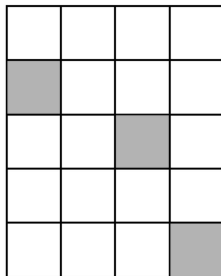


Problemas para convocatoria 2025

1. Problemas

Problema 1.1 (Sugerido para II o III nivel). En base a la siguiente figura.



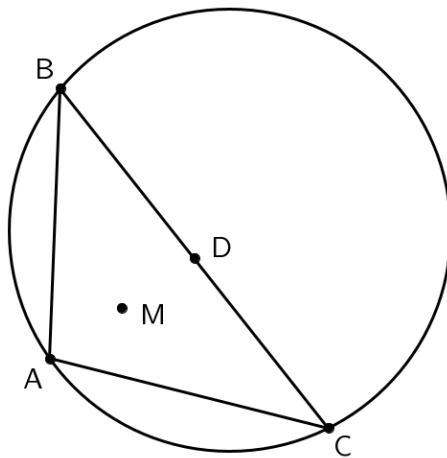
¿Cuál es la cantidad mínima de cuadritos adicionales que deben pintarse para tener dos ejes de simetría en la figura?

Problema 1.2 (Sugerido para III o IV nivel). Un niño llamado Tato al aprender matemáticas inventó la operación numeral ($\#$), cuyo resultado es la suma de dos números dividida entre su resta. Por ejemplo, $9 \# 3 = \frac{9+3}{9-3} = \frac{12}{6} = 2$. Hallar $(1 \# 2025) \# 1$.

Problema 1.3 (Sugerido para IV nivel). Si $x^2 - 2x + 11$ se hace cero cuando $x = n$, entonces, sin hallar n , calcular el valor numérico de

$$\frac{n^3 + 7n + 2047}{2}.$$

Problema 1.4 (Sugerido para IV nivel). En la figura, se tiene que $AB = AC = 40$ y $BC = 60$, donde D es un punto medio de BC y M es punto medio de AD . Si se traza una cuerda PQ paralela a BC que pasa por M , hallar la longitud de PQ .



Problema 1.5 (Sugerido para IV nivel). Diego enumeró una por una las páginas de su cuaderno de matemáticas, comenzando desde la página 1 y terminando en la página 2025 ¿cuántas veces escribió la cifra 2 al enumerar su cuaderno?

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Problema 1.6 (Sugerido para IV o V nivel). Fabiana compró lápices y carpetas a 11 y 9 córdobas, respectivamente. Curiosamente, pagó la misma cantidad de dinero en lápices y en carpetas ¿Cuántos artículos compró, sabiendo que la cantidad es mayor a 80 y menor a 120 artículos?

Problema 1.7 (Sugerido para IV o V nivel). Naho tiene muchos amigos, tantos que no sabe la cantidad exacta. Si tuviera 2 amigos menos, la cantidad sería múltiplo de 3. Si tuviera 3 amigos menos, la cantidad sería múltiplo de 10. ¿Cuántos amigos tiene Naho si la cantidad de amigos es mayor a 60 y menor a 100?

Problema 1.8 (Sugerido para IV o V nivel). $R(k)$ es una máquina que recibe entradas enteras y produce salidas enteras positivas. Si se tiene que $R(-1) \cdot R(2) = 4$ y

$$R(a)^2 = R(a - b) \cdot R(b)$$

para a, b enteros cualesquiera, hallar $R(k)$.

Problema 1.9 (Sugerido para IV o V nivel). Hallar $Q(x^2 + 7x + 10)$ en términos de x , sabiendo que $Q(x^2 + x - 2) = x^3 - 27$ se cumple para cualquier número x .

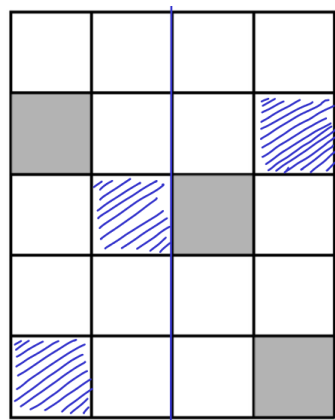
Problema 1.10 (Sugerido para IV o V nivel). Hallar todos los enteros m, n tales que

$$m^2 + mn + n^2 = m - 2n - 1.$$

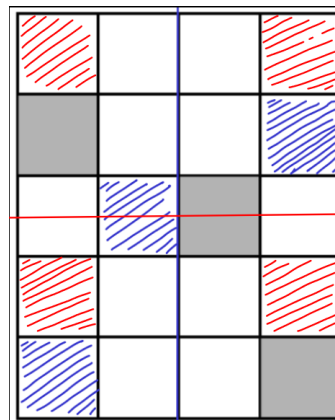
Problema 1.11 (Sugerido para V nivel). Brisa Marina quiere pagarle una deuda a Gerald, si ella solo tiene monedas de 3 y 5 córdobas y la deuda es un monto entero mayor a 7 córdobas ¿es posible pagar la deuda sea cual sea el monto?

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Solución (Problema 1). Un rectángulo como este solo puede tener un eje vertical y horizontal de simetría. Trazando una línea vertical y reflejando llegamos a la configuración (a).



(a) Simetría vertical



(b) Simetría horizontal

Análogamente, tomando la configuración (a), trazando una línea horizontal y reflejando llegamos a la configuración (b). Luego, como mínimo se necesitan pintar 7 cuadritos más. ■

Solución (Problema 2). Realizando la operación $m \# n = \frac{m+n}{m-n}$, sustituyendo.

$$\begin{aligned} (m \# n) \# 1 &= \left(\frac{m+n}{m-n} \right) \# 1 = \frac{\frac{m+n}{m-n} + 1}{\frac{m+n}{m-n} - 1} \\ &= \frac{\frac{m+n+m-n}{m-n}}{\frac{m+n-m+n}{m-n}} = \frac{\frac{2m}{m-n}}{\frac{2n}{m-n}} \\ &= \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Luego, se tiene que $(1 \# 2025) \# 1 = \frac{1}{2025}$. ■

Solución (Problema 3). Por dato tenemos la siguiente ecuación

$$n^2 - 2n + 11 = 0.$$

Convenientemente, podemos despejar $n^2 + 7 = 2n - 4 = 2(n - 2)$, multiplicando este resultado por n se obtiene que $n^3 + 7n = 2(n^2 - 2n)$. Rápidamente, notamos $n^2 - 2n = -11$, usando este valor encontramos $n^3 + 7n = 2(-11) = -22$. Luego, al sustituir

$$\frac{n^3 + 7n + 2047}{2} = \frac{-22 + 2047}{2} = \frac{2025}{2}. \quad \blacksquare$$

Solución (Problema 4). Sea T y R los puntos medios de los lados AB y AC respectivamente, es claro que $PT = RQ = x$, por el teorema de base media $TR = 30$ y $AT = TB = AR = RC = 20$.

Kenny J. Tinoco

Solución (Problema 7). Considerando el enunciado en notación de congruencias tenemos

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{10} \end{cases}$$

De $x \equiv 3 \pmod{10}$ es claro que $x \equiv 3 \equiv 1 \pmod{2}$ y $x \equiv 3 \pmod{5}$, por lo cual tenemos que el problema se equivalente a resolver el sistema

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

Consideremos los números x_1, x_2, x_3 tales que:

$$\begin{cases} x_1 \equiv 1 \pmod{2} \\ x_1 \equiv 0 \pmod{3} \\ x_1 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \equiv 0 \pmod{2} \\ x_2 \equiv 2 \pmod{3} \\ x_2 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \equiv 0 \pmod{2} \\ x_3 \equiv 0 \pmod{3} \\ x_3 \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

Vemos que en el primer sistema buscamos un múltiplo de 3 y 5 que deje resto 1 la división por 2, por tanteo vemos que $x_1 = 15$ cumple. En el segundo sistema buscamos un múltiplo de 2 y 5 que deje resto 2 la división por 3, por tanteo vemos que $x_2 = 20$ cumple. En el tercer sistema buscamos un múltiplo de 2 y 3 que deje resto 3 la división por 5, por tanteo vemos que $x_3 = 18$ cumple. Con lo cual, si consideramos el número $x = x_1 + x_2 + x_3 = 53$ este cumple los tres sistemas a la vez, por tanto, también cumple el sistema original.

Sin embargo, este número no es la solución, pero si consideramos el número $53 + 30k$ con k entero, este siempre es congruente con 53 en módulo 2,3 y 5. Por lo cual, $53 + 30 = 83$ es también solución, luego Naho tiene 83 amigos. ■

Solución (Problema 8). Haciendo $b = 0$, tenemos que $R(a)^2 = R(a)R(0)$ lo cual implica $R(a)^2 - R(a)R(0) = R(a)[R(a) - R(0)] = 0$. De esta ecuación aparecen dos casos, $R(a) = 0$ y $R(a) = R(0)$, el primer caso no puede ser, puesto que la definición dice que las salidas son positivas y 0 no es positivo, luego

$$R(a) = R(0) \text{ para todo entero } a,$$

así el problema se reduce a encontrar $R(0)$. Haciendo $a = 1$ y $b = -1$ en la ecuación original se tiene que $R(1)^2 = R(2)R(-1) = 4$ lo que implica que $R(1) = \pm 2$, así $R(1) = 2$. Finalmente, con $a = 1$ se tiene $R(1) = R(0) = 2$, luego $R(a) = 2$ para todo entero a . ■

Solución (Problema 9). Notamos que $Q(x^2 + 7x + 10) = Q[(x+2)(x+5)]$ por lo cual nuestro objetivo será encontrar esta expresión. Factorizando el argumento de $Q(x^2 + x - 2) = x^3 - 27$ se tiene $Q[(x-1)(x+2)] = x^3 - 27$, como estamos trabajando en los reales se puede tomar el cambio de variable $x = a + 3$, con lo cual $Q[(a+3-1)(a+3+2)] = (a+3)^3 - 27$, es decir

$$\begin{aligned}Q[(a+2)(a+5)] &= (a+3)^3 - 27 \\Q(a^2 + 7a + 10) &= (a^3 + 9a^2 + 27a + 27) - 27 \\Q(a^2 + 7a + 10) &= a^3 + 9a^2 + 27a.\end{aligned}$$

Como x es real, se tiene que a también lo es, luego $Q(x^2 + 7x + 10) = x^3 + 9x^2 + 27x$ para todo real x . ■

Solución (Problema 10). Multiplicando por dos y reordenando vemos que:

$$\begin{aligned}m^2 + mn + n^2 &= m - 2n - 1 \\2m^2 + 2mn + 2n^2 &= 2m - 4n - 2 \\(m^2 - 2m) + (n^2 + 4n) + (m^2 + 2mn + n^2) &= -2 \\(m^2 - 2m + 1) + (n^2 + 4n + 4) + (m + n)^2 &= 3 \\(m - 1)^2 + (n + 2)^2 + (m + n)^2 &= 3\end{aligned}$$

Como estamos trabajando en enteros la única opción es que todos los cuadrados de la izquierda sean iguales a 1. En caso contrario la ecuación no tendría soluciones enteras. Con lo cual se obtiene que $m = 2$ y $n = -1$ son los únicos valores que cumplen. ■

Solución (Problema 11). Sí, utilizando un análisis inductivo es posible demostrar que todo número mayor a 7 córdobas en combinación lineal de 3 y 5. ■