. Determine un polinomio cúbico $P(x)$ en los reales, con una raíz igual a cero y que satisface $P(x-1) = P(x) + 25x^2$.

* **Pista.** Considerar una suma telescópica e utilizar ciertas propiedades de sumas de cuadrados.

Problema 1.12. Suponga que x, y y z son números distintos de cero tal que $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) = x^3 + y^3 + z^3$. Hallar el valor de

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

* **Pista.** Utilizar polinomios simétricos elementales e identidades algebraicas.

Problema 1.13 (OMCC 2020, shortlist)**.** Sean a, b y c números reales no nulos tales que $a+b+c = 0$. Determine el valor de la expresión

$$\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2) + (b^2+c^2)(c^2+a^2) + (c^2+a^2)(a^2+b^2)}{a^4+b^4+c^4}.$$

* **Pista.** Considerar $(a+b+c)^2$ y desarrollar el numerador para lograr simplificar. Utilizar los polinomios simétricos elementales.

Problema 1.14. Si a, b, c y d son las raíces de la ecuación $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$, calcular el valor de

$$\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^6} + \frac{1}{d^6}.$$

* **Pista.** Utilizar la ecuación para encontrar $\frac{1}{x^3}$ elevar al cuadrado para reducir la expresión en función de los polinomios simétricos elementales. Utilizar las fórmulas de vieta.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Cristian Castilblanco
Teléfono: +505 8581 1745 *(Tigo)*
Correo: cristian.castilblanco120@gmail.com