

Introducción a las Ecuaciones Funcionales

Kenny J. Tinoco

ASJT - Nicaragua

Índice

1. Métodos básicos	1
2. Ecuaciones funcionales de Cauchy	2
3. Problemas resueltos	2
4. Problemas propuestos	2

1. Métodos básicos

- Sustitución de valores en las variables. El abordaje más común es darles valores pequeños o algo evidentes (p.e 0, 1, -1), después de eso (si es posible) algunas expresiones que harán que alguna parte de la ecuación se convierta en constante o invariante. Como es de esperarse las sustituciones se hacen menos evidentes a medida que aumenta la dificultad de los problemas.
- Inducción matemática. Este método se basa en usar el valor de $f(1)$ para encontrar todos los valores $f(n)$ con n entero. Después encontramos $f(\frac{1}{n})$ y $f(r)$ para r racional. Este método resulta de mucha utilidad en problemas donde la función está definida en los racionales ($f \in \mathbb{Q}$), especialmente en los problemas más sencillos.
- Invertigar sobre la injectividad or sobrejectividad de la fuciones implicadas en la ecuación. En muchos problemas estos hechos no muy dífiles de deducir pueden ser de gran importancia.
- Encontrar puntos fijos o ceros de las funciones. El número de problemas que se resuelven con este método para resolverse es considerablemente más pequeño que el número de problemas que se resuelven con los primeros tres métodos. Este método lo encontramos sobre todo en problemas de mayor dificultad.
- Usar las clásicas equaciones funcionales de Cauchy.

- Construir relaciones recurrentes.
- Sustituir la función. Este método a menudo es usado para simplificar la ecuación dada y rara vez es de importancia crucial
- NO OLVIDAR NUNCA verificar que las soluciones encontradas satisfagan las condiciones dadas.

2. Ecuaciones funcionales de Cauchy

Definición 2.1. (*Función aditiva*) Una función $f : A \rightarrow B$ es llamada aditiva si

$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$$

para toda a_1, a_2 tal que $a_1, a_2, a_1 + a_2 \in A$

3. Problemas resueltos

Problema 3.1.

4. Problemas propuestos

Problema 4.1.

Referencias

- [Par18] Amir Parvardi. *Functional equations in mathematical olympiad. Problems and solutions Vol. 1 (2017-2018)*. The University of British Columbia, 2018.
- [Rad07] Marko Radovanovic. *Functional equations*. *IMOMath*, 2007.