Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #2

Encuentro: 1
Curso: Polinomios
Fecha: 6 de abril de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Cristian Castilblanco

Contenido: Introducción a los Polinomios

En esta primera sesión veremos las cuestiones más importantes sobre los polinomios. Con el fin de fijar las bases necesarias para el resto del curso. Abordaremos definiciones, propiedades y características particulares sobre estas expresiones.

1. Desarrollo

1.1. Definiciones

Un ***polinomio*** en x es una expresión de la forma

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde d es un entero mayor o igual que cero. Los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_d$ son llamados los ***coeficientes*** de $P(x)$, y estos pueden ser enteros, racionales, reales o complejos. Por la definición, se sigue que dos polinomios

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{y} \quad Q(x) = b_e x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

son iguales si y solo si $a_i = b_i$ para todo i (si $d > e$, entonces $b_{e+1} = \ldots = b_d = 0$).

Definimos el ***grado*** del polinomio $P(x)$ como el mayor entero i tal que $a_i \neq 0$ y denotamos el grado por $\deg P(x)$. Si i es el mayor entero i tal que $a_i \neq 0$, decimos que a_i es el ***coeficiente principal*** de $P(x)$. Si el coeficiente principal es igual a 1, decimos que el polinomio es ***mónico***.

Observemos que el grado de un polinomio constante $P(x) = a_0 \neq 0$ es cero. No damos ningún grado al ***polinomio cero*** $P(x) \equiv 0$ (i.e.el polinomio cuyos coeficientes son todos ceros).

Podemos realizar algunas operaciones sobre polinomios. Por ejemplo, si $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ son dos polinomios y $m \geq n$, entonces la suma y el producto de $P(x)$ y $Q(x)$ es definida por

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) =& (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots \\ &+ (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_m x^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) =& a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots \\ &+ (a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \cdots + a_{r-1} b_1 + a_r b_0)x^r + \cdots + (a_n b_m)x^{m+n} \end{aligned}$$

respectivamente. Al analizar el grado del resultado de estas operaciones, vemos que se describen por el siguiente teorema.

Teorema 1.1.

Sea $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios y sea k un entero positivo. Entonces,

1. $\deg[P(x)Q(x)] = \deg P(x) + \deg Q(x)$
2. $\deg[P(x)+Q(x)] \leq \text{máx}(\deg P(x), \deg Q(x))$
3. $\deg[P(x)^k] = k \cdot \deg P(x)$.

También, se dan nombres especiales a polinomios con grados bajos.

Grado	Nombre	Forma
1	Lineal	$P(x) = a_1x + a_0$
2	Cuadrático	$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
3	Cúbico	$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
4	Cuártico	$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Cuadro 1: Nombre de polinomios comunes.

Los polinomios de grado dos y tres son de especial interés, debido a que estos aparecen en gran cantidad de problemas. Más adelante veremos propiedades importantes así como problemas que involucran estos polinomios.

Ejemplo 1.1. Sean $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7$ y $Q(x) = -2x^2 + x - 10$ dos polinomios. Desarrolle las siguientes operaciones,

A) $P(x)+Q(x)$ B) $P(x)Q(x)$ C) $Q(x)-P(x)$ D) $11P(x)-xQ(x)$

Solución. Veamos la solución de cada inciso.

A) Sustituyendo los polinomios $P(x)+Q(x) = (x^3-5x^2+7)+(-2x^2+x-10)$, tenemos

$$\begin{aligned} P(x)+Q(x) &= (x^3+0x^3)+(-5x^2-2x^2)+(0x+x)+(7-10) \\ &= (x^3)+(-7x^2)+(x)+(-3) = \boxed{x^3-7x^2+x-3}. \end{aligned}$$

B) Sustituyendo los polinomios $P(x)Q(x) = (x^3-5x^2+7)(-2x^2+x-10)$, tenemos

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (x^3)(-2x^2+x-10)+(-5x^2)(-2x^2+x-10)+(7)(-2x^2+x-10) \\ &= (-2x^5+x^4-10x^3)+(10x^4-5x^3+50x^2)+(-14x^2+7x-70) \\ &= -2x^5+(x^4+10x^4)+(-10x^3-5x^3)+(50x^2-14x^2)+7x-70 \\ &= \boxed{-2x^5+11x^4-15x^3+36x^2+7x-70}. \end{aligned}$$

C) Sustituyendo los polinomios $Q(x)-P(x) = (-2x^2+x-10)-(x^3-5x^2+7)$, tenemos

$$\begin{aligned} Q(x)-P(x) &= (0x^3-x^3)+(-2x^2+5x^2)+(x-0x)+(-10-7) \\ &= (-x^3)+(3x^2)+(x)+(-17) = \boxed{-x^3+3x^2+x-17}. \end{aligned}$$

D) Sustituyendo los polinomios $11P(x)-xQ(x)=11(x^3-5x^2+7)-x(-2x^2+x-10)$, tenemos

$$\begin{aligned} P(x)+Q(x) &= (11x^3-55x^2+77)-(-2x^3+x^2-10x) \\ &= (11x^3+2x^3)+(-55x^2-x^2)+(0x+10x)+(77-0) \\ &= (13x^3)+(-56x^2)+(10x)+(77)=\boxed{13x^3-56x^2+10x+77}. \end{aligned}$$ ■

Veamos otra operación, si tenemos dos polinomios $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ y $Q(x)=b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0$ y sustituimos cada x de $P(x)$ por el polinomio $Q(x)$ obtenemos la expresión $P(Q(x))=(P\circ Q)(x)$. Decimos que es una ***composición*** de $P(x)$ con $Q(x)$. Por ejemplo, si tenemos $P(x)=x^2-x+5$ y $Q(x)=7-3x$ vemos que $(P\circ Q)(x)=(7-3x)^2-(7-3x)+5=(49-42x+9x^2)-7+3x+5=9x^2-39x+47$.

La composición de polinomios es asociativa, esto es $(P\circ Q)\circ R=P\circ(Q\circ R)$, mas no conmutativa (salvo casos especiales) así que generalmente supondremos que $P\circ Q\neq Q\circ P$.

Observación 1.

Notemos que $P(x)^n\neq P^n(x)$. Entendemos a $P(x)^n$ como $P(x)$ elevado a la n-ésima potencia, en cambio $P^n(x)$ es la composición n-ésima de $P(x)$ consigo mismo, es decir

$$P^n(x)=\underbrace{P(P(P\ldots P(P}_{n \text{ veces } P}(x))\ldots)).$$

Como hemos visto, cualquier polinomio $P(x)$ de grado no negativo tiene una representación *genérica* como la siguiente

$$P(x)=a_dx^d+a_{d-1}x^{d-1}+\ldots+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{d}a_ix^i,$$

donde $a_d,a_{d-1},\ldots,a_1,a_0$ son números complejos. El término a_dx^d es llamado el ***término principal*** y a_0 es llamado el ***término constante***. El valor del polinomio en $x=c$, el cual denotamos por $P(c)$, es

$$P(c)=a_dc^d+a_{d-1}c^{d-1}+\ldots+a_1c+a_0.$$

De especial interés son los casos de $P(0)$, $P(1)$ y $P(-1)$. Estos son, $P(0)=a_0$, el cual es el término constante,

$$P(1)=a_d+a_{d-1}+\ldots+a_0,$$

que es llamado la ***suma de coeficientes*** y $P(-1)=a_0-a_1+\ldots+(-1)^da_d$.

Otras cuestiones sobre polinomios son los siguientes.

1. **Completo**: Un polinomio completo cumple que $a_i\neq 0$ para todo entero i.

2. **Ordenado**: Un polinomio que sus términos están escritos de manera decreciente (o creciente) respecto al exponente de x.

3. **Multivariable**: Un polinomio que está en términos de más de una variable, por ejemplo el polinomio $P(x,y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

4. **Homogéneo**: Un polinomio multivariable cuyos términos tienen el mismo ***grado absoluto***, por ejemplo el polinomio $Q(m,n,p)=2mp^5-3m^3n^2p+n^6$.

1.2. Ejemplos

Ejemplo 1.2. Sabiendo que $P(x+1) = x+3$, hallar $P(x)$.

Solución. **1ra forma.** Escribiendo $(x+3)$ en función de x, esto es $P(x+1) = x+1+2$. Luego, donde aparezca $(x+1)$ se colocará x, es decir $P(x) = x+2$.

2da forma. Haciendo un cambio de variable $y = x+1 \implies x = y-1$. Escribiendo la expresión original en términos de y: $P(y) = y-1+3 \implies P(y) = y+2$. Una vez reducida, se hace $y = x$ y por lo tanto $P(x) = x+2$. ■

Ejemplo 1.3. Sabiendo que los polinomios $P(x)$ y $F(x)$ cumplen $P(x-3) = 5x-7$ y $P[F(x)+2] = 10x-17$, hallar $F(x-2)$.

Solución. En el primer polinomio en lugar de x ponemos $F(x)+5$:

$$\begin{aligned} P(F(x)+5-3) =& 5(F(x)+5)-7 \\ P(F(x)+2) =& 5F(x)+18 \\ 10x-17 =& 5F(x)+18 \end{aligned}$$

Despejando tenemos $F(x) = 2x-7$. Así $F(x-2)$ será $F(x-2) = 2(x-2)-7 = \boxed{2x-11}$. ■

Ejemplo 1.4. Si $P(x) = ax^2+b$ y $P^2(x) = 8x^4+24x^2+c$, hallar el valor de $a+b+c$.

Solución. Evaluamos $P^2(x) = P(P(x))$,

$$\begin{aligned} P(P(x)) =& a(ax^2+b)^2+b \\ 8x^4+24x^2+c =& a(a^2x^4+2abx^2+b^2)+b \\ 8x^4+24x^2+c =& a^3x^4+2a^2bx^2+ab^2+b \end{aligned}$$

Ya que los polinomios son iguales, por simple inspección vemos que $a^3 = 8$, $2a^2b = 24$ y $ab^2+b = c$. Una vez resuelto este sistema de ecuaciones, tenemos que $a = 2$, $b = 3$ y $c = 21$, luego el resultado deseado es $a+b+c = 26$. ■

Ejemplo 1.5. El polinomio $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ es tal que, $P(0) = 0$, $P(-1) = 6$ y $P(x) = P(1-x)$. Hallar el valor de $(2c-b)$

A) $2a$ B) $(3-a)$ C) 4 D) 5 E) 6

Solución. Como $P(0) = 0 \implies e = 0$. Además $P(x) = P(1-x)$, implica que $P(0) = P(1) = 0$, esto es

$$\implies a+b+c+d = 0. \tag{1}$$

También $P(-1) = 6$, por lo que

$$\implies a-b+c-d = 6 \tag{2}$$

Y por último $P(-1) = P(2) = 6$, es decir $16a+8b+4c+2d = 6$

$$\implies 8a+4b+2c+d = 3 \tag{3}$$

Por lo que hemos obtenido un sistema de ecuaciones. Sumando $(1)+(2)$ obtenemos $a+c = 3 \implies a = 3-c$. Restando $(1)-(2)$ obtenemos $b+d = 3 \implies d = 3-b$. Sustituyendo esto dos resultados en (3)

$$8(3-c)+4b+2c+(3-b) = 3 \implies -6c+3b = -18 \implies \boxed{2c-b=6}.$$ ■

1.3. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios.

1. $U(x,y) = 2x^2y^5 - 4xy^7 + 6$
2. $T(m,n) = 5m - \sqrt{m+4}$
3. $Q(x,y) = x^6 - y^6 + \sqrt{z}$
4. $N(a,b) = a^2 - 2\frac{a}{b} + \frac{1}{b^2}$
5. $S(y) = \frac{x^3-7}{x+6}$
6. $R(a) = \sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}$

A) T, N y R B) Solo U C) Q y U
D) N, S y U E) N, Q y S F) Ninguno

Ejercicio 1.2. Señalar las proposiciones falsas:

I. Al sumar dos polinomios, de grado cuatro con uno de grado seis, entonces el grado del polinomio resultante es seis.

II. Al restar dos polinomios del mismo grado, el resultado siempre será de un grado menor.

III. Si el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$, el que tiene más términos es $P(x)$.

A) I y II B) II solamente
C) I solamente D) II y III
E) Ninguna

Ejercicio 1.3. Calcular la suma de coeficientes de $P(x) = (x-1)^{20} + (x-2)^7 + x^3 + 5$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

Ejercicio 1.4. Hallar el término independiente del polinomio de grado siete

$$P(x) = x^{n+2} + x^{m-1} + \ldots + mx + (m+n)$$

que es completo y ordenado.

A) 16 B) 12 C) 8 D) 10 E) 6

Ejercicio 1.5. Si $P(x) = (x+2)^5 + (x-3)^3 - (x+2)(x-3)$, el término independiente es:

A) 15 B) 13 C) 11 D) 10 E) 9

Ejercicio 1.6. Si el polinomio ordenado decreciente y completo

$$P(x) = x^{2a+1} + 2x^{b+3} + 3x^{c+2} + \ldots$$

posee $2c$ términos, hallar $a+b+c$.

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

Ejercicio 1.7. Dado el siguiente polinomio cero, $P(x,y) = (10-m)x^2y + nxy^2 + 5x^2y - 2xy^2$. Hallar m^n.

A) 15 B) 30 C) 125 D) 225 E) N.A

Ejercicio 1.8. Multiplica y simplifica

$$(2x^2 - x - 3)(1 + 2x - x^2).$$

Escribir la respuesta en potencias ascendentes de x.

Ejercicio 1.9. Encontrar el coeficiente de x^3 en la expansión de

$$(2x^3 - 5x^2 + 2x - 1)(3x^3 + 2x^2 - 9x + 7).$$

Ejercicio 1.10. Multiplica y simplifica

$$(1+x)(1+x^2)(1-x+x^2).$$

Escribir la respuesta en potencias ascendentes de x.

Ejercicio 1.11. Nos dan el polinomio

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + c,$$

donde c es un número distinto de cero. Se da además que $f(-3) = 0$, hallar c.

Ejercicio 1.12. Hallar el valor de cada una de las constantes a, b, c tal que

$$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$

Ejercicio 1.13. Un polinomio $f(x)$ es definido en término de las constantes a, b, c como

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Además $f(2) = f(-1) = 0$ y $f(1) = -14$. Hallar el valor de $a + bc$

Ejercicio 1.14. Si los polinomios $P(x) = k + nx + x^3 + (m+n)x^2 + mx^3$ y $Q(x) = 3 + ax$ son iguales, hallar el valor de $Q^3(3)$.

A) 5 B) 6 C) 8 D) 1 E) 0

Ejercicio 1.15. Sean los polinomios $P(t) = 3t - 4$ y $Q(t) = 2t^2 - 5t + 8$. Encontrar las siguientes operaciones

A) $P(t) + Q(t)$ B) $7P(t) - 6Q(t)$
C) $P(t)Q(t)$ D) $(P \circ Q)(t)$
E) $(Q \circ P)(t)$

Ejercicio 1.16. Sea $Q(x) = \frac{1}{5}x - 2$ y $P(x) = Q^4(x)$, probar que $P(1560) = 0$.

Ejercicio 1.17. Sabiendo que $P(x^x + 2n + 1) = 6x^x + 12n$ y $P(F(x)) = 24x + 12$, hallar la expresión de $F(n-1)$.

A) $2n$ B) $2n - 2$ C) $4n - 1$
D) $4(n - \frac{1}{4})$ E) $4n$

Ejercicio 1.18. Dado que $P(x^3 + x^2) = x^5 + x$, hallar el valor de $P(1)$.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Problema 1.1. Sea $P(x)$ un polinomio mónico de grado tres, donde su término constante es 5 y se cumple que $P(x+1) = P(x) + nx + 2$. Hallar la suma de los coeficientes del término cuadrático y el término lineal.

Problema 1.2. Hallar un polinomio cuadrático cuyo coeficiente de x y término independiente son iguales, además cumple que $P(1) = 7$ y $P(2) = 18$.

Problema 1.3. Hallar el valor de $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$ si se cumple que

$$50x^3 + 5x^2 - 8x + 1 = \alpha_1(\alpha_3 x + 1)^{\alpha_1}(\alpha_2 x - \alpha_1)^{\alpha_3}.$$

Problema 1.4. Calcular la suma de los coeficientes de siguiente polinomio completo

$$P(x) = c(x^a + x^b) + a(x^b + x^c) + b(x^a + x^c) + abc.$$

Problema 1.5. Si $P(x) = x^2 + xy + xz + yz$, hallar el valor de $E = \sqrt{P(y)P(z)P(0)}$.

Problema 1.6. Sabiendo que $P(x) = ax + b$ y $P^3(x) = 8x + 154$, determinar el valor de $P^2(3)$.

Problema 1.7. Dado que

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x + 3 \\ Q[F(x) + G(x)] &= 4x + 3 \\ Q[F(x) - G(x)] &= 7 \end{aligned}$$

Calcular $F(G(F(G(\ldots F(G(1))\ldots))))$.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Problema 2.1. Sea $P(x)$ un polinomio tal que

$$\begin{aligned} x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} \\ = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9)P(x) \end{aligned}$$

para todo x, hallar la suma de coeficientes de P.

Problema 2.2. Dada la relación

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 2F(x)}$$

para todo x real, tal que $F(x) \geq 2$. Hallar el valor de

$$2024 - F\left(\sqrt{2021^2 - 1}\right).$$

Problema 2.3. Sabiendo que $P(x^2-2x+1) = x^2-3$, determine $P((x-2)^2)$.

Problema 2.4. Sea $P(x) = x^2$, encontrar $Q(x)$ si $(P \circ Q)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Hallar el valor de $(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2017})^2 - (a_0 + a_2 + \cdots + a_{2016})^2$. Sabiendo que

$$\left(\sqrt{2017}x - \sqrt{2027}\right)^{2017} = a_{2017}x^{2017} + a_{2016}x^{2016} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Problema 3.2. Sea $R(n)$ una relación con respecto a n, donde $n \geq 0$ es un entero. Sabemos que

$$R(0) = 1 \quad \text{y} \quad R(n+1) = xR(n) + 1$$

Exprese $(x-1)R(n)$ como un polinomio en x con coeficientes enteros y además calcule $R(2024)$.

Referencias

[Bar89] Edward Barbeau. *Polynomials*. Springer, 1989.

[CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 1. Polinomios cuadráticos y cúbicos. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2022.

[TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 1. Polinomios cuadráticos y cúbicos. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2023.

[TR98] Armando Tori and Juan Ramos. *Problemas de Álgebra y cómo resolverlos*. RASCO Editores, 1998.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Cristian Castilblanco
Teléfono: +505 8581 1745 *(Tigo)*
Correo: cristian.castilblanco120@gmail.com