Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #x

Encuentro: x
Curso: Polinomios
Fecha: x de x de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Fórmulas de Vieta II y Polinomios simétricos

En esta novena clase veremos los llamados polinomios simétricos, un tipo particular de polinomios multivariables que de manera intrínseca ya hemos visto. Luego, nos centraremos en los polinomios simétricos elementales y sus relaciones con la fórmulas de Vieta.

1. Desarrollo

1.1. Polinomios simétricos elementales

Diremos que un polinomio de dos variables $P(x,y)$ es simétrico si cumple $P(x,y)=P(y,x)$, e.g. $P(x,y)=7x^2-5xy+7y^2$ es simétrico, ya que este es igual a $P(y,x)=7y^2-5yx+7x^2$. Análogamente, un polinomio de tres variables $P(x,y,z)$ es simétrico si cumple $P(x,y,z)=P(x,z,y)=P(y,x,z)=P(y,z,x)=P(z,x,y)=P(z,y,x)$.

Por ejemplo, el polinomio $P(x,y,z)=13x^5+13y^5+13z^5-8xyz+1$ es simétrico, ya que

$$\begin{aligned} P(x,y,z)&=13x^5+13y^5+13z^5-8xyz+1 & P(x,z,y)&=13x^5+13z^5+13y^5-8xzy+1\\ P(y,x,z)&=13y^5+13x^5+13z^5-8yxz+1 & P(y,z,x)&=13y^5+13z^5+13x^5-8yzx+1\\ P(z,x,y)&=13z^5+13x^5+13y^5-8zxy+1 & P(z,y,x)&=13z^5+13y^5+13x^5-8zyx+1 \end{aligned}$$

son todos el mismo polinomio. De manera general, un polinomio $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ de n variables es simétrico si para cualquier permutación de las n variables se obtiene el mismo resultado, i.e.

$$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(x_1,x_3,\cdots,x_n)=\cdots=P(x_1',x_2',\cdots,x_n'),$$

donde $x_1',x_2',\cdots,x_n'$ representa una permutación de las variables $x_1,x_2,\cdots,x_n$. Los polinomios simétricos más simples son aquellos donde todas sus variables tienen grado 1, como por ejemplo $x+y$, xy, $x+y+z$, etc. Estos polinomio son llamados ***polinomios simétricos elementales*** y podemos formalizarlo como se sigue.

Definición 1.1 (Polinomio simétrico elemental)**.** Sea $n>0$ un entero y un entero k con $1\leq k\leq n$. Diremos que el k-ésimo polinomio simétrico elemental en las variables $x_1,\cdots,x_n$ es el polinomio

$$\sigma_k=\sigma_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k},$$

cuya la suma se realiza sobre los subconjuntos $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ de k elementos del conjunto $\{1,2,\cdots,n\}$.

Donde el polinomio σ_k lo leeremos como ***sigma k*** o ***sigma sub k***. Ahora, para aclarar esta definición, veamos algunos ejemplos.

Variables	Polinomios simétricos elementales
a, b	$\sigma_1 = a+b$ $\sigma_2 = ab$
a, b, c	$\sigma_1 = a+b+c$ $\sigma_2 = ab+bc+ca$ $\sigma_3 = abc$
a, b, c, d	$\sigma_1 = a+b+c+d$ $\sigma_2 = ab+ac+ad+bc+bd+da$ $\sigma_3 = abc+bcd+cda$ $\sigma_4 = abcd$
a, b, c, d, e	$\sigma_1 = a+b+c+d+e$ $\sigma_2 = ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cb+ce+de$ $\sigma_3 = abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+ced$ $\sigma_4 = abcd+abce+abde+acde+bced$ $\sigma_5 = abcde$

Cuadro 1: Ejemplos de polinomios simétricos elementales.

Otra notación útil para polinomios simétricos, es la siguiente.

Definición 1.2 (Suma simétrica de potencias)**.** La suma simétrica de la k-ésimas potencias en las variables $x_1, \cdots, x_n$ es el polinomio s_k definido por

$$s_k = s_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

Existen relaciones entre las sumas simétricas de potencias y los polinomios simétricos elementales. Por ejemplo $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ para cualquier cantidad de variables, $s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}$ para dos variables y $s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}$ para tres variables. Estas relaciones son casos particulares de la llamadas **Fórmulas de Newton**. Se invita al lector investigar más sobre estas fórmulas.

Ejemplo 1.1. Hallar el valor de (x^2+y^2) sabiendo que $x+y=1 \ \wedge \ x^4+y^4=7$.

Solución 1. Elevando al cuadrado la primera ecuación $x^2+2xy+y^2=1 \implies x^2+y^2=1-2xy$. Por tanto, el ejercicio se reduce a encontrar el valor de xy. Veamos que

$$\begin{aligned} (x^2+y^2)^2 &= (1-2xy)^2 \\ x^4+2x^2y^2+y^4 &= 1-4xy+4x^2y^2 \\ x^4+y^4 &= 2x^2y^2-4xy+1 \\ 7 &= 2x^2y^2-4xy+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &2x^2y^2-4xy-6=0 \\ &2(x^2y^2-2xy-3)=0 \\ &2(xy-3)(xy+1)=0 \\ &\implies xy=3 \ \vee \ xy=-1 \end{aligned}$$

Sabiendo los posibles valores de xy, vemos que (x^2+y^2) puede tomar los valores de -5 y 3. ■

Solución 2. Claramente $\sigma_1 = s_1 = 1$ y $s_4 = 7$. De la relación $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \implies s_2 = 1-2\sigma_2 \implies \sigma_2 = \frac{1-s_2}{2}$. De la relación $s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}$ obtenemos

$$\begin{aligned} s_3 &= \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 \\ s_3 &= s_2 - \sigma_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_4 &= \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 \\ s_4 &= s_3 - \sigma_2 s_2 \end{aligned}$$

Operando $s_4 = s_2 - \sigma_2 - \sigma_2 s_2 = s_2(1-\sigma_2) - \sigma_2 = s_2\left(\frac{s_2+1}{2}\right) + \left(\frac{s_2-1}{2}\right) \implies 2s_4 = s_2^2 + 2s_2 - 1 \implies s_2^2 + 2s_2 - 15 = 0$, lo cual puede factorizarse como $(s_2+5)(s_2-3)$. Luego, los valores son -5 y 3. ■

1.2. Fórmulas de Vieta

Ya conociendo los polinomios simétricos elementales, podemos volver a ver la definición de las fórmulas de Vieta que ya conocemos. Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$, entonces

$$\sigma_k = (-1)^k \times \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Ejemplo 1.2. Determine el producto de las raíces de $50x^{50} + 49x^{49} + \cdots + x + 1$.

Solución. Por las fórmulas de Vieta, tenemos que $\sigma_{50} = (-1)^{50} \cdot \dfrac{a_0}{a_{50}} = \dfrac{1}{50}$. ■

1.3. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 1.1. Consideremos el polinomio $P(x) = x^n - (x-1)^n$, donde n es un entero positivo impar. Encontrar el valor de la suma y el valor del producto de sus raíces.

Problema 1.2. Encontrar los números reales x y y, que satisfacen

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^2 + y^2 + x + y + xy = 4 \end{cases}$$

Problema 1.3. Encontrar todas las soluciones reales del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}$$

Problema 1.4. Sean x, y y z números reales, encontrar todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 132 \end{cases}$$

Problema 1.5. Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, demostrar que

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5) = 5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4).$$

Problema 1.6. Sean a, b y c números reales distintos de cero, con $a + b + c \neq 0$. Probar que si

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

entonces para n impar se cumple

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Problema 2.1. Sean x, y y z números reales tales que

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7 \end{cases}$$

Hallar el valor de $x^4 + y^4 + z^4$.

Problema 2.2. Sean a, b y c las raíces del polinomio $3x^3 + x + 2023$. Calcular

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3.$$

Problema 2.3. Considera el polinomio $P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ y $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 las raíces de Q, encontrar $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Sea x un número real tal que $\sin^{10}(x)+\cos^{10}(x) = \frac{11}{36}$, entonces $\sin^{12}(x)+\cos^{12}(x) = \frac{m}{n}$ con m y n primos relativos. Encontrar $m+n$.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com