Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #5

Encuentro: 5
Curso: Polinomios
Fecha: 27 de abril de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Cristian Castilblanco

Contenido: División con polinomios

En esta quinta clase veremos la división con polinomios en dos partes, la primera sobre la operación en sí. Junto con su métodos, tales como la división larga, de Horner y de Ruffini (o división sintética). Luego, veremos la divisibilidad de polinomios, en general, los teoremas y resultado útiles. Como por ejemplo, el teorema del Resto que es el caso general del Teorema del Factor, asi como el Teorema fundamental del Álgebra.

1. Desarrollo

1.1. División de polinomios

1.1.1. División larga

Se recomienda cuando los polinomios a dividir son de una sola variable o para polinomios homogéneos. El algoritmo es el siguiente:

1. Completar y ordenar los dos polinomios, tanto el divisor como el dividendo.
2. Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicar el divisor con signo cambiado por los términos del cociente y sumar en orden el producto obtenido con el dividendo.
4. Tratar el resto obtenido en el paso anterior como el nuevo dividiendo y repetir los pasos b y c.[1].
5. Continuar el proceso hasta que el resto obtenido tenga un grado menor al divisor o bien al obtener cero.

1.1.2. Método de Horner

Se recomienda usar el método de Horner cuando el polinomio divisor es de segundo grado o más. Se opera solamente con los coeficientes de los polinomios ordenados y completos. Los coeficientes se distribuyen en un cuadro como el que sigue:

Algoritmo del método de Horner

[1]En general, los métodos para la división de polinomios son recursivos.

1. Se anotan los coeficientes del dividiendo en la parte superior del cuadro en forma horizontal.
2. Se anotan los coeficientes del divisor en la parte izquierda del cuadro en forma vertical con los signos cambiados a excepción del primero.
3. La línea de trazos separa el cociente del resto y para su trazo se considera el grado del divisor. En el cociente se cuentan tantos términos como el grado del dividendo menos el grado del divisor más uno.
4. El primer término del cociente se obtiene dividiendo el primer coeficiente del dividendo entre el primer coeficiente del divisor.
5. El coeficiente obtenido en el paso anterior se multiplica con los demás coeficientes del divisor con signo opuesto y los resultados se escriben de manera horizontal a partir de la siguiente columna hacía la derecha.
6. Las cantidades que se encuentran en la segunda columna se suman y el resultado se divide entre el primer coeficiente del divisor, repitiéndose el procedimiento hasta coincidir con la última columna del dividendo.
7. Para finalizar, se suman directamente las columnas correspondientes al residuo, lo que conformará los coeficientes del polinomio residuo o resto.

1.1.3. Método de Ruffini

Se recomienda usar este método cuando el divisor tiene la forma $ax \pm b$. El método de Ruffini se considera como un caso particular del método de Horner. Este método se apoya de un cuadro como el siguiente Donde $\square$ es el resultado de resolver la ecuación $ax \pm b = 0$.

Algoritmo del método de Ruffini

1. Se anotan los coeficientes del dividiendo en forma horizontal y el valor de $\square$ en la columna izquierda.
2. Se baja el primer coeficiente del dividendo y se multiplica por el valor de $\square$, el resultado se anota en la siguiente columna, debajo del segundo coeficiente del dividendo.
3. Se suman las cantidades de la segunda columna y se sigue el mismo procedimiento hasta obtener un término debajo del último coeficiente del dividendo.
4. El residuo es la suma de cantidades de la última columna.

1.2. Divisibilidad polinómica

Definición 1.1 (División con resto)**.** Para cualesquiera dos polinomios $F(x)$ y $G(x)$ existen dos los polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$, tal que

$$F(x) = G(x)Q(x) + R(x), \text{ con } 0 \leq \deg R(x) < \deg G(x).$$

Donde el ***cociente*** y el ***resto*** (o ***residuo***) de la división son $Q(x)$ y $R(x)$, respectivamente. Cuando $R(x) = 0$, diremos que $G(x)$ divide a $F(x)$, y lo vamos a denotar como $G(x) \mid F(x)$.

Por ejemplo, con $F(x) = x^7 - 1$ y $G(x) = x^3 + x + 1$ llegaremos a que

$$x^7 - 1 = (x^3 + x + 1)(x^4 - x^2 - x + 1) + 2x^2 - 2.$$

Con cociente $Q(x) = x^4 - x^2 - x + 1$ y resto $R(x) = 2x^2 - 2$. Abreviaremos $G(x) \mid F(x)$ como $G \mid F$, puesto que en una división de polinomios los polinomios iniciales deben estar en la misma variable. Por ejemplo, no es posible dividir $M(a) = a^3$ entre $N(b) = b^2$.

Teorema 1.1 (Teorema del resto).

Dado un polinomio $P(x)$ con grado n y un número $a \in \mathbb{R}$. Si $P(x)$ es dividido por $(x - a)$, entonces el resto de la división es $P(a)$, i.e.

$$P(x) = (x - a)Q(x) + r \implies P(a) = r$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Demostración. Por la definición de división podemos escribir $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$. Sabiendo que $\deg R(x) < \deg(x - a) = 1$, necesariamente el resto deber ser un polinomio constante, esto es $R(x) = r$. Realizando la evaluación $P(a)$, obtenemos $P(a) = (a - a)Q(a) + R(a) \implies P(a) = R(a)$. Como $R(x)$ es constante para toda x tenemos que $P(a) = r$. ■

Notemos que el teorema del resto implica al teorema del factor, teorema que ya hemos estudiado.

Teorema 1.2 (Teorema del factor).

Dado un polinomio $P(x)$ con grado n y un número $a \in \mathbb{R}$, diremos que a es una raíz de $P(x)$ si y solo si $(x - a)$ es un factor de $P(x)$, i.e.

$$P(a) = 0 \iff P(x) = (x - a)Q(x)$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Demostración. Si tenemos que $P(a) = 0$ y analizamos el residuo en $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$. Por el teorema del resto, sabemos que $P(a) = R(x) = 0$ y por tanto $(x - a)$ es un factor de $P(x)$. Si tenemos que $P(x) = (x - a)Q(x)$, entonces al evaluar $P(a)$, claramente $P(a) = 0$ y por tanto a es una raíz de $P(x)$. ■

Teorema 1.3 (Teorema fundamental del Álgebra).

Todo polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, donde $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$, tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Desafortunadamente, la demostración del Teorema fundamental del Álgebra es demasiada complicada para nuestro pequeño curso de polinomios.

Teorema 1.4.

Todo polinomio de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces, i.e.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

donde $r_1, r_2, \cdots, r_n$ son reales o complejos.

Demostración. Procederemos por ***inducción matemática*** en el grado del polinomio. Si el polinomio es de grado 1, el resultado es inmediato. Supongamos, entonces, que el resultado es cierto para polinomios con grado $(n-1)$.

Consideremos un polinomio $P(x)$ con grado n. De acuerdo con el Teorema Fundamental del Álgebra, $P(x)$ tiene una raíz r_1 y por tanto, por el teorema del factor existe un $Q(x)$ tal que $P(x) = (x-r_1)Q(x)$. Como $\deg P(x) = \deg[(x - r_1)Q(x)] \implies n = \deg(x - r_1) + \deg Q(x)$, es decir $\deg Q(x) = (n-1)$.

Por la hipótesis de inducción, el polinomio $Q(x)$ tiene exactamente $(n-1)$ raíces, es decir $Q(x) = C(x - r_2)(x - r_3)\cdots(x - r_n)$. Por consiguiente, $P(x) = (x - r_1)Q(x) = C(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$ tiene n raíces. ■

El resultado que acabamos de demostrar, solo muestra la existencia de las raíces, encontrarlas es otro problema. Esto lo podemos abordar utilizando las fórmulas de Vieta o la división de polinomios.

Ejemplo 1.1. ¿Es el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 6$ divisible por $(x + 3)$?

Solución. Por el teorema del factor, si $(x+3)$ es factor de $P(x)$, entonces basta probar que $P(-3) = 0$. Rápidamente, vemos que $P(-3) = (-3)^4 + 2(-3)^3 - 2(-3)^2 + (-3) - 6 = 0$. ■

Ejemplo 1.2. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Cuando $P(x)$ es dividido por $(x - 1)$, el residuo es 3. Cuando $P(x)$ es dividido por $(x - 2)$, el residuo es 5. Determinar el residuo cuando $P(x)$ es dividido por el polinomio $(x^2 - 3x + 2)$.

Solución. Podemos escribir

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + R(x),$$

donde $R(x)$ es el residuo deseado. Ya que $\deg R(x) < \deg(x^2 - 3x + 2) = 2$, existen dos posibles grados para $R(x)$, esto es que sea constante o lineal. Para generalizar tomamos el caso lineal, es decir $R(x) = ax + b$ para constantes a y b.

Por otra parte, notamos que los números 1 y 2 son raíces de $(x^2 - 3x + 2)$, en consecuencia tenemos que $P(x) = (x-2)(x-1)Q(x)+(ax+b)$. Ahora bien, por el teorema del resto, sabemos que $P(1) = 3$ y $P(2) = 5$, esto es

$$P(1) = (1-2)(1-1)Q(1) + (a + b) = 3$$
$$P(2) = (2-2)(2-1)Q(2) + (2a + b) = 5$$

Simplificando, obtenemos el sistema de ecuaciones $a + b = 3 \ \wedge \ 2a + b = 5$ cuya única solución es $(a, b) = (2, 1)$. Finalmente, el residuo deseado es $\boxed{R(x) = 2x + 1}$. ■

Ejemplo 1.3. Encontrar el residuo cuando $x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6$ es dividido por $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Solución. Como el grado del residuo debe ser menor a $\deg(x^3-2x^2-x+2)=3$, hay tres posibles casos; que sea constante, lineal o cuadrático. Para tomar en cuenta todos los casos a la vez, diremos que el residuo tiene la forma $R(x)=ax^2+bx+c$ para constantes a, b y c. Además, notamos que x^3-2x^2-x+2 puede factorizarse fácilmente como $(x-2)(x-1)(x+1)$. Así, podemos escribir la división como

$$x^{100}-4x^{98}+5x+6=(x-2)(x-1)(x+1)Q(x)+(ax^2+bx+c),$$

para algún polinomio $Q(x)$ con grado 97. Por el teorema del resto, vemos que para $x\in\{-1,1,2\}$ se cumple que $\left(x^{100}-4x^{98}+5x+6\right)=R(x)$, i.e.

$$\begin{aligned}(-1)^{100}-4(-1)^{98}+5(-1)+6&=(0)Q(-1)+(a-b+c)\\(1)^{100}-4(1)^{98}+5(1)+6&=(0)Q(1)+(a+b+c)\\(2)^{100}-4(2)^{98}+5(2)+6&=(0)Q(2)+(4a+2a+c).\end{aligned}$$

Al simplificar, obtenemos el sistema $a-b+c=-2 \wedge a+b+c=8 \wedge 4a+2b+c=16$. Cuya única solución resulta ser $(a,b,c)=(1,5,2)$. Finalmente, el residuo deseado es $\boxed{R(x)=x^2+5x+2}$. ■

1.3. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 1.1. Si el polinomio $3x^5+6x^3-3x$ se le divide entre $x+1$ se obtiene como resultado un cociente de grado m, un término independiente b y un resto a. Hallar $m+a+b$.

Problema 1.2. Al dividir x^4-x^2-2x+1 entre x^2+x+1, determine el producto de los términos del cociente.

Problema 1.3. Si $P(x-2)=x^3-10x^2+28x-24$, hallar el resto de dividir $P(x)$ por $x-3$

Problema 1.4. Si el resto de la división de $6x^4-11x^2+ax+b$ entre $3x^2-3x-1$ es $3x+2$. Hallar $a-b$.

Problema 1.5. Para que la división de x^4+ax^2+b entre x^2+x+1 sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Problema 1.6. Si el polinomio $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x+1$ se divide por x^2-x+2 se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es 22 y un resto $R(x)=10x-1$, calcular $b+c$.

Problema 1.7. Al dividir el polinomio $P(x)=55x^3+(166+b)x-x^2-2$ entre $Q(x)=ax^2-39x+2$, el residuo es de la forma $R(x)=mx$. Calcular el valor de $a+b$.

Problema 1.8. ¿Qué valor adquiere $\dfrac{n+19}{k+1}$, si la división $\dfrac{x^{19}-nx+k}{x^2-2x+1}$ es exacta?

Problema 1.9. Calcular el valor de $a+b$ si $1+i$ es raíz del polinomio x^5+ax^3+b.

Problema 1.10. ¿Para qué valores de k se cumple que $x-2$ es factor de $x^3+2kx^2+k^2x+k-3$?

Problema 1.11. Para un polinomio desconocido que deja un resto 2 al dividirlo por $x-1$, y un resto 1 al dividirlo por $x-2$. ¿Cuál es el resto que se obtiene si este polinomio es dividido por $(x-1)(x-2)$?

Problema 1.12. Encontrar el resto cuando $(x+3)^5+(x+2)^8+(5x+9)^{1997}$ es dividido por $x+2$.

Problema 1.13. Encontrar el resto cuando $x^{2006}+x^{2005}+\cdots+x+1$ es dividido por $x+1$.

Problema 1.14. Sea $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$. Encontrar el residuo cuando $F(x^5)$ es dividido por $F(x)$.

Problema 1.15. Determinar todos los enteros positivos n, tales que el polinomio x^n+x-1 sea divisible por el polinomio x^2-x+1.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Problema 2.1. Dado los polinomios $P(x) = 2x^5 + x^4 + ax^2 + bx + c$ y $Q(x) = x^4 - 1$, se sabe que $Q \mid P$. Hallar $\dfrac{a+b}{a-b}$.

Problema 2.2. Dado los polinomios $P(x) = 16x^5 + ax^2 + bx + c$ y $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 1$, se sabe que $Q \mid P$. Hallar $a + b + c$.

Problema 2.3. Dado los polinomios $P(x) = 6x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 10x + a$ y $Q(x) = 3x^2 + 2x + b$, se sabe que $Q \mid P$. Hallar $a^2 + b^2$.

Problema 2.4. El polinomio $P(x)$ deja residuo -2 en la división entre $x - 1$ y residuo -4 en la división entre $x + 2$. Encontrar el residuo cuando el polinomio es dividido por $x^2 + x - 2$.

Problema 2.5. Encontrar el resto cuando el polinomio $x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$ es dividido entre $x^3 - x$.

Problema 2.6. Probar que si un polinomio $F(x)$ deja un residuo de la forma $px + q$ cuando es dividido entre $(x - a)(x - b)(x - c)$ donde a, b y c son todos distintos, entonces

$$(b - c)F(a) + (c - a)F(b) + (a - b)F(c) = 0.$$

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$?

Problema 3.2. Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ y $P(3) = 2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Cristian Castilblanco
Teléfono: +505 8581 1745 *(Tigo)*
Correo: cristian.castilblanco120@gmail.com