Notas para la clase

1. Clase 02

Se empieza la clase dando un pequeño resumen de lo visto en la sesión anterior, se hace énfasis en la evaluación de polinomios

$$P(\textit{expresión}) \to \textit{expresión}. \text{ (Expresión algebraica} \equiv \text{polinomio)}$$
$$P(\textit{constante}) \to \textit{constante}. \text{ (Constante} \equiv \text{número)}$$

Se hace mención a evaluaciones notables como $P(0)$ y $P(1)$. Luego, se introduce la definición de raíz de un polinomio (alución a la **definición 1.1**) y la razón por la que se estudia.

Se muestra el polinomio $M(x) = x^5 - 3x^4 - 29x^3 - 13x^2 + 120x + 140$ y se pide a los estudiante hallar una raíz por tanteo. También, describir el polinomio a manera de ejercicio. El docente podrá hacer las siguientes preguntas ¿qué características tiene M? ¿es mónico? ¿es completo? ¿es simétrico? ¿está ordenado?. Después que el estudiante intentó encontrar soluciones por su cuenta, anunciar que 7 es una raíz. Y a continuación, comprobar que $x = 7$ es una raíz.

$$\begin{aligned} 1 \times 16807 &= +16807 \\ -3 \times 2401 &= -..7203 \\ -29 \times 343 &= -..9947 \\ -13 \times 49 &= -....637 \\ 120 \times 7 &= +....840 \\ 1 \times 140 &= +....140 \end{aligned}$$

Hacer la siguiente pregunta: ¿es fácil o obvio deducir que $x = 7$ es una raíz?. Introducir la definición de factor (alución a la **definición 1.2**) y mencionar la factorización. Luego, expresar el polinomio M como el producto del factor $(x - 7)$ con otro polinomio[1]:

$$\begin{aligned} x^5 + 4x^4 - x^3 - 20x^2 - \ 20x \\ -7x^4 - 28x^3 + 7x^2 + 140x + 140 \\ x^5 - 3x^4 - 29x^3 - 13x^2 + 120x + 140 \\ \Rightarrow M(x) = (x - 7)(x^4 + 4x^3 - x^2 - 20x - 20) \end{aligned}$$

Dar énfasis en cómo los factores dan información de las raíces de un polinomio y hacer referencia al **Teorema del factor**.

[1] Preguntar nuevamente si los polinomios son completos y mostrar la completación de polinomios

Terminar la factorización de M

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 4x^2 & \\ -5x^2 - 20x - 20 & \\ x^4 + 4x^3 - x^2 - 20x - 20 & \\ \Rightarrow M(x) = (x-7)(x^2-5)(x+2)^2 & \\ \Rightarrow M(x) = (x-7)(x-\sqrt{5})(x+2)(x+2)(x+\sqrt{5}) & \end{aligned}$$

Hacer referencia a que la cantidad de raíces de un polinomio está determinado por su grado e indicar las multiplicidades de las raíces del polinomio M.

2. Clase 04

2.1. Solución de la tarea

Problema 2.1. Sea el polinomio P para el cual $P(x^2+1) = x^4 + 4x^2$. Encontrar $P(x^2-1)$.

Solución 1. La solución de este problema se reduce a encontrar una expresión 'E' que al remplazarla por x nos de como resultado $x^2 - 1$. Podemos encontrar esta expresión con una simple ecuación:

$$\begin{aligned} E^2 + 1 &= x^2 - 1 \\ E^2 &= x^2 - 2 \\ E &= \pm\sqrt{x^2-2} \end{aligned}$$

Es decir que si transformamos x en $\pm\sqrt{x^2-2}$ obtendremos lo que nos piden[2].

Haciendo $x \to \pm\sqrt{x^2-2}$

$$\begin{aligned} P\left[\left(\pm\sqrt{x^2-2}\right)^2 + 1\right] &= \left(\pm\sqrt{x^2-2}\right)^4 + 4\left(\pm\sqrt{x^2-2}\right)^2 \\ P\left(x^2 - 2 + 1\right) &= \left(x^2-2\right)^2 + 4\left(x^2-2\right) \\ P\left(x^2-1\right) &= x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 8 \\ P\left(x^2-1\right) &= \boxed{x^4 - 4} \end{aligned}$$

□

[2]A esta transformación vamos a denotarla por $x \to \pm\sqrt{x^2-2}$

Solución 2. La segunda solución es muy parecida a la primera pero en lugar de encontrar directamente $P(x^2-1)$ encontramos $P(x)$ como paso intermedio.

$$\begin{gathered} E^2+1=x \\ E^2=x-1 \\ E=\pm\sqrt{x-1} \end{gathered}$$

Haciendo $x\to\pm\sqrt{x-1}$

$$\begin{gathered} P\left[\left(\pm\sqrt{x-1}\right)^2+1\right]=\left(\pm\sqrt{x-1}\right)^4+4\left(\pm\sqrt{x-1}\right)^2 \\ P\left(x-1+1\right)=\left(x-1\right)^2+4\left(x-1\right) \\ P\left(x\right)=x^2-2x+1+4x-4 \\ P\left(x\right)=x^2+2x-3 \end{gathered}$$

Luego solo evaluamos $P(x^2-1)$

$$\begin{gathered} P\left(x^2-1\right)=\left(x^2-1\right)^2+2\left(x^2-1\right)-3 \\ P\left(x^2-1\right)=x^4-2x^2+1+2x^2-2-3 \\ P\left(x^2-1\right)=\boxed{x^4-4} \end{gathered}$$

□

Problema 2.2. Sea $S(x)$ un polinomio cúbico con $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$ y $S(4)=5$. Encontrar $S(6)$.

Solución 1. Al tomar al polinomio auxiliar R como $R(x)=S(x)-x$. Vemos que $R(1)=0$, $R(2)=0$ y $R(3)=0$. Es decir que 1, 2 y 3 son raíces de R. Luego, por el teorema del factor

$$R(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$$

Donde a es el coefiente principal de R. Nos piden $S(6)$, lo cual lo podemos encontrar como $S(6)=R(6)+6$. Pero para obtener $R(6)$ primero debemos saber el valor de a. Valor que podemos encontrar como

$$\begin{gathered} R(4)=S(4)-4 \\ a(4-1)(4-2)(4-3)=5-4 \\ 6a=1 \\ a=\frac{1}{6} \end{gathered}$$

Finalmente hallamos $S(6)$:

$$\begin{gathered} S(6)=R(6)+6 \\ S(6)=\frac{1}{6}(6-1)(6-2)(6-3)+6=\frac{5\times4\times3}{6}+6 \\ S(6)=10+6=\boxed{16} \end{gathered}$$

□

Solución 2. Sabemos que S tiene la forma $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Al utilizar las evaluaciones que nos dan como datos podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones 4×4

$$\begin{cases} a+b+c+d &= 1 \\ 8a+4b+2c+d &= 2 \\ 27a+9b+3c+d &= 3 \\ 64a+16b+4c+d &= 5 \end{cases}$$

Al resolver este sistema, por el método que más te guste, veremos que $(a, b, c, d) = (\frac{1}{6}, -1, \frac{17}{6}, -1)$ es la única solución. Luego $S(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{17}{6}x - 1$. Finalmente al evualuar $S(6)$, llegamos a

$$S(6) = \frac{1}{6} \times 6^3 - 6^2 + \frac{17}{6} \times 6 - 1$$
$$S(6) = 6^2 - 6^2 + 17 - 1 = \boxed{16}$$

□

Problema 2.3. Determine un polinomio cúbico P en los reales, con una raíz igual a cero y que satisface $P(x-1) = P(x) + 25x^2$.

Solución 1. Como P tiene una solución igual a cero, entonces este no tiene término independiente, es decir, tiene la forma $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Al evaluar el polinomio en ciertos valores veremos que

Si $x = 0$:

$$P(-1) = P(0) + 25(0)^2 \longrightarrow \boxed{P(-1) = 0}$$

Si $x = 1$:

$$P(0) = P(1) + 25(1)^2 \longrightarrow \boxed{P(1) = -25}$$

Si $x = -1$:

$$P(-2) = P(-1) + 25(-1)^2 \longrightarrow \boxed{P(-2) = 25}$$

Con estas evaluaciones formaremos el siguiente sistema de ecuaciones 3×3

$$\begin{cases} -a+b-c &= 0 \\ a+b+c &= -25 \\ -8a+4b-3c &= 25 \end{cases}$$

Que al resolverlo, con el método que más te guste, vemos que tiene a $(a, b, c) = \left(-\frac{25}{3}, \frac{25}{2}, -\frac{25}{6}\right)$ como única solución. Luego

$$\boxed{P(x) = -\frac{25}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2 - \frac{25}{6}x}$$

es la solución. □

Solución 2. Esta solución se basa en la compración de coeficientes del polinomio. Primero caracterizemos a P, como ya sabemos de la solución anterior

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Así $P(x-1)$ es igual a

$$\begin{gathered}
P(x-1) = a\,(x-1)^3 + b\,(x-1)^2 + c\,(x-1) \\
P(x-1) = a\left[x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right] + b\left[x^2 - 2x + 1\right] + c\,(x-1) \\
P(x-1) = ax^3 - 3ax^2 + 3ax - a + bx^2 - 2bx + b + cx - c \\
P(x-1) = ax^3 - 3ax^2 + bx^2 + 3ax - 2bx + cx - a + b - c \\
P(x-1) = ax^3 + (-3a+b)x^2 + (3a-2b+c)x + (-a+b-c)
\end{gathered}$$

Luego

$$\begin{gathered}
ax^3 + (-3a+b)x^2 + (3a-2b+c)x + (-a+b-c) = ax^3 + bx^2 + cx + 25x^2 \\
ax^3 + \boxed{(-3a+b)}\,x^2 + \boxed{(3a-2b+c)}\,x + \boxed{(-a+b-c)} = ax^3 + \boxed{(b+25)}\,x^2 + \boxed{c}\,x + \boxed{0}
\end{gathered}$$

De la comparación de coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones 3×3

$$\begin{cases}
-a+b-c &= 0 \\
3a-2b+c &= c \\
-3a+b &= b+25
\end{cases}$$

De donde rápidamente vemos que la única solución es $(a,b,c) = \left(-\frac{25}{3}, \frac{25}{2}, -\frac{25}{6}\right)$. Luego

$$\boxed{P(x) = -\frac{25}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2 - \frac{25}{6}x}$$

$\square$