

# Entrenamiento 2023

## Lista de problemas

Kenny J. Tinoco

ASJT - Nicaragua

### 1. OMCC y PAGMO

#### 1.1. Encuentro 1

**Problema 1.1.** Sean reales  $a, b, c > 0$ , tales que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ . Demostrar que se cumple

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3.$$

**Problema 1.2.** Si  $x + y + z = 1$ , con  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ . Probar que

$$xy + yz + 2zx \leq \frac{1}{2}.$$

**Problema 1.3.** Si  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 16$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  Probar que

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \leq 32.$$

**Problema 1.4.** Para  $a, b, c \in \mathbb{R}$  con  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Probar que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq \frac{3}{2}.$$

**Problema 1.5.** Para todo  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , con  $y \neq -z, z \neq -x$  y  $x \neq -y$ . Probar que

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq 0.$$

**Problema 1.6.** Sea  $a_0 = 1$  y  $a_n = \prod_{i=0}^{n-1} a_i + 1, n \geq 1$ . Probar que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1} - 1} = 1.$$

**Problema 1.7.** Definimos la secuencia  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  por  $x_1 = \frac{1}{1012}$  y para  $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n^2}{1 + x_n + x_n^2}$$

Hallar el valor de

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \cdots + \frac{1}{x_{1011} + 1} + \frac{1}{x_{1012}}.$$

**Problema 1.8.** Definamos la siguiente secuencia como

$$B_1 = B_2 = 1 \\ B_n = 2B_{n-2} + B_{n-1}, \quad n \geq 3.$$

Probar que para  $n$  impar

$$\sum_{i=1}^{n-1} B_i = B_n - 1.$$

**Problema 1.9.** Sea  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $xyz = 1$ , probar que la siguiente desigualdad se cumple

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq 2.$$

**Problema 1.10.** Sea  $a_0 = a_1 = 1$  y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_1^2}{a_0} + \frac{a_2^2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}, n \geq 1.$$

Hallar  $a_n$  en función de  $n$ .

**Problema 1.11.** Sea  $P(x)$  un polinomio no nulo tal que  $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$  para todo real  $x$ , y  $P(2)^2 = P(3)$ . Hallar  $m+n$ , si  $P\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{m}{n}$  donde  $m$  y  $n$  son primos relativos.

## 1.2. Encuentro 2

**Problema 1.12.** Dado  $a - b = 2$ ,  $b - c = 4$ . Hallar el valor de  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ .

**Problema 1.13.** Dado que  $\frac{x}{x^2 + 3x + 1} = a$ , ( $a \neq 0$ ). Encontrar el valor de

$$\frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1}.$$

**Problema 1.14.** Dado que  $a + b = c + d$  y  $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ . Probar que

$$a^{2023} + b^{2023} = c^{2023} + d^{2023}.$$

**Problema 1.15.** Pruebe que si  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son números reales positivos, entonces:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

**Problema 1.16.** Sean  $a$ ,  $b$ ,  $c$  números reales positivos, muestre que

$$\sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

**Problema 1.17.** Sean  $a$ ,  $b$ ,  $c$  números reales positivos, con  $abc = 8$ , muestre que

$$\frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} \leq 0$$

**Problema 1.18.** Sean  $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$  números reales y para cada entero  $1 \leq n \leq 2023$  sea

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Si  $a_1 = 2023$  y se cumple que  $S_n = n^2 a_n$  para todo  $n$ , determina el valor de  $a_{2023}$ .

**Problema 1.19.** Existe un único polinomio con coeficiente reales de la forma

$$P(x) = 7x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

tal que  $P(1) = 1$ ,  $P(2) = 2$ ,  $\dots$ ,  $P(6) = 6$ . Hallar el valor de  $P(0)$ .

**Problema 1.20.** Consideremos la secuencia de números racionales definida por

$$x_1 = \frac{4}{3}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n^2 - x_n + 1}, n \geq 1$$

Demostrar que el numerador de la sumatoria

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

reducida en su mínima expresión es un cuadrado perfecto.

**Problema 1.21.** El entero positivo  $n$  verifica

$$\frac{1}{1 \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{2}) + \sqrt{1}} + \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}} +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{1}{n \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) + \sqrt{n+1}} = \frac{2022}{2023}$$

Hallar la suma de dígitos de  $n$ .

**Problema 1.22.** Sean los reales positivos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tales que  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$ . Probar que

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} +$$

$$\frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n)} \geq \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

**Problema 1.23.** Sea  $n \geq 2$  un entero positivo y  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reales positivos tales que  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . Probar que la siguiente desigualdad se cumple

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\dots+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+\dots+a_n} +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{a_n}{1+a_2+a_3+\dots+a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

**Problema 1.24.** Definamos  $a_k = (k^2 + 1)k!$  y  $b_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ . Sea

$$\frac{a_{100}}{b_{100}} = \frac{m}{n}$$

donde  $m$  y  $n$  naturales primos relativos. Hallar  $n - m$ .

**Problema 1.25.** Hallar el valor de

$$\frac{2^2}{2^2 - 1} \times \frac{3^2}{3^2 - 1} \times \frac{4^2}{4^2 - 1} \times \cdots \times \frac{2023^2}{2023^2 - 1}.$$

**Problema 1.26.** Determine el valor de la suma

$$\frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \frac{7}{3^2 \times 4^2} + \cdots + \frac{4045}{2022^2 \times 2023^2}.$$

**Problema 1.27.** Determine  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  si

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2^2 - 1} + \frac{b^2}{2^2 - 3^2} + \frac{c^2}{2^2 - 5^2} + \frac{d^2}{2^2 - 7^2} &= 1 \\ \frac{a^2}{4^2 - 1} + \frac{b^2}{4^2 - 3^2} + \frac{c^2}{4^2 - 5^2} + \frac{d^2}{4^2 - 7^2} &= 1 \\ \frac{a^2}{6^2 - 1} + \frac{b^2}{6^2 - 3^2} + \frac{c^2}{6^2 - 5^2} + \frac{d^2}{6^2 - 7^2} &= 1 \\ \frac{a^2}{8^2 - 1} + \frac{b^2}{8^2 - 3^2} + \frac{c^2}{8^2 - 5^2} + \frac{d^2}{8^2 - 7^2} &= 1 \end{aligned}$$

**Problema 1.28.** En un tablero cuadrado  $n \times n$  se escriben números dentro de cada casilla mediante el siguiente proceso:

- Se seleccionan números reales  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  todos distintos entre sí.
- En la casilla de la fila  $i$  columna  $j$  se escribe el número  $a_i + b_j$ .

Suponiendo que los  $n$  productos de los números en cada fila del tablero son iguales entre sí, demostrar que los  $n$  productos de los números en cada columna también son iguales entre sí.

## 2. IMO y OIM

### 2.1. Encuentro 1

**Problema 2.1.** Hallar todos los posibles números reales que satisfacen<sup>1</sup>

$$x \cdot \lfloor x \rfloor + 2022 = \lfloor x^2 \rfloor$$

**Problema 2.2.** Demuestre que para todo  $n \geq 4$  existen enteros positivos distintos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  para los cuales se cumple que

$$\frac{20}{21} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

**Problema 2.3.** Decimos que un conjunto  $S$ , posiblemente infinito, de enteros positivos distintos es bueno si para cualesquieras par de elementos  $m, n \in S$ , con  $m \neq n$ , se tiene que la diferencia  $|m - n|$  divide a  $m$  y  $n$ , simultáneamente.

- a. Demuestra que un conjunto bueno no puede tener una cantidad infinita de elementos.
- b. Demuestra que para todo entero positivo  $N \geq 2$ , existe un conjunto bueno con  $N$  elementos.

**Problema 2.4.** En un tablero de  $n \times n$ , el conjunto de todas las casillas que están ubicadas en la diagonal principal del tablero o debajo de ella, es llamado  $n$ -escalera. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra una 3-escalera:

¿De cuántas formas se puede dividir una 99-escalera en algunos rectángulos, que tengan sus lados sobre líneas de la cuadrícula, de tal forma que todos los rectángulos tengan áreas distintas?

**Problema 2.5.** Encontrar todas las funciones inyectivas  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , tales que satisfacen  $f(1) = 2, f(2) = 4$  y

$$f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

<sup>1</sup> $\lfloor x \rfloor$  representa la parte entera de  $x$ .

**Problema 2.6.** Sea  $n > 2$ , un entero y  $P(x)$  un polinomio de coeficientes reales tal que para un real  $k$

$$\frac{P(2) - P(1)}{1} = \frac{P(4) - P(2)}{2} = \frac{P(8) - P(4)}{4} = \dots = \frac{P(2^n) - P(2^{n-1})}{2^{n-1}} = k$$

$$\frac{P(2^{n+1}) - P(2^n)}{2^n} \neq k$$

Hallar el valor mínimo del grado de  $P$  y todos los posibles polinomios  $P$  con grado mínimo.

**Problema 2.7.** Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $a + b + c = 0$ . Demostrar que

$$\sqrt[n]{ab + bc + ca} \geq a\sqrt[n]{\frac{b+c}{2}} + b\sqrt[n]{\frac{c+a}{2}} + c\sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}.$$

**Problema 2.8.** Sea

$$\frac{r}{s} = 0.k_1k_2k_3 \dots$$

la expansión decimal de un número racional. Probar que a lo más dos de los números

$$\sigma_1 = 10 \left( \frac{r}{s} \right) - k_1, \quad \sigma_1 = 10^2 \left( \frac{r}{s} \right) - (10k_1 + k_2), \\ \sigma_1 = 10^3 \left( \frac{r}{s} \right) - (10^2k_1 + 10k_2 + k_3), \quad \dots$$

son iguales.

## 2.2. Encuentro 2

**Problema 2.9.** Encuentra todas las funciones  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tales que para cualesquiera enteros  $m, n$  tenemos

$$f(m+n) + f(mn-1) = f(m)f(n).$$

**Problema 2.10.** Encontrar todas las funciones  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que para todo  $x, y \in \mathbb{N}$  se cumple que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3(x+y)\sqrt[3]{f(x)f(y)}.$$

**Problema 2.11.** Encontrar todas las funciones  $f$  tal que

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

para todo real  $x$  y  $y$ .

**Problema 2.12.** Determinar todos los enteros  $n \geq 2$  que tengan la siguiente propiedad: para cualquier entero  $a_1, a_2, \dots, a_n$  cuya suma no sea divisible por  $n$ , existe un índice  $1 \leq i \leq n$  tal que ninguno de los números

$$a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+n-1}$$

es divisible por  $n$ . Aquí, dejamos  $a_i = a_{i-n}$  cuando  $i > n$ .

**Problema 2.13.** Sea  $n$  un entero impar. Pintaremos los vértices de un  $n$ -ágono regular con tres colores talque hay un número impar de vértices de cada color. Probar que existen un triángulo isósceles con los tres vértices de diferente color.

**Problema 2.14.** Determinar todas las funciones  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  con la propiedad

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

para todo entero  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

**Problema 2.15.** Sea  $a_{in}$  una sucesión de reales positivos que satisface

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

para todo entero positivo  $k$ . Muestra que  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ , para todo  $n \geq 2$ .

**Problema 2.16.** Encuentre todas las funciones  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  que satisfacen

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x+y)f(yf(x)).$$

## Referencias

- [BGV14] Radmila Bulajich, José Gómez, and Rogelio Valdez. *Desigualdades*. UNAM, 2014.
- [Her20a] Josué Hernández. Guia Practica de Productos Notables. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*. Nicaragua, Agosto 2020.
- [Her20b] Josué Hernández. Sumas telescópicas II. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*. Nicaragua, Agosto 2020.
- [Ins20] Olimpiadas InsOMMnia. I Olimpiada de Álgebra. *InsOMMnia*, 2020.
- [NN19] Peter Nizić-Nikolac. The alternative IMOs (2001 - 2017). *AoPs*, July 2019.
- [San21] Marcos Sanchez. Clase de álgebra. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*. Nicaragua, Marzo 2021.
- [San22] Marcos Sanchez. Hoja de trabajo #1. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*. Nicaragua, Enero 2022.