Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #6

Encuentro: 6
Curso: Polinomios
Fecha: 29 de abril de 2023

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Teoremas especiales y divisibilidad polinómica

1. Desarrollo

Teorema 1.1 (**Teorema del resto**). Dado un polinomio P, de grado n y $a \in \mathbb{R}$, diremos que el resto de P cuando es dividido por $x - a$ es $P(a)$. Es decir

$$P(a) = r \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x) + r$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Demostración. Por la definición de *División con resto*[1] podemos escribir

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$$

Donde $\deg(R) < \deg(x - a) = 1$, es decir R necesariamente tiene que ser un polinomio constante, digamos $R(x) = r$. Sustituyendo $x = a$ en la ecuación anterior, obtenemos que

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R(a) = R(a) = r$$

Esto es, el residuo de la división de P por $x - a$ es $P(a)$.

Notemos que el *Teorema del resto* inmediatamente implica al *Teorema del factor* el cual ya hemos estudiado.

Teorema 1.2 (**Teorema del factor**). Dado un polinomio P, de grado n y $a \in \mathbb{R}$, diremos que a es una raíz de P si y sólo si $(x - a)$ es un factor de $P(x)$. Es decir

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x)$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Demostración. Si $x - a \mid P(x)$, entonces existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

Y por la unicidad del cociente y el residuo de la *División con resto*, se sigue que el residuo de la división de P entre $x - a$ es cero. Luego, $P(a) = 0$.

[1] Ver [TD23] página 1.

Teorema 1.3 (**Teorema fundamental del Álgebra**)**.** Todo polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, donde $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$, tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Desafortunadamente, la prueba del *Teorema fundamental del Álgebra* es un poco[2] complicada para nuestro pequeño curso de polinomios. Sin embargo, vamos usar este teorema para demostrar que todo polinomio de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces (hecho que ya hemos venido utilizando). Esto significa que podemos escribir cualquier polinomio $P(x)$ en la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

donde $r_1, r_2, \cdots, r_n$ son reales o complejos.

Esta prueba la haremos por inducción[3] en el grado del polinomio. Si el polinomio es de grado 1, el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado es cierto para polinomios de grado $n - 1$ y consideremos un polinomio $P(x)$ de grado n. De acuerdo con el *Teorema Fundamental del Álgebra*, $P(x)$ tiene una raíz r_1, esto es, $(x - r_1) \mid P(x)$. Luego, existe un polinomio $Q_1(x)$ tal que $P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$.

Como $\deg(P) = n = \deg[(x - r - 1)Q_1(x)] = \deg(x - r_1) + \deg[Q_1(x)]$, tenemos que $\deg[Q_1(x)] = n - 1$. Luego, por la hipótesis de inducción, el polinomio $Q_1(x)$ tiene exactamente $n - 1$ raíces, esto es $Q_1(x) = c(x - r_2)(x - r_3)\cdots(x - r_n)$. Por lo tanto, $P(x) = c(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$.

El resultado que acabamos de demostrar, solo muestra al existencia de las raíces; encontrarlas es otro problema, que podemos atacar con la fórmulas de Vieta o la división de polinomios.

Ejemplo 1. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Cuando $P(x)$ es dividido por $x - 1$, el resto es 3. Cuando $P(x)$ es dividido por $x - 2$, es resto es 5. Determinar el resto cuando $P(x)$ es dividido por el polinomio $x^2 - 3x + 2$.

Solución. Escribamos

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + R(x)$$

donde R es el resto que buscamos. Como $\deg(R) < \deg(x^2 - 3x + 2) = 2$, podemos escribir $R(x) = ax + b$ para constantes a, b. Por otra parte, por el *Teorema del resto*, tenemos que $P(1) = 3$ y $P(2) = 5$. Como 1 y 2 son raíces de $x^2 - 3x + 2$, al sustituir estos valores en P, obtenemos que

$$P(1) = 0 \times Q(1) + R(1) = a + b$$
$$P(2) = 0 \times Q(2) + R(2) = 2a + b$$

Como $P(1) = 3$ y $P(2) = 5$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

De donde obtenemos $(a, b) = (2, 1)$. Por lo tanto, el resto buscado es $\boxed{2x + 1}$. □

[2] Por no decir demasiado XD.

[3] La Inducción Matemática es un tema que aún no hemos visto, pero por el momento podés buscarlo por tu cuenta.

Ejemplo 2. Encontrar el residuo cuando $x^{100}-4x^{98}+5x+6$ es dividido por x^3-2x^2-x+2.

Solución. Como el grado de x^3-2x^2-x+2 es 3, el grado del resto puede ser a lo más 2, asi que podemos expresar el resto como el polinomio ax^2+bx+c para constantes a,b,c. Escribamos la división como

$$x^{100}-4x^{98}+5x+6=\left(x^3-2x^2-x+2\right)Q(x)+\left(ax^2+bx+c\right)$$

Rápidamente, notamos que x^3-2x^2-x+2 puede factorizarse

$$x^{100}-4x^{98}+5x+6=(x-2)(x-1)(x+1)Q(x)+(ax^2+bx+c)$$

Por el **Teorema del resto**, si sustituimos $x=2,1,-1$, los cuales hacen al término que multiplica a $Q(x)$ cero

$$\begin{aligned}(2)^{100}-4(2)^{98}+5(2)+6&=0\times Q(2)+a(2)^2+b(2)+c\\(1)^{100}-4(1)^{98}+5(1)+6&=0\times Q(1)+a(1)^2+b(1)+c\\(-1)^{100}-4(-1)^{98}+5(-1)+6&=0\times Q(-1)+a(-1)^2+b(-1)+c\end{aligned}$$

Del cual formamos

$$\begin{cases}4a+2b+c&=&16\\a+b+c&=&8\\a-b+c&=&-2\end{cases}$$

Que al resolverlo obtenemos $(a,b,c)=(1,5,2)$, de aquí que el residuo sea $\boxed{x^2+5x+2}$. □

1.1. Agregados culturales y preguntas

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 2.1. ¿Para qué valores de k se cumple que $x-2$ es factor de $x^3+2kx^2+k^2x+k-3$?

Problema 2.2. Para un polinomio desconocido que deja un resto 2 al dividirlo por $x-1$, y un resto 1 al dividirlo por $x-2$. ¿Cuál es el resto que se obtiene si este polinomio es dividido por $(x-1)(x-2)$?

Problema 2.3. Encontrar el resto cuando $(x+3)^5+(x+2)^8+(5x+9)^{1997}$ es dividido por $x+2$.

Problema 2.4. Encontrar el resto cuando $x^{2006}+x^{2005}+\cdots+x+1$ es dividido por $x+1$.

Problema 2.5. Sea $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$. Encontrar el residuo cuando $F(x^5)$ es dividido por $F(x)$.

Problema 2.6. Determinar todos los enteros positivos n, tales que el polinomio x^n+x-1 sea divisible por el polinomio x^2-x+1.

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 3.1. El polinomio $P(x)$ deja residuo -2 en la división entre $x-1$ y residuo -4 en la división entre $x+2$. Encontrar el residuo cuando el polinomio es dividido por x^2+x-2.

Problema 3.2. Encontrar el resto cuando el polinomio $x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x$ es dividido entre x^3-x.

Problema 3.3. Probar que si un polinomio $F(x)$ deja un residuo de la forma $px+q$ cuando es dividido entre $(x-a)(x-b)(x-c)$ donde a, b y c son todos distintos, entonces

$$(b-c)F(a)+(c-a)F(b)+(a-b)F(c)=0.$$

4. Extra

Problema 4.1. Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1)=2$, $P(2)=3$ y $P(3)=2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[NL22a] William Nicoya and Ricardo Largaespada. Clase 6. Divisibilidad polinómica. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2022.

[NL22b] William Nicoya and Ricardo Largaespada. Clase 7. Teorema del residuo y teorema del factor. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Mayo 2022.

[TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 5. División de Polinomios. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com