

Notas para la clase

1. Clase 02

Se empieza la clase dando un pequeño resumen de lo visto en la sesión anterior, se hace énfasis en la evaluación de polinomios

$$\begin{aligned} P(\text{expresión}) &\rightarrow \text{expresión. (Expresión algebraica} \equiv \text{polinomio)} \\ P(\text{constante}) &\rightarrow \text{constante. (Constante} \equiv \text{número)} \end{aligned}$$

Se hace mención a evaluaciones notables como $P(0)$ y $P(1)$. Luego, se introduce la definición de raíz de un polinomio (alusión a la **definición 1.1**) y la razón por la que se estudia.

Se muestra el polinomio $M(x) = x^5 - 3x^4 - 29x^3 - 13x^2 + 120x + 140$ y se pide a los estudiante hallar una raíz por tanteo. También, describir el polinomio a manera de ejercicio. El docente podrá hacer las siguientes preguntas ¿qué características tiene M ? ¿es mónico? ¿es completo? ¿es simétrico? ¿está ordenado?. Después que el estudiante intentó encontrar soluciones por su cuenta, anunciar que 7 es una raíz. Y a continuación, comprobar que $x = 7$ es una raíz.

$$\begin{aligned} 1 \times 16807 &= +16807 \\ -3 \times 2401 &= -..7203 \\ -29 \times 343 &= -..9947 \\ -13 \times 49 &= -....637 \\ 120 \times 7 &= +....840 \\ 1 \times 140 &= +....140 \end{aligned}$$

Hacer la siguiente pregunta: ¿es fácil o obvio deducir que $x = 7$ es una raíz?. Introducir la definición de factor (alusión a la **definición 1.2**) y mencionar la factorización. Luego, expresar el polinomio M como el producto del factor $(x - 7)$ con otro polinomio¹:

$$\begin{aligned} &x^5 + 4x^4 - x^3 - 20x^2 - 20x \\ &\quad - 7x^4 - 28x^3 + 7x^2 + 140x + 140 \\ &x^5 - 3x^4 - 29x^3 - 13x^2 + 120x + 140 \\ \Rightarrow M(x) &= (x - 7)(x^4 + 4x^3 - x^2 - 20x - 20) \end{aligned}$$

Dar énfasis en cómo los factores dan información de las raíces de un polinomio y hacer referencia al **Teorema del factor**.

¹Preguntar nuevamente si los polinomios son completos y mostrar la completación de polinomios

Terminar la factorización de M

$$\begin{aligned}
 & x^4 + 4x^3 + 4x^2 \\
 & \quad - 5x^2 - 20x - 20 \\
 & x^4 + 4x^3 - x^2 - 20x - 20 \\
 \Rightarrow M(x) &= (x - 7)(x^2 - 5)(x + 2)^2 \\
 \Rightarrow M(x) &= (x - 7)(x - \sqrt{5})(x + 2)(x + 2)(x + \sqrt{5})
 \end{aligned}$$

Hacer referencia a que la cantidad de raíces de un polinomio está determinado por su grado e indicar las multiplicidades de las raíces del polinomio M .

2. Clase 04

2.1. Solución de la tarea

Problema 2.1. Sea el polinomio P para el cual $P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Encontrar $P(x^2 - 1)$.

Solución 1. La solución de este problema se reduce a encontrar una expresión ' E ' que al remplazarla por x nos de como resultado $x^2 - 1$. Podemos encontrar esta expresión con una simple ecuación:

$$\begin{aligned}
 E^2 + 1 &= x^2 - 1 \\
 E^2 &= x^2 - 2 \\
 E &= \pm\sqrt{x^2 - 2}
 \end{aligned}$$

Es decir que si transformamos x en $\pm\sqrt{x^2 - 2}$ obtendremos lo que nos piden².

Haciendo $x \rightarrow \pm\sqrt{x^2 - 2}$

$$\begin{aligned}
 P\left[\left(\pm\sqrt{x^2 - 2}\right)^2 + 1\right] &= \left(\pm\sqrt{x^2 - 2}\right)^4 + 4\left(\pm\sqrt{x^2 - 2}\right)^2 \\
 P\left(x^2 - 2 + 1\right) &= \left(x^2 - 2\right)^2 + 4\left(x^2 - 2\right) \\
 P\left(x^2 - 1\right) &= x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 8 \\
 P\left(x^2 - 1\right) &= \boxed{x^4 - 4}
 \end{aligned}$$

□

Solución 2. La segunda solución es muy parecida a la primera pero en lugar de encontrar directamente $P(x^2 - 1)$ encontramos $P(x)$ como paso intermedio.

$$\begin{aligned}
 E^2 + 1 &= x \\
 E^2 &= x - 1 \\
 E &= \pm\sqrt{x - 1}
 \end{aligned}$$

²A esta transformación vamos a denotarla por $x \rightarrow \pm\sqrt{x^2 - 2}$

Haciendo $x \rightarrow \pm\sqrt{x-1}$

$$P\left[\left(\pm\sqrt{x-1}\right)^2 + 1\right] = \left(\pm\sqrt{x-1}\right)^4 + 4\left(\pm\sqrt{x-1}\right)^2$$

$$P(x-1+1) = (x-1)^2 + 4(x-1)$$

$$P(x) = x^2 - 2x + 1 + 4x - 4$$

$$P(x) = x^2 + 2x - 3$$

Luego solo evaluamos $P(x^2 - 1)$

$$P(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) - 3$$

$$P(x^2 - 1) = x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 2 - 3$$

$$P(x^2 - 1) = \boxed{x^4 - 4}$$

□

Problema 2.2. Sea $S(x)$ un polinomio cúbico con $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, $S(3) = 3$ y $S(4) = 5$. Encontrar $S(6)$.

Solución 1. Al tomar al polinomio auxiliar R como $R(x) = S(x) - x$. Vemos que $R(1) = 0$, $R(2) = 0$ y $R(3) = 0$. Es decir que 1, 2 y 3 son raíces de R . Luego, por el teorema del factor

$$R(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$$

Donde a es el coeficiente principal de R . Nos piden $S(6)$, lo cual lo podemos encontrar como $S(6) = R(6) + 6$. Pero para obtener $R(6)$ primero debemos saber el valor de a . Valor que podemos encontrar como

$$R(4) = S(4) - 4$$

$$a(4-1)(4-2)(4-3) = 5 - 4$$

$$6a = 1$$

$$a = \frac{1}{6}$$

Finalmente hallamos $S(6)$:

$$S(6) = R(6) + 6$$

$$S(6) = \frac{1}{6}(6-1)(6-2)(6-3) + 6 = \frac{5 \times 4 \times 3}{6} + 6$$

$$S(6) = 10 + 6 = \boxed{16}$$

□

Solución 2. Sabemos que S tiene la forma $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Al utilizar las evaluaciones que nos dan como datos podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones 4×4

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 2 \\ 27a + 9b + 3c + d = 3 \\ 64a + 16b + 4c + d = 5 \end{cases}$$

Al resolver este sistema, por el método que más te guste, veremos que $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{6}, -1, \frac{17}{6}, -1\right)$ es la única solución. Luego, $S(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{17}{6}x - 1$. Finalmente al evaluar $S(6)$, llegamos a

$$\begin{aligned} S(6) &= \frac{1}{6} \times 6^3 - 6^2 + \frac{17}{6} \times 6 - 1 \\ S(6) &= 6^2 - 6^2 + 17 - 1 = \boxed{16} \end{aligned}$$

□

Problema 2.3. Determine un polinomio cúbico P en los reales, con una raíz igual a cero y que satisfice $P(x-1) = P(x) + 25x^2$.

Solución 1. Como P tiene una solución igual a cero, entonces este no tiene término independiente, es decir, tiene la forma $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Al evaluar el polinomio en ciertos valores veremos que

Si $x = 0$:

$$P(-1) = P(0) + 25(0)^2 \longrightarrow \boxed{P(-1) = 0}$$

Si $x = 1$:

$$P(0) = P(1) + 25(1)^2 \longrightarrow \boxed{P(1) = -25}$$

Si $x = -1$:

$$P(-2) = P(-1) + 25(-1)^2 \longrightarrow \boxed{P(-2) = 25}$$

Con estas evaluaciones formaremos el siguiente sistema de ecuaciones 3×3

$$\begin{cases} -a + b - c &= 0 \\ a + b + c &= -25 \\ -8a + 4b - 3c &= 25 \end{cases}$$

Que al resolverlo, con el método que más te guste, vemos que tiene a $(a, b, c) = \left(-\frac{25}{3}, \frac{25}{2}, -\frac{25}{6}\right)$ como única solución. Luego

$$\boxed{P(x) = -\frac{25}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2 - \frac{25}{6}x}$$

es la solución.

□

Solución 2. Esta solución se basa en la comparación de coeficientes del polinomio. Primero caracterizemos a P , como ya sabemos de la solución anterior

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Así $P(x-1)$ es igual a

$$\begin{aligned} P(x-1) &= a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) \\ P(x-1) &= a[x^3 - 3x^2 + 3x - 1] + b[x^2 - 2x + 1] + c(x-1) \\ P(x-1) &= ax^3 - 3ax^2 + 3ax - a + bx^2 - 2bx + b + cx - c \\ P(x-1) &= ax^3 - 3ax^2 + bx^2 + 3ax - 2bx + cx - a + b - c \\ P(x-1) &= ax^3 + (-3a + b)x^2 + (3a - 2b + c)x + (-a + b - c) \end{aligned}$$

Luego

$$ax^3 + (-3a + b)x^2 + (3a - 2b + c)x + (-a + b - c) = ax^3 + bx^2 + cx + 25x^2$$

$$ax^3 + \boxed{(-3a + b)}x^2 + \boxed{(3a - 2b + c)}x + \boxed{(-a + b - c)} = ax^3 + \boxed{(b + 25)}x^2 + \boxed{c}x + \boxed{0}$$

De la comparación de coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones 3×3

$$\begin{cases} -a + b - c = 0 \\ 3a - 2b + c = c \\ -3a + b = b + 25 \end{cases}$$

De donde rápidamente vemos que la única solución es $(a, b, c) = \left(-\frac{25}{3}, \frac{25}{2}, -\frac{25}{6}\right)$. Luego

$$P(x) = -\frac{25}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2 - \frac{25}{6}x$$

□

3. Clase 05

3.1. Solución de la tarea

Problema 3.1. Si p y q son las raíces del polinomio $P(x) = 4x^2 + 5x + 3$. Determina $(p + 7)(q + 7)$, sin calcular los valores de p y q .

Problema 3.2. Supóngase que el polinomio $5x^3 + 4x^2 - 8x + 6$ tiene tres raíces reales a, b y c . Demuestra que

$$(5a)^2 \left(\frac{b}{2}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + (5b)^2 \left(\frac{c}{2}\right) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + (5c)^2 \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = 3^3 + 1.$$

Problema 3.3. Sean r_1, r_2, r_3 las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$. Determina el valor de $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$, sin calcular los valores de r_1, r_2, r_3 .

4. Clase 07

4.1. Solución de la clase práctica

Problema 4.1. Para que la división de $6x^4 - 11x^2 + ax + b$ entre $3x^2 - 3x - 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Solución. La solución de este problema es complicada hacerla en latex, por eso no la hago. Pero la respuesta es $a = 1$ y $b = 1$. □

Problema 4.2. Calcular la suma de coeficientes del resto que deja $x^{3333} - 9$ entre $x^2 - 729$.

Solución. Podemos expresar el problema de la siguiente manera

$$x^{3333} - 3^2 = (x - 3^3)(x + 3^3)Q(x) + ax + b$$

Por el teorema del resto $P(3^3) = 3^3a + b$ y $P(-3^3) = -3^3a + b$, con lo cual podemos sacar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3^{9999} - 3^2 &= 3^3a + b \\ -3^{9999} - 3^2 &= -3^3a + b \end{cases}$$

De donde obtenemos las soluciones $(a, b) = (3^{9996}, -3^2)$. Luego, la suma que nos piden es

$$a + b = 3^{9996} - 3^2 = \boxed{3^2(3^{9994} - 1)}$$

□

Problema 4.3. Sea r una raíz de $x^2 - x + 7$. Hallar el valor de $r^3 + 6r + \pi$.

Solución. Por definición $r^2 - r + 7 = 0$. Con esta ecuación podemos obtener que $r^2 + 6 = r - 1$ y $r^2 - 4 = -7$. Luego, transformando la expresión y evaluando llegamos a

$$\begin{aligned} r^3 + 6r + \pi \\ r(r^2 + 6) + \pi \\ r(r - 1) + \pi \\ r^2 - 4 + \pi &= \boxed{-7 + \pi} \end{aligned}$$

□

Problema 4.4. Sean a , b y c las raíces reales de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. Probar que $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$.

Solución. Sabemos que $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$. Cuando hacemos $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$ y $z = \sqrt[3]{c}$, tenemos que

$$\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)^3 = a + b + c + 3\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca}\right) - 3\sqrt[3]{abc}$$

Digamos que $\alpha = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$, también, por Vieta sabemos que $a + b + c = -3$ y $abc = -1$. Al agrupar α y sustituir

$$\begin{aligned} \alpha^3 - 3\alpha\left(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca}\right) &= a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \\ \alpha\left[\alpha^2 - 3\left(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca}\right)\right] &= -3 - 3\sqrt[3]{-1} \\ \alpha\left[\alpha^2 - 3\left(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca}\right)\right] &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación nos permite ver que si queremos probar que $\alpha = 0$, entonces tenemos que probar

$$\alpha^2 - 3\left(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca}\right) \neq 0.$$

Por Vieta tenemos que $ab = -\frac{1}{c}$, $bc = -\frac{1}{a}$ y $ca = -\frac{1}{b}$, entonces si

$$\begin{aligned}\alpha^2 - 3 \left(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} \right) &= 0 \\ \alpha^2 &= 3 \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{b}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{c}} \right) \\ \alpha^2 &= -3 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}} + \sqrt[3]{\frac{1}{c}} \right) \\ \alpha &= \pm \sqrt{-3 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}} + \sqrt[3]{\frac{1}{c}} \right)}\end{aligned}$$

Lo cual no puede ser, ya que las raíces son reales. Luego, $\alpha = \boxed{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0}$. \square

Problema 4.5. Sean r_1 , r_2 y r_3 raíces distintas del polinomio $y^3 - 22y^2 + 80y - 67$. De tal manera que existen números reales α , β y θ tal que

$$\frac{1}{y^3 - 22y^2 + 80y - 67} = \frac{\alpha}{y - r_1} + \frac{\beta}{y - r_2} + \frac{\theta}{y - r_3}$$

$\forall y \notin \{r_1, r_2, r_3\}$. ¿Cuál es valor de $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta}$?

Solución. Por el teorema del factor, sabemos que $y^3 - 22y^2 + 80y - 67 = (y - r_1)(y - r_2)(y - r_3)$, por lo tanto

$$\frac{1}{(y - r_1)(y - r_2)(y - r_3)} = \frac{\alpha}{y - r_1} + \frac{\beta}{y - r_2} + \frac{\theta}{y - r_3}$$

Al multiplicar esta ecuación por $(y - r_1)(y - r_2)(y - r_3)$, obtenemos una ecuación donde $y \in \{r_1, r_2, r_3\}$

$$1 = \alpha(y - r_2)(y - r_3) + \beta(y - r_1)(y - r_3) + \theta(y - r_1)(y - r_2)$$

Si $y = r_1$, entonces

$$\begin{aligned}1 &= \alpha(r_1 - r_2)(r_1 - r_3) + 0 + 0 \\ 1 &= \alpha(r_1^2 - r_1r_2 - r_1r_3 + r_2r_3) \\ \frac{1}{\alpha} &= r_1^2 - r_1r_2 - r_1r_3 + r_2r_3\end{aligned}$$

Análogamente, con $y = r_2$ y $y = r_3$ obtenemos $\frac{1}{\beta} = r_2^2 - r_1r_2 - r_2r_3 + r_3r_1$ y $\frac{1}{\theta} = r_3^2 - r_2r_3 - r_3r_1 + r_1r_2$ respectivamente. Sumando estos resultado llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta} &= (r_1^2 - r_1r_2 - r_1r_3 + r_2r_3) + (r_2^2 - r_1r_2 - r_2r_3 + r_3r_1) + (r_3^2 - r_2r_3 - r_3r_1 + r_1r_2) \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta} &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) \\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta} &= (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 3(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)\end{aligned}$$

Luego, por Vieta es fácil ver que $r_1 + r_2 + r_3 = 22$ y $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = 80$. Finalmente

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta} = (22)^2 - 3(80) = 484 - 240 = \boxed{244}$$

□

Problema 4.6. La ecuación $2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1$ tiene tres raíces reales. Dado que su suma es $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $\text{mcd}(m, n) = 1$. Calcular $m + n$.

Solución. Si hacemos el cambio de variable $y = (2^x)^{111}$, vemos que la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} 2^{333x} \cdot 2^{-2} + 2^{111x} \cdot 2^2 &= 2^{222x} \cdot 2^1 + 1 \\ y^3 \cdot 2^{-2} + y \cdot 2^2 &= y^2 \cdot 2 + 1 \\ \frac{1}{4}y^3 - 2y^2 + 4y - 1 &= 0 \\ y^3 - 8y^2 + 16y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Esta nueva ecuación tendrá raíces a , b y c de la forma $a = (2^{r_1})^{111}$, $b = (2^{r_2})^{111}$ y $c = (2^{r_3})^{111}$. Donde r_1 , r_2 y r_3 son la raíces de la ecuación original. Luego, si nos fijamos cuidadosamente, por Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} abc &= 4 \\ (2^{111r_1})(2^{111r_2})(2^{111r_3}) &= 2^2 \\ 2^{111(r_1+r_2+r_3)} &= 2^2 \\ \rightarrow 111(r_1 + r_2 + r_3) &= 2 \\ \rightarrow r_1 + r_2 + r_3 &= \frac{2}{111} \end{aligned}$$

Como 2 y 111 son coprimos o $\text{mcd}(2, 111) = 1$, entonces $m + n = 2 + 111 = \boxed{113}$ □

Problema 4.7. Si $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio tal que $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ y $P(3) = 30$, determine el valor de

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10}.$$

Probablemente al idea más elemental para atacar este problema es formar un sistema de ecuaciones, pero nos toparemos que dicho sistema tendrá 4 variable y 3 ecuaciones, lo cual no puede resolverse. Sin embargo ya conocemos el teorema del factor y veremos que este problema se vuelve sencillo.

Solución. Veamos que para el polinomio auxiliar $A(x) = P(x) - 10x$, los valores de 1, 2 y 3 son raíces. Como $P(x)$ es de grado 4 y mónico, entonces A también será de grado 4 y mónico³, es decir A tiene 4 raíces. Luego, por el teorema del factor sabemos que

$$A(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - r)$$

³Hay que tener cuidado con este argumento, ya que puede darse el caso en el que un polinomio auxiliar no sea del mismo grado que el polinomio original.

Donde r es la raíz que falta. Vemos que

$$\begin{aligned}
P(12) &= A(12) + 10 \times 12 \\
P(12) &= (12 - 1)(12 - 2)(12 - 3)(12 - r) + 120 \\
P(12) &= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot (12 - r) + 120 \\
P(12) &= 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 - \boxed{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot r} + 120
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
P(-8) &= A(-8) + 10 \times -8 \\
P(-8) &= (-8 - 1)(-8 - 2)(-8 - 3)(-8 - r) - 80 \\
P(-8) &= -9 \cdot -10 \cdot -11 \cdot (-8 - r) - 80 \\
P(-8) &= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + \boxed{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot r} - 80
\end{aligned}$$

De esta manera, la expresión que nos piden evaluar se transforma en

$$\begin{aligned}
&\frac{P(12) + P(-8)}{10} \\
&\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 - \boxed{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot r} + 120 + \boxed{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot r} - 80}{10} \\
&\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 + 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + 120 - 80}{10} \\
&\frac{10(12 \cdot 11 \cdot 9 + 11 \cdot 9 \cdot 8) + 40}{10} \\
&12 \cdot 11 \cdot 9 + 11 \cdot 9 \cdot 8 + 4 \\
&99 \cdot 20 + 4 = 1980 + 4 = \boxed{202}
\end{aligned}$$

□

Problema 4.8. Sea $F(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a, b, c y d tal que $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$, entonces no existe un entero k tal que $F(k) = 8$.

Solución. De la misma manera que en el problema anterior, definamos al polinomio auxiliar $A(x) = F(x) - 5$, los valores de a, b, c y d son raíces de A . Como $F(x)$ es de grado n y mónico, entonces A también será de grado n y mónico, es decir

$$A(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)G(x)$$

Donde G es un polinomio de grado $n - 4$. Digamos que existe un entero r tal que $F(r) = 8$, entonces $A(r) = F(r) - 5 = 8 - 5 = 3$.

$$(r - a)(r - b)(r - c)(r - d)G(r) = 3$$

Del lado izquierdo tenemos 4 enteros distintos los cuales deben de ser divisores de 3. Los posibles factores de 3 son $-1, 1, -3, 3$, pero resulta que 3 solo puede ser expresado como $-1 \times 1 \times -3$. Luego, r no puede existir. □

Problema 4.9. Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$. ¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{20}(x)$?

Solución. Veamos que pasa con $P_1(x)$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_{1-1}(x - 1) \\ P_1(x) &= P_0(x - 1) \\ P_1(x) &= (x - 1)^3 + 313(x - 1)^2 - 77(x - 1) - 8 \end{aligned}$$

Bien, ahora veamos que pasa con $P_2(x)$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_{2-1}(x - 2) \\ P_2(x) &= P_1(x - 2) \\ P_2(x) &= [(x - 2) - 1]^3 + 313[(x - 2) - 1]^2 - 77[(x - 2) - 1] - 8 \\ P_2(x) &= [x - (1 + 2)]^3 + 313[x - (1 + 2)]^2 - 77[x - (1 + 2)] - 8 \end{aligned}$$

Rápidamente, nos damos cuenta del patron que se forma con los números que se restan a x

$$\begin{aligned} P_3(x) &= [x - (1 + 2 + 3)]^3 + 313[x - (1 + 2 + 3)]^2 - 77[x - (1 + 2 + 3)] - 8 \\ P_4(x) &= [x - (1 + 2 + 3 + 4)]^3 + 313[x - (1 + 2 + 3 + 4)]^2 - 77[x - (1 + 2 + 3 + 4)] - 8 \\ P_5(x) &= [x - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)]^3 + 313[x - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)]^2 - 77[x - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)] - 8 \\ &\vdots \\ P_{20}(x) &= [x - (1 + \cdots + 20)]^3 + 313[x - (1 + \cdots + 20)]^2 - 77[x - (1 + \cdots + 20)] - 8 \end{aligned}$$

Por la fórmulas de Gauss sabemos que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} P_{20}(x) &= \left(x - \frac{20 \cdot 21}{2}\right)^3 + 313 \left(x - \frac{20 \cdot 21}{2}\right)^2 - 77 \left(x - \frac{20 \cdot 21}{2}\right) - 8 \\ &\boxed{P_{20}(x) = (x - 210)^3 + 313(x - 210)^2 - 77(x - 210) - 8} \end{aligned}$$

En el desarrollo de $(x + a)^3$ el coeficiente de x es $3a^2$, en el de $(x + a)^2$ el coeficiente de x es $2a$. Por lo tanto, el coeficiente que buscamos es

$$\begin{aligned} &3(-210)^2 + 313 \cdot 2(-210) - 77 \\ &(-210) [3(-210) + 313 \cdot 2] - 77 \\ &(-210) [-630 + 626] - 77 \\ &(-210) [-4] - 77 \\ &840 - 77 \\ &\boxed{763} \end{aligned}$$

□