Enseñanza de las matemáticas a través de la escritura

Paco Gómez

8 de septiembre de 2024

Índice

1. ¿Por qué apreder matemáticas a través de la escritura?

Hay varias razones para contestar al título de esta sección; unas son más nobles que otras. Entre las menos nobles se cuenta la irritación ante una situación que lleva enquistada años y años y ante la que pocos hacen algo. Me estoy refiriendo a las respuestas de los alumnos en los exámenes. La mayor parte de los profesores admiten respuestas que son poco menos que un código privado interno. Cuando corregimos, nos vemos obligados a adivinar lo que quieren decir los alumnos, a interpretarlo cual exégetas de una lengua muerta; nos vemos forzados a separar forma y contenido brutalmente en contra de la propia naturaleza de las matemáticas; admitimos casi cualquier garabato como la solución de un problema. La irónica paradoja es que en clase ven las demostraciones que primorosamente reproducimos para que las aprendan —que no las aprenden, pues no las viven —. Sin embargo, aún más paradójico es que los matemáticos profesionales y los profesores de matemáticas están escribiendo matemáticas todo el tiempo. ¿Por qué los alumnos no escriben matemáticas también? ¿Cómo les podemos enseñar matemáticas sin un énfasis profundo y continuado en la escritura?

Una buena escritura es un reflejo de un pensamiento claro. Un pensamiento deficiente nunca podrá producir una buena escritura. Demasiado frecuentemente, cometemos el error de confundir familiaridad con conocimiento. Lo que nos escriben nuestros alumnos en los exámenes es en la mayor parte de los casos una muestra de su familiaridad con el tema, probablemente adquirida a toda prisa los días previos al examen. Conocer o entender algo es muy distinto a reconocerlo. La escritura, por la carga de reflexión que lleva, permite ese asentamiento, esa vivencia del conocimiento. He aquí unas cuantas ventajas de la escritura como método de enseñanza:

1. Escribir matemáticas hace las clases más activas. El alumno tiene que escribir en las clases y mostrar su escritura al resto de la clase, quien hará los comentarios pertinentes para mejorarla.

2. Escribir matemáticas enfrenta a los alumnos a su propio conocimiento. Escribir una demostración correctamente implica un alto nivel de revisión que fuerza a que se aprenda el material con más profundidad.

3. Escribir siempre fomenta la creatividad, y ello es cierto también en el caso de la escritura matemática.

4. Escribir matemáticas hará mejores lectores a los alumnos. Tendrán que practicar la lectura comprensiva más a fondo.

5. La entrega de ejercicios escritos al profesor proporciona a este una valiosísima oportunidad de comprobar la comprensión de la materia y reaccionar en consecuencia (bien repitiendo explicaciones, poniendo ejercicios complementarios, dando material adicional a alumnos concretos, etc.).

6. La escritura matemática, sobre todo si se combina con métodos colaborativos, da lugar a discusiones muy fructíferas entre los alumnos.

Sin embargo, la principal razón para que los alumnos escriban, y lo hagan con rigor y calidad, reside en los valores de las matemáticas. Los principales valores asociados a las matemáticas son la capacidad para ensanchar y agudizar los mecanismos de aprendizaje, el sentido del conocimiento y el genio del pensamiento profundo. Enseñar matemáticas a los alumnos a través de la escritura está en clara consonancia con esos valores. Estos valores, por supuesto, no son privativos de las matemáticas; están presentes también en otras áreas del saber.

2. ¿Qué es una demostración?

El problema es que no se enseña a escribir textos matemáticos. Como mucho, se exponen demostraciones delante de los alumnos, pero luego no se les exige que lo hagan bien ellos mismos hasta el último detalle y con rigurosidad. Una demostración en matemáticas es el texto más común. Empezaremos por revisar la estructura de una demostración y sus tipos. Una vez aprendida la estructura de esta pieza básica de la escritura matemática, entraremos a fondo en otras cuestiones más generales tales como las refutaciones, la escritura de problemas, los principios generales de escritura y la corrección lingüística.

Una demostración o prueba está compuesta de tres partes: premisas, razonamiento y consecuencia. Las premisas se llaman también hipótesis y la consecuencia, tesis o conclusión. La relación entre las premisas, el razonamiento y la consecuencia es que siempre que las premisas sean ciertas y exista un razonamiento lógicamente correcto, entonces la consecuencia es cierta. Un enunciado que relacione un conjunto de premisas y una consecuencia se llama teorema. Probar o demostrar un teorema consiste en proporcionar un razonamiento lógicamente correcto que una premisas y conclusión. Por ejemplo, veamos el siguiente teorema.

Teorema 2.1. Sean a, b, c tres enteros, donde $a, b \neq 0$. Entonces, si a divide a b y b divide a c, se sigue que a divide a c.

El teorema 1 establece que la divisibilidad es una propiedad transitiva. La primera línea

Sean a, b, c tres enteros, donde $a, b \neq 0$.

delimita el alcance del teorema. Proclamamos la transitividad de una propiedad de los números enteros, pero no de otros conjuntos de números. Esto es una cuestión de precisión. La segunda línea

Entonces, si a divide a b y b divide a c, se sigue que a divide a c.

es el núcleo del enunciado del teorema, esto es, donde reside la sustancia lógica del teorema. Las premisas son a divide a b y b divide a c; la consecuencia, a divide a c. El teorema establece que si es cierto que a divide a b y b divide a c, entonces es cierto también que a divide a c. Otros teoremas pueden tener una estructura lógica menos evidente. Por ejemplo:

Teorema 2.2. Sea p un número primo y a, b dos números enteros. Si p divide a $a \cdot b$, entonces o bien p divide a a o bien p divide a b.

La consecuencia del teorema 2 consiste en dos enunciados, p divide a a y p divide a b, y la consecuencia establece que uno de los dos o ambos es cierto. En este ejemplo, la estructura lógica del teorema es más complicada. He aquí otro ejemplo de teorema.

Teorema 2.3. Sea $n \geq 1$ un número natural. La siguiente fórmula es cierta para todo n:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aquí la estructura del teorema 3 es

$$\text{Si } n \geq 1 \text{ es un número natural,}$$
$$\text{entonces } 1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2} \text{ es una igualdad cierta.}$$

a pesar de que en la redacción literal del teorema 3 la palabra “entonces” no aparece. En general, la estructura de un teorema es

3. Tipos de demostración

Según la naturaleza del teorema o del problema que resolver, es preciso o recomendable un tipo de demostración particular. En lo que sigue estudiaremos los distintos tipos de demostración y los contextos en que aparecen.

3.1. Demostración directa

Una demostración directa es una demostración en que se aplican directamente resultados y definiciones que se dan por conocidos. La estructura de la demostración consiste en una cadena de implicaciones. He aquí un ejemplo de este tipo de demostración.

Teorema 3.1. Sea n un número natural. Si al dividir n por 3 da como resto 2, entonces, $n^3 + 1$ es divisible por 3.

Demostración. Si n da 2 como resto al dividirlo por 3, esto significa que existe un entero q tal que $n = 3q + 2$. Sustituimos en $n^3 + 1$ y desarrollamos:

$$n^3 + 1 = (3q + 2)^3 + 1 = (27q^3 + 54q^2 + 36q + 8) + 1 = 3(9q^3 + 18q^2 + 12q + 3)$$

Se sigue que el último número obtenido es un múltiplo de 3 y, por tanto, el teorema es cierto. □

3.2. Demostración por casos

A veces la estructura lógica de un teorema es de la forma $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_k) \implies Q$, esto es, la premisa del teorema se puede descomponer en la disyunción de otras premisas, los casos. La estructura lógica es equivalente a $(P_1 \implies Q) \wedge (P_2 \implies Q) \wedge \ldots (P_k \implies Q)$. La demostración del teorema consiste en probar por separado que la conclusión Q se sigue de cada caso $P_i,\ i = 1, \cdots, k$. La prueba del siguiente teorema se ha escrito por casos.

Teorema 3.2. El producto de dos enteros consecutivos es siempre un número par.

Demostración. Sea x un entero. Dividimos en dos casos la prueba, según x sea par o impar.

- El caso en que x es un número par. En este caso, x se puede escribir como x = 2k, para cierto entero k. Entonces el producto $x(x+1) = 2k(2k+1)$, que es un número par.

- El caso en que x es un número impar. Ahora $x = 2k+1$, para cierto entero k. Se sigue que $x(x+1) = (2k+1)(2k+1+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$. Esto implica que $x(x+1)$ es par.

□

3.3. Demostración por reducción al absurdo

Este tipo de pruebas se llama también demostración por contradicción. Se niega la conclusión del teorema y se incorpora como una premisa más. A partir de ahí, se razona lógicamente hasta alcanzar una contradicción con alguna de las premisas del teorema. Como se ha obtenido una contradicción, no es posible la negación de la conclusión, y el teorema es cierto. A continuación se presenta una demostración por reducción al absurdo muy conocida.

Teorema 6 Probar que el conjunto de los números primos es infinito.

Prueba: Supongamos que hubiese un número finito de primos, digamos, p1,p2,. . . ,pn. Construimos un nuevo número p como sigue: p = p1 p2 ...pn + 1 La pregunta ahora es si p es primo o no. No puede ser compuesto, porque entonces algunos de los primos p1,. . . ,pn tendría que dividir a p. Por su construcción, eso es imposible. Se sigue que p es primo. Esto contradice el hecho de que haya exactamente n primos. QED

3.4 Demostración por contraposición A veces la demostración directa de un resultado resulta ser bastante difícil o enrevesada. Sin embargo, cuando el resultado se formula por contraposición la prueba se puede tornar fácil. Si el teorema tiene la estructura lógica P= Q, su contrapositivo es ¬Q= ¬P. El ejemplo siguiente ilustra esta técnica.

Teorema 7 Sea n un número entero. Si n2 es par, entonces n es par también.

Prueba: Supongamos que n no es par. Entonces n se puede escribir como n = 2k + 1, para cierto entero k. Sustituyendo en n2 tenemos:

n2 = (2k + 1)2 = 4k2 + 4k + 1 = 2(2k2 + 2k) + 1 Esto prueba que n2 es impar. Por el contrapositivo, hemos probado que si n2 es par, entonces también lo es n. QED

Aunque algunos alumnos las confunden, la demostración por contraposición es distinta a la demostración por reducción al absurdo. En esta última prueba es necesario obtener una contradicción, pero no así en la demostración por contraposición.

3.5 Demostración por inducción Las demostraciones por inducción aparecen cuando el enunciado del teorema asevera que una propiedad P(n) es cierta para cualquier n , siendo P(n) una propiedad que depende de los números naturales. Consta de dos partes: una, llamada paso base, donde se demuestra que la propiedad es verdadera para un cierto n0; y otra, llamada paso inductivo, donde se prueba que, si P(n- 1) es cierta para n >n0, entonces P(n) es cierta. Si ambos pasos se demuestran correctamente, entonces P(n) es cierta para n n0. El teorema que viene a continuación presenta una sencilla prueba por inducción.

Teorema 8 Demostrar que para todo número natural n se cumple la fórmula: n(n-+-1) 1 + 2 + ...+ n = 2 Prueba: La prueba tiene dos pasos, el paso base y el paso inductivo. Paso base. Se comprueba que la fórmula es cierta para n = 1. El miembro izquierdo de la fórmula da 1; el derecho, 1(1+ 1) ——— 2 = 1, con lo cual la fórmula se cumple. Paso inductivo. Ahora probaremos que si la fórmula es cierta para n-1, entonces también es cierta para n. La fórmula para n - 1 tiene la siguiente forma (sustitúyase n por n - 1):

(n - 1)n 1+ 2+ ...+ (n - 1) = ——— 2

Escribimos la suma de los n primeros números y aplicamos la fórmula anterior:

El último término obtenido es la fórmula para n. Luego la fórmula es correcta para cualquier n . QED

3.6 Demostración constructivas Las demostraciones constructivas, a diferencia de por ejemplo las de por reducción al absurdo, construyen explícitamente el objeto matemático que se pide en el enunciado. Se da con frecuencia en la resolución de problemas. En el resultado siguiente se pide construir las soluciones de la ecuación ax2 + bx + c = 0 y se da una demostración constructiva.

Teorema 9 Sean a,b,c tres números reales con a no nulo. Probar que la ecuación ax2+bx+c = 0 tiene siempre solución, bien sea real o imaginaria.

Prueba: Para construir la solución vamos a completar los cuadros en la ecuación. Primero, sacamos factor común a, puesto que a /= 0, y después sumamos y restamos el término b24a2:

A continuación, completamos los cuadrados:

Por último, despejamos la x:

Según el valor de b2 - 4ac, tenemos tres casos: (1) raíces reales simples, cuando b2 - 4ac sea estrictamente positivo; (2) raíz real doble, cuando b2 - 4ac sea nulo; (3) y raíces complejas conjugadas, cuando b2 - 4ac sea estrictamente negativo. QED

4. Refutaciones y contraejemplos

En matemáticas siempre se pregunta qué pasa con el recíproco de una implicación. Se enuncia un teorema que tiene la clásica estructura P=Q y nos preguntamos: “¿Será cierto también que Q=P, su recíproco?” Muy a menudo, ocurre que el recíproco no es cierto. Pero ¿cómo se prueba que una implicación es falsa? Por medio de un contraejemplo. Un contraejemplo es un caso en que las premisas son ciertas, pero la conclusión es falsa. Exhibir un contraejemplo es refutar una implicación. Pongamos como ejemplo el conocido teorema de que toda función derivable en un punto es continua. La demostración consta de una línea; si f(x) es derivable en x = a, entonces:

f(x)—f(a) f(x)–f(a)- lxim→a(f(x)- f (a)) = lxim→a x - a (x - a) = lix→ma x - a lxim→a(x - a) = f(a) 0 = 0 Ahora bien, ¿es cierto el recíproco, que toda función continua es derivable? No, y el contraejemplo lo constituye la función f(x) = x en x = 0. Los siguientes cálculos lo prueban:

((| x—0- | xl→im0+ x = 0 || lx→i0m+ x = 1 (1) lim x = (2) x→0 |(lim (- x) = 0 ||| x-0 x→0- (lx→i0m- —x—-= - 1 En (1) se demuestra que el valor absoluto es continuo; en (2), que no es derivable, ya que los límites laterales de la derivada son distintos. Esto es un contraejemplo de que las funciones continuas son derivables. Obsérvese que basta dar un solo contraejemplo para invalidar la implicación entera. Por último, por mor del desafío intelectual, hay autores que presentan problemas que aparentemente contienen algún tipo de trampa. Una vez más, se resuelven a base de imaginación y lógica. A continuación reproducimos un conocido problema de esta categoría (tomado del excelente libro ¡Ajá!, de Martin Gardner [Gar89]).

Problema 10 En su lecho de muerte un beduino reparte la herencia a sus tres hijos. El hombre comunica a sus hijos que les deja 11 camellos que han de repartirse como sigue: 12 de los camellos para el mayor, 14 para el mediano y 16 para el pequeño. Sin embargo, no saben cómo llevar a cabo el reparto, ya que ni 2, ni 4, ni 6 dividen a 11. Piden ayuda a un sabio, quien acude servicial a la casa del beduino en camello. Tras escuchar a los hijos, decide regalarles su camello para facilitar el reparto. Entonces ahora hay 12 camellos. Al mayor le corresponden 6, al mediano 3 y al menor 2. En total, se han repartido 11 camellos. El sabio toma su camello otra vez y vuelve a su casa. ¿Cómo pudo hacer el reparto?