Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Cuaderno de Polinomios

Kenny J. Tinoco
kenny.tinoco10@gmail.com
Junio 2023

Índice

1. Introducción

Esta es una recopilacion del curso de Polinomios en el nivel V de la academia sabatina de jóvenes talento, en el año 2023.

2. Introducción a los Polinomios

2.1. Definiciones

Definición 2.1 (U).

polinomio en x es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

Donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números que pueden ser tanto reales como complejos y son llamados los **coeficientes** de $P(x)$.

Cada uno de los sumandos $a_i x^i$ son llamados **términos** de $P(x)$. Si $a_n \neq 0$, se dice que $P(x)$ es de **grado n** y se denota por $\deg(P) = n$. En este caso $a_n x^n$ es llamado **término principal** y a_n **coeficiente principal** del polinomio.

En particular, los polinomios de grado 1, 2, 3 y 4 son llamados *líneal, cuadrático, cúbico y cuártico*, respectivamente. He aquí la forma de dichos polinomios:

Nombre	Forma
Líneal	$P(x) = a_1 x + a_0$
Cuadrático	$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Cúbico	$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Cuártico	$P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Veremos a continuación algunas caracteristicas y definiciones resaltables sobre los polinomios:

- **Polinomio mónico:** Polinomio cuyo coeficiente principal es 1.
- **Polinomio completo:** Un polinomio de grado n es completo si tiene todos sus $n+1$ términos.
- **Polinomio ordenado:** Un polinomio es ordenado cuando los exponente de la variable de referencia, guardan cierto orden, ya sea ascendente o descendente.
- **Polinomios iguales:** Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con coeficientes a_i y b_i, respectivamente, son iguales si y solo si tienen el mismo grado y $a_i = b_i$, para todo i en $0 \leq i \leq n$.
- **Polinomio recíproco:** Un polinomio $P(x)$ de grado n es recíproco si cumple que $a_i = a_{n-i}$, para todo i en $0 \leq i \leq n$.
- **Polinomio de varias variables:** Un polinomio que dependen de más de una variable es llamado multivariante o multivariable, y es denotado por $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.
- **Grado absoluto:** El grado absoluto de un término de la forma $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k}$, es la suma de las potencias de cada una de las variables.

- **Polinomio homogéneo:** Un polinomio multivariable es homogéneo si todos sus términos tienen el mismo grado absoluto.
- **Evaluación en un polinomio:** Valor númerico que se obtiene al reemplazar la x por una constante a en un polinomio $P(x)$, lo cual denotamos por $P(a)$[1].

2.2. Operaciones con polinomios

Sean dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de grado 3,

$$\begin{aligned} P(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ Q(x) &= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \end{aligned}$$

se definen:

Suma: $P(x) + Q(x) = (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

Resta: $P(x) - Q(x) = (a_3 - b_3)x^3 + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$

Producto: $P(x) \times Q(x) = a_3b_3x^6 + (a_2b_3 + a_3b_2)x^5 + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)x^4 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_0b_0$

Composición: $(P \circ Q)(x) = P(Q(x)) = a_3Q(x)^3 + a_2Q(x)^2 + a_1Q(x) + a_0$

Evidentemente estas operaciones son análogas para polinomios de grado mayor a 3.

Observación 1.

En general si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios no nulos, entonces se verifica que

$$\begin{aligned} &\deg(P \pm Q) \leq \textit{máx}\{\deg(P), \deg(Q)\} \\ &\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q) \end{aligned}$$

Observación 2.

La composición $(P \circ Q)(x)$ se lee "P compuesto de Q" o "Q evaluado en P" y consiste en igualar la variable x a $Q(x)$ ($x := Q(x)$) y luego sustituir en el polinomio $P(x)$.

La composición de polinomios es asociativa, es decir, $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$, mas no conmutativa, salvo casos especiales, así que generalmente supondremos que $P \circ Q \neq Q \circ P$.

Observación 3.

$P(x)^n \neq P^n(x)$. Denotaremos como $P(x)^n$ al polinomio elevado a la n-ésima potencia y a $P^n(x)$ como la composición n-ésima de $P(x)$ con si mismo, es decir:

$$P(x)^n = \underbrace{P(x) \cdot P(x) \cdots P(x)}_{n \text{ veces}} \quad \wedge \quad P^n(x) = \underbrace{P(P(P \cdots (P}_{n \text{ veces}}(x)) \cdots)).$$

[1] Se lee "P de a" o "P evaluado en a".

2.3. Ejercicios y problemas

Ejercicio 2.1. Sean $P(x) = 5x^2 - 33x + 59$ y $Q(x) = 3 - 2x$. Determine

1. $P(x) + Q(x)$
2. $Q(x) - P(x)$
3. $P(x) + Q((x+1)^2)$
4. $P(1-x) + Q(x-1)$
5. $(P \circ Q)(x)$
6. $Q(P(x))$
7. $P(Q(3x-4))$
8. $Q^3(x) + P(x)^2$

Problema 2.1. Sea $P(x)$ un polinomio mónico de grado 3. Halle la suma de coeficientes del término cuadrático y lineal, siendo su término independiente igual a 5. Además, $P(x+1) = P(x) + nx + 2$.

Problema 2.2. Hallar un polinomio cuadrático cuyo coeficiente de x y término independiente son iguales y se cumple que $P(1) = 7$ y $P(2) = 18$.

Problema 2.3. Dado que

$$\begin{cases} Q(x) = 2x + 3 \\ Q(F(x) + G(x)) = 4x + 3 \\ Q(F(x) \times G(x)) = 5 \end{cases}$$

Calcular $F(G(F(G(\ldots F(G(1))\ldots))))$.

3. Raíces de Polinomios I

3.1. Definiciones

íz de un Polinomio

Definición 3.1 (L).

raíz de un polinomio $P(x)$ es un número r, tal que $P(r) = 0$. También, diremos que r es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.

Ejemplo 3.1 (D).

muestre que u es raíz del polinomio $R(x) = x^2 - (u+17)x + 17u$.

Solución. Para demostrar que u es raíz[2] de $R(x)$, basta probar que $R(u) = 0$. Lo cual es fácil ver cuando evaluamos $R(u) = u^2 - (u+17)u + 17u = u^2 - u^2 - 17u + 17u = 0$. ■

Definición 3.2 (S).

a P un polinomio con $\deg(P) = n$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces, $(x-a)$ es un *factor* de $P(x)$ si existe un polinomio[a] $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x-a)Q(x).$$

[a] ¿Por qué $\deg(Q) = (n-1)$?

Teorema 3.1 (Teorema del factor).

Dado un polinomio P, de grado n y $a \in \mathbb{R}$, diremos que a es una raíz de P si y sólo si $(x-a)$ es un factor de $P(x)$. Es decir

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x-a)Q(x)$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Si a_1, a_2 y a_3 son tres raíces distintas del polinomio cúbico $P(x)$, por el **Teorema ??** tenemos que,

$$P(x) = (x-a_1)Q(x), \quad \text{para algún } Q(x).$$

Pero como $P(a_2) = (a_2 - a_1)Q(a_2) = 0$ y $a_2 \neq a_1$, entonces $Q(a_2) = 0$, es decir a_2 es raíz de Q, nuevamente por el **Teorema ??**

$$Q(x) = (x-a_2)R(x), \quad \text{para algún } R(x).$$

Análogamente, tendremos que $R(x) = (x-a_3)S(x)$, para algún S constante. Así,

$$P(x) = c(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3), \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

[2] ¿Podés encontrar otra raíz de $R(x)$?

Vemos que saber las raíces de P nos condujo a su factorización[3]. Y en general, para un polinomio $P(x)$ de grado n y raíces r_i con $1 \leq i \leq n$, lo podemos expresar como

$$P(x) = c(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_{n-1})(x - r_n), \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

íces de un polinomio

Definición 3.3 (.

Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces (o ceros) distintas.

Así, por ejemplo, un polinomio P con $\deg(P) = 7$, tiene a lo más 7 raíces.

íces

Definición 3.4 (S).

existe $m \in \mathbb{N}$ y un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - a)^m Q(x)$$

diremos que la raíz a tiene multiplicidad m. Si $m = 1$ diremos que la raíz a es simple.

Ejemplo 3.2 (S).

a $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y suponga que $P(1)$ y $P(2)$ son ambos impares. Demuestre que no existe ningún entero n para el cual $P(n) = 0$.

Solución. Nos piden mostrar que $P(x)$ no tiene raíces enteras, entonces supongamos por el contrario, que existe un entero n tal que $P(n) = 0$. Entonces, por el **Teorema ??** $P(x) = (x - n)Q(x)$, con $Q(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Así podemos ver que, $P(1) = (1-n)Q(1)$ y $P(2) = (2-n)Q(2)$ son impares, pero $(1-n)$ y $(2-n)$ son enteros consecutivos, así que uno de ellos debe ser par. Por lo tanto, $P(1)$ o bien $P(2)$ tiene que ser par, lo cual contradice las condiciones del problema. Luego, n no existe. ■

Ejemplo 3.3 (S).

a $M(x)$ un polinomio cúbico con coeficientes enteros y sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, con $a \neq b \neq c$ tal que $M(a) = M(b) = M(c) = 2$. Demostrar que no existe un $d \in \mathbb{Z}$ para el que $M(d) = 3$.

Solución. Sea $N(x) = M(x) - 2$, como a, b y c son raíces de $N(x)$, es claro que $N(x) = \alpha(x - a)(x - b)(x - c)$, para algún entero α. Si para algún entero d se tiene que $M(d) = 3$, entonces $N(d) = \alpha(d - a)(d - b)(d - c) = 1$. Para que esto suceda los factores deben ser 1 o -1 y por lo tanto dos de ellos tendrían que ser iguales. Pero por la condición $a \neq b \neq c$ esto no puede ser, luego d no existe. ■

[3]Tema que se introduce en la sección 3.2.1.

3.2. Métodos para determinar raíces de polinomios

En este apartado nos centraremos en los métodos para la determinación de raíces de polinomios, particularmente para polinomios cuadráticos y cúbicos. Para determinar el valor de las raíces de polinomios se pueden utilizar diversos métodos, como por ejemplo; la factorización, las fórmulas de Cardano, la completación de cuadrados, fórmulas cuadráticas y cúbicas general, soluciones trigonométricas e hiperbólicas con valores auxiliares, métodos númericos, entre otros. El presente escrito, solo abordará algunos de estos métodos y se invita al lector complementar su aprendizaje con la búsqueda e investigación de otros métodos.

3.2.1. Factorización

Si un polinomio $P(x)$ es equivalente al producto de otros polinomios con grado menor, entonces diremos que $P(x)$ está factorizado. Por ejemplo, el polinomio $M(x) = 5x^3 + 4x^2 + 5x + 4$, es equivalente a $(5x + 4)(x^2 + 1)$, así diremos que $M(x)$ está factorizado y sus factores son $(5x + 4)$ y $(x^2 + 1)$.

Definición 3.5 (D).

do un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2+bx+c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, este puede ser factorizado como

$$P(x) = \frac{(ax + m)(ax + n)}{a}, \text{ donde } \begin{cases} m + n = b \\ mn = ac \end{cases} .$$

3.2.2. Completación de cuadrados

No todos los polinomios cuadráticos pueden ser factorizados fácilmente. Por ejemplo, al tratar de factorizar $x^2 + 6x - 1$ llegar directamente a $(x + 3 - \sqrt{10})(x - 3 - \sqrt{10})$ no resulta tan evidente, por lo cual podemos auxiliarnos en técnicas como la **completación de cuadrados**. Si se tiene el polinomio[4] $P(x) = x^2 + bx$ entonces podemos expresarlo de la forma:

$$P(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Lo cual facilita aplicar la **diferencia de cuadrados**.

Ejemplo 3.4 (H).

llar las raíces del polinomio $R(r) = r^2 - 10r + 7$.

Solución. Utilizando la completación de cuadrados, tenemos que

$$R(r) = r^2 - 10r + 7$$

[4] ¿Cómo sería la fórmula si $P(x) = ax^2 + bx$?

$$
\begin{aligned}
&= \left(r - \frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 7 \\
&= (r-5)^2 - 18 \\
&= \left(r - 5 + \sqrt{18}\right)\left(r - 5 - \sqrt{18}\right) \\
\Rightarrow R(r) &= \left[r - \left(5 - 3\sqrt{2}\right)\right]\left[r - \left(5 + 3\sqrt{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

De esta manera sabemos que $R(r)$ tiene como raíces a $\left(5 - 3\sqrt{2}\right)$ y $\left(5 + 3\sqrt{2}\right)$. ■

3.2.3. Fórmula general

Cuando tenemos un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, podemos encontrar los valores para sus dos raíces en función de los coeficientes, a esta fórmula le conoceremos como fórmula general

$$
x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ \wedge \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
$$

Demostración. Al completar cuadrado en $P(x)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
P(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \\
&= a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \\
&= a\left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Así, $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ son la raíces del polinomio. ■

3.2.4. Análisis del discriminante

Sea el polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ y sea $\Delta = b^2 - 4ac$. Diremos que Δ es el **discriminante** de P y que dependiendo de su signo se cumplirán los siguientes hechos:

- Si $\Delta > 0$, entonces P tiene dos raíces reales distintas, las cuales son:

$$
x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ \wedge \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.
$$

- Si $\Delta = 0$, entonces P tiene una raíz real de multiplicidad 2, la cual es $x = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, entonces P no tiene raíces reales, sino raíces complejas conjugadas[5].

Nos piden hallar las raíces del polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Para ello podemos plantear la ecuación

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ con } a \neq 0.$$

Al hacer la sustitución $y = x + \frac{b}{3a}$ nos da como resultado la ecuación de la forma $y^3 + py + q$, que desde ahora llamaremos la ecuación **Cúbica reducida**. La cual nos ayuda a obtener la expresión $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ que llamaremos **discriminante** y que dependiendo de su signo se cumplirán los siguientes hechos:

- Si $\Delta > 0$, entonces P tiene una raíz real y dos raíces complejas.
- Si $\Delta = 0$, entonces P tiene una raíz real de multiplicidad tres en el caso de que $p = q = 0$ o bien dos raíces reales (de multiplicidad uno y dos, respectivamente) en el caso de que $p^3 = -q^3 \neq 0$.
- Si $\Delta < 0$, entonces P tiene tres raíces reales diferentes.

3.2.5. Método de Cardano

Si se hace $y = A + B$, elevando al cubo y reacomodano se obtiene:

$$y^3 - 3ABy - (A^3 + B^3) = 0$$

Así, al comparar coeficientes homólogos con la ecuación **cúbica reducida**, se obtiene que $3AB = -p$ y $A^3 + B^3 = -q$, y en base a estas dos ecuaciones podemos formar:

$$(A^3)^2 + q(A^3) - \frac{p^3}{27} = 0$$

la cual es una ecuación cuadrática en A^3, que por la **fórmula general** podemos encontrar sus soluciones. Procediendo análogamente para B^3, llegamos a

$$A = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-q}{4} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$B = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-q}{4} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Así obtenemos que $y = \sqrt[3]{\frac{-q}{4} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{4} + \sqrt{\Delta}}$. Finalmente, obtuvimos las soluciones de la ecuación **cúbica reducida** y por lo tanto las soluciones de la ecuación cúbica general. A este resultado le conoceremos como la fórmula o Método de Cardano para un polinomio cúbico.

[5]Vale aclarar que el presente curso no entrará de lleno con las raíces complejas.
Aunque sí veremos algunos ejercicios y problemas bonitos.

Ejemplo 3.5 (.

Para qué valores de δ el polinomio $\delta x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{\delta}$ tiene sus dos raíces iguales?

Solución. El polinomio tiene raíces iguales si el discriminante es nulo, es decir $\Delta = 0$. Por lo tanto, $\Delta = 4 - 4\delta(1 - \frac{1}{\delta}) = 0$ de donde es fácil ver que $\delta(1 - \frac{1}{\delta}) = 1$. Luego, $\delta = 2$ es la única posibilidad. ∎

3.3. Agregados culturales y preguntas

1. Los números reales son un subconjunto de los números complejos. ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
2. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que cualquier polinomio de grado mayor a cero con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja[6].
3. **Pregunta:** ¿Cuántas raíces reales tiene el polinomio $P(x) = x^2 + 1$?

3.4. Ejercicios y Problemas

Ejercicio 3.1. Determina las raíces los siguientes polinomios con el método que más te guste

1. $x^2 + x - 20$
2. $9t^2 + 88t - 20$
3. $x^3 - 6x + 9$
4. $x^3 - 1331$
5. $-21x^2 - 11x + 2$
6. $(c+d)^2 - 18(c+d) + 65$
7. $r^4 - 13r^2 + 36$
8. $x^3 - 9x^2 - 9x - 15$
9. $12p^2 - 7p - 12$

Problema 3.1. Determine todos los posibles valores que puede tomar $\frac{x}{y}$ si $x, y \neq 0$ y $6x^2 + xy = 15y^2$.

Problema 3.2. Hallar $K \in \mathbb{R}$ tal que $x = K^2(x-1)(x-2)$ tiene raíces reales.

Problema 3.3. Encontrar todas las soluciones de la ecuación $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$, con $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Problema 3.4. Sean a, b y c números reales positivos. ¿Es posible que cada uno de los polinomios $P(x) = ax^2 + bx + c$, $Q(x) = bx^2 + cx + a$ y $R(x) = cx^2 + ax + b$ tenga sus dos raíces reales?

Problema 3.5. Sean $a, b, c \in R$ tal que los polinomios $ax^2 + bx + c$ y $cx^2 + bx + a$ tienen dos raíces reales distintas cada uno (r_1, r_2) y (r_3, r_4) respectivamente. Se sabe que los números r_1, r_2, r_3, r_4 forman, en ese orden, una progresión aritmética. Demostar que $a + c = 0$.

[6] Este teorema lo veremos más adelante.

4. Fórmulas de Vieta

4.1. Definiciones

órmulas de Vieta

Definición 4.1 (.

Para un polinomio de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$ y $a_n \neq 0$, se denomina como Fórmulas de Vieta a las ecuaciones

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \cdots + r_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\vdots \\ r_1r_2\cdots r_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Veamos que por el **Teorema ??**, podemos escribir a P como

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

Cuando expandimos los n factores lineales del lado derecho de la ecuación, obtenemos

$$a_n x^n - a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x^{n-1} + a_n(r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n r_1 r_2 \cdots r_n$$

donde el signo del coeficiente x^k está dado por $(-1)^{n-k}$. Al comparar los coeficientes podemos ver que

$$\begin{aligned} a_{n-1} = -a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) \to &\qquad r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ a_{n-2} = a_n(r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n) \to &\qquad r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\vdots \\ a_0 = -a_n(r_1r_2\cdots r_n) \to &\qquad r_1r_2\cdots r_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Las fórmulas de Vieta son de mucha utilidad para calcular expresiones que involucran las raíces de un polinomio sin tener que calcular las propias raíces. Ya que dichas raíces se puede dejar en función de los coeficientes, los cuales muchas veces ya se conocen de antemano. En particular es útil conocer la fórmulas de Vieta para polinomios cuadráticos y cúbicos, gran variedad de los problemas que veremos las involucran.

1. Sea el polinimio cuadrático
$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$
con raíces r_1 y r_2, entonces se cumple que
$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2} \\ r_1r_2 = \frac{a_0}{a_2} \end{cases}$$

2. Sea el polinimio cúbico
$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
con raíces r_1, r_2 y r_3, entonces se cumple que
$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} \\ r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{a_1}{a_3} \\ r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

Ahora veamos algunos ejemplos de cómo se utilizan las formulas de Vieta en problemas de polinomios.

Ejemplo 4.1 (S).

p y q son raíces de la ecuación $x^2 + 2bx + 2c = 0$, determina el valor de $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$.

Solución. Aplicando las fórmulas de Vieta
$$p + q = -\frac{2b}{1} = -2b$$
$$pq = \frac{2c}{1} = 2c$$
La expresión que nos piden hallar puede ser transformada de la siguente manera
$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{p^2 + q^2}{p^2q^2} = \frac{p^2 + 2pq + q^2 - 2pq}{p^2q^2} = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{(pq)^2}$$
Finalmente, al sustituir llegamos a
$$\frac{(p+q)^2 - 2pq}{(pq)^2} = \frac{(-2b)^2 - 2(2c)}{(2c)^2} = \boxed{\frac{b^2 - c}{c^2}}$$
■

Ejemplo 4.2 (E).

cuentre el valor de $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ si r_1, r_2, r_3 son raíces de $P(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 1$.

Solución. Por la fórmulas de Vieta sabemos lo siguiente
$$r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{3}{1} = 3$$
$$r_1r_2r_3 = -\frac{1}{1} = -1$$
Ahora, notemos que
$$\frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_2}{r_1r_2r_3} = \frac{r_1r_2}{r_1r_2r_3} + \frac{r_2r_3}{r_1r_2r_3} + \frac{r_3r_1}{r_1r_2r_3} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$
Luego $\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{3}{-1} = \boxed{-3}$. ■

Ejemplo 4.3 (L).

s raíces del polinomio $x^2 + ax + b + 1$ son números naturales. Mostrar que $a^2 + b^2$ no es un primo.

Solución. Para demostrar que $a^2 + b^2$ no es primo, entonces tendremos que demostrar que es igual a producto de dos enteros mayores a 1. Digamos entonces que r_1 y r_2 son las raíces, por las Fórmulas de Vieta

$$r_1 + r_2 = -a$$
$$r_1 r_2 = b + 1$$

Que al elevar al cuadrado y sumar tenemos $a^2 + b^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1 r_2 - 1)^2$. Desarrollando

$$a^2 + b^2 = r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 + 1$$
$$a^2 + b^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_1^2 r_2^2 + 1 = \boxed{(r_1^2 + 1)(r_2^2 + 1)}$$

Por dato del problemas sabemos que r_1 y r_2 son naturales así $(r_1^2 + 1)$ y $(r_2^2 + 1)$ son mayores a 1. Luego la prueba está hecha. ■

Ejemplo 4.4 (S).

an r, s y t las tres raíces de la ecuación

$$8x^3 + 1001x + 2008 = 0.$$

Encontrar $(r + s)^3 + (s + t)^3 + (t + r)^3$.

Solución. Por las fórmulas de Vieta, sabemos lo siguiente

$$r + s + t = -\frac{0}{8} = 0$$
$$rs + st + tr = \frac{1001}{8}$$
$$rst = -\frac{2008}{8} = -251$$

Por la primera ecuación, podemos ver inmediantamente que $r + s = -t$ y por lo tanto $(r + s)^3 = -t^3$. Análogamente, llegaremos a

$$(r + s)^3 + (s + t)^3 + (t + r)^3 = -(r^3 + s^3 + t^3)$$

Para evitar calcular los valores individuales de las raíces, podemos auxiliarnos de indentidades algebraicas que nos relacionan $r^3 + s^3 + t^3$ con la expresiones $r + s + t$, $rs + st + tr$ y rst cuyos valores ya conocemos. Una de estas identidades es[7]

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

[7] Se deja como ejercicio al lector la demostración de esta indentidad. Así como la búsqueda de otras identidades similares.

De donde rápidamente vemos que

$$\begin{aligned} -(r^3+s^3+t^3) &= -(r+s+t)^3 + 3(r+s)(s+t)(t+r) \\ -(r^3+s^3+t^3) &= -(0)^3 + 3(-t)(-r)(-s) \\ -(r^3+s^3+t^3) &= -3rst = -3(-251) = \boxed{753} \end{aligned}$$

■

4.2. Agregados culturales y preguntas

1. IMO son las siglas de *International Mathematical Olympiad*. La IMO, básicamente, es la olimpiada mundial más dificil e importante en la que Nicaragua participa.

2. El método de Descenso Infinito de Fermat es una propiedad de los enteros no negativos. El cual dice que no puede existir una secuencia $n_1 > n_2 > \cdots$ con $n_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

3. Existe una técnica llamada **Vieta Jumping** la cual es una combinación de las fórmulas de Vieta y el método de Descenso Infinito de Fermat. Esta técnica es muy útil en problemas nivel IMO.

4.3. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 4.1. Sean r_1 y r_2 las raíces del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$. Encontrar los siguientes valores en función del los coeficientes de P.

1. $r_1 - r_2$
2. $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$
3. $r_1^2 + r_2^2$
4. $r_1^3 + r_2^3$
5. $(r_1+1)^2 + (r_2+1)^2$

Problema 4.1. Sean a y b las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$, encuentra $(a+1)(b+1)$.

Problema 4.2. Dado que m y n son raíces del polinomio $6x^2 - 5x - 3$, encuentra un polinomio cuyas raíces sean $m - n^2$ y $n - m^2$, sin calcular los valores de m y n.

Problema 4.3. ¿Para qué valores reales positivos de m, las raíces x_1 y x_2 de la ecuación

$$x^2 - \left(\frac{2m-1}{2}\right)x + \frac{m^2-3}{2} = 0$$

cumplen que $x_1 = x_2 - \frac{1}{2}$?

5. División de Polinomios

5.1. Definiciones

ón con resto

Definición 5.1 (.

Para todo polinomio F y G existen los polinomios Q y R tal que

$$F(x) = G(x)Q(x) + R(x), \quad \text{con } 0 < \deg(R) < \deg(G).$$

Donde Q y R son el *cociente* y *resto* (o *residuo*) de la división de F por G. Si $R(x) = 0$, entonces diremos que G divide a F, y lo vamos a denotar como $G(x) \mid F(x)$.

Abreviaremos $G(x) \mid F(x)$ como $G \mid F$ ya que al efectuar una división polinómica los polinomios en cuestión deben de tener la misma variable.

Ejemplo 1. Con $F(x) = x^7 - 1$ y $G(x) = x^3 + x + 1$ llegaremos a que

$$x^7 - 1 = (x^3 + x + 1)(x^4 - x^2 - x + 1) + 2x^2 - 2.$$

Aquí $Q(x) = x^4 - x^2 - x + 1$ y $R(x) = 2x^2 - 2$.

5.2. Método clásico

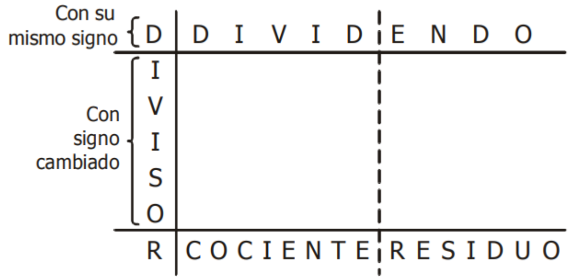
Se recomienda cuando los polinomios a dividir son de una sola variable o para polinomios homogéneos. El algoritmo es el siguiente:

1. Completar y ordenar los dos polinomios, tanto el divisor como el dividendo.
2. Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicar el divisor con signo cambiado por los términos del cociente y sumar ordenamente el producto obtenido con el dividendo.
4. Tratar el resto obtenido en el paso anterior como el nuevo dividiendo y repetir los pasos b y c.[8].
5. Continuar el proceso hasta que el ressection-definition.tcbto obtenido tenga un grado menor al divisor o bien al obtener cero.

5.3. Método de Horner

Se recomienda usar el método de Horner cuando el polinomio divisor es de segundo grado o más y se opera solo con los coeficientes de los polinomios ordenados y completos. Los coeficientes se distribuyen en un cuadro como el que sigue:

[8]En general, los métodos para la división de polinomios son recursivos.



Algoritmo del método de Horner

1. Se anotan los coeficientes del dividiendo en la parte superior del cuadro en forma horizontal.

2. Se anotan los coeficientes del divisor en la parte izquierda del cuadro en forma vertical con los signos cambiados a excepción del primero.

3. La línea de trazos separa el cociente del resto y para su trazo se considera el grado del divisor. En el cociente se cuentan tantos términos como el grado del dividendo menos el grado grado del divisor más uno.

4. El primer término del cociente se obtiene dividiendo el primer coeficiente del dividendo entre el primer coeficiente del divisor.

5. El coeficiente obtenido en el paso anterior se multiplica con los demás coeficientes del divisor con signo opuesto y los resultados se escriben en forma horizontal a partir de la siguiente columna hacía la derecha.

6. Las cantidades que se encuentran en la segundo columna se suman y el resultado se divide entre el primer coeficiente del divisor, repitiéndose el procedimiento hasta coincidir con la última columna del dividendo.

7. Para finalizar, se suman directamente las columnas correspoindientes al residuo, lo que conformará los coeficientes del polinomio residuo o resto.

5.4. Método de Ruffini

Se recomienda usar este método cuando el divisor tiene la forma $ax \pm b$. El método de Riffini se considera como un caso particular del método de Horner. Este método se apoya de un cuadro como el siguiente

	DIVIDENDO	
$\square$	$\downarrow$	
	COCIENTE	RESTO

Donde $\square$ es el resultado de resolver la ecuación $ax \pm b = 0$.

Algoritmo del método de Ruffini

1. Se anotan los coeficientes del dividiendo en forma horizontal y el valor de $\star$ en la columna izquierda.
2. Se baja el primer coeficiente del dividendo y se multiplica por el valor de $\star$, el resultado se anota en la siguiente columna, debajo del segundo coeficiente del dividendo.
3. Se suman las cantidades de la segunda columna y se sigue el mismo procedimiento hasta obtener un término debajo del último coeficiente del dividendo.
4. El residuo es la suma de cantidades de la última columna.

5.5. Agregados culturales y preguntas

1. Existe una rica y abundante literatura sobre la resolución de problemas, entre todas ellas destacamos *El arte de resolver problemas* de *José Luis Córdova.*
2. He aquí una cita "*En pocas palabras: cualquier problema (por trivial que parezca) lleva a una investigación. El gusto por la investigación, la curiosidad, es una de las mayores riquezas de la humanidad. Y para investigar no existe ningún camino lógico, sólo el camino de la intuición y la convicción de que existe un orden detrás del caos de percepciones.*"

5.6. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 5.1. Si el polinomio $3x^5 + 6x^3 - 3x$ se le divide entre $x + 1$ se obtiene como resultado un cociente de grado m, un término independiente b y un resto a. Hallar $m + a + b$.

Problema 5.2. Al dividir $x^4 - x^2 - 2x + 1$ entre $x^2 + x + 1$, determine el producto de los términos del cociente.

Problema 5.3. Si $P(x - 2) = x^3 - 10x^2 + 28x - 24$, hallar el resto de dividir $P(x)$ por $x - 3$

Problema 5.4. Si el resto de la división de $6x^4 - 11x^2 + ax + b$ entre $3x^2 - 3x - 1$ es $3x + 2$. Hallar $a - b$.

Problema 5.5. Para que la división de $x^4 + ax^2 + b$ entre $x^2 + x + 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Problema 5.6. Si el polinomio $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x + 1$ se divide por $x^2 - x + 2$ se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es 22 y un resto $R(x) = 10x - 1$, calcular $b + c$.

Problema 5.7. Al dividir el polinomio $P(x) = 55x^3 + (166 + b)x - x^2 - 2$ entre $Q(x) = ax^2 - 39x + 2$, el residuo es de la forma $R(x) = mx$. Calcular el valor de $a + b$.

Problema 5.8. ¿Qué valor adquire $\dfrac{n + 19}{k + 1}$, si la división $\dfrac{x^{19} - nx + k}{x^2 - 2x + 1}$ es exacta?

6. Divisibilidad polinómica

6.1. Definiciones

Teorema 6.1 (Teorema del resto).

Dado un polinomio P, de grado n y $a \in \mathbb{R}$, diremos que el resto de P cuando es dividido por $x-a$ es $P(a)$. Es decir

$$P(a) = r \Leftrightarrow P(x) = (x-a)Q(x) + r$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Demostración. Por la **Definición 5.1** podemos escribir

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R(x)$$

Donde $\deg(R) < \deg(x-a) = 1$, es decir R necesariamente tiene que ser un polinomio constante, digamos $R(x) = r$. Sustituyendo $x = a$ en la ecuación anterior, obtenemos que

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R(a) = R(a) = r$$

Esto es, el residuo de la división de P por $x-a$ es $P(a)$. ∎

Notemos que el *Teorema del resto* inmediatamente implica al *Teorema del factor* el cual ya hemos estudiado.

Teorema 6.2 (Teorema del factor).

Dado un polinomio P, de grado n y $a \in \mathbb{R}$, diremos que a es una raíz de P si y sólo si $(x-a)$ es un factor de $P(x)$. Es decir

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x-a)Q(x)$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Demostración. Si $(x-a) \mid P(x)$, entonces existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

Y por la unicidad del cociente y el residuo de la *División con resto*, se sigue que el residuo de la división de P entre $x-a$ es cero. Luego, $P(a) = 0$. ∎

Teorema 6.3 (Teorema fundamental del Álgebra).

Todo polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, donde $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$, tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Desafortunadamente, la prueba del *Teorema fundamental del Álgebra* es un poco[9] complicada para nuestro pequeño curso de polinomios. Sin embargo, vamos usar este teorema para demostrar que todo polinomio de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces (hecho que ya hemos venido utilizando[10]). Esto significa que podemos escribir cualquier polinomio $P(x)$ en la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

donde $r_1, r_2, \cdots, r_n$ son reales o complejos.

Esta prueba la haremos por inducción[11] en el grado del polinomio. Si el polinomio es de grado 1, el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado es cierto para polinomios de grado $n-1$ y consideremos un polinomio $P(x)$ de grado n. De acuerdo con el *Teorema Fundamental del Álgebra*, $P(x)$ tiene una raíz r_1, esto es, $(x - r_1) \mid P(x)$. Luego, existe un polinomio $Q_1(x)$ tal que $P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$.

Como $\deg(P) = n = \deg[(x-r_1)Q_1(x)] = \deg(x-r_1) + \deg[Q_1(x)]$, tenemos que $\deg[Q_1(x)] = n-1$. Luego, por la hipótesis de inducción, el polinomio $Q_1(x)$ tiene exactamente $n-1$ raíces, esto es $Q_1(x) = c(x-r_2)(x-r_3)\cdots(x-r_n)$. Por lo tanto, $P(x) = c(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$.

El resultado que acabamos de demostrar, solo muestra al existencia de las raíces; encontrarlas es otro problema, que podemos atacar con la fórmulas de Vieta o la división de polinomios.

Ejemplo 6.1 (.

Es el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 6$ divisible por $x + 3$?

Solución. Es claro ver, por el *Teorema del factor*, que si $x + 3$ es factor de P entonces solo basta probar que $P(-3) = 0$. Rápidamente vemos que

$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^4 + 2(-3)^3 - 2(-3)^2 + (-3) - 6 \\ P(-3) &= 81 - 54 - 18 - 3 - 6 = 81 - 81 = \boxed{0} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 6.2 (S).

a $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Cuando $P(x)$ es dividido por $x - 1$, el resto es 3. Cuando $P(x)$ es dividido por $x - 2$, el resto es 5. Determinar el resto cuando $P(x)$ es dividido por el polinomio $x^2 - 3x + 2$.

Solución. Escribamos

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + R(x)$$

donde R es el resto que buscamos. Como $\deg(R) < \deg(x^2 - 3x + 2) = 2$, podemos escribir $R(x) = ax + b$ para constantes a, b. Por otra parte, por el *Teorema del resto*, tenemos que $P(1) = 3$ y $P(2) = 5$. Como 1 y 2 son raíces de $x^2 - 3x + 2$, al sustituir estos valores en P, obtenemos que

$$P(1) = 0 \times Q(1) + R(1) = a + b$$

[9]Para más información ver [BGV14], página 94.
[10]Ver **Definición 3.1**, página 8.
[11]Ver **Sección 10**.

$$P(2) = 0 \times Q(2) + R(2) = 2a + b$$

Como $P(1) = 3$ y $P(2) = 5$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a + b &= 3 \\ 2a + b &= 5 \end{aligned}$$

De donde obtenemos $(a, b) = (2, 1)$. Por lo tanto, el resto buscado es $\boxed{2x + 1}$. ■

Ejemplo 6.3 (E).

contrar el residuo cuando $x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6$ es dividido por $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Solución. Como el grado de $x^3 - 2x^2 - x + 2$ es 3, el grado del resto puede ser a lo más 2, así que podemos expresar el resto que buscamos como el polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ para constantes a, b, c. Al escribir la división como

$$x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6 = \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) Q(x) + \left(ax^2 + bx + c\right)$$

Rápidamente, notamos que $x^3 - 2x^2 - x + 2$ puede factorizarse

$$x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6 = (x - 2)(x - 1)(x + 1)Q(x) + (ax^2 + bx + c)$$

Por el *Teorema del resto*, si sustituimos x en los valores $2, 1, -1$ el término que multiplica a $Q(x)$ se hace cero

$$\begin{gathered} (2)^{100} - 4(2)^{98} + 5(2) + 6 = 0 \times Q(2) + a(2)^2 + b(2) + c \\ (1)^{100} - 4(1)^{98} + 5(1) + 6 = 0 \times Q(1) + a(1)^2 + b(1) + c \\ (-1)^{100} - 4(-1)^{98} + 5(-1) + 6 = 0 \times Q(-1) + a(-1)^2 + b(-1) + c \end{gathered}$$

De donde formamos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 16 \\ a + b + c &= 8 \\ a - b + c &= -2 \end{aligned}$$

Que al resolverlo obtenemos $(a, b, c) = (1, 5, 2)$, de aquí que el residuo sea $\boxed{x^2 + 5x + 2}$. ■

6.2. Agregados culturales y preguntas

- Para un estudiante de matemáticas, escuchar a alguien hablar sobre las matemáticas difícilmente le hace mayor bien que a un estudiante de natación el escuchar a alguien hablar sobre la natación. Vos no podés aprender la técnica de natación teniendo a alguien que te dice cómo poner tus brazos y piernas; y no podés aprender a resolver problemas teniendo a alguien que te dice a cada momento cómo completar el cuadrado o sustitur $sen(u)$ por y. ¡La mejor forma de aprender es hacer!

- No te limités a memorizar teoremas importantes. Aprendé a probarlos. Los métodos usados para probar teoremas también pueden usarse para resolver otros problemas a los que no es fácil aplicar directamente estos teoremas.

- Si $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ y $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ ¿será cierto que $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \cdots + 2a_{n-1}a_n$?

6.3. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 6.1. Calcular el valor de $a + b$ si $1 + i$ es raíz del polinomio $x^5 + ax^3 + b$.

Problema 6.2. ¿Para qué valores de k se cumple que $x-2$ es factor de $x^3+2kx^2+k^2x+k-3$?

Problema 6.3. Para un polinomio desconocido que deja un resto 2 al dividirlo por $x - 1$, y un resto 1 al dividirlo por $x - 2$. ¿Cuál es el resto que se obtiene si este polinomio es dividido por $(x - 1)(x - 2)$?

Problema 6.4. Encontrar el resto cuando $(x + 3)^5 + (x + 2)^8 + (5x + 9)^{1997}$ es dividido por $x + 2$.

Problema 6.5. Encontrar el resto cuando $x^{2006} + x^{2005} + \cdots + x + 1$ es dividido por $x + 1$.

Problema 6.6. Sea $F(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Encontrar el residuo cuando $F(x^5)$ es dividido por $F(x)$.

Problema 6.7. Determinar todos los enteros positivos n, tales que el polinomio $x^n + x - 1$ sea divisible por el polinomio $x^2 - x + 1$.

7. Raíces de Polinomios II

7.1. Definiciones

Teorema 7.1.

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, entonces $P(a)-P(b)$ es divisible entre $(a-b)$, para cualesquiera enteros distintos a y b.

$$(a-b) \mid P(a)-P(b)$$

En particular, todas las raíces enteras de $P(x)$ dividen a $P(0)$. Esto nos conduce a la siguente propiedad aritmética.

Definición 7.1 (S).

a $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ en los enteros y sea $z \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z \mid a_0.$$

En efecto, $a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -z(a_n z^{n-1} + \cdots + a_1)$. Además, si $a_n = 1$, entonces cada raíz racional de P es un entero. En efecto, sea $\frac{p}{q}$ una raíz con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $mcd(p,q) = 1$. Entonces

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$
$$\hookrightarrow \frac{p^n}{q} = -a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \cdots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1}$$

El lado derecho de la ecuación es entera, por lo tanto $q = 1$.

Teorema 7.2 (Teorema de la raíz racional).

Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ en los enteros y sea $\frac{p}{q}$, con $mcd(p,q) = 1$, una raíz cualquiera de P. Entonces se cumple que $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$.

Demostración. En efecto, tenemos que

$$a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$
$$\hookrightarrow a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Todos los sumandos excepto, posiblemente, el primero, son múltiplos de q y todos los sumandos excepto, posiblemente, el último son múltiplos de p. Como p y q dividen a 0, se deberá tener que $q \mid a_n p^n$ y $p \mid a_0 q^n$, y de aquí se sigue la afirmación, ya que[12] $(p,q) = 1$. ∎

[12] $(p,q) = 1$ es una manera corta de escribir $mcd(p,q) = 1$.

Ejemplo 7.1 (E).

contrar todas la raíces de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Solución. Primero tratemos de ver las raíces racionales de la ecuación. Los divisores del término principal y los divisores del término independiente son

$$\{-1, 1\}$$
$$\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$$

respectivamente. Por el Teorema de la raíz racional, las raíces de la ecuación tiene la forma $\frac{p}{q}$, es decir, el conjunto de valores candidatos a ser raíces es (ya simplificado)

$$\left\{\frac{\pm1}{\pm1}, \frac{\pm2}{\pm1}, \frac{\pm3}{\pm1}, \frac{\pm6}{\pm1}\right\} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$$

Pero, ¿cómo sabemos cuáles de estos valores es una raíz?. Por el Teorema del factor, sabemos que $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ es divisible por $x - r$, donde r es una raíz.

Entonces, por ejemplo si $x = -6$ la división $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x+6} = x^2 - 8x + 3 - \frac{12}{x+6}$ no es exacta, por lo tanto -6 no es raíz[13]. Este proceso lo aplicamos a todos los valores del conjunto.

En particular, si $x = 1$ la división $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-1} = x^2 - x - 6$ en este caso es exacta, por lo tanto 1 es raíz. Para términar solo falta encontar las raíces de $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, las cuales son -2 y 3. Luego, las raíces del polinomio son $\{-2, 1, 3\}$. ■

Ejemplo 7.2 (S).

a P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ y $P(3) = 2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

Solución. Rápidamente, por el Teorema del resto

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + x + 1$$

Cuando hacemos $x = 3$, entonces obtenemos $2016 = 2Q(3)+4$, lo cual es $Q(3) = 1006$. Ahora bien, cuando hacemos $x = 2016$, obtenemos $P(2016) = 2015 \cdot 2014Q(2016) + 2017$. Por el **Teorema ??**, sabemos que

$$2016 - 3 \mid Q(2016) - Q(3)$$
$$2013 \mid Q(2016) - Q(3)$$

El mínimo valor de $Q(2016)$ tal que $P(2016) \geq 0$ es $Q(2016) = Q(3) = 1006$, por lo tanto

$$P(2016) = 2015 \cdot 2014 \cdot 1006 + 2017 \equiv (-1)(-2)(1006) + 2017 \equiv \boxed{2013} \pmod{2016}$$ ■

Otra solución al problema anterior sería por medio del Teorema Chino del Resto.

[13]También, se puede ir evaluado los valores en el polinomio y ver si da cero. Como hacer este análisis es elección del estudiante.

7.2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 7.1. Encontrar todas la raíces racionales del polinomio $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

Problema 7.2. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $6x^4 + x^3 - 3x^2 - 9x - 4$.

Problema 7.3. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $30x^4 - 133x^3 - 121x^2 + 189x - 45$.

Problema 7.4. Encontrar todos los r tal que $12r^4 - 16r^3 > 41r^2 - 69r + 18$.

Problema 7.5. Si el polinomio $P(x) = x^{n+2} + Ax^{n+1} + ABx^n$ es divisible por $C(x) = x^2 - (A + B)x + AB$ con $AB \neq 0$. Hallar el valor de $E = \frac{A}{B}$.

8. Gráficas y transformaciones

9. Polinomios simétricos

9.1. Polinomios simétricos elementales

Un polinomio de dos variables $P(x, y)$ es simétrico si $P(x, y) = P(y, x)$ para toda x, y. Por ejemplo, $7x^2 - 5xy + 7y^2$ es simétrico, ya que $P(x, y) = 7x^2 - 5xy + 7y^2$ es igual a $P(y, x) = 7y^2 - 5yx + 7x^2$.

Así mismo, un polinmio de tres variables $P(x, y, z)$ es simétrico si $P(x, y, z) = P(x, z, y) = P(y, x, z) = P(y, z, x) = P(z, x, y) = P(z, y, x)$. Por ejemplo, $13x^5 + 13y^5 + 13z^5 - 8xyz + 1$ es simétrico, ya que

$$\begin{aligned}
P(x, y, z) &= 13x^5 + 13y^5 + 13z^5 - 8xyz + 1 \\
P(x, z, y) &= 13x^5 + 13z^5 + 13y^5 - 8xzy + 1 \\
P(y, x, z) &= 13y^5 + 13x^5 + 13z^5 - 8yxz + 1 \\
P(y, z, x) &= 13y^5 + 13z^5 + 13x^5 - 8yzx + 1 \\
P(z, x, y) &= 13z^5 + 13x^5 + 13y^5 - 8zxy + 1 \\
P(z, y, x) &= 13z^5 + 13y^5 + 13x^5 - 8zyx + 1
\end{aligned}$$

son todos iguales.

Análogamente, un polinomio de n variables $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es simétrico si $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(x_1, x_3, \cdots, x_n) = \cdots$, es decir si P evaluado en todas las permutaciones de las n variables da el mismo resultado.

Observación 4.

En el polinomio de ejemplo $7x^2 - 5xy + 7y^2$, veamos que $P(x, 1) = P(1, x)$. Es decir, $7x^2 - 5x + 7$ es un polinomio simétrico o **recíproco**, esta es la manera en la que se presentaron los polinomios recíprocos en la primera sección[a].

[a]Ver página 4.

Resulta que los polinomios simétricos más simples son los que tienen sus variables con grado 1, como por ejemplo $x + y$, xy, $x + y + z$, etc. Esto se puede llevar a la formalización, por lo cual veamos la siguiente definición.

étrico elemental

Definición 9.1 (S).

a $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. El k-ésimo polinomio simétrico elemental en las variables $x_1, \cdots, x_n$ es el polinomio[a] σ_k definido por

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

donde la suma se realiza sobre los subconjuntos $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ de tamaño k del conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$.

[a]σ_k: Se lee sigma sub k.

Para más claridad veamos algunos casos:

Variables	Polinomios simétricos elementales
a, b	$\sigma_1 = a+b$ $\sigma_2 = ab$
a, b, c	$\sigma_1 = a+b+c$ $\sigma_2 = ab+bc+ca$ $\sigma_3 = abc$
a, b, c, d	$\sigma_1 = a+b+c+d$ $\sigma_2 = ab+ac+ad+bc+bd+da$ $\sigma_3 = abc+bcd+cda$ $\sigma_4 = abcd$
a, b, c, d, e	$\sigma_1 = a+b+c+d+e$ $\sigma_2 = ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cb+ce+de$ $\sigma_3 = abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+ced$ $\sigma_4 = abcd+abce+abde+acde+bced$ $\sigma_5 = abcde$

Ejemplo 9.1 (H).

llar el valor x^2+y^2 sabiendo que

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x^4+y^4 &= 7 \end{cases}$$

Solución. De la primera ecuación $x+y=1$ al cuadrado obtenemos que $x^2+2xy+y^2=1$, es decir $x^2+y^2=1-2xy$. Por lo tanto sólo basta encontrar el valor de xy para solucionar el problema. Veamos que

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2)^2 &= (1-2xy)^2 \\
x^4+2x^2y^2+y^4 &= 1-4xy+4x^2y^2 \\
x^4+y^4 &= 1-4xy+2x^2y^2 \\
7 &= 2x^2y^2-4xy+1 \\
2x^2y^2-4xy-6 &= 0 \\
2(x^2y^2-2xy-3) &= 0 \\
2(xy-3)(xy+1) &= 0
\end{aligned}$$

Es decir, xy puede tomar los valores de 3 y -1. Luego, x^2+y^2 puede tomar los valores de $\boxed{-5}$ y $\boxed{3}$. ■

Otra notación útil para polinomios simétricos, es la siguiente.

étrica de potencias

Definición 9.2 (L).

suma simétrica de la k-ésimas potencias en las variables $x_1, \cdots, x_n$ es el polinomio s_k definido por

$$s_k = s_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

Algunas relaciones clásicas entre las sumas simétricas de potencias y los polinomios simétricos elementales, como por ejemplo $\boxed{s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2}$ para cualquier cantidad de variables. La relación $\boxed{s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}}$ para dos variables y $\boxed{s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}}$ para tres variables.

Estas relaciones casos particulares de las llamadas **Fórmulas de Newton**. Se invita al estudiante investigar por su propia cuenta sobre estas fórmulas.

9.2. Fórmulas de Vieta

Ya conociendo los polinomios simétricos elementales, podemos volver a ver la defición de las fórmulas de Vieta que ya conocemos[14].

órmulas de Vieta

Definición 9.3 (S).

a $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$, entonces

$$\sigma_k = (-1)^k \times \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Ejemplo 9.2 (D).

termine el producto de las raíces de $50x^{50} + 49x^{49} + \cdots + x + 1$.

Solución. Por las fórmulas de Vieta, tenemos que

$$\sigma_{50} = (-1)^{50} \times \frac{a_0}{a_{50}} = \boxed{\frac{1}{50}}. \qquad \blacksquare$$

9.3. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 9.1. Consideremos el polinomio $P(x) = x^n - (x-1)^n$, donde n es un entero positivo impar. Encontrar el valor de la suma y el valor del producto de sus raíces.

[14] Ver **Definición 4.1**, página 13.

Problema 9.2. Encontrar los números reales x y y, que satisfacen

$$\begin{cases} x^3+y^3 &= 7 \\ x^2+y^2+x+y+xy &= 4 \end{cases}$$

Problema 9.3. Encontrar todas las soluciones reales del sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x^3+y^3+z^3+xyz &= x^4+y^4+z^4+1 \end{cases}$$

Problema 9.4. Sean x, y y z números reales, encontrar todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ x^2+y^2+z^2 &= 30 \\ x^3+y^3+z^3 &= 132 \end{cases}$$

Problema 9.5. Si $\alpha+\beta+\gamma=0$, demostrar que

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)=5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4).$$

Problema 9.6. Sean a, b y c números reales distintos de cero, con $a+b+c\neq 0$. Probar que si

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

entonces para n impar se cumple

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

10. Principio de Inducción Matemática

10.1. Definincioness

La Inducción Matemática es una técnica utilizada para probar declaraciones o proposiciones. La idea es similar a la de hacer caer varias piezas de dominó. Si cada pieza está lo suficientemente cerca de la anterior y hacemos caer la primera, entonces todas las piezas eventualmente van a caer. Cuando queremos probar una proposición sobre números naturales, la idea es la misma. En la Figura 1 podemos ver una representación gráfica de esta analogía.

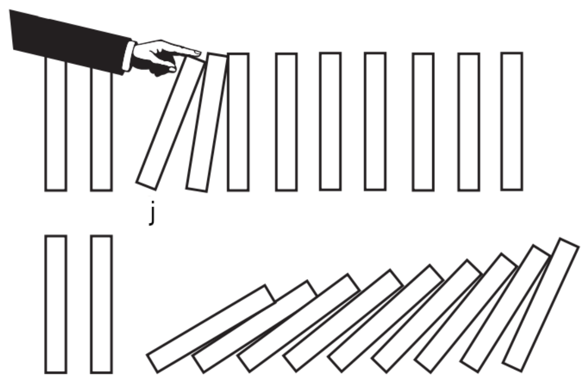


Figura 1: Fichas de dominó cayendo.

Teorema 10.1 (Principio de Inducción Matemática).

Para algún entero fijo j y para cada entero $n \geq j$, sea $S(n)$ una declaración[a] que involucre a n. Si

- $S(j)$ es cierto, y
- para cada entero $k \geq j$, $S(k) \to S(k+1)$,

entonces para todo $n \geq j$, la declaración $S(n)$ es cierta.

[a]También podemos decir Proposición o Afirmación

Una manera de estructurar la solución de un problema que resolvemos por inducción matemática es la siguiente.

1. **Base de inducción (o caso base)**
   Probar que $S(1)$ es cierta (generalmente j será 1).
2. **Hipótesis de inducción**
   Suponer que para un entero fijo $k \geq 1$, la declaración $S(k)$ es cierta.
3. **Paso de inducción**
   Probar que como $S(k)$ es cierta, entonces $S(k+1)$ también será cierta.

Ejemplo 10.1 (S).

a m entero positivo, probar que para $m \geq 3$, se cumple

$$m^m > 2m!.$$

Solución. Tomemos por $S(m)$ la afirmación $m^m > 2m!$.

Base de inducción
Tomando $m = 3$, vemos que $3^3 > 2 \cdot 3!$, por lo tanto $S(3)$ es cierta.

Hipótesis de inducción
Supongamos que $S(k)$ es cierta para algún entero fijo $k \geq 3$.

Paso de inducción
Probaremos, entonces que si $S(k)$ es cierta, $S(k+1)$ también será cierta. Esto es

$$(k+1)^{k+1} > 2(k+1)!$$

Notemos que

$$(k+1)^k \cdot (k+1)^1 > 2(k+1) \cdot k!$$
$$(k+1)^k > 2k!$$

Ahora bien, es claro que $k+1 > k$, por lo tanto $(k+1)^k > k^k$. Así por la hipótesis de inducción tendremos lo siguiente.

$$(k+1)^k > k^k > 2k!$$

Es decir, $S(m)$ es cierta para toda $m \geq 3$. Luego, la prueba está hecha. ■

Teorema 10.2 (Binomio de Newton).

Para a y b números reales y n un número entero, se cumplirá que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Podemos utilizar la notación de sumatoria y quedaría como:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i.$$

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre n. Si $n = 0$, entonces $(a+b)^0 = 1$ y $\binom{0}{0}a^0b^0 = 1$. Supongamos que para un entero fijo $k \geq 0$ la declaración es cierta, es decir

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i}b^i$$

es válida, entonces

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$

$$
\begin{aligned}
&= (a+b)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i} \\
&= a\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i} + b\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i} \\
&= a\left[\binom{k}{0}a^{k} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i}\right] + b\left[\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i} + \binom{k}{k}b^{k}\right] \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^{i} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i+1} + \binom{k}{k}b^{k+1} \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^{i} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}a^{k+1-i}b^{i} + \binom{k}{k}b^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right]a^{k+1-i}b^{i} + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^{i} + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1} \\
(a+b)^{k+1} &= \boxed{\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^{i}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

10.2. Agregados culturales y preguntas

1. **Otra analogía.** Considera una pila de sobres, tan alta como querás. Supongamos que cada sobre tiene el mismo mensaje en su interior "*Abre el siguiente sobre de la pila, y sigue las instrucciones escrito en él*". Si alguien abre el primero (el de arriba), lee el mensaje y sigue las instrucciones, entonces la persona se ve obligada a abrir el segundo sobre. Y si la persona decide seguir cada instrucción, entonces esta persona abrirá todos los sobres de la pila. Es decir, esto es el principio de Inducción Matemática aplicado a una pila de sobres.

2. La **Inducción fuerte** es una variante de la Inducción Matemática "normal". Esta surge cuando para probar $S(k+1)$ es necesario considerar más de una declaración previa como cierta $S(i), S(i+1), \cdots, S(k)$. Muchas veces no hace falta usar todas las declaraciones anteriores, pero sí al menos un par de ellas (dependerá del problema).

10.3. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 10.1. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}^{+}$, se cumple que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Problema 10.2. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}^{+}$, $4007^{n} - 1$ es divisible por 2003.

Problema 10.3. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, el número $A_n = 3^n - 2n^2 - 1$ es múltiplo de 8. Además que si $3 \nmid n$, entonces A_n es múltiplo de 24.

Problema 10.4. Sea $\{a_n\}$ una secuencia tal que $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ y $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Probar que $a_n = 2^n + 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 10.5. Sea $q \in \mathbb{R}$, con $q \neq 1$ y $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Probar que

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}.$$

Problema 10.6. Demostrar que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n$.

Problema 10.7. Probar $\forall n \in \mathbb{N}$, que se cumple $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$. ($F_n$ es la sucesión de Fibonacci.)

Problema 10.8. Probar $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, que se cumple $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$.

11. Problemas

11.1. Enunciados

Problema 11.1. Si $P(x^2-2x+1)=x^2-3$, determine $P((x-2)^2)$.

Problema 11.2. Sea $P(x)=x^2$, encontrar $Q(x)$ si $(P\circ Q)(x)=4x^2-12x+9$.

Problema 11.3. Sea $Q(x)=\frac{1}{5}x-2$ y $P(x)=Q^4(x)$, probar que $P(1560)=0$.

Problema 11.4. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático. Demostrar que existen polinomios cuadráticos $G(x)$ y $H(x)$ tales que $P(x)P(x+1)=(G\circ H)(x)$.

Problema 11.5. Sea $P(x)=mx^3+mx^2+nx+n$ un polinomio cuyas raíces son a,b y c. Demostrar que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Problema 11.6. Sea $P(x)$ un polinomio cúbico mónico tal que $P(1)=1$, $P(2)=2$ y $P(3)=3$. Encontrar $P(4)$.

Problema 11.7. Sea el polinomio P para el cual $P(x^2+1)=x^4+4x^2$. Encontrar $P(x^2-1)$.

Problema 11.8. Sea $S(x)$ un polinomio cúbico con $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$ y $S(4)=5$. Encontrar $S(6)$.

Problema 11.9. Determine un polinomio cúbico P en los reales, con una raíz igual a cero y que satisface $P(x-1)=P(x)+25x^2$.

Problema 11.10. Si p y q son las raíces del polinomio $P(x)=4x^2+5x+3$. Determina $(p+7)(q+7)$, sin calcular los valores de p y q.

Problema 11.11. Supóngase que el polinomio $5x^3+4x^2-8x+6$ tiene tres raíces reales a,b y c. Demostra que

$$(5a)^2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+(5b)^2\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+(5c)^2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=3^3+1.$$

Problema 11.12. Sean r_1,r_2,r_3 las raíces del polinomio $P(x)=x^3-x^2+x-2$. Determina el valor de $r_1^3+r_2^3+r_3^3$, sin calcular los valores de r_1,r_2,r_3.

Problema 11.13. Dado los polinomios $P(x)=2x^5+x^4+ax^2+bx+c$ y $Q(x)=x^4-1$, se sabe que $Q\mid P$. Hallar $\dfrac{a+b}{a-b}$.

Problema 11.14. Dado los polinomios $P(x)=16x^5+ax^2+bx+c$ y $Q(x)=2x^3-x^2+1$, se sabe que $Q\mid P$. Hallar $a+b+c$.

Problema 11.15. Dado los polinomios $P(x)=6x^4+4x^3-5x^2-10x+a$ y $Q(x)=3x^2+2x+b$, se sabe que $Q\mid P$. Hallar a^2+b^2.

Problema 11.16. El polinomio $P(x)$ deja residuo -2 en la división entre $x-1$ y residuo -4 en la división entre $x+2$. Encontrar el residuo cuando el polinomio es dividido por x^2+x-2.

Problema 11.17. Encontrar el resto cuando el polinomio $x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x$ es dividido entre x^3-x.

Problema 11.18. Probar que si un polinomio $F(x)$ deja un residuo de la forma $px+q$ cuando es dividido entre $(x-a)(x-b)(x-c)$ donde a, b y c son todos distintos, entonces

$$(b-c)F(a)+(c-a)F(b)+(a-b)F(c)=0.$$

Problema 11.19. Para que la división de $6x^4-11x^2+ax+b$ entre $3x^2-3x-1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Problema 11.20. Calcular la suma de coeficientes del resto que deja $x^{3333}-9$ entre x^2-729.

Problema 11.21. Sea r una raíz de x^2-x+7. Hallar el valor de $r^3+6r+\pi$.

Problema 11.22. Sean a, b y c las raíces reales de la ecuación $x^3+3x^2-24x+1=0$. Probar que $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$.

Problema 11.23. Sean r_1, r_2 y r_3 raíces distintas del polinomio $y^3-22y^2+80y-67$. De tal manera que existen números reales α, β y θ tal que

$$\frac{1}{y^3-22y^2+80y-67}=\frac{\alpha}{y-r_1}+\frac{\beta}{y-r_2}+\frac{\theta}{y-r_3}$$

$\forall y\notin\{r_1,r_2,r_3\}$. ¿Cuál es valor de $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\theta}$?

Problema 11.24. La ecuación $2^{333x-2}+2^{111x+2}=2^{222x+1}+1$ tiene tres raíces reales. Dado que su suma es $\dfrac{m}{n}$ con $m,n\in\mathbb{Z}^+$ y $mcd(m,n)=1$. Calcular $m+n$.

Problema 11.25. Si $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ es un polinomio tal que $P(1)=10$, $P(2)=20$ y $P(3)=30$, determine el valor de

$$\frac{P(12)+P(-8)}{10}.$$

Problema 11.26. Sea $F(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a, b, c y d tal que $F(a)=F(b)=F(c)=F(d)=5$, entonces no existe un entero k tal que $F(k)=8$.

Problema 11.27. Sea el polinomio $F(x)=x^3+\frac{3}{4}x^2-4x-3$. Notemos que $F(2)=0$, así que 2 es raíz de F. Pero 2 no divide al término independiente de F, es decir que esta raíz viola el Teorema de la raíz racional. Argumente por qué pasa esto.

Problema 11.28. Encontrar las raíces del polinomio $R(x)=6x^3+x^2-19x+6$.

Problema 11.29. Encontrar las raíces del polinomio $G(x)=12x^3-107x^2-15x+54$.

Problema 11.30. Sean x, y y z números reales tales que

$$\begin{cases} x+y+z &= 3\\ x^2+y^2+z^2 &= 5\\ x^3+y^3+z^3 &= 7\end{cases}$$

Hallar el valor de $x^4+y^4+z^4$.

Problema 11.31. Sean a, b y c las raíces del polinomio $3x^3 + x + 2023$. Calcular

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3.$$

Problema 11.32. Considera el polinomio $P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ y $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 las raíces de Q, encontrar $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$.

Problema 11.33. Si $a + b + c = \sqrt{2023}$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 2021$, hallar el valor de

$$E = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}.$$

Problema 11.34. Porbar que para todo n entero positivo se cumple que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Problema 11.35. Con la ayuda del teorema de la raíz racional, encontrar todas las raíces de los siguientes polinomios

$$2x^3 - 21x^2 + 52x - 21$$
$$x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 103x + 210$$

Problema 11.36. El cociente de la división $\dfrac{x^{n+1} + 2x + 5}{x - 3}$ es $Q(x)$, la suma de coeficientes de Q es $\dfrac{9^{10} + 3}{2}$. Hallar el valor de n.

Problema 11.37. Si la división

$$\frac{x^{80} - 7x^{30} + 9x^5 - mx + 1}{x^3 + x - 2}$$

Deja como resto a $R(x) = x^2 + x - 1$, hallar el valor de m.

Problema 11.38. Suponga que x, y y z son números distintos de cero tal que $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = x^3 + y^3 + z^3$. Hallar el valor de

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Problema 11.39. Sean a, b y c números reales no nulos tales que $a + b + c = 0$. Determine el valor de la expresión

$$\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2) + (b^2+c^2)(c^2+a^2) + (c^2+a^2)(a^2+b^2)}{a^4 + b^4 + c^4}.$$

(Lista corta, OMCC XXII. Álgebra, P1)

Problema 11.40. Si a, b, c y d son las raíces de la ecuación $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$, calcular el valor de
$$\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^6} + \frac{1}{d^6}.$$

Problema 11.41. Dado el polinomio $P(x)$ para el cual se cumple que
$$x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9)P(x)$$
Calcular la suma de coeficientes de P.

Problema 11.42. Sea r_1, r_2 y r_3 las tres raíces de polinomio cúbico P. También, que
$$\frac{P(2) + P(-2)}{P(0)} = 52$$
La expresión $\dfrac{1}{r_1r_2} + \dfrac{1}{r_2r_3} + \dfrac{1}{r_3r_1}$ puede ser escrita como $\dfrac{m}{n}$ para m y n coprimos. Encontrar $m \times n$.

Problema 11.43. Dado que
$$\begin{cases} Q(x+1) &= \dfrac{3}{2}x + 3 \\ Q(F(x) + G(x)) &= 3x + \dfrac{3}{2} \\ Q(F(x) \times G(x)) &= \dfrac{15}{2} \end{cases}$$
Calcular $F(G(F(G(\ldots F(G(-2))\ldots))))$.

Problema 11.44. Sea $Q(x) = 2x - 4096$ y $P(x) = Q^{12}(x)$, hallar la raíz de P.

Problema 11.45. Hallar el resto de la división de $[(x-1)(x)(x+2)(x+3)]^2 + (x^2+2x)^3x - 50$ entre $x^2 + 2x - 5$.

Problema 11.46. Si $P\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 227$, ¿cuál es el valor de $\sqrt{P(20)}$?

Problema 11.47. Si a y b son raíces distintas del polinomio $x^2 + 1012x + 1011$, entonces
$$\frac{1}{a^2 + 1011a + 1011} + \frac{1}{b^2 + 1011b + 1011} = \frac{m}{n},$$
donde m y n son primos relativos. Calcular $m + n$.

Problema 11.48. Encontrar el resto cuando $(5x+16)^{2023} + (x+6)^{98} + (7x+30)^{49}$ es dividido por $x + 3$.

Problema 11.49. Si la división
$$\frac{x^{80} - 7x^{30} + 9x^5 - mx + 1}{x^3 + x - 2}$$
Deja como resto a $R(x) = x^2 + x - 1$, hallar el valor de m.

Problema 11.50. Demostrar por inducción matemática, que $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, se cumple

$$17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}.$$

Problema 11.51. Sea $R(c) = a^2 + b^2 + 65c^2 + 2ab - 18bc - 18ca$, factorize R y responda. ¿Cuáles son las raíces de R?

Problema 11.52. Encontrar el resto cuando $x^{2022} + x^{2021} + \cdots + x + 1$ es dividido por $x - 3$.

Problema 11.53. Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$. ¿Cuál es el coeficiente del término cuadrático en $P_{23}(x)$?

Problema 11.54. Indique el valor de la expresión

$$M(3) + M(5) + M(7) + \cdots + M(2021) + M(2023)$$

Si $M(x) = \dfrac{2 \cdot 2023}{x(x-2)}$.

Problema 11.55. Dado el polinomio $S(x) = (11 - 15x^3)(17x^6 - 37) + 2^8 x^6 (16 - x + x^2)(16 + x)$, responda lo siguiente:

1. ¿$S(x)$ es mónico?
   R: _____
2. ¿$S(x)$ es completo?
   R: _____
3. ¿$S(x)$ es simétrico?
   R: _____
4. Escriba el coeficiente de x^6.
   R: _____
5. Escriba el término independiente.
   R: _____
6. ¿Es $S\left(\sqrt[3]{x}\right)$ un polimonio?
   R: __________

Problema 11.56. Si $P(x - 2) = x^3 - 10x^2 + 28x - 24$, hallar el resto de dividir $P(x)$ por $x - 3$.

Problema 11.57. Encontrar todas las tripletas (x, y, z) de números reales, tal que cumplen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z &= 17 \\ xy + yz + zx &= 94 \\ xyz &= 168 \end{cases}$$

Problema 11.58. Sean a, b y c números reales distintos de cero, con $a + b + c \neq 0$. Probar que si

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c},$$

entonces para n impar se cumple

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

Problema 11.59. Hallar $Q(x)$, si $P\left(Q(x) - 3\right) = 6x + 2$ y $P(x + 3) = 2x + 10$.

Problema 11.60. Con la ayuda del teorema de la raíz racional, encontrar todas las raíces de los siguiente polinomio

$$2x^3 - 21x^2 + 52x - 21.$$

Problema 11.61. Dado que m y n son raíces del polinomio $6x^2 - 5x - 3$, encuentra un polinomio cuyas raíces sean $m - n^2$ y $n - m^2$, sin calcular los valores de m y n.

Problema 11.62. Si tenemos que

$$\begin{cases} P(x) & = & 3x^2 - 2x \\ Q(x) & = & \dfrac{x-1}{3} \\ R(x) & = & (P \circ Q)(x) - 673x \end{cases}$$

Calcular el valor de $R(2023)$.

11.2. Pistas y Soluciones

Referencias

[Arg15] Argel. Fórmulas de Vieta. *OMMBC*, 2015.

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[BLW22] Adithay B., Brian L., and William W. Polynomials. *AoPS*, 2022.

[Eng97] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1997.

[GR23] Jonathan Gutiérrez and Reynaldo Romero. Álgebra, Nivel Centro. Sesión 5. Polinomios simétricos elementales. Relaciones de Vieta. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Mayo 2023.

[Gun10] David Gunderson. *Handbook of Mathematical Induction. Theory and Applications*. CRS Press, 2010.

[Iha20] Ihatemath123. Vieta's Formulas. 2020.

[Lee11] Holden Lee. Lecture 8. Polynomials, part 1. *OMC*, 2011.

[LTD22] Ricardo Largaespada, Kenny Tinoco, and José Duarte. Ecuaciones Diofánticas. Clase 7. Método de Inducción Matemática. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Octubre 2022.

[Lul16] Lulú. Polinomios. *OMMBC*, 2016.

[NF21] Naman12 and Freeman66. Polynomials in the AIME. *AoPS*, 2021.

[RC08] Richard Rusczyk and Mathew Crawford. *Intermediate Algebra*. AoPS, 2008.

[Rub19] Carlos Rubio. Un breve recorrido por los polinomios. *Tzaloa*, (2), 2019.