Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #6

Encuentro: 6
Curso: Polinomios
Fecha: 4 de mayo de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Raíces de Polinomios II

Encontrar raíces enteras o racionales de un polinomio, en general es bastante complicado. Sin embargo, resulta que para polinomios con coeficientes enteros podemos simplificar la búsqueda analizando los coeficientes. Por lo que en esta clase, veremos algunas propiedades y resultados interesantes de estos polinomios.

1. Desarrollo

Teorema 1.1.

Sean a y b dos enteros distintos y $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, entonces

$$(a-b) \mid P(a)-P(b).$$

Demostración. Sea $P(x)=c_nx^n+\cdots+c_1x+c_0$, al evaluarlo en a, b y restar, encontramos que

$$\begin{aligned} P(a)-P(b) &= c_na^n+\cdots+c_1a+c_0-(c_nb^n+\cdots+c_1b+c_0) \\ &= c_n(a^n-b^n)+c_{n-1}(a^{n-1}-b^{n-1})+\cdots+c_1(a-b) \\ &= (a-b)\left[c_n(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})+\cdots+c_1\right] \end{aligned}$$

Como el lado derecho de la ecuación es un entero, necesariamente $(a-b) \mid P(a)-P(b)$. ■

En particular, vemos que cuando a es una raíz y b es cero, resulta que la raíz divide al término constante del polinomio. Al generalizar, esto nos conduce al siguiente colorario.

Corolario 1.1. Sea z un número entero y $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, entonces

$$P(z)=0 \iff z \mid P(0).$$

Demostración. En efecto, sea $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, entonces $a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0=0 \iff a_0=-z(a_nz^{n-1}+\cdots+a_1)$. ■

Cuando el polinomio es mónico, entonces cada raíz racional de $P(x)$ es un entero. En efecto, sea $\frac{p}{q}$ una raíz, donde p y q son enteros coprimos [1], entonces

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\left(\frac{p}{q}\right)^i=0 \iff \sum_{i=0}^{n-1} a_i\left(\frac{p}{q}\right)^i=-\left(\frac{p}{q}\right)^n$$

[1] Es decir $mcd(p,q)=1$. Muchas veces, para escribir $mcd(a,b)=d$ solo pondremos $(a,b)=d$.

$$\iff \frac{p^n}{q} = -q^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(\frac{p}{q}\right)^i\right)$$
$$\iff \frac{p^n}{q} = -\left(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right).$$

Donde el lado derecho de la ecuación es entera y por tanto $q = 1$.

Teorema 1.2 (Teorema de la raíz racional).

Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros, y una raíz $\frac{p}{q}$ con $(p,q) = 1$. Entonces, se cumple que $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$.

Demostración. En efecto, tenemos que

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$
$$\iff a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Todos los sumandos excepto (posiblemente) $a_n p^n$ son múltiplos de q y todos los sumandos excepto (posiblemente) $a_0 q^n$ son múltiplos de p. Como p y q dividen a 0, necesariamente $q \mid a_n p^n$ y $p \mid a_0 q^n$. Luego, al ser p y q coprimos, se obtiene el resultado. ■

Ejemplo 1.1. Encontrar todas las raíces de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Solución. Como el polinomio tiene coeficientes enteros, primero acotemos la búsqueda a las raíces racionales. Por el teorema de la Raíz racional, las raíces con la forma $\frac{p}{q}$ donde $(p,q) = 1$, deben cumplir que $p \mid 6$ y $q \mid 1$.

Analizando los divisores de 1 y 6, vemos que $p \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$ y $q \in \{-1, 1\}$. Por lo tanto, el conjunto de posibles valores para las raíces racionales es

$$\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}.$$

Como vemos, obtuvimos un conjunto de ocho posibilidades, pero, ¿cómo sabemos cuáles de estos números es una raíz? Para responder esto tenemos dos opciones[2], la primera es evaluar valor por valor y ver cuál de ellos cumple. La otra es hacer uso de un teorema ya conocido, el teorema del factor.

Sabemos que $(x - r)$ es factor de $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$ si y solo si r es una raíz. Es decir que, si r es una raíz, entonces la división por $(x - r)$ es exacta, e.g. cuando $r = 2$, vemos que la división

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -2x^2 & -5x & +6 & x-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2 & & & x^2-5 \\ \cline{1-2} & & -5x & +6 & \\ & & 5x & -10 & \\ \cline{3-4} & & & -4 & \end{array}$$

[2] Como hacer este análisis es elección tuya.

es inexacta, por lo que 2 no es una raíz. Aplicando este proceso a todos los valores del conjunto, vemos que $r = 1$ es una raíz, ya que

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & \big| \; x - 1 \\
\underline{-x^3 \;\; + x^2 \qquad\qquad} & \big| \; x^2 - x - 6 \\
-x^2 - 5x \quad & \\
\underline{x^2 \;\; - x \quad} & \\
-6x + 6 & \\
\underline{6x - 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

Ahora, las dos raíces restantes están incluidas en $(x^2 - x - 6) = (x-3)(x+2)$. Finalmente, las raíces del polinomio son $\{-2, 1, 3\}$. ■

Ejemplo 1.2. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, que cumple $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ y $P(3) = 2016$. Si n es un número positivo, tal que es el menor valor posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

Solución. Como $P(1) = 2$ y $P(2) = 3$, por el teorema del resto obtenemos

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + (x+1).$$

Para algún polinomio $Q(x)$ con coeficientes enteros. Evaluando en $x = 3$, encontramos que $2016 = 2Q(3) + 4 \iff Q(3) = 1006$. Ahora bien, al evaluar en $x = 2016$, obtenemos que $P(2016) = (2015)(2014)Q(2016) + 2017$. Usando el teorema 1.1 con el polinomio $Q(x)$ llegamos a

$$
\begin{aligned}
2016 - 3 &\mid Q(2016) - Q(3) \\
2013 &\mid Q(2016) - Q(3)
\end{aligned}
$$

Para que $P(2016)$ sea positivo debe pasar que $Q(2016) - Q(3) \geq 0$, por lo cual, el mínimo valor de $Q(2016) = Q(3) = 1006$. Así, el valor de n es $P(2016) = (2015)(2014)(1006) + 2017$. Luego,

$$
\begin{aligned}
P(2016) &\equiv (2015)(2014)(1006) + 2017 \pmod{2016} \\
&\equiv (-1)(-2)(1006) + 1 \pmod{2016} \\
&\equiv 2013 \pmod{2016}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, el resto de n dividido por 2016 es 2013. ■

1.1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 1.1. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

Problema 1.2. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $6x^4 + x^3 - 3x^2 - 9x - 4$.

Problema 1.3. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $30x^4 - 133x^3 - 121x^2 + 189x - 45$.

Problema 1.4. Encontrar todos los r tal que

$12r^4 - 16r^3 > 41r^2 - 69r + 18$.

Problema 1.5. Si el polinomio $P(x) = x^{n+2} + Ax^{n+1} + ABx^n$ es divisible por $C(x) = x^2 - (A+B)x + AB$ con $AB \neq 0$. Hallar el valor de $E = \frac{A}{B}$.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Problema 2.1. Sea el polinomio $F(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4x - 3$. Notemos que $F(2) = 0$, así que 2 es raíz de F. Pero 2 no divide al término independiente de F, es decir que esta raíz viola el Teorema de la raíz racional. Argumente por qué pasa esto.

Problema 2.2. Encontrar las raíces del polinomio $R(x) = 6x^3 + x^2 - 19x + 6$.

Problema 2.3. Encontrar las raíces del polinomio $G(x) = 12x^3 - 107x^2 - 15x + 54$.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes enteros, tal que $P(k)$, $P(k+1)$ y $P(k+2)$ son divisibles por 3. Probar que $P(m)$ es múltiplo de 3 para cualquier entero m.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com