Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #3

Encuentro: 3
Curso: Polinomios
Fecha: 1 de abril de 2023

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Clase práctica 1

En esta primera clase práctica veremos las soluciones de los problemas propuesto de [TD23a] y [TD23b], así como otros ejercicios y problemas para afianzar lo aprendidio en las primeras clases del curso.

1. Desarrollo

Ejercicio 1. Si $P(x^2 - 2x + 1) = x^2 - 3$, determine $P((x-2)^2)$.

Solución. Notemos que $P(x^2 - 2x + 1) = P\left[(x-1)^2\right] = x^2 - 3$. Luego es fácil ver que si hacemos $x \to x - 1$, entonces $P\left[((x-1)-1)^2\right] = (x-1)^2 - 3$, es decir $P\left[(x-2)^2\right] = x^2 - 2x - 2$. □

Ejercicio 2. Sea $P(x) = x^2$, encontrar $Q(x)$ si $(P \circ Q)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

Solución. Por la primera condición $(P \circ Q)(x) = P(Q(x)) = Q(x)^2$ y usando la segunda condición tenemos $P(Q(x)) = Q(x)^2 = 4x^2 - 12x + 9$. Al factorizar y sacar raíz cuadrada llegamos a $Q(x) = \pm(2x - 3)$. □

Ejercicio 3. Sea $Q(x) = \frac{1}{5}x - 2$ y $P(x) = Q^4(x)$, probar que $P(1560) = 0$.

Solución. Primero encontramos $Q^4(x)$.

$$Q^1(x) = Q(x)$$

$$Q^2(x) = Q(Q(x)) = Q\left(\frac{1}{5}x - 2\right) = \frac{1}{5^2}x - 2(1 + \frac{1}{5})$$

$$Q^3(x) = Q(Q(Q(x))) = Q(Q^2(x)) = Q\left(\frac{1}{5^2}x - 2(1 + \frac{1}{5})\right) = \frac{1}{5^3}x - 2(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2})$$

$$Q^4(x) = Q(Q(Q(Q(x)))) = Q(Q^3(x)) = Q\left(\frac{1}{5^3}x - 2(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2})\right) = \frac{1}{5^4}x - 2(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3})$$

Así

$$P(x) = \frac{1}{5^4}x - 2(\frac{1 + 5 + 5^2 + 5^3}{5^3}) = \frac{x - 1560}{5^4}$$

De donde es fácil ver que $P(x)$ es cero[1] solo cuando $x = 1560$. □

[1] También podemos decir que $x = 1560$ es raíz de P.

Ejercicio 4. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático. Demostrar que existen polinomios cuadráticos $G(x)$ y $H(x)$ tales que $P(x)P(x+1) = (G \circ H)(x)$.

Solución. Denotemos a $P(x) = ax^2 + bx + c$, luego la ecuación es igual a

$$P(x)P(x+1) = \left(ax^2 + bx + c\right)\left[a(x+1)^2 + b(x+1) + c\right]$$

$$P(x)P(x+1) = \left(ax^2 + bx + c\right)\left(ax^2 + (2a+b)x + a + b + c\right)$$

Que al trabajarla ordenadamente llegamos a

$$\begin{array}{ccccccccc}
a^2x^4 & + & (2a^2+ab)x^3 & + & (a^2+ab+ac)x^2 & & & & \\
 & & abx^3 & + & (2ab+b^2)x^2 & + & (ab+b^2+bc)x & & \\
 & & & & acx^2 & + & (2ac+bc)x & + & (ac+bc+c^2) \\
\hline
a^2x^4 & + & (2a^2+2ab)x^3 & + & (a^2+b^2+3ab+2ac)x^2 & + & (b^2+ab+2ac+2bc)x & + & (ac+bc+c^2)
\end{array}$$

Resultado que podemos expresar como

$$\begin{aligned}
a^2x^4 + (a^2 + 2ab + b^2)x^2 + c^2 + 2a(a+b)x^3 + 2c(a+b)x + 2acx^2 \\
+abx^2 + b(a+b)x + bc \\
+ac
\end{aligned}$$

Lo cual es[2] igual a $\left[ax^2 + (a+b)x + c\right]^2 + b\left[ax^2 + (a+b)x + c\right] + ac$. De donde es fácil ver que es equivalente a una composición de dos polinomios cuadráticos. Más concretamente a lo polinomios con la forma $G(x) = x^2 + bx + ac$ y $H(x) = ax^2 + (a+b)x + c$. $\square$

Ejercicio 5. Sea $P(x) = mx^3 + mx^2 + nx + n$ un polinomio cuyas raíces son a, b y c. Demostrar que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Solución. Rápidamente nos damos cuenta que P puede factorizarse de la forma $P(x) = m(x+1)(x - \sqrt{\frac{n}{m}}i)(x + \sqrt{\frac{n}{m}}i)$. Por el **Teorema del Factor** de [TD23b] sabemos que sus raíces serán $\{-1, -\sqrt{\frac{n}{m}}i, \sqrt{\frac{n}{m}}i\}$, luego vemos

$$\frac{1}{-1} + \frac{1}{-\sqrt{\frac{n}{m}}i} + \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{m}}i} = \frac{1}{-1 - \sqrt{\frac{n}{m}}i + \sqrt{\frac{n}{m}}i}$$

$$\frac{1}{-1} + 0 = \frac{1}{-1-0}$$

Lo cual es cierto. $\square$

Ejercicio 6. Sea $P(x)$ un polinomio cúbico mónico tal que $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ y $P(3) = 3$. Encontrar $P(4)$.

[2] Recordar que $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$.

Solución. Denotemos a $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, por las condiciones del problema es fácil ver que se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$a + b + c = 0 \tag{1}$$
$$4a + 2b + c = -6 \tag{2}$$
$$9a + 3b + c = -24 \tag{3}$$

De donde rápidamente vemos que $(a, b, c) = (-6, 12, -6)$ es la única solución. Así, tendremos que $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$. Luego $P(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 12(4) - 6 = 64 - 126 + 36 - 6 = -2$. □

Ejercicio 7. Dado que

$$Q(x) = 2x + 3$$
$$Q(F(x) + G(x)) = 4x + 3$$
$$Q(F(x) \times G(x)) = 5$$

Calcular $F(G(F(G(\ldots F(G(1))\ldots))))$.

Ejercicio 8. Sea $P(x)$ un polinomio mónico de grado 3. Halle la suma de coeficientes del término cuadrático y lineal, siendo su término independiente igual a 5. Además, $P(x+1) = P(x) + nx + 2$.

Ejercicio 9. Determine todos los posibles valores que puede tomar $\frac{x}{y}$ si $x, y \neq 0$ y $6x^2 + xy = 15y^2$.

Ejercicio 10. Hallar $K \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = K^2(x-1)(x-2)$ tiene raíces reales.

Ejercicio 11. Encontrar todas las soluciones de la ecuación $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$, con $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

2. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como tarea, es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro.

Problema 2.1. Sea el polinomio P para el cual $P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Encontrar $P(x^2 - 1)$.

Problema 2.2. Sea $S(x)$ un polinomio cúbico con $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, $S(3) = 3$ y $S(4) = 5$. Encontrar $S(6)$.

Problema 2.3. Determine un polinomio cúbico P en los reales, con una raíz igual a cero y que satisface $P(x-1) = P(x) + 25x^2$.

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra.* UNAM, 2014.

[Nic23] ASJT. Nicaragua. Tercer Examen Selectivo OMCC. Día 3. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2023.

[TD23a] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 1. Polinomios cuadráticos y cúbicos. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2023.

[TD23b] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 2. Raíces de polinomios I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com