Lista de problemas para el curso de polinomios

1. Clase 06

Problema 1.1 ([BLW22]. Example 4.4. Page 7)**.** Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ y $P(3) = 2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

2. Clase 07

Clase práctica #2

Problema 2.1. Para que la división de $6x^4 - 11x^2 + ax + b$ entre $3x^2 - 3x - 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Problema 2.2. Calcular la suma de coeficientes del resto que deja $x^{3333} - 9$ entre $x^2 - 729$.

Problema 2.3 ([RC08]. Problem 8.25. Page 253[1].)**.** Sea r una raíz de $x^2 - x + 7$. Hallar el valor de $r^3 + 6r + \pi$.

Problema 2.4 ([RC08]. Problem 8.27. Page 254.)**.** Sean a, b y c las raíces reales de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. Probar que $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$.

Problema 2.5 ([Iha]. Exercise 13. Page 12)**.** Sean r_1, r_2 y r_3 raíces distintas del polinomio $y^3 - 22y^2 + 80y - 67$. De tal manera que existen números reales α, β y θ tal que

$$\frac{1}{y^3 - 22y^2 + 80y - 67} = \frac{\alpha}{y - r_1} + \frac{\beta}{y - r_2} + \frac{\theta}{y - r_3}$$

$\forall y \notin \{r_1, r_2, r_3\}$. ¿Cuál es valor de $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta}$?

Problema 2.6 ([NF21]. Exercise 3.14. Page 12)**.** La ecuación $2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1$ tiene tres raíces reales. Dado que su suma es $\dfrac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $mcd(m, n) = 1$. Calcular $m + n$.

Problema 2.7. Si $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio tal que $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ y $P(3) = 30$, determine el valor de

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10}.$$

Problema 2.8 ([Eng97]. Problem 34. Page 256)**.** Sea $F(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a, b, c y d tal que $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$, entonces no existe un entero k tal que $F(k) = 8$.

Problema 2.9 ([NF21]. Exercise 3.15. Page 12)**.** Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$. ¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{20}(x)$?

[1] El el archivo pdf es la página 273.

3. Clase 08

Problema 3.1 ([Eng97]. Problem 15. Page 255)**.** Sea $N(x) = (1-x+x^2-\cdots+x^{100})(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$. Probar que después de multiplicar y reducir términos solo quedan potencias pares de x.

Problema 3.2 ([BLW22]. Problem 6.2. Page 12)**.** Sea $R(x) = 15x - 2016$. Si $R^5(x) = R(x)$, encontrar la suma de todos los posibles valores de x.

Problema 3.3 ([Iha]. Exercise 14. Page 12)**.** Sean r y s raíces reales distintas de $P(x) = x^3 + ax + b$. También, sean $r + 4$ y $s - 3$ raíces de $Q(x) = x^3 + ax + b + 240$. Encontrar la suma de todos los posibles valores de $|b|$.

4. Corto #3

Problema 4.1. Para que la división de $x^4 + ax^2 + b$ entre $x^2 + x + 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Problema 4.2. Calcular el producto de los coeficientes del resto que deja $x^{2023} - 1$ entre $x^2 - 4$. (La respuesta se puede dejar indicada)

Problema 4.3 ([NF21]. Example 3.13. Page 12)**.** Supongase que las raíces de $x^3 + 3x^2 + 4x - 11 = 0$ son a, b y c. También, que las raíces de $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ son $a + b$, $b + c$ y $c + a$. Hallar t.

Problema 4.4 ([Iha]. Page 9)**.** Sea el polinomo $f(x) = x^3 + 3x - 1$ con raíces a, b y c. Calcular

$$\frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{b^3+c^3} + \frac{1}{c^3+a^3}.$$

5. Examen final

Problema 5.1. Sea r_1, r_2 y r_3 las tres raíces de polinomio cúbico P. También, que

$$\frac{P(2)+P(-2)}{P(0)} = 200$$

La expresión $\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_3r_1}$ puede ser escrito como $\frac{m}{n}$ para m y n coprimos. Encontrar $m + n$.

Problema 5.2. Si a y b son raíces distintas del polinomio $x^2 + 2023x + 2020$, entonces

$$\frac{1}{a^2+2020a+2020} + \frac{1}{b^2+2020b+2020} = \frac{m}{n},$$

donde m y n son primos relativos. Calcular $m + n$.

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[BLW22] Adithay B., Brian L., and William W. Polynomials. *AoPS*, 2022.

[Eng97] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1997.

[Iha] Ihatemath123. Vieta's formulas.

[NF21] Naman12 and Freeman66. Polynomials in the AIME. *AoPS*, 2021.

[RC08] Richard Rusczyk and Mathew Crawford. *Intermediate Algebra*. AoPS, 2008.

[Rub19] Carlos Rubio. Un breve recorrido por los polinomios. *Tzaloa*, (2), 2019.