Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #4

Encuentro: 4
Curso: Polinomios
Fecha: 20 de abril de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Cristian Castilblanco

Contenido: Fórmulas de Vieta I

Cuando nos enfrentamos a problemas relacionados con las raíces de un polinomio, es común pensar en calcular cada una de estas raíces. Sin embargo, no siempre disponemos de un método que simplifique este proceso, y en muchos casos, encontrar todos los valores de las raíces no resulta completamente necesario. Por este motivo, en esta clase exploraremos las Fórmulas de Vieta, una herramienta que nos permite obtener información sobre las raíces de un polinomio usando sus coeficientes.

1. Desarrollo

Teorema 1.1 (Fórmulas de Vieta).

Dado $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grado n con raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$, se cumple que

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 + \ldots + r_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
\iddots \qquad & \qquad \vdots \\
r_1 r_2 \cdots r_{n-1} + r_1 r_2 \cdots r_{n-1} r_n + \ldots + r_2 r_3 \cdots r_n &= (-1)^{n-1}\left(\frac{a_1}{a_n}\right) \\
r_1 r_2 \cdots r_n &= (-1)^n \left(\frac{a_0}{a_n}\right)
\end{aligned}$$

Por el teorema del factor, podemos escribir el polinomio como

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$

Al expandir los n factores lineales del lado derecho, obtenemos el siguiente resultado

$$a_n x^n - a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x^{n-1} + a_n(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n r_1 r_2 \cdots r_n,$$

donde el signo del coeficiente de x^k está dado por $(-1)^{n-k}$. Comparando los coeficientes correspondientes obtenemos el resultado deseado.

Las fórmulas de Vieta pueden ser útiles al calcular expresiones que involucran las raíces de un polinomio sin tener que calcular los valores de las propias raíces. Para ser más prácticos, en esta sesión de clase solo nos centraremos en las fórmulas de Vieta para polinomios cuadráticos y cúbicos.

Observación 1.

Si r_1 y r_2 son las raíces de $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, entonces

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2} \quad \text{y} \quad r_1r_2 = +\frac{a_0}{a_2}.$$

Si r_1, r_2 y r_3 son las raíces de $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, entonces

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = +\frac{a_1}{a_3} \quad \text{y} \quad r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

1.1. Ejemplos

Ejemplo 1.1. Si p y q son raíces de la ecuación $x^2 + 2bx + 2c = 0$, determina el valor de $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$.

Solución. Aplicando las fórmulas de Vieta, tenemos $p + q = -2b$ y $pq = 2c$. Podemos transformar la expresión deseada de la siguiente manera,

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{p^2 + q^2}{p^2q^2} = \frac{p^2 + 2pq + q^2 - 2pq}{p^2q^2} = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{(pq)^2}$$

Sustituyendo valores, obtenemos $\frac{(p+q)^2 - 2pq}{(pq)^2} = \frac{(-2b)^2 - 2(2c)}{(2c)^2} = \boxed{\frac{b^2 - c}{c^2}}$. ■

Ejemplo 1.2. El polinomio $x^3 - 7x^2 + 3x + 1$ tiene raíces r_1, r_2 y r_3, hallar el valor de $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$.

Solución. Por Vieta sabemos que $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 3$ y $r_1r_2r_3 = -1$. Además, notemos que

$$\frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_2}{r_1r_2r_3} = \frac{r_1r_2}{r_1r_2r_3} + \frac{r_2r_3}{r_1r_2r_3} + \frac{r_3r_1}{r_1r_2r_3} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Por lo tanto $\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{3}{-1} = \boxed{-3}$. ■

Ejemplo 1.3 (China, 1997)**.** Dada la ecuación $x^2 + (2a-1)x + a^2 = 0$ con dos raíces reales positivas, donde a es un entero. Si x_1, x_2 son sus raíces, hallar el valor de $\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right|$.

Solución. Como las dos raíces son positivas implica que $1 - 2a \geq 0$, i.e., $a \leq \frac{1}{2}$. Ya que a es un entero, sucede que[1] $a \leq 0$. Entonces,

$$\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| = \sqrt{\left(\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right|\right)^2} = \sqrt{x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2}} = \sqrt{1 - 2a + 2a} = \boxed{1}.$$ ■

[1]No hace falta hallar el valor de a, pero es necesario saber que $a \leq 0$.

Ejemplo 1.4 (CHNMOL, 1996)**.** Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2+x-3=0$. Hallar el valor de $x_1^3-4x_2^2+19$.

Solución. Por la fórmulas de Vieta, $x_1+x_2=-1$ y $x_1x_2=-3$. Definamos a $A=x_1^3-4x_2^2+19$ y $B=x_2^3-4x_1^2+19$. Entonces,

$$\begin{aligned} A+B &= (x_1^3+x_2^3)-4(x_1^2+x_2^2)+38 = (x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]-4\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+38 \\ &= (-1)(1+9)-4(1+6)+38 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A-B &= (x_1^3-x_2^3)-4(x_1^2-x_2^2) = (x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)^2-x_1x_2+4(x_1+x_2)\right] \\ &= (x_1-x_2)(1+3-4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, vemos que $2A=(A+B)+(A-B)=0$, i.e., $\boxed{A=0}$. ■

Ejemplo 1.5 (URSS, 1986)**.** Las raíces del polinomio $x^2+ax+b+1$ son números naturales. Mostrar que a^2+b^2 no es un primo.

Solución. Para demostrar que a^2+b^2 no es primo, basta demostrar que es el producto de dos enteros mayores a 1. Digamos entonces que r_1 y r_2 son las raíces, por Vieta $r_1+r_2=-a$ y $r_1r_2=b+1$. Elevando al cuadrado y sumando tenemos $a^2+b^2=(r_1+r_2)^2+(r_1r_2-1)^2$, al desarrollar llegamos a

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= r_1^2+2r_1r_2+r_2^2+r_1^2r_2^2-2r_1r_2+1 \\ &= r_1^2+r_2^2+r_1^2r_2^2+1 \\ &= (r_1^2+1)(r_2^2+1). \end{aligned}$$

Por dato r_1 y r_2 son naturales por lo que (r_1^2+1) y (r_2^2+1) son naturales mayores a 1 y hemos terminado. ■

Ejemplo 1.6 (AIME II, 2008)**.** Sean r,s y t las tres raíces de la ecuación $8x^3+1001x+2008=0$. Hallar el valor de $(r+s)^3+(s+t)^3+(t+r)^3$.

Solución. Por Vieta, sabemos que $r+s+t=0$ y $rst=-251$. Por la primera ecuación, obtenemos $r+s=-t$ y por tanto $(r+s)^3=-t^3$. Análogamente, llegamos a

$$(r+s)^3+(s+t)^3+(t+r)^3=-(r^3+s^3+t^3)$$

Por la identidad de Gauss, tenemos que $r^3+s^3+t^3-3rst=0$ y por tanto $-(r^3+s^3+t^3)=-3rst \implies -(r^3+s^3+t^3)=-3(-251)=\boxed{753}$. ■

Ejemplo 1.7 (China, 1996)**.** La ecuación cuadrática $x^2-px+q=0$ tiene dos raíces reales α y β.

1. Hallar la ecuación cuadrática que tiene como raíces a α^3 y β^3.
2. Si la nueva ecuación sigue siendo $x^2-px+q=0$, hallar los pares ordenados (p,q).

Solución. Veamos cada uno de los incisos.

1. Por la fórmulas de Vieta tenemos $\alpha+\beta=p$ y $\alpha\beta=q$, luego, encontramos que

$$\alpha^3\cdot\beta^3=(\alpha\beta)^3=q^3$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-3pq=p(p^2-3q)$$

De donde obtenemos la ecuación $x^2-p(p^2-3q)x+q^3=0$.

2. Si la nueva ecuación es identica a la original, debe cumplirse que $p(p^2-3q)=p$ y $q^3=q$. La ecuación $q^3=q$, implica que $q=0,1,-1$. Veamos, entonces, cada unos de estos casos:

   a) Cuando $q=0$, entonces $p^3=p$, de donde obtenemos $p=0,1,-1$.
   b) Cuando $q=1$, entonces $p^3=4p$, de donde obtenemos $p=0,2,-2$.
   c) Cuando $q=-1$, entonces $p^3=-2p$, de donde obtenemos $p=0$.

De estos siete resultados, obtenemos las siguientes siete ecuaciones

$$\begin{array}{cccc} x^2=0 & x^2-x=0 & x^2+x=0 & x^2+1=0 \\ x^2-2x+1=0 & x^2+2x+1=0 & x^2-1=0 & \end{array}$$

Entre ellas solo $x^2+1=0$ no tiene raíces reales, por lo que las seis restantes satisfacen con las condiciones. Por lo tanto, los pares ordenados (p,q) son

$$(0,0),\ (1,0),\ (-1,0),\ (2,1),\ (-2,1),\ (0,-1).\qquad\blacksquare$$

1.2. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Encontrar la suma y el producto de las raíces de $2x^2+5x-11$.

Ejercicio 1.2. Sean p y a las raíces del polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$.

A) $p-q$ B) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$
C) p^2+q^2 D) p^3+q^3
E) $(p+1)^2+(q+1)^2$

Ejercicio 1.3. El polinomio $x^3-ax^2+bx-2010$ tiene tres raíces enteras positivas. ¿Cuál es el menor valor posible para a?

Ejercicio 1.4. Sean p,q y r las tres raíces de x^3+5x^2+6x+c. Si $pq=-2$, hallar la suma de todos los posibles valores de c.

Ejercicio 1.5. La suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2+2hx=3$ es 582. Hallar el valor absoluto de h.

Ejercicio 1.6. Encontrar la suma y el producto de las raíces, reales o imaginarias, del polinomio $2x^3+3x^2+4x+5$. Sabiendo que las raíces son distintas.

Ejercicio 1.7. Sean a y b las raíces de la ecuación $x^2-6x+5=0$, encontrar $(a+1)(b+1)$.

Ejercicio 1.8. Dado que m y n son raíces del polinomio $6x^2-5x-3$, encuentra un polinomio cuyas raíces sean $m-n^2$ y $n-m^2$, sin calcular los valores de m y n.

Ejercicio 1.9. Sea el polinomio $5x^3+4x^2-8x+6$ con raíces reales a,b y c, hallar

$$a(1+b+c)+b(1+a+c)+c(1+a+b).$$

Ejercicio 1.10. Sean p,q y r las tres raíces de x^3+5x^2+5x+5. Hallar el polinomio mónico con raíces pq,qr y rp.

Ejercicio 1.11. ¿Para qué valores reales positivos de m, las raíces x_1 y x_2 de la ecuación

$$x^2-\left(\frac{2m-1}{2}\right)x+\frac{m^2-3}{2}=0$$

cumplen que $x_1=x_2-\frac{1}{2}$?

Ejercicio 1.12. Si a y b satisfacen las ecuaciones

$$a+\frac{10}{b}=100 \quad \text{y} \quad \frac{100}{a}+10b=1.$$

Determine el producto de todos los valores posibles de ab.

Ejercicio 1.13. Sean r_1, r_2 y r_3 las raíces del polinomio x^3-x^2+x-2, determina el valor de $r_1^3+r_2^3+r_3^3$.

Ejercicio 1.14. Dado el polinomio x^2-px+q con raíces α y β. Hallar los pares ordenados (p,q) tal que el polinomio cuadrático con raíces α^2 y β^2 es igual a x^2-px+q.

Problema 1.1. Hallar la suma de todas los valores reales x que satisfacen

$$\left(x+\frac{1}{x}-17\right)^2=x+\frac{1}{x}+17.$$

Problema 1.2. Sea $P(x)=mx^3+mx^2+nx+n$ un polinomio cuyas raíces son a, b y c. Probar que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$.

Problema 1.3. Dado el polinomio $2x^2-5x-a$, con a una constante. Si la relación entre las dos raíces es $x_1:x_2=2:3$, hallar el valor de x_2-x_1.

Problema 1.4. Sean $a, b\in\mathbb{R}$ que cumplen $a^2+3a+1=0$ y $b^2+3b+1=0$, hallar el valor de $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Problema 1.5. Sean $p, q\in\mathbb{R}$ distintos, tal que $2p^2-3p-1=0$ y $q^2+3q-2=0$. Hallar el valor de $\frac{pq+p+1}{q}$.

Problema 1.6. Sean $a, b, c\in R$. El polinomio ax^2+bx+c tiene raíces r_1 y r_2, el polinomio cx^2+bx+a tiene raíces r_3 y r_4. Se sabe que los números r_1, r_2, r_3 y r_4 forman (en ese orden) una *progresión aritmética*. Probar que $a+c=0$.

Problema 1.7. Hallar el rango del parámetro m, si la ecuación $8x^2+(m+1)x+(m-7)=0$ tiene dos raíces negativas.

Problema 1.8. Dos compañeros de clase están hablando casualmente y uno le dice al otro

- **Brisa Marina**: Gerald mirá, estoy pensado en un polinomio con raíces naturales, de la forma $P(x)=2x^3-2ax^2+(a^2-81)x-c$ con a y c naturales. ¿Podés decirme cuáles son los valores de a y c?.

- **Gerald**: (Después algunos los cálculos) Vos sos loca, hay varios polinomios que cumplen.

- **Brisa Marina**: Dale pues, qué te quejás. Te doy el valor de a. (Le escribe un entero positivo) ¿Y ahora? ¿cuál es el valor de c?

- **Gerald**: Lo mismo, hay varios polinomios, pero los dos posibles valores de c son ...

Hallar la suma de los valores de c que Gerald le dijo a Brisa Marina.

Problema 1.9. Todas las raíces del polinomio $z^6-10z^5+Az^4+Bz^3+Cz^2+Dz+16$ son enteros positivos (posiblemente repetidos). ¿Cuál es el valor de B?

Problema 1.10. Sean $x_1<x_2<x_3$ las tres raíces reales de la ecuación

$$\sqrt{2014}x^3-4029x^2+2=0.$$

Hallar el valor de $x_2(x_1+x_3)$.

Problema 1.11. Sea $m\in\mathbb{R}$ no menor a (-1), tal que

$$x^2+2(m-2)x+m^2-3m+3=0,$$

tiene dos raíces reales distintas x_1 y x_2.

- Si $x_1^2+x_2^2=6$, hallar el valor de m.

- Hallar el máximo valor de $\frac{mx_1^2}{1-x_1}+\frac{mx_2^2}{1-x_2}$.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Ejercicio 2.1. Sea el polinomio

$$P(x) = 4x^2 + 5x + 3$$

con raíces p y q. Determina $(p+7)(q+7)$, sin calcular los valores de p y q.

Problema 2.1. Si z, t son las raíces del polinomio $x^2 + 2x + 4$, calcular el valor de

$$(z+t)^7 - z^7 - t^7.$$

Sin calcular los valores concretos de z y t.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Para cada entero positivo n, se definen a_n y b_n como las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + (2n+1)x + n^2 = 0$. Determinar el valor de

$$\frac{1}{(1+a_3)(1+b_3)} + \frac{1}{(1+a_4)(1+b_4)} + \cdots + \frac{1}{(1+a_{2024})(1+b_{2024})}.$$

Referencias

[Arg15] Argel. Fórmulas de Vieta. *OMMBC*, 2015.

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 3. Fórmulas de Vieta I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2022.

[TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 4. Fórmulas de Vieta. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Cristian Castilblanco
Teléfono: +505 8581 1745 *(Tigo)*
Correo: cristian.castilblanco120@gmail.com