Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #x

Encuentro: x
Curso: Polinomios
Fecha: x de x de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Cristian Castilblanco

Contenido: Principio de Inducción Matemática

El Principio de Inducción Matemática es una poderosa y elegante herramienta para probar dependencias en enteros. En esta décima clase veremos la definición y analogías de este principio, así como ejemplos y problemas.

1. Desarrollo

La Inducción Matemática es una técnica utilizada para probar declaraciones o proposiciones. La idea es similar a la de hacer caer varias piezas de dominó. Si cada pieza está lo suficientemente cerca de la anterior y hacemos caer la primera, entonces todas las piezas eventualmente van a caer. Cuando queremos probar una proposición sobre números naturales, la idea es la misma. En la Figura 1 podemos ver una representación gráfica de esta analogía.

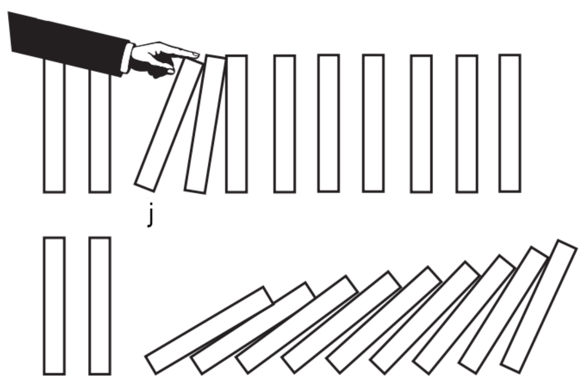

Figura 1: Fichas de dominó cayendo.

Otra analogía es la siguiente. Considera una pila de sobres, tan alta como querás. Supongamos que cada sobre tiene el mismo mensaje en su interior ”*Abre el siguiente sobre de la pila, y sigue las instrucciones escrito en él*”. Si alguien abre el primero (el de arriba), lee el mensaje y sigue las instrucciones, entonces la persona se ve obligada a abrir el segundo sobre. Y si la persona decide seguir cada instrucción, entonces esta persona abrirá todos los sobres de la pila. Es decir, esto es el principio de Inducción Matemática aplicado a una pila de sobres.

Teorema 1.1 (**Principio de Inducción Matemática**)**.** Para algún entero fijo j y para cada entero $n \geq j$, sea $S(n)$ una declaración[1] que involucre a n. Si

[1] También podemos decir Proposición o Afirmación

- $S(j)$ es cierto, y
- para cada entero $k \geq j$, $S(k) \to S(k+1)$,

entonces para todo $n \geq j$, la declaración $S(n)$ es cierta.

Una manera de estructurar la solución de un problema que resolvemos por inducción matemática es la siguiente.

1. **Base de inducción (o caso base)**
   Probar que $S(1)$ es cierta (generalmente j será 1).
2. **Hipótesis de inducción**
   Suponer que para un entero fijo $k \geq 1$, la declaración $S(k)$ es cierta.
3. **Paso de inducción**
   Probar que como $S(k)$ es cierta, entonces $S(k+1)$ también será cierta.

Ejemplo 1.1. Sea m entero positivo, probar que para $m \geq 3$, se cumple

$$m^m > 2m!.$$

Solución. Tomemos por $S(m)$ la afirmación $m^m > 2m!$.

Base de inducción
Tomando $m = 3$, vemos que $3^3 > 2 \cdot 3!$, por lo tanto $S(3)$ es cierta.

Hipótesis de inducción
Supongamos que $S(k)$ es cierta para algún entero fijo $k \geq 3$.

Paso de inducción
Probaremos, entonces que si $S(k)$ es cierta, $S(k+1)$ también será cierta. Esto es

$$(k+1)^{k+1} > 2(k+1)!$$

Notemos que

$$(k+1)^k \cdot (k+1)^1 > 2(k+1) \cdot k!$$
$$(k+1)^k > 2k!$$

Ahora bien, es claro que $k+1 > k$, por lo tanto $(k+1)^k > k^k$. Así por la hipótesis de inducción tendremos lo siguiente.

$$(k+1)^k > k^k > 2k!$$

Es decir, $S(m)$ es cierta para toda $m \geq 3$. Luego, la prueba está hecha. ■

Teorema 1.2 (Binomio de Newton). Para a y b números reales y n un número entero, se cumplirá que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Podemos utilizar la notación de sumatoria y quedaría como:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre n.

Si $n=0$, entonces $(a+b)^0=1$ y $\binom{0}{0}a^0b^0=1$.

Supongamos que para un entero fijo $k\geq 0$ la declaración es cierta, es decir

$$(a+b)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

es válida, entonces

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
&= (a+b)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i \\
&= a\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i + b\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i \\
&= a\left[\binom{k}{0}a^k+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i\right]+b\left[\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i+\binom{k}{k}b^k\right] \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i+\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i+1}+\binom{k}{k}b^{k+1} \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}a^{k+1-i}b^i+\binom{k}{k}b^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0}a^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\left[\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}\right]a^{k+1-i}b^i+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0}a^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1} \\
&= \boxed{\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i}
\end{aligned}$$

■

1.1. Agregados culturales y preguntas

1. La **Inducción fuerte** es una variante de la Inducción Matemática "normal". Esta surge cuando para probar $S(k+1)$ es necesario considerar más de una declaración previa como cierta $S(i), S(i+1), \cdots, S(k)$. Muchas veces no hace falta usar todas las declaraciones anteriores, pero sí al menos un par de ellas (dependerá del problema).

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 2.1. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Problema 2.2. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $4007^n - 1$ es divisible por 2003.

Problema 2.3. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, el número $A_n = 3^n - 2n^2 - 1$ es múltiplo de 8. Además que si $3 \nmid n$, entonces A_n es múltiplo de 24.

Problema 2.4. Sea $\{a_n\}$ una secuencia tal que $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ y $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Probar que $a_n = 2^n + 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 2.5. Sea $q \in \mathbb{R}$, con $q \neq 1$ y $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Probar que

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}.$$

Problema 2.6. Demostrar que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n$.

Problema 2.7. Probar $\forall n \in \mathbb{N}$, que se cumple $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$. ($F_n$ es la sucesión de Fibonacci.)

Problema 2.8. Probar $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, que se cumple $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$.

3. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Problema 3.1. Probar que $\forall n, r \in \mathbb{Z}^+$, con $r \neq 1$ se cumple lo siguiente

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Problema 3.2. Probar para todo $n \geq 2$ natural se cumple

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Problema 3.3. Demostrar $\forall n \in \mathbb{N}$, que

$$9 \mid 2^{2n} + 15n - 1$$
$$8 \mid 3^{2n+2} + 8n - 9$$

4. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 4.1. Probar que $\forall n, r \in \mathbb{Z}^+$, con $r \neq 1$ se cumple lo siguiente

$$r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(r-1)^2}.$$

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[Rub19] Carlos Rubio. Un breve recorrido por los polinomios. *Tzaloa*, (2), 2019.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Cristian Castilblanco
Teléfono: +505 8581 1745 *(Tigo)*
Correo: cristian.castilblanco120@gmail.com