Notas para la clase

1. Clase 02

Se empieza la clase dando un pequeño resumen de lo visto en la sesión anterior, se hace énfasis en la evaluación de polinomios

$$\text{P(expresión)} \rightarrow \text{expresión. (Expresión algebraica} \equiv \text{polinomio)}$$
$$\text{P(constante)} \rightarrow \text{constante. (Constante} \equiv \text{número)}$$

Se hace mención a evaluaciones notables como $P(0)$ y $P(1)$. Luego, se introduce la definición de raíz de un polinomio (alución a la **definición 1.1**) y la razón por la que se estudia.

Se muestra el polinomio $M(x) = x^5 - 3x^4 - 29x^3 - 13x^2 + 120x + 140$ y se pide a los estudiante hallar una raíz por tanteo. También, describir el polinomio a manera de ejercicio. El docente podrá hacer las siguientes preguntas ¿qué características tiene M? ¿es mónico? ¿es completo? ¿es simétrico? ¿está ordenado?. Después que el estudiante intentó encontrar soluciones por su cuenta, anunciar que 7 es una raíz. Y a continuación, comprobar que $x = 7$ es una raíz.

$$\begin{aligned}
1 \times 16807 &= +16807 \\
-3 \times 2401 &= -..7203 \\
-29 \times 343 &= -..9947 \\
-13 \times 49 &= -....637 \\
120 \times 7 &= +....840 \\
1 \times 140 &= +....140
\end{aligned}$$

Hacer la siguiente pregunta: ¿es fácil o obvio deducir que $x = 7$ es una raíz?. Introducir la definición de factor (alución a la **definición 1.2**) y mencionar la factorización. Luego, expresar el polinomio M como el producto del factor $(x - 7)$ con otro polinomio[1]:

$$\begin{aligned}
x^5 + 4x^4 - x^3 - 20x^2 - \ 20x \qquad\qquad \\
-7x^4 - 28x^3 + 7x^2 + 140x + 140 \\
x^5 - 3x^4 - 29x^3 - 13x^2 + 120x + 140 \\
\Rightarrow M(x) = (x - 7)(x^4 + 4x^3 - x^2 - 20x - 20)
\end{aligned}$$

Dar énfasis en cómo los factores dan información de las raíces de un polinomio y hacer referencia al **Teorema del factor**.

[1] Preguntar nuevamente si los polinomios son completos y mostrar la completación de polinomios

Terminar la factorización de M

$$\begin{aligned} x^4+4x^3+4x^2 \qquad\qquad \\ -5x^2-20x-20 \\ x^4+4x^3-x^2-20x-20 \\ \Rightarrow M(x)=(x-7)(x^2-5)(x+2)^2 \\ \Rightarrow M(x)=(x-7)(x-\sqrt{5})(x+2)(x+2)(x+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Hacer referencia a que la cantidad de raíces de un polinomio está determinado por su grado e indicar las multiplicidades de las raíces del polinomio M.

2. Clase 04

2.1. Solución de la tarea

Problema 2.1. Sea el polinomio P para el cual $P(x^2+1)=x^4+4x^2$. Encontrar $P(x^2-1)$.

Solución 1. La solución de este problema se reduce a encontrar una expresión 'E' que al remplazarla por x nos de como resultado x^2-1. Podemos encontrar esta expresión con una simple ecuación:

$$\begin{aligned} E^2+1&=x^2-1 \\ E^2&=x^2-2 \\ E&=\pm\sqrt{x^2-2} \end{aligned}$$

Es decir que si transformamos x en $\pm\sqrt{x^2-2}$ obtendremos lo que nos piden[2].

Haciendo $x\to\pm\sqrt{x^2-2}$

$$\begin{aligned} P\left[\left(\pm\sqrt{x^2-2}\right)^2+1\right]&=\left(\pm\sqrt{x^2-2}\right)^4+4\left(\pm\sqrt{x^2-2}\right)^2 \\ P\left(x^2-2+1\right)&=\left(x^2-2\right)^2+4\left(x^2-2\right) \\ P\left(x^2-1\right)&=x^4-4x^2+4+4x^2-8 \\ P\left(x^2-1\right)&=\boxed{x^4-4} \end{aligned}$$

□

Solución 2. La segunda solución es muy parecida a la primera pero en lugar de encontrar directamente $P(x^2-1)$ encontramos $P(x)$ como paso intermedio.

$$\begin{aligned} E^2+1&=x \\ E^2&=x-1 \\ E&=\pm\sqrt{x-1} \end{aligned}$$

[2] A esta transformación vamos a denotarla por $x\to\pm\sqrt{x^2-2}$

Haciendo $x \to \pm\sqrt{x-1}$

$$P\left[\left(\pm\sqrt{x-1}\right)^2+1\right]=\left(\pm\sqrt{x-1}\right)^4+4\left(\pm\sqrt{x-1}\right)^2$$
$$P\left(x-1+1\right)=\left(x-1\right)^2+4\left(x-1\right)$$
$$P\left(x\right)=x^2-2x+1+4x-4$$
$$P\left(x\right)=x^2+2x-3$$

Luego solo evaluamos $P(x^2-1)$

$$P\left(x^2-1\right)=\left(x^2-1\right)^2+2\left(x^2-1\right)-3$$
$$P\left(x^2-1\right)=x^4-2x^2+1+2x^2-2-3$$
$$P\left(x^2-1\right)=\boxed{x^4-4}$$

□

Problema 2.2. Sea $S(x)$ un polinomio cúbico con $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$ y $S(4)=5$. Encontrar $S(6)$.

Solución 1. Al tomar al polinomio auxiliar R como $R(x)=S(x)-x$. Vemos que $R(1)=0$, $R(2)=0$ y $R(3)=0$. Es decir que 1, 2 y 3 son raíces de R. Luego, por el teorema del factor

$$R(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$$

Donde a es el coefiente principal de R. Nos piden $S(6)$, lo cual lo podemos encontrar como $S(6)=R(6)+6$. Pero para obtener $R(6)$ primero debemos saber el valor de a. Valor que podemos encontrar como

$$R(4)=S(4)-4$$
$$a(4-1)(4-2)(4-3)=5-4$$
$$6a=1$$
$$a=\frac{1}{6}$$

Finalmente hallamos $S(6)$:

$$S(6)=R(6)+6$$
$$S(6)=\frac{1}{6}(6-1)(6-2)(6-3)+6=\frac{5\times4\times3}{6}+6$$
$$S(6)=10+6=\boxed{16}$$

□

Solución 2. Sabemos que S tiene la forma $S(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Al utilizar las evaluaciones que nos dan como datos podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones 4×4

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c+d &=& 1\\ 8a+4b+2c+d &=& 2\\ 27a+9b+3c+d &=& 3\\ 64a+16b+4c+d &=& 5 \end{array}\right.$$

Al resolver este sistema, por el método que más te guste, veremos que $(a,b,c,d) = \left(\frac{1}{6}, -1, \frac{17}{6}, -1\right)$ es la única solución. Luego, $S(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{17}{6}x - 1$. Finalmente al evualuar $S(6)$, llegamos a

$$S(6) = \frac{1}{6} \times 6^3 - 6^2 + \frac{17}{6} \times 6 - 1$$
$$S(6) = 6^2 - 6^2 + 17 - 1 = \boxed{16}$$

□

Problema 2.3. Determine un polinomio cúbico P en los reales, con una raíz igual a cero y que satisface $P(x-1) = P(x) + 25x^2$.

Solución 1. Como P tiene una solución igual a cero, entonces este no tiene término independiente, es decir, tiene la forma $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Al evaluar el polinomio en ciertos valores veremos que

Si $x = 0$:
$$P(-1) = P(0) + 25(0)^2 \longrightarrow \boxed{P(-1) = 0}$$
Si $x = 1$:
$$P(0) = P(1) + 25(1)^2 \longrightarrow \boxed{P(1) = -25}$$
Si $x = -1$:
$$P(-2) = P(-1) + 25(-1)^2 \longrightarrow \boxed{P(-2) = 25}$$

Con estas evaluaciones formaremos el siguiente sistema de ecuaciones 3×3

$$\begin{cases} -a + b - c &= 0 \\ a + b + c &= -25 \\ -8a + 4b - 3c &= 25 \end{cases}$$

Que al resolverlo, con el método que más te guste, vemos que tiene a $(a,b,c) = \left(-\frac{25}{3}, \frac{25}{2}, -\frac{25}{6}\right)$ como única solución. Luego

$$\boxed{P(x) = -\frac{25}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2 - \frac{25}{6}x}$$

es la solución. □

Solución 2. Esta solución se basa en la compración de coeficientes del polinomio. Primero caracterizemos a P, como ya sabemos de la solución anterior

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Así $P(x-1)$ es igual a

$$P(x-1) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1)$$
$$P(x-1) = a\left[x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right] + b\left[x^2 - 2x + 1\right] + c(x-1)$$
$$P(x-1) = ax^3 - 3ax^2 + 3ax - a + bx^2 - 2bx + b + cx - c$$
$$P(x-1) = ax^3 - 3ax^2 + bx^2 + 3ax - 2bx + cx - a + b - c$$
$$P(x-1) = ax^3 + (-3a + b)x^2 + (3a - 2b + c)x + (-a + b - c)$$

Luego

$$ax^3 + (-3a+b)x^2 + (3a-2b+c)x + (-a+b-c) = ax^3 + bx^2 + cx + 25x^2$$
$$ax^3 + \boxed{(-3a+b)}x^2 + \boxed{(3a-2b+c)}x + \boxed{(-a+b-c)} = ax^3 + \boxed{(b+25)}x^2 + \boxed{c}x + \boxed{0}$$

De la comparación de coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones 3×3

$$\begin{cases} -a+b-c &= 0 \\ 3a-2b+c &= c \\ -3a+b &= b+25 \end{cases}$$

De donde rápidamente vemos que la única solución es $(a,b,c) = \left(-\frac{25}{3}, \frac{25}{2}, -\frac{25}{6}\right)$. Luego

$$\boxed{P(x) = -\frac{25}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2 - \frac{25}{6}x}$$

□

3. Clase 05

3.1. Solución de la tarea

Problema 3.1. Si p y q son las raíces del polinomio $P(x) = 4x^2 + 5x + 3$. Determina $(p+7)(q+7)$, sin calcular los valores de p y q.

Solución. Por Vieta $p+q = -\dfrac{5}{4}$ y $pq = \dfrac{3}{4}$, así al desarrollar

$$\begin{gathered} (p+7)(q+7) \\ pq + 7(p+q) + 49 \\ \frac{3}{4} + 7\left(-\frac{5}{4}\right) + 49 \\ \frac{3}{4} - \frac{35}{4} + 49 \\ -8 + 49 = \boxed{41} \end{gathered}$$

□

Problema 3.2. Supóngase que el polinomio $5x^3+4x^2-8x+6$ tiene tres raíces reales a, b y c. Demostra que

$$(5a)^2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + (5b)^2\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + (5c)^2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) = 3^3 + 1.$$

Solución. Simplificando la expresión y usando las fórmulas de Vieta, tendremos que

$$
\begin{aligned}
(5a)^2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+(5b)^2\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+(5c)^2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)&=3^3+1\\
\frac{25}{2}a^2b\left(\frac{a+b}{ab}\right)+\frac{25}{2}b^2c\left(\frac{b+c}{bc}\right)+\frac{25}{2}c^2a\left(\frac{c+a}{ca}\right)&=3^3+1\\
\frac{25}{2}a\left(a+b\right)+\frac{25}{2}b\left(b+c\right)+\frac{25}{2}c\left(c+a\right)&=3^3+1\\
\frac{25}{2}\left[a^2+ab+b^2+bc+c^2+ca\right]&=3^3+1\\
\frac{25}{2}\left[a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right]&=3^3+1\\
\frac{25}{2}\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)\right]&=3^3+1\\
\frac{25}{2}\left[(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\right]&=3^3+1\\
\frac{25}{2}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2-(-\frac{8}{5})\right]&=3^3+1\\
\frac{25}{2}\left[\frac{16}{25}+\frac{8}{5}\right]&=3^3+1\\
\frac{25}{2}\left[\frac{56}{25}\right]&=3^3+1\\
28&=3^3+1
\end{aligned}
$$

□

Problema 3.3. Sean r_1, r_2, r_3 las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$. Determina el valor de $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$, sin calcular los valores de r_1, r_2, r_3.

Solución. Por propiedad

$$
\begin{aligned}
r_1^3 - r_1^2 + r_1 - 2 = 0 \rightarrow r_1^3 = r_1^2 - r_1 + 2\\
r_2^3 - r_2^2 + r_2 - 2 = 0 \rightarrow r_2^3 = r_2^2 - r_2 + 2\\
r_3^3 - r_3^2 + r_3 - 2 = 0 \rightarrow r_3^3 = r_3^2 - r_3 + 2
\end{aligned}
$$

Así que la expresión en cuestión toma la forma $r_1^3+r_2^3+r_3^3 = r_1^2+r_2^2+r_3^2-(r_1+r_2+r_3)+6$, como $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$, entonces $r_1^3+r_2^3+r_3^3 = (r_1+r_2+r_3)^2 - 2(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1) - (r_1+r_2+r_3) + 6$. Usando Vieta, finalmente llegamos a

$$r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 = (-1)^2 - 2(1) - (-1) + 6 = \boxed{6}$$

□

4. Clase 07

4.1. Solución de la clase práctica

Problema 4.1. Para que la división de $6x^4 - 11x^2 + ax + b$ entre $3x^2 - 3x - 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Solución. La solución de este problema en complicada hacerla en latex, por eso no la hago. Pero la respuesta es $a = 1$ y $b = 1$. $\square$

Problema 4.2. Calcular la suma de coeficientes del resto que deja $x^{3333} - 9$ entre $x^2 - 729$.

Solución. Podemos expresar el problema de la siguiente manera

$$x^{3333} - 3^2 = (x - 3^3)(x + 3^3)Q(x) + ax + b$$

Por el teorema del resto $P(3^3) = 3^3 a + b$ y $P(-3^3) = -3^3 a + b$, con lo cual podemos sacamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3^{9999} - 3^2 &= 3^3 a + b \\ -3^{9999} - 3^2 &= -3^3 a + b \end{cases}$$

De donde obtenemos las soluciones $(a, b) = (3^{9996}, -3^2)$. Luego, la suma que nos piden es

$$a + b = 3^{9996} - 3^2 = \boxed{3^2(3^{9994} - 1)}$$

$\square$

Problema 4.3. Sea r una raíz de $x^2 - x + 7$. Hallar el valor de $r^3 + 6r + \pi$.

Solución. Por defición $r^2 - r + 7 = 0$. Con esta ecuación podemos obtener que $r^2 + 6 = r - 1$ y $r^2 - 4 = -7$. Luego, transformando la expresión y evaluando llegamos a

$$\begin{gathered} r^3 + 6r + \pi \\ r(r^2 + 6) + \pi \\ r(r - 1) + \pi \\ r^2 - 4 + \pi = \boxed{-7 + \pi} \end{gathered}$$

$\square$

Problema 4.4. Sean a, b y c las raíces reales de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. Probar que $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$.

Solución. Sabemos que $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$. Cuando hacemos $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$ y $z = \sqrt[3]{c}$, tenemos que

$$\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)^3 = a + b + c + 3\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca}\right) - 3\sqrt[3]{abc}$$

Digamos que $\alpha = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$, también, por Vieta sabemos que $a+b+c=-3$ y $abc=-1$. Al agrupar α y sustituir

$$\begin{aligned}
\alpha^3 - 3\alpha\left(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\right) &= a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\\
\alpha\left[\alpha^2 - 3\left(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\right)\right] &= -3-3\sqrt[3]{-1}\\
\alpha\left[\alpha^2 - 3\left(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\right)\right] &= 0
\end{aligned}$$

Esta ecuación nos permite ver que si queremos probar que $\alpha = 0$, entonces tenemos que probar

$$\alpha^2 - 3\left(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\right) \neq 0.$$

Por Vieta tenemos que $ab = -\dfrac{1}{c}$, $bc = -\dfrac{1}{a}$ y $ca = -\dfrac{1}{b}$, entonces si

$$\begin{aligned}
\alpha^2 - 3\left(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\right) &= 0\\
\alpha^2 &= 3\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{b}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{c}}\right)\\
\alpha^2 &= -3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}}\right)\\
\alpha &= \pm\sqrt{-3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}}\right)}
\end{aligned}$$

Lo cual no puede ser, ya que las raíces son reales. Luego, $\alpha = \boxed{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0}$. □

Problema 4.5. Sean r_1, r_2 y r_3 raíces distintas del polinomio $y^3-22y^2+80y-67$. De tal manera que existen números reales α, β y θ tal que

$$\frac{1}{y^3-22y^2+80y-67} = \frac{\alpha}{y-r_1}+\frac{\beta}{y-r_2}+\frac{\theta}{y-r_3}$$

$\forall y \notin \{r_1, r_2, r_3\}$. ¿Cuál es valor de $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\theta}$?

Solución. Por el teorema del factor, sabemos que $y^3-22y^2+80y-67 = (y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)$, por lo tanto

$$\frac{1}{(y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)} = \frac{\alpha}{y-r_1}+\frac{\beta}{y-r_2}+\frac{\theta}{y-r_3}$$

Al multiplicar esta ecuación por $(y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)$, obtenemos una ecuación donde $y \in \{r_1, r_2, r_3\}$

$$1 = \alpha(y-r_2)(y-r_3)+\beta(y-r_1)(y-r_3)+\theta(y-r_1)(y-r_2)$$

Si $y = r_1$, entonces

$$1 = \alpha(r_1 - r_2)(r_1 - r_3) + 0 + 0$$
$$1 = \alpha(r_1^2 - r_1r_2 - r_1r_3 + r_2r_3)$$
$$\frac{1}{\alpha} = r_1^2 - r_1r_2 - r_1r_3 + r_2r_3$$

Análogamente, con $y = r_2$ y $y = r_3$ obtenemos $\frac{1}{\beta} = r_2^2 - r_1r_2 - r_2r_3 + r_3r_1$ y $\frac{1}{\theta} = r_3^2 - r_2r_3 - r_3r_1 + r_1r_2$ respectivamente. Sumando estos resultado llegamos a

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta} = (r_1^2 - r_1r_2 - r_1r_3 + r_2r_3) + (r_2^2 - r_1r_2 - r_2r_3 + r_3r_1) + (r_3^2 - r_2r_3 - r_3r_1 + r_1r_2)$$
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)$$
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta} = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 3(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)$$

Luego, por Vieta es fácil ver que $r_1 + r_2 + r_3 = 22$ y $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 80$. Finalmente

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta} = (22)^2 - 3(80) = 484 - 240 = \boxed{244}$$

$\square$

Problema 4.6. La ecuación $2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1$ tiene tres raíces reales. Dado que su suma es $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $mcd(m, n) = 1$. Calcular $m + n$.

Solución. Si hacemos el cambio de variable $y = (2^x)^{111}$, vemos que la ecuación se transforma en

$$2^{333x} \cdot 2^{-2} + 2^{111x} \cdot 2^2 = 2^{222x} \cdot 2^1 + 1$$
$$y^3 \cdot 2^{-2} + y \cdot 2^2 = y^2 \cdot 2 + 1$$
$$\frac{1}{4}y^3 - 2y^2 + 4y - 1 = 0$$
$$y^3 - 8y^2 + 16y - 4 = 0$$

Esta nueva ecuación tendrá raíces a, b y c de la forma $a = (2^{r_1})^{111}$, $b = (2^{r_2})^{111}$ y $c = (2^{r_3})^{111}$. Donde r_1, r_2 y r_3 son la raíces de la ecuación original. Luego, si nos fijamos cuidadosamente, por Vieta tenemos que

$$abc = 4$$
$$(2^{111r_1})(2^{111r_2})(2^{111r_3}) = 2^2$$
$$2^{111(r_1+r_2+r_3)} = 2^2$$
$$\rightarrow 111(r_1 + r_2 + r_3) = 2$$
$$\rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = \frac{2}{111}$$

Como 2 y 111 son coprimos o $mcd(2, 111) = 1$, entonces $m + n = 2 + 111 = \boxed{113}$ $\square$

Problema 4.7. Si $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio tal que $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ y $P(3) = 30$, determine el valor de

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10}.$$

Probablemente al idea más elemental para atacar este problema es formar un sistema de ecuaciones, pero nos toparemos que dicho sistema tendrá 4 variable y 3 ecuaciones, lo cual no puede resolverse. Sin embargo ya conocemos el teorema del factor y veremos que este problema se vuelve sencillo.

Solución. Veamos que para el polinomio auxiliar $A(x) = P(x) - 10x$, los valores de 1, 2 y 3 son raíces. Como $P(x)$ es de grado 4 y mónico, entonces A también será de grado 4 y mónico[3], es decir A tiene 4 raíces. Luego, por el teorema del factor sabemos que

$$A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$$

Donde r es la raíz que falta. Vemos que

$$\begin{gathered}
P(12) = A(12) + 10 \times 12 \\
P(12) = (12-1)(12-2)(12-3)(12-r) + 120 \\
P(12) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot (12-r) + 120 \\
P(12) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 - \boxed{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot r} + 120
\end{gathered}$$

Y

$$\begin{gathered}
P(-8) = A(-8) + 10 \times -8 \\
P(-8) = (-8-1)(-8-2)(-8-3)(-8-r) - 80 \\
P(-8) = -9 \cdot -10 \cdot -11 \cdot (-8-r) - 80 \\
P(-8) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + \boxed{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot r} - 80
\end{gathered}$$

De esta manera, la expresión que nos piden evaluar se transforma en

$$\begin{gathered}
\frac{P(12) + P(-8)}{10} \\
\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 - \boxed{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot r} + 120 + \boxed{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot r} - 80}{10} \\
\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 + 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + 120 - 80}{10} \\
\frac{10(12 \cdot 11 \cdot 9 + 11 \cdot 9 \cdot 8) + 40}{10} \\
12 \cdot 11 \cdot 9 + 11 \cdot 9 \cdot 8 + 4 \\
99 \cdot 20 + 4 = 198 + 4 = \boxed{202}
\end{gathered}$$

$\square$

[3] Hay que tener cuidado con este argumento, ya que puede darse el caso en el que un polinomio auxilar no sea del mismo grado que el polinomio original.

Problema 4.8. Sea $F(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a, b, c y d tal que $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$, entonces no existe un entero k tal que $F(k) = 8$.

Solución. De la misma manera que en el problema anterior, definamos al polinomio auxiliar $A(x) = F(x) - 5$, los valores de a, b, c y d son raíces de A. Como $F(x)$ es de grado n y mónico, entonces A también será de grado n y mónico, es decir

$$A(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)G(x)$$

Donde G es un polinomio de grado $n-4$. Digamos que existe un entero r tal que $F(r) = 8$, entonces $A(r) = F(r) - 5 = 8 - 5 = 3$.

$$(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)G(r) = 3$$

Del lado izquierdo tenemos 4 enteros distintos los cuales deben de ser divisores de 3. Los posibles factores de 3 son $-1, 1, -3, 3$, pero resulta que 3 solo puede ser expresado como $-1 \times 1 \times -3$. Luego, r no puede existir. $\square$

Problema 4.9. Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$. ¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{20}(x)$?

Solución. Veamos que pasa con $P_1(x)$

$$\begin{gathered} P_1(x) = P_{1-1}(x-1) \\ P_1(x) = P_0(x-1) \\ P_1(x) = (x-1)^3 + 313(x-1)^2 - 77(x-1) - 8 \end{gathered}$$

Bien, ahora veamos que pasa con $P_2(x)$

$$\begin{gathered} P_2(x) = P_{2-1}(x-2) \\ P_2(x) = P_1(x-2) \\ P_2(x) = [(x-2)-1]^3 + 313[(x-2)-1]^2 - 77[(x-2)-1] - 8 \\ P_2(x) = [x-(1+2)]^3 + 313[x-(1+2)]^2 - 77[x-(1+2)] - 8 \end{gathered}$$

Rápidamente, nos damos cuenta del patron que se forma con los números que se restan a x

$$\begin{gathered} P_3(x) = [x-(1+2+3)]^3 + 313[x-(1+2+3)]^2 - 77[x-(1+2+3)] - 8 \\ P_4(x) = [x-(1+2+3+4)]^3 + 313[x-(1+2+3+4)]^2 - 77[x-(1+2+3+4)] - 8 \\ P_5(x) = [x-(1+2+3+4+5)]^3 + 313[x-(1+2+3+4+5)]^2 - 77[x-(1+2+3+4+5)] - 8 \\ \vdots \\ P_{20}(x) = [x-(1+\cdots+20)]^3 + 313[x-(1+\cdots+20)]^2 - 77[x-(1+\cdots+20)] - 8 \end{gathered}$$

Por la fórmulas de Gauss sabemos que $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces

$$\begin{gathered} P_{20}(x) = \left(x - \frac{20 \cdot 21}{2}\right)^3 + 313\left(x - \frac{20 \cdot 21}{2}\right)^2 - 77\left(x - \frac{20 \cdot 21}{2}\right) - 8 \\ \boxed{P_{20}(x) = (x-210)^3 + 313(x-210)^2 - 77(x-210) - 8} \end{gathered}$$

En el desarrollo de $(x+a)^3$ el coeficiente de x es $3a^2$, en el de $(x+a)^2$ el coeficiente de x es $2a$. Por lo tanto, el coeficiente que buscamos es

$$\begin{gathered}
3(-210)^2 + 313 \cdot 2(-210) - 77 \\
(-210)\left[3(-210) + 313 \cdot 2\right] - 77 \\
(-210)\left[-630 + 626\right] - 77 \\
(-210)\left[-4\right] - 77 \\
840 - 77 \\
\boxed{763}
\end{gathered}$$

□

5. Clase 09

Problema 5.1. Sean x, y y z números reales tales que

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x^2+y^2+z^2 &= 5 \\ x^3+y^3+z^3 &= 7 \end{cases}$$

Hallar el valor de $x^4+y^4+z^4$.

Solución. Utilizando la notación de polinomios simétricos y suma simétrica de potencias, tenemos lo siguiente

$$\begin{cases} \sigma_1 &= 3 \\ s_2 &= 5 \\ s_3 &= 7 \end{cases}$$

Por propiedad $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ y $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$. De aquí que

$$\begin{gathered}
s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\
5 = 3^2 - 2\sigma_2 \\
5 - 9 = -2\sigma_2 \\
-4 = -2\sigma_2 \\
\boxed{\sigma_2 = 2}
\end{gathered}
\qquad\qquad
\begin{gathered}
s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \\
7 = 3^3 - 3\cdot 3\cdot 2 + 3\sigma_3 \\
7 - 27 + 18 = 3\sigma_3 \\
-2 = 3\sigma_3 \\
\boxed{\sigma_3 = -\frac{2}{3}}
\end{gathered}$$

De estos resultados podemos considerar al polinomio $w^3 - 3w^2 + 2w + \dfrac{2}{3}$, que tiene como raíces a x, y y z. Por propiedad

$$x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{2}{3} = 0$$
$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + \frac{2}{3}x = 0$$
$$x^4 = 3x^3 - 2x^2 - \frac{2}{3}x$$

Análogamente

$$y^4 = 3y^3 - 2y^2 - \frac{2}{3}y$$
$$z^4 = 3z^3 - 2z^2 - \frac{2}{3}z$$

Por lo tanto

$$x^4 + y^4 + z^4 = 3s_3 - 2s_2 - \frac{2}{3}\sigma_1$$
$$x^4 + y^4 + z^4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 - \frac{2}{3} \cdot 3$$
$$x^4 + y^4 + z^4 = 21 - 10 - 2$$
$$\boxed{x^4 + y^4 + z^4 = 9}$$

□

Problema 5.2. Sean a, b y c las raíces del polinomio $3x^3 + x + 2023$. Calcular

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3.$$

Solución. Por Vieta

$$\sigma_1 = a + b + c = 0$$
$$\sigma_2 = ab + bc + ca = \frac{1}{3}$$
$$\sigma_3 = abc = -\frac{2023}{3}$$

De aquí que $a + b = -c$, $b + c = -a$ y $c + a = -b$. Por lo que la expresión en cuestión toma la forma

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 = -(a^3 + b^3 + c^3) = -s_3$$

Por otro lado, sabemos que

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$
$$s_3 = 0^3 - 3 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot (-\frac{2023}{3})$$
$$s_3 = -2023$$

De esta forma llegamos a que

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 = \boxed{2023}$$

□

Problema 5.3. Considera el polinomio $P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ y $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 las raíces de Q, encontrar $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$.

Solución. Por propiedad, $Q(z_1) = 0 \to z_1^4 - z_1^3 - z_1^2 - 1 = 0$, así que

$$\begin{gathered} z_1^4 - z_1^3 - z_1^2 - 1 = 0 \\ z_1^6 - z_1^5 - z_1^4 - z_1^2 = 0 \\ \boxed{z_1^6 - z_1^5 - z_1^2 = z_1^4} \end{gathered} \qquad\qquad \begin{gathered} \text{También} \\ z_1^4 - z_1^3 - z_1^2 - 1 = 0 \\ \boxed{z_1^4 - z_1^3 = z_1^2 + 1} \end{gathered}$$

Claramente $P(z_1) = z_1^6 - z_1^5 - z_1^3 - z_1^2 - z_1 = z_1^4 - z_1^3 - z_1 = z_1^2 + 1 - z_1 = \boxed{z_1^2 - z_1 + 1}$. Análogamente con $P(z_2)$, $P(z_3)$ y $P(z_4)$. Sea $R = P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$, entonces $R = s_2 - \sigma_1 + 4$. Utilizando la relación $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ y las fórmulas de Vieta, llegamos a

$$\begin{gathered} R = s_2 - \sigma_1 + 4 \\ R = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 - \sigma_1 + 4 \\ R = 1^2 - 2 \cdot (-1) - 1 + 4 \\ R = 2 + 4 \\ \boxed{R = 6} \end{gathered}$$

$\square$