Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #9

Encuentro: 9
Curso: Polinomios
Fecha: 20 de mayo de 2023

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Fórmulas de Vieta II y Polinomios simétricos

1. Desarrollo

1.1. Polinomios simétricos elementales

Un polinomio de dos variables $P(x, y)$ es simétrico si $P(x, y) = P(y, x)$ para toda x, y. Por ejemplo, $7x^2 - 5xy + 7y^2$ es simétrico, ya que $P(x, y) = 7x^2 - 5xy + 7y^2$ es igual a $P(y, x) = 7y^2 - 5yx + 7x^2$.

Así mismo, un polinmio de tres variables $P(x, y, z)$ es simétrico si $P(x, y, z) = P(x, z, y) = P(y, x, z) = P(y, z, x) = P(z, x, y) = P(z, y, x)$. Por ejemplo, $13x^5 + 13y^5 + 13z^5 - 8xyz + 1$ es simétrico, ya que

$$\begin{aligned}
P(x, y, z) &= 13x^5 + 13y^5 + 13z^5 - 8xyz + 1\\
P(x, z, y) &= 13x^5 + 13z^5 + 13y^5 - 8xzy + 1\\
P(y, x, z) &= 13y^5 + 13x^5 + 13z^5 - 8yxz + 1\\
P(y, z, x) &= 13y^5 + 13z^5 + 13x^5 - 8yzx + 1\\
P(z, x, y) &= 13z^5 + 13x^5 + 13y^5 - 8zxy + 1\\
P(z, y, x) &= 13z^5 + 13y^5 + 13x^5 - 8zyx + 1
\end{aligned}$$

son todos iguales. Análogamente, un polinomio de n variables $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es simétrico si $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(x_1, x_3, \cdots, x_n) = \cdots$, es decir si P evaluado en todas las permutaciones de las n variables da el mismo resultado.

Observación 1. En el polinomio de ejemplo $7x^2 - 5xy + 7y^2$, veamos que $P(x, 1) = P(1, x)$. Es decir, $7x^2 - 5x + 7$ es un polinomio simétrico o **recíproco**, esta es la manera en la que se presentaron los polinomios recíprocos en la primera clase del curso[1].

Resulta que los polinomios simétricos más simples son los que tienen sus variables con grado 1, como por ejemplo $x + y$, xy, $x + y + z$, etc. Esto se puede llevar a la formalización, por lo cual veamos la siguiente definición.

[1]Ver [TD23a], página 1.

Definición (**Polinomio simétrico elemental**). Sea $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. El k-ésimo polinomio simétrico elemental en las variables $x_1, \cdots, x_n$ es el polinomio[2] σ_k definido por

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

donde la suma se realiza sobre los subconjuntos $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ de tamaño k del conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Para más claridad veamos algunos casos:

Variables	Polinomios simétricos elementales
a, b	$\sigma_1 = a + b$ $\sigma_2 = ab$
a, b, c	$\sigma_1 = a + b + c$ $\sigma_2 = ab + bc + ca$ $\sigma_3 = abc$
a, b, c, d	$\sigma_1 = a + b + c + d$ $\sigma_2 = ab + ac + ad + bc + bd + da$ $\sigma_3 = abc + bcd + cda$ $\sigma_4 = abcd$
a, b, c, d, e	$\sigma_1 = a + b + c + d + e$ $\sigma_2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cb + ce + de$ $\sigma_3 = abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + ced$ $\sigma_4 = abcd + abce + abde + acde + bced$ $\sigma_5 = abcde$

Ejemplo 1. Hallar $x^2 + y^2$ si

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^4 + y^4 = 7 \end{cases}$$

Solución. De la primera ecuación $x + y = 1$ al cuadrado obtenemos que $x^2 + 2xy + y^2 = 1$, es decir $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. Por lo tanto sólo basta encontrar el valor de xy para solucionar el problema. Veamos que

$$(x^2 + y^2)^2 = (1 - 2xy)^2$$
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 1 - 4xy + 4x^2y^2$$
$$x^4 + y^4 = 2x^2y^2 - 4xy + 1$$
$$7 = 2x^2y^2 - 4xy + 1$$
$$2x^2y^2 - 4xy - 6 = 0$$
$$2(x^2y^2 - 2xy - 3) = 0$$
$$2(xy - 3)(xy + 1) = 0$$

Es decir, xy puede tomar los valores de 3 y -1. Luego, $x^2 + y^2$ puede tomar los valores de $\boxed{-5}$ y $\boxed{3}$. $\square$

[2] σ_k: Se lee sigma sub k.

1.2. Fórmulas de Vieta

Ya conociendo los polinomios simétricos elementales, podemos volver a ver la defición de las fórmulas de Vieta que ya conocemos[3].

Definición (Fórmulas de Vieta). Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$, entonces

$$\sigma_k = (-1)^k \times \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Ejemplo 2. Determine el producto de las raíces de $50x^{50} + 49x^{49} + \cdots + x + 1$.

Solución. Por las fórmulas de Vieta, tenemos que

$$\sigma_{50} = (-1)^{50} \times \frac{a_0}{a_{50}} = \boxed{\frac{1}{50}}.$$

□

Ejemplo 3. Consideremos el polinomio $P(x) = x^n - (x-1)^n$, donde n es un entero positivo impar. Encontrar el valor de la suma y el valor del producto de sus raíces.

1.3. Agregados culturales y preguntas

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 2.1. Sean a, b y c las raíces de la ecuación $3x^3 + x + 2015 = 0$. Calcular

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3$$

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 3.1. Considera el polinomio $P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ y $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 las raíces de Q, encontrar $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$.

[3] Ver [TD23b], página 1.

4. Extra

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[Eng97] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1997.

[NL22a] William Nicoya and Ricardo Largaespada. Clase 11. Fórmulas de Vieta para polinomios de grado n. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Junio 2022.

[NL22b] William Nicoya and Ricardo Largaespada. Clase 12. Polinomios simétricos. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Junio 2022.

[TD23a] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 1. Polinomios cuadráticos y cúbicos. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2023.

[TD23b] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 4. Fórmulas de Vieta. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com