Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #4

Encuentro: 4
Curso: Polinomios
Fecha: 20 de abril de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Fórmulas de Vieta I

Cuando se trata con situaciones relacionadas a las raíces de un polinomio es común tratar de pensar en factorizaciones que nos permitan obtener cada una de las raíces del polinomio en cuestión, sin embargo, no siempre se tiene una factorización que haga la obtención de estas raíces en algo sencillo. En esta sesión veremos las Fórmulas de Vieta, una herramienta que nos permiten obtener información acerca de las raíces de un polinomio al observar los coeficientes del mismo.

1. Desarrollo

Teorema 1.1 (Fórmulas de Vieta).

Sea el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grado n con raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$, entonces

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 + \cdots + r_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
&\vdots \\
r_1r_2\cdots r_n &= (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}
\end{aligned}$$

Por el teorema del factor, podemos escribir el polinomio como

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$

Al expandir los n factores lineales del lado derecho, obtenemos el siguiente resultado

$$a_n x^n - a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x^{n-1} + a_n(r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n r_1 r_2 \cdots r_n,$$

donde el signo del coeficiente de x^k está dado por $(-1)^{n-k}$. Comparando los coeficientes correspondientes obtenemos el resultado deseado.

Las fórmulas de Vieta pueden ser útiles al calcular expresiones que involucran las raíces de un polinomio sin tener que calcular los valores de las propias raíces. Para ser más prácticos, en esta sesión de clase solo nos centraremos en las fórmulas de Vieta para polinomios cuadráticos y cúbicos.

Observación 1.

Para el polinomio cuadrático $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ con raíces r_1 y r_2, tenemos

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2} \quad \wedge \quad r_1r_2 = +\frac{a_0}{a_2}.$$

Para el polinomio cúbico $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con raíces r_1, r_2 y r_3, tenemos

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} \quad \wedge \quad r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = +\frac{a_1}{a_3} \quad \wedge \quad r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

Ejemplo 1.1. Si p y q son raíces de la ecuación $x^2 + 2bx + 2c = 0$, determina el valor de $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$.

Solución. Aplicando las fórmulas de Vieta, tenemos $p + q = -2b$ y $pq = 2c$. Podemos transformar la expresión deseada de la siguiente manera,

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{p^2 + q^2}{p^2q^2} = \frac{p^2 + 2pq + q^2 - 2pq}{p^2q^2} = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{(pq)^2}$$

Sustituyendo valores, obtenemos $\frac{(p+q)^2 - 2pq}{(pq)^2} = \frac{(-2b)^2 - 2(2c)}{(2c)^2} = \boxed{\frac{b^2 - c}{c^2}}$. ■

Ejemplo 1.2. El polinomio $x^3 - 7x^2 + 3x + 1$ tiene raíces r_1, r_2 y r_3, hallar el valor de $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$.

Solución. Por Vieta sabemos que $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 3$ y $r_1r_2r_3 = -1$. Además, notemos que

$$\frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_2}{r_1r_2r_3} = \frac{r_1r_2}{r_1r_2r_3} + \frac{r_2r_3}{r_1r_2r_3} + \frac{r_3r_1}{r_1r_2r_3} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Por lo tanto $\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{3}{-1} = \boxed{-3}$. ■

Ejemplo 1.3 (1986 URSS)**.** Las raíces del polinomio $x^2 + ax + b + 1$ son números naturales. Mostrar que $a^2 + b^2$ no es un primo.

Solución. Para demostrar que $a^2 + b^2$ no es primo, basta demostrar que es el producto de dos enteros mayores a 1. Digamos entonces que r_1 y r_2 son las raíces, por Vieta $r_1 + r_2 = -a$ y $r_1r_2 = b + 1$. Elevando al cuadrado y sumando tenemos $a^2 + b^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1r_2 - 1)^2$, al desarrollar llegamos a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 + r_1^2r_2^2 - 2r_1r_2 + 1 \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_1^2r_2^2 + 1 \\ &= (r_1^2 + 1)(r_2^2 + 1). \end{aligned}$$

Por dato r_1 y r_2 son naturales por lo que $(r_1^2 + 1)$ y $(r_2^2 + 1)$ son naturales mayores a 1 y hemos terminado. ■

Ejemplo 1.4 (AIME II, 2008)**.** Sean r, s y t las tres raíces de la ecuación $8x^3 + 1001x + 2008 = 0$. Hallar el valor de $(r+s)^3 + (s+t)^3 + (t+r)^3$.

Solución. Por Vieta, sabemos que $r+s+t=0$ y $rst=-251$. Por la primera ecuación, obtenemos $r+s=-t$ y por tanto $(r+s)^3=-t^3$. Análogamente, llegamos a

$$(r+s)^3+(s+t)^3+(t+r)^3=-(r^3+s^3+t^3)$$

Por la identidad de Gauss, tenemos que $r^3+s^3+t^3-3rst=0$ y por tanto $-(r^3+s^3+t^3)=-3rst \implies -(r^3+s^3+t^3)=-3(-251)=\boxed{753}$. ■

1.1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Sean r_1 y r_2 las raíces del polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$. Encontrar los siguientes valores en función del los coeficientes de $P(x)$.

A) r_1-r_2 B) $\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}$

C) $r_1^2+r_2^2$ D) $r_1^3+r_2^3$

E) $(r_1+1)^2+(r_2+1)^2$

Ejercicio 1.2. Sean a y b las raíces de la ecuación $x^2-6x+5=0$, encontrar $(a+1)(b+1)$.

Ejercicio 1.3. Dado que m y n son raíces del polinomio $6x^2-5x-3$, encuentra un polinomio cuyas raíces sean $m-n^2$ y $n-m^2$, sin calcular los valores de m y n.

Ejercicio 1.4. Sea el polinomio $5x^3+4x^2-8x+6$ con raíces reales a, b y c, hallar

$$a(1+b+c)+b(1+a+c)+c(1+a+b).$$

Ejercicio 1.5. ¿Para qué valores reales positivos de m, las raíces x_1 y x_2 de la ecuación

$$x^2-\left(\frac{2m-1}{2}\right)x+\frac{m^2-3}{2}=0$$

cumplen que $x_1=x_2-\frac{1}{2}$?

Ejercicio 1.6. Supóngase que el polinomio $5x^3+4x^2-8x+6$ tiene tres raíces reales a, b y c. Probar que

$$5^2a\left(\frac{a+b}{2}\right)+5^2b\left(\frac{b+c}{2}\right)+5^2c\left(\frac{c+a}{2}\right)=3^3+1.$$

Problema 1.1. Sea $P(x)=mx^3+mx^2+nx+n$ un polinomio cuyas raíces son a, b y c. Demostrar que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Problema 1.2. Si z, t son las raíces del polinomio x^2+2x+4, calcular el valor de

$$(z+t)^7-z^7-t^7.$$

Problema 1.3. Sean $a, b, c \in R$ tal que los polinomios ax^2+bx+c y cx^2+bx+a tienen dos raíces reales distintas cada uno (r_1, r_2) y (r_3, r_4) respectivamente. Se sabe que los números r_1, r_2, r_3, r_4 forman, en ese orden, una progresión aritmética. Demostrar que $a+c=0$.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Problema 2.1. Sea el polinomio $P(x) = 4x^2 + 5x + 3$ con raíces p y q. Determina $(p+7)(q+7)$, sin calcular los valores de p y q.

Problema 2.2. Sean r_1, r_2, r_3 las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$. Determina el valor de $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$, sin calcular los valores de r_1, r_2, r_3.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Para cada entero positivo n, se definen a_n y b_n como las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + (2n+1)x + n^2 = 0$. Determinar el valor de

$$\frac{1}{(1+a_3)(1+b_3)} + \frac{1}{(1+a_4)(1+b_4)} + \cdots + \frac{1}{(1+a_{2024})(1+b_{2024})}.$$

Referencias

[Arg15] Argel. Fórmulas de Vieta. *OMMBC*, 2015.

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 3. Fórmulas de Vieta I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2022.

[TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 4. Fórmulas de Vieta. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com