Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #x

Encuentro: x
Curso: Polinomios
Fecha: x de x de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Fórmulas de Vieta II y Polinomios simétricos

En esta novena clase veremos los llamados polinomios simétricos, un tipo particular de polinomios multivariables que de manera intrínseca ya hemos visto. Luego, nos centraremos en los polinomios simétricos elementales y sus relaciones con la fórmulas de Vieta.

1. Desarrollo

1.1. Polinomios simétricos elementales

Un polinomio de dos variables $P(x,y)$ es simétrico si $P(x,y)=P(y,x)$ para toda x, y. Por ejemplo, $7x^2-5xy+7y^2$ es simétrico, ya que $P(x,y)=7x^2-5xy+7y^2$ es igual a $P(y,x)=7y^2-5yx+7x^2$.

Así mismo, un polinomio de tres variables $P(x,y,z)$ es simétrico si $P(x,y,z)=P(x,z,y)=P(y,x,z)=P(y,z,x)=P(z,x,y)=P(z,y,x)$. Por ejemplo, $13x^5+13y^5+13z^5-8xyz+1$ es simétrico, ya que

$$\begin{aligned}
P(x,y,z)&=13x^5+13y^5+13z^5-8xyz+1\\
P(x,z,y)&=13x^5+13z^5+13y^5-8xzy+1\\
P(y,x,z)&=13y^5+13x^5+13z^5-8yxz+1\\
P(y,z,x)&=13y^5+13z^5+13x^5-8yzx+1\\
P(z,x,y)&=13z^5+13x^5+13y^5-8zxy+1\\
P(z,y,x)&=13z^5+13y^5+13x^5-8zyx+1
\end{aligned}$$

son todos iguales. De manera general, un polinomio de n variables $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es simétrico si

$$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(x_1,x_3,\cdots,x_n)=\cdots,$$

es decir si $P(x)$ evaluado en todas las permutaciones de las n variables da el mismo resultado. Resulta que los polinomios simétricos más simples son los que tienen sus variables con grado 1, como por ejemplo $x+y$, xy, $x+y+z$, etc. Esto se puede llevar a la formalización, por lo cual veamos la siguiente definición.

Definición 1.1 (Polinomio simétrico elemental)**.** Sea $k\in\{1,2,\cdots,n\}$. El k-ésimo polinomio simétrico elemental en las variables $x_1,\cdots,x_n$ es el polinomio[1] σ_k definido por

$$\sigma_k=\sigma_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Sigma x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

donde la suma se realiza sobre los subconjuntos $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ de tamaño k del conjunto $\{1,2,\cdots,n\}$.

[1] σ_k: Se lee sigma sub k.

Para más claridad veamos algunos casos:

Variables	Polinomios simétricos elementales
$a,\ b$	$\sigma_1 = a+b$ $\sigma_2 = ab$
$a,\ b,\ c$	$\sigma_1 = a+b+c$ $\sigma_2 = ab+bc+ca$ $\sigma_3 = abc$
$a,\ b,\ c,\ d$	$\sigma_1 = a+b+c+d$ $\sigma_2 = ab+ac+ad+bc+bd+da$ $\sigma_3 = abc+bcd+cda$ $\sigma_4 = abcd$
$a,\ b,\ c,\ d,\ e$	$\sigma_1 = a+b+c+d+e$ $\sigma_2 = ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cb+ce+de$ $\sigma_3 = abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+ced$ $\sigma_4 = abcd+abce+abde+acde+bced$ $\sigma_5 = abcde$

Cuadro 1: Ejemplos de polinomios simétricos elementales.

Ejemplo 1.1. Hallar el valor de (x^2+y^2) sabiendo que $x+y=1 \ \wedge\ x^4+y^4=7$.

Solución. Elevando al cuadrado la primera ecuación $x^2+2xy+y^2=1 \implies x^2+y^2=1-2xy$. Por tanto, el ejercicio se reduce a encontrar el valor de xy. Veamos que

$$\begin{aligned} (x^2+y^2)^2 &= (1-2xy)^2 \\ x^4+2x^2y^2+y^4 &= 1-4xy+4x^2y^2 \\ x^4+y^4 &= 2x^2y^2-4xy+1 \\ 7 &= 2x^2y^2-4xy+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &2x^2y^2-4xy-6=0 \\ &2(x^2y^2-2xy-3)=0 \\ &2(xy-3)(xy+1)=0 \\ &\implies xy=3 \ \vee\ xy=-1 \end{aligned}$$

Sabiendo los posibles valores de xy, vemos que (x^2+y^2) puede tomar los valores de -5 y 3. ■

Otra notación útil para polinomios simétricos, es la siguiente.

Definición 1.2 (Suma simétrica de potencias)**.** La suma simétrica de la k-ésimas potencias en las variables $x_1,\cdots,x_n$ es el polinomio s_k definido por

$$s_k = s_k(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k, \quad \forall k\in\mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

Algunas relaciones clásicas entre las sumas simétricas de potencias y los polinomios simétricos elementales, como por ejemplo $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$ para cualquier cantidad de variables. La relación $s_k = \sigma_1 s_{k-1}-\sigma_2 s_{k-2}$ para dos variables y $s_k=\sigma_1 s_{k-1}-\sigma_2 s_{k-2}+\sigma_3 s_{k-3}$ para tres variables. Estas relaciones son casos particulares de la llamadas **Fórmulas de Newton**. Se invita al estudiante investigar por su propia cuenta sobre estas fórmulas.

1.2. Fórmulas de Vieta

Ya conociendo los polinomios simétricos elementales, podemos volver a ver la definición de las fórmulas de Vieta que ya conocemos. Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$, entonces

$$\sigma_k = (-1)^k \times \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Ejemplo 1.2. Determine el producto de las raíces de $50x^{50} + 49x^{49} + \cdots + x + 1$.

Solución. Por las fórmulas de Vieta, tenemos que

$$\sigma_{50} = (-1)^{50} \times \frac{a_0}{a_{50}} = \boxed{\frac{1}{50}}.$$

■

1.3. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 1.1. Consideremos el polinomio $P(x) = x^n - (x-1)^n$, donde n es un entero positivo impar. Encontrar el valor de la suma y el valor del producto de sus raíces.

Problema 1.2. Encontrar los números reales x y y, que satisfacen

$$\begin{cases} x^3 + y^3 &= 7 \\ x^2 + y^2 + x + y + xy &= 4 \end{cases}$$

Problema 1.3. Encontrar todas las soluciones reales del sistema

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz &= x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}$$

Problema 1.4. Sean x, y y z números reales, encontrar todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z &= 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 30 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 132 \end{cases}$$

Problema 1.5. Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, demostrar que

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5) = 5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4).$$

Problema 1.6. Sean a, b y c números reales distintos de cero, con $a + b + c \neq 0$. Probar que si

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

entonces para n impar se cumple

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Problema 2.1. Sean x, y y z números reales tales que

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x^2+y^2+z^2 &= 5 \\ x^3+y^3+z^3 &= 7 \end{cases}$$

Hallar el valor de $x^4+y^4+z^4$.

Problema 2.2. Sean a, b y c las raíces del polinomio $3x^3+x+2023$. Calcular

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3.$$

Problema 2.3. Considera el polinomio $P(x) = x^6-x^5-x^3-x^2-x$ y $Q(x) = x^4-x^3-x^2-1$. Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 las raíces de Q, encontrar $P(z_1)+P(z_2)+P(z_3)+P(z_4)$.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Sea x un número real tal que $\sin^{10}(x)+\cos^{10}(x) = \frac{11}{36}$, entonces $\sin^{12}(x)+\cos^{12}(x) = \frac{m}{n}$ con m y n primos relativos. Encontrar $m+n$.

Referencias

[TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 9. Fórmulas de vieta ii y Polinomios simétricos. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Mayo 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com