

Colinealidad y Concurrencia Clase #11

Encuentro: 25

Curso: Colinealidad y Concurrencia

Fecha: 7 de octubre de 2023

Nivel: 5

Semestre: II

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Clase práctica #5

En esta quinta clase práctica se presentan algunas pistas para resolver los 20 problemas de Concurrencia y Colinealidad.

1. Problemas propuestos

Problema 1.1. Sea D el pie de altura desde A en el triángulo $\triangle ABC$ y M, N puntos en los lados CA y AB talque las rectas BM y CN se intersecan en AD . Probar que AD es bisectriz del ángulo $\angle MDN$.

Pista. Sea T la intersección de AD y MN , probar que $\frac{TM}{TN} = \frac{DM}{DN}$. Considerar aplicar el teorema de la bisectriz generalizada al triángulo $\triangle ABC$ y La ley de los senos a los triángulos $\triangle BDN$ y $\triangle CDM$. Utilizar la propiedad $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$ y luego probar que $\tan(\angle MDA) = \tan(\angle NDA)$.

Problema 1.2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro I . Sea Γ un círculo centrado en I con radio mayor al inradio. Sean X_1 la intersección de Γ con AB más cercana a B ; X_2 y X_3 las intersecciones de Γ con BC donde X_2 es más cercana a B ; y X_4 la intersección de Γ con CA más cercana a C . Sea K la intersección de X_1X_2 con X_3X_4 . Probar que AK biseca X_2X_3 .

Pista. Sean D, E y F a los puntos de tangencias del incírculo con BC, CA y AB , respectivamente. Demuestra que $FX_1 = DX_2 = EX_4$.

Problema 1.3. Sea $ABCD$ un cuadrado y sea X un punto en lado BC . Sea Y un punto en la recta CD tal que $BX = YD$ y D se encuentra entre C y Y . Demuestra que el punto medio de XY se encuentra sobre la diagonal BD .

Pista. Aplicar el teorema de Menelao a los triángulos $\triangle BCD$ y $\triangle XCY$.

Problema 1.4. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1 . Las rectas tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B . Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B . La recta BM interseca de nuevo a Γ_2 en el punto C , la recta CA interseca de nuevo a Γ_1 en el punto D , el segmento DB interseca de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE interseca a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F). Muestra que las rectas AF, BP y CE concurren.

Pista (Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2014). Probar que los triángulos $\triangle BEF$ y $\triangle PCA$ son homotéticos.

Problema 1.5. Sea Ω el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$ y sea ω_a la circunferencia tangente al segmento CA , segmento AB y Ω . Se definen ω_b y ω_c de manera análoga. Sea A', B', C' los puntos de toque de $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ con Ω , respectivamente. Probar que AA', BB', CC' concurren en la recta OI donde O e I son el circuncentro y el incentro de $\triangle ABC$, respectivamente.

Pista. Considerar el incírculo del triángulo $\triangle ABC$ y considerar el exsimilicentro de este con Ω . Luego, aplicar los teoremas de Monge y Monge D'Alembert.

Problema 1.6. Sea $ABCD$ un trapezoide con $AB > CD$ y $AB \parallel CD$. Sean los puntos K, L sobre los segmentos AB, CD , respectivamente, tal que $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Suponga que existen los puntos P, Q en la recta KL que satisfacen $\angle APB = \angle BCD$ y $\angle CQD = \angle ABC$. Probar que los puntos P, Q, B, C con concíclicos.

Pista. Considerar la intersección de AD con BC y analizar si existe alguno homotecia centrado en ese punto. Luego, por medio de angulo en cuadrilátero cíclicos llegar a lo pedido.

Problema 1.7. Los puntos P, Q y R están sobre los lados AB, BC y CA del triángulo acutángulo $\triangle ABC$, respectivamente. Si $\angle BAQ = \angle CAQ$, $QP \perp AB$, $QR \perp AC$ y CP y BR se intersecan en S probar que $AS \perp BC$.

Pista. Aplicar Ceva al triángulo $\triangle ABC$ con los puntos P, Q y R . Utilizar la definición del coseno.

Problema 1.8. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con circuncentro O y baricentro G . Sean A', B', C' las reflexiones de los puntos medios de BC, CA, AB con respecto a O , respectivamente. Probar que AA', BB', CC' y GO con concurrente.

Pista. Considere el ortocentro H , y demuestre que los triángulos $\triangle ABH$ y $\triangle A'B'O$ son homotéticos.

Problema 1.9. Un triángulo isósceles $\triangle ABC$ tiene base AB y altura CD con $BC = CA$. Sean P un punto sobre CD , E la intersección de la recta AP con BC y F la intersección de la recta BP con CA . Suponga que los incírculos del triángulo $\triangle ABP$ y del cuadrilátero $PECF$ son congruentes. Demuestre que los incírculos de $\triangle ADP$ y $\triangle BCP$ son también congruentes.

Pista. Trazar la tangente común externa más cercana al punto A , y note que esta es paralela a CD . Considera ahora una homotecia de centro B .

Problema 1.10. Sea el triángulo $\triangle ABC$ con $AC = BC$, sea P un punto dentro del triángulo tal que $\angle PAB = \angle PBC$. Si M es el punto medio de AB , entonces probar que $\angle APM + \angle BPC = 180^\circ$.

Pista. Probar que CA y CB son tangentes a circuncírculo del triángulo $\triangle APB$. Luego, usar la construcción de simediana.

Problema 1.11. Sea P un punto en el plano del triángulo $\triangle ABC$ y sea Q su conjugado isogonal respecto a $\triangle ABC$. Probar que

$$\frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} + \frac{BP \cdot BQ}{BA \cdot BC} + \frac{CP \cdot CQ}{CA \cdot CB} = 1.$$

Pista (Lista corta, IMO 1998). Considerar a X, Y, Z los pies de las proyecciones desde P hacia BC, CA, AB , respectivamente. Luego, utilizar áreas para lograr el resultado.

Problema 1.12. Sea el triángulo $\triangle ABC$ y P un punto en su interior. Sea A_1, B_1 y C_1 las intersecciones de AP, BP y CP con los lados BC, CA y AB , respectivamente. Considerando a X, Y y Z como la intersecciones de BC con B_1C_1 , CA con C_1A_1 y AB con A_1B_1 , respectivamente. Probar que X, Y y Z son colineales.

Pista. Aplicar Menelao al triángulo $\triangle ABC$ tres veces y multiplicar los resultados.

Problema 1.13. Sea el triángulo $\triangle ABC$ con incentro I . Sean D, E, F puntos de tangencias de su circuncírculo con los lados BC, CA y AB , respectivamente. Probar que los circuncírculos de los triángulos $\triangle AID, \triangle BIE$ y $\triangle CIF$ tiene dos puntos en común.

Pista. Probar que los centros de los círculos son colineales. Sean O_1, O_2, O_3 lo centros de los circuncírculos de los triángulos en cuestión, considerar la reflexión de I con respecto a estos centros.

Problema 1.14. Sea $BCXY$ un rectángulo construido fuera del triángulo $\triangle ABC$. Sea D pie de altura desde A hacia BC y sean U y V los puntos de intersección de DY con AB y DX con AC , respectivamente. Probar que $UV \parallel BC$.

Pista. Aplicar el teorema de Desargues en una de sus versiones degeneradas.

Problema 1.15. Sea el triángulo $\triangle ABC$ con $AB < AC$, el punto H denota el ortocentro. Los puntos A_1 y B_1 son pies de alturas desde A y B , respectivamente. El punto D es la reflexión de C respecto al punto A_1 . Si $E = AC \cap DH$, $F = DH \cap A_1B_1$ y $G = AF \cap BH$, probar que las rectas CH, EG y AD concurren.

Pista. Aplicar el teorema de Desargues.

Problema 1.16. Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes externamente. Las rectas tangentes desde O_1 hacia C_2 la tocan en A y B ; mientras que las rectas tangentes desde O_2 hacia C_1 la tocan en C y D , respectivamente. Sean $E = O_1A \cap O_2C$ y $F = O_1B \cap O_2D$. Demostrar que EF, O_1O_2, AD y BC concurren.

Pista. Aplicar el teorema de Pascal.

Problema 1.17. Sea el triángulo $\triangle ABC$, y sean los puntos B_1, C_1 sobre los lados CA y AB respectivamente. Sea Γ el incírculo del $\triangle ABC$ y sean E y F los puntos de tangencias de Γ con los mismos lados CA y AB , respectivamente. Además, se dibujan las tangentes desde B_1 y C_1 a $\triangle ABC$ y se toma los puntos de tangencias Z y Y , respectivamente. Probar que las rectas B_1C_1, EF y YZ son concurrentes.

Pista. Aplicar el teorema de Pascal en dos hexágonos degenerados.

Problema 1.18. Sea el triángulo $\triangle ABC$ y sea P un punto en el interior del triángulo pedal $\triangle DEF$. Suponga que las rectas DE y DF son perpendiculares. Probar que si Q es el conjugado isogonal de P con respecto al triángulo $\triangle ABC$, entonces Q es el ortocentro del triángulo $\triangle AEF$.

Pista. Considerar las reflexiones A', B', C' de P con respecto a BC, CA, AB , respectivamente. Luego, probar que Q es punto medio de $B'C'$.

Problema 1.19. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera y D, E y F puntos cualesquiera sobre las rectas BC, CA y AB tal que las rectas AD, BE y CF concurren. La paralela a AB por E interseca a la recta DF en el punto Q , la paralela a AB por D interseca a EF en T . Probar que las rectas CF, DE y QT son concurrentes.

Pista. Por conveniencia, considerar dibujar los puntos D, E, F en el interior de los segmentos BC, CA, AB . Aplicar varias veces el teorema de Ceva y el teorema de la bisectriz generalizada.

Problema 1.20. El punto D está sobre el lado AB del triángulo $\triangle ABC$. Sea ω_1 y Ω_1, ω_2 y Ω_2 los incírculos y los excírculos (tangentes al segmento AB) de los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$, respectivamente. Probar que las tangentes externas comunes a ω_1 y ω_2, Ω_1 y Ω_2 se intersecan en AB .

Pista. Considerar los centros de los círculos en cuestión y luego aplicar el teorema de Desargues.

Nota: los problemas no están ordenados por orden de dificultad.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco

Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)

Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte

Teléfono: +505 8420 4002 (*Claro*)

Correo: joseandanduarte@gmail.com