

Lista de problemas para el curso de polinomios

1. Clase 06

Problema 1.1 ([BLW22]. Example 4.4. Page 7). Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ y $P(3) = 2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

2. Clase 07

Clase práctica #2

Problema 2.1. Para que la división de $6x^4 - 11x^2 + ax + b$ entre $3x^2 - 3x - 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Problema 2.2. Calcular la suma de coeficientes del resto que deja $x^{333} - 9$ entre $x^2 - 729$.

Problema 2.3 ([RC08]. Problem 8.25. Page 253¹). Sea r una raíz de $x^2 - x + 7$. Hallar el valor de $r^3 + 6r + \pi$.

Problema 2.4 ([RC08]. Problem 8.27. Page 254.). Sean a , b y c las raíces reales de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. Probar que $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$.

Problema 2.5 ([Iha]. Exercise 13. Page 12). Sean r_1 , r_2 y r_3 raíces distintas del polinomio $y^3 - 22y^2 + 80y - 67$. De tal manera que existen números reales α , β y θ tal que

$$\frac{1}{y^3 - 22y^2 + 80y - 67} = \frac{\alpha}{y - r_1} + \frac{\beta}{y - r_2} + \frac{\theta}{y - r_3}$$

$\forall y \notin \{r_1, r_2, r_3\}$. ¿Cuál es valor de $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta}$?

Problema 2.6 ([NF21]. Exercise 3.14. Page 12). La ecuación $2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1$ tiene tres raíces reales. Dado que su suma es $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $\text{mcd}(m, n) = 1$. Calcular $m + n$.

Problema 2.7. Si $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio tal que $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ y $P(3) = 30$, determine el valor de

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10}.$$

Problema 2.8 ([Eng97]. Problem 34. Page 256). Sea $F(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a , b , c y d tal que $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$, entonces no existe un entero k tal que $F(k) = 8$.

Problema 2.9 ([NF21]. Exercise 3.15. Page 12). Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$. ¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{20}(x)$?

¹El el archivo pdf es la página 273.

3. Clase 08

Problema 3.1 ([Eng97]. Problem 15. Page 255). Sea $N(x) = (1 - x + x^2 - \dots + x^{100})(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})$. Probar que después de multiplicar y reducir términos solo quedan potencias pares de x .

Problema 3.2 ([BLW22]. Problem 6.2. Page 12). Sea $R(x) = 15x - 2016$. Si $R^5(x) = R(x)$, encontrar la suma de todos los posibles valores de x .

Problema 3.3 ([Iha]. Exercise 14. Page 12). Sean r y s raíces reales distintas de $P(x) = x^3 + ax + b$. También, sean $r + 4$ y $s - 3$ raíces de $Q(x) = x^3 + ax + b + 240$. Encontrar la suma de todos los posibles valores de $|b|$.

Problema 3.4 ([Lee11]. Problem 4. Page 5). Sean a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 cinco números reales tales que satisfacen la siguiente ecuación

$$\frac{a_1}{k^2 + 1} + \frac{a_2}{k^2 + 2} + \frac{a_3}{k^2 + 3} + \frac{a_4}{k^2 + 4} + \frac{a_5}{k^2 + 5} = \frac{1}{k^2}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Encontrar $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$.

4. Corto #3

Problema 4.1. Para que la división de $x^5 + ax + b$ entre $x^2 + x + 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Problema 4.2. Calcular el producto² de coeficientes del resto que deja $x^{2023} + 8$ entre $x^2 - 4$.

Problema 4.3. Sean los polinomios $2023x^2 + ax + 3202$ y $3202x^2 + ax + 2023$ tal que tienen una raíz en común. Hallar el valor de a .

Problema 4.4 ([NF21]. Example 3.13. Page 12). Sean a, b y c las raíces de $x^3 + 3x^2 + 4x - 11$ y sean $a + b, b + c$ y $c + a$ las raíces de $x^3 + rx^2 + sx + t$. Hallar t .

Problema 4.5 ([Iha]. Page 9). Sea el polinomio $f(x) = x^3 + 3x - 1$ con raíces a, b y c . Calcular

$$\frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{b^3 + c^3} + \frac{1}{c^3 + a^3}.$$

5. Examen final

Problema 5.1. Dado el polinomio $P(x)$ para el cual se cumple que

$$x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9)P(x)$$

Calcular la suma de coeficientes de P .

²Dejar el resultado lo más compacto posible.

Problema 5.2. Sea r_1 , r_2 y r_3 las tres raíces de polinomio cúbico P . También, que

$$\frac{P(2) + P(-2)}{P(0)} = 200$$

La expresión $\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}$ puede ser escrito como $\frac{m}{n}$ para m y n coprimos. Encontrar $m + n$.

Problema 5.3. Si a y b son raíces distintas del polinomio $x^2 + 2023x + 2020$, entonces

$$\frac{1}{a^2 + 2020a + 2020} + \frac{1}{b^2 + 2020b + 2020} = \frac{m}{n},$$

donde m y n son primos relativos. Calcular $m + n$.

Referencias

- [BGV14] Radmila Bulajich, José Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.
- [BLW22] Adithay B., Brian L., and William W. Polynomials. *AoPS*, 2022.
- [Eng97] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1997.
- [Iha] Ihatemath123. Vieta's formulas.
- [Lee11] Holden Lee. Lecture 8. Polynomials, part 1. *OMC*, 2011.
- [NF21] Naman12 and Freeman66. Polynomials in the AIME. *AoPS*, 2021.
- [RC08] Richard Rusczyk and Mathew Crawford. *Intermediate Algebra*. AoPS, 2008.
- [Rub19] Carlos Rubio. Un breve recorrido por los polinomios. *Tzaloa*, (2), 2019.