Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #4

Encuentro: 4
Curso: Polinomios
Fecha: 15 de abril de 2023

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Fórmulas de Vieta

Cuando se trata con situaciones relacionadas a las raíces de un polimonio es común tratar de pensar en factorizaciones que nos permitan obtener cada una de las raíces del polinomio en cuestión, sin embargo, no siempre se tiene una factorización que haga la obtención de estas raíces en algo sencillo. En esta sesión veremos las Fórmulas de Vieta, una herramienta que nos permiten obtener información acerca de las raíces de un polinomio al observar los coeficientes del mismo.

1. Desarrollo

Definición 1.1 (Fórmulas de Vieta). Sea $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ un polinomio con n raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$, el cual, por el *Teorema del Factor*[1], podemos escribir como

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

Cuando expandimos los n factores lineales del lado derecho de la ecuación, obtenemos

$$a_nx^n - a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x^{n-1} + a_n(r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n r_1r_2\cdots r_n$$

donde el signo del coeficiente x^k está dado por $(-1)^{n-k}$. Al comparar los coeficientes podemos ver que

$$\begin{gathered}
r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-3}}{a_n} \\
\vdots \\
r_1r_2\cdots r_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}
\end{gathered}$$

A estas ecuaciones entre las raíces de un polinomio y sus coeficientes son llamadas las fórmulas de Vieta y puede ayudar a calcular varias expresiones que involucran las raíces de un polinomio sin tener que calcular las propias raíces.

[1] Ver [TD23] página 1.

Para ser más prácticos, en esta primera clase de Vieta solo nos centraremos en la aplicación de las fómulas en polinomios cuadráticos y cúbico.

Si r_1 y r_2 son la raíces de $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, entonces

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2} \qquad r_1r_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

Si r_1, r_2 y r_3 son las raíces de $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, entonces

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} \qquad r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{a_1}{a_3} \qquad r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

Ejemplo 1. Si p y q son raíces de la ecuación $x^2 + 2bx + 2c = 0$, determina el valor de $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$.

Solución. Aplicando las fórmulas de Vieta

$$p + q = -\frac{2b}{1} = -2b$$
$$pq = \frac{2c}{1} = 2c$$

La expresión que nos piden hallar puede ser transformada de la siguente manera

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{p^2 + q^2}{p^2q^2} = \frac{p^2 + 2pq + q^2 - 2pq}{p^2q^2} = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{(pq)^2}$$

Finalmente, al sustituir llegamos a

$$\frac{(p+q)^2 - 2pq}{(pq)^2} = \frac{(-2b)^2 - 2(2c)}{(2c)^2} = \boxed{\frac{b^2 - c}{c^2}}$$

□

Ejemplo 2. Encuentre el valor de $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ si r_1, r_2, r_3 son raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 7^2 + 3x + 1$.

Solución. Por la fórmulas de Vieta sabemos lo siguiente

$$r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{3}{1} = 3$$
$$r_1r_2r_3 = -\frac{1}{1} = -1$$

Ahora, notemos que

$$\frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_2}{r_1r_2r_3} = \frac{r_1r_2}{r_1r_2r_3} + \frac{r_2r_3}{r_1r_2r_3} + \frac{r_3r_1}{r_1r_2r_3} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Luego $\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{3}{-1} = \boxed{-3}$ □

Ejemplo 3 (1986 URSS)**.** Las raíces del polinomio $x^2 + ax + b + 1$ son números naturales. Mostrar que $a^2 + b^2$ no es un primo.

Solución. Para demostrar que $a^2 + b^2$ no es primo, entonces tendremos que demostrar que es igual a producto de dos enteros mayores a 1. Digamos entonces que r_1 y r_2 son las raíces, por las Fórmulas de Vieta

$$r_1 + r_2 = -a$$
$$r_1 r_2 = b + 1$$

Que al elevar al cuadrado y sumar tenemos $a^2+b^2 = (r_1+r_2)^2+(r_1r_2-1)^2$. Así, desarrollando

$$a^2 + b^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 + r_1^2r_2^2 - 2r_1r_2 + 1$$
$$a^2 + b^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_1^2r_2^2 + 1 = \boxed{(r_1^2 + 1)(r_2^2 + 1)}$$

Por dato del problemas sabemos que r_1 y r_2 son naturales así (r_1^2+1) y (r_2^2+1) son mayores a 1. Luego la prueba está hecha. □

Ejemplo 4 (2008 AIME II 7)**.** Sean r, s y t las tres raíces de la ecuación

$$8x^3 + 1001x + 2008 = 0.$$

Encontrar $(r + s)^3 + (s + t)^3 + (t + r)^3$.

Solución. Por las fórmulas de Vieta, sabemos lo siguiente

$$r + s + t = -\frac{0}{8} = 0$$
$$rs + st + tr = \frac{1001}{8}$$
$$rst = -\frac{2008}{8} = -251$$

Por la primera ecuación, podemos ver inmediantamente que $r + s = -t$ y por lo tanto $(r + s)^3 = -t^3$. Análogamente, llegaremos a

$$(r + s)^3 + (s + t)^3 + (t + r)^3 = -(r^3 + s^3 + t^3)$$

El mejor método para resolver este problema es expresar $r^3 + s^3 + t^3$ en termino de $r + s + t$, $rs + st + tr$ y rst. Para lo cual podemos análizar las relaciones entre el cúbo de un trinomio y la suma de tres cubos. De ellas[2] tenemos la siguiente

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

De donde rápidamente vemos que

$$-(r^3 + s^3 + t^3) = -(r + s + t)^3 + 3(r + s)(s + t)(t + r)$$
$$-(r^3 + s^3 + t^3) = -(0)^3 + 3(-t)(-r)(-s)$$
$$-(r^3 + s^3 + t^3) = -3rst = -3(-251) = \boxed{753}$$

□

[2]Se deja como ejercicio al lector la búsqueda de otras identidades similares.

1.1. Agregados culturales y preguntas

a. IMO son las siglas de *International Mathematical Olympiad*. La IMO, básicamente, es la olimpiada mundial más dificil e importante en la que Nicaragua participa.

b. El método de Descenso Infinito de Fermat es una propiedad de los enteros no negativos. El cual dice que no puede existir una secuencia $n_1 > n_2 > \cdots$ con $n_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

c. Existe una técnica llamada **Vieta Jumping** la cual es una combinación de las fórmulas de Vieta y el método de Descenso Infinito de Fermat. Esta técnica es muy útil en problemas nivel IMO.

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1. Sean r_1 y r_2 las raíces del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$. Encontrar los siguientes valores en función del los coeficientes de P.

a. $r_1 - r_2$

b. $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$

c. $r_1^2 + r_2^2$

d. $r_1^3 + r_2^3$

e. $(r_1 + 1)^2 + (r_2 + 1)^2$

Problema 2.1. Sean a y b las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$, encuentra $(a+1)(b+1)$.

Problema 2.2. Dado que m y n son raíces del polinomio $6x^2 - 5x - 3$, encuentra un polinomio cuyas raíces sean $m - n^2$ y $n - m^2$, sin calcular los valores de m y n.

Problema 2.3. ¿Para qué valores reales positivos de m, las raíces x_1 y x_2 de la ecuación

$$x^2 - \left(\frac{2m-1}{2}\right)x + \frac{m^2-3}{2} = 0$$

cumplen que $x_1 = x_2 - \frac{1}{2}$?

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 3.1. Si p y q son las raíces del polinomio $P(x) = 4x^2 + 5x + 3$. Determina $(p+7)(q+7)$, sin calcular los valores de p y q.

Problema 3.2. Supóngase que el polinomio $5x^3+4x^2-8x+6$ tiene tres raíces reales a, b y c. Demostra que

$$(5a)^2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+(5b)^2\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+(5c)^2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=3^3+1.$$

Problema 3.3. Sean r_1, r_2, r_3 las raíces del polinomio $P(x)=x^3-x^2+x-2$. Determina el valor de $r_1^3+r_2^3+r_3^3$, sin calcular los valores de r_1, r_2, r_3.

4. Extra

Problema 4.1. Sean $a, b, c \in R$ tal que los polinomios ax^2+bx+c y cx^2+bx+a tienen dos raíces reales distintas cada uno $(r_1,\ r_2)$ y $(r_3,\ r_4)$ respectivamente. Se sabe que los números r_1, r_2, r_3, r_4 forman, en ese orden, una progresión aritmética. Demostar que $a+c=0$.

Referencias

[Arg15] Argel. Fórmulas de vieta. *OMMBC*, 2015.

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 3. Fórmulas de Vieta I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2022.

[TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 2. Raíces de polinomios I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com