Polinomios
Clase #2

Encuentro: 2
Curso: Polinomios
Fecha: 25 de marzo de 2023

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Raíces de polinomios I

1. Desarrollo

1.1. Definiciones

Definición 1.1 (Raíz de un Polinomio). La raíz de un polinomio $P(x)$ es un número r, tal que $P(r) = 0$. También, diremos que r es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.

Ejemplo 1. Demuestre que u es raíz del polinomio $R(x) = x^2 - (u + 17)x + 17u$.

Solución. Para demostrar que u es raíz[1] de $R(x)$, basta probar que $R(u) = 0$. Lo cual es fácil ver cuando evaluamos $R(u) = u^2 - (u + 17)u + 17u = u^2 - u^2 - 17u + 17u = 0$. □

Definición 1.2 (Factor de un Polinomio). Sea P un polinomio con $\deg(P) = n$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces, $(x - a)$ es un *factor* de $P(x)$ si existe un polinomio[2] $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - a)Q(x).$$

Teorema 1.1 (Teorema del factor). Dado un polinomio P, de grado n y $a \in \mathbb{R}$, diremos que a es una raíz de P si y sólo si $(x - a)$ es un factor de $P(x)$. Es decir

$$P(a) = 0 \leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x)$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Si a_1, a_2 y a_3 son tres raíces distintas del polinomio cúbico $P(x)$, por el **Teorema 1.1**,

$$P(x) = (x - a_1)Q(x)$$

Para algún $Q(x)$, pero como $P(a_2) = (a_2 - a_1)Q(a_2) = 0$ y $a_2 \neq a_1$, entonces $Q(a_2) = 0$, es decir a_2 es raíz de Q, por lo tanto por el **Teorema 1.1**

$$Q(x) = (x - a_2)R(x)$$

[1] ¿Podés encontrar otra raíz de $R(x)$?
[2] ¿Por qué $\deg(Q) = (n - 1)$?

Para algún $R(x)$. Analogamente, podemos expresar a $R(x) = (x - a_3) \times c$, para alguna constante c. Así,

$$P(x) = c(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3), \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Vemos que saber las raíces de P nos condujo a su factorización[3]. Y en general, para un polinomio $P(x)$ de grado n y raíces r_i con $1 \leq i \leq n$, este puede ser expresado como:

$$P(x) = c(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_{n-1})(x - r_n), \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Cantidad de raíces de un polinomio: Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces (o ceros). Así, por ejemplo, un polinomio P con $\deg(P) = 7$, tiene a lo más 7 raíces.

Multiplicidad de raíces: Si existe $m \in \mathbb{N}$ y un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - a)^m Q(x)$$

diremos que la raíz a tiene multiplicidad m. Cuando $m = 1$ diremos que la raíz a es simple.

Ejemplo 2. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y suponga que $P(1)$ y $P(2)$ son ambos impares. Demuestre que no existe ningún entero n para el cual $P(n) = 0$.

Solución. Nos piden mostrar que $P(x)$ no tiene raíces enteras, entonces supongamos por el contrario, que existe un entero n tal que $P(n) = 0$. Entonces, por el **Teorema 1.1** $P(x) = (x - n)Q(x)$, con $Q(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Así podemos ver que, $P(1) = (1 - n)Q(1)$ y $P(2) = (2 - n)Q(2)$ son impares, pero $(1 - n)$ y $(2 - n)$ son enteros consecutivos, así que uno de ellos debe ser par. Por lo tanto, $P(1)$ o bien $P(2)$ tiene que ser par, lo cual contradice las condiciones del problema. Luego, n no existe. $\square$

Ejemplo 3. Sea $M(x)$ un polinomio cúbico con coeficientes enteros y $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tal que $M(a) = M(b) = M(c) = 2$. Demuestre que no existe $d \in \mathbb{Z}$ para el que $M(d) = 3$.

Solución. Sea $N(x) = M(x) - 2$, como a, b y c son raíces de $N(x)$, es claro que $N(x) = \alpha(x - a)(x - b)(x - c)$, para algún entero α. Si para algún entero d se tiene que $M(d) = 3$, entonces $N(d) = \alpha(d - a)(d - b)(d - c) = 1$, y para esto los factores de la ecuación deben ser 1 o -1, luego dos de ellos deben ser iguales. Pero esto es una contradicción a la condición del problema, luego d no existe. $\square$

1.2. Métodos para determinar raíces de polinomios

En este apartado nos centraremos en los métodos para la determinación de raíces de polinomios, particularmente para polinomios cuadráticos y cúbicos.

[3]Tema que se introduce en la sección 1.2.1.

1.2.1. Factorización

Si un polinomio $P(x)$ es equivalente al producto de otros polinomios con grado menor, entonces diremos que $P(x)$ está factorizado. Por ejemplo, el polinomio $M(x) = 5x^3 + 4x^2 + 5x + 4$, es equivalente a $(5x+4)(x^2+1)$, así diremos que $M(x)$ está factorizado y sus factores son $(5x + 4)$ y $(x^2 + 1)$.

Definición 1.3. Dado un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, este puede ser factorizado como

$$P(x) = \frac{(ax + m)(ax + n)}{a}, \text{ con } m + n = b \wedge mn = ac$$

Ejercicio 1. Determina las raíces los siguietes polinomios

1. $x^2 + x - 20$
2. $9t^2 + 88t - 20$
3. $(c+d)^2-18(c+d)+65$
4. $-21x^2 - 11x + 2$
5. $12p^2 - 7p - 12$

1.2.2. Completación de cuadrados

No todos los polinomios cuadráticos pueden ser factorizados facilmente. Por ejemplo, al tratar de factorizar x^2+6x-1 no resulta tan evidente llegar de golpe a $(x+3-\sqrt{10})(x-3-\sqrt{10})$, por lo cual podemos auxiliarnos en la **completación de cuadrados**. Sea el polinomio[4] $P(x) = x^2 + bx$, los podemos transformar en:

$$P(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Que luego nos permite utilzar más fácilmente la **diferencia de cuadrados**.

Ejemplo 4. Hallar las raíces del polinomio $R(x) = r^2 - 10r + 7$.

Solución. Utilizando la completación de cuadrados, tenemos que

$$\begin{aligned} R(x) &= r^2 - 10r + 7 \\ &= \left(r - \frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 7 \\ &= (r-5)^2 - 18 \\ &= \left(r - 5 + \sqrt{18}\right)\left(r - 5 - \sqrt{18}\right) \\ &= \left[r - \left(5 - 3\sqrt{2}\right)\right]\left[r - \left(5 + 3\sqrt{2}\right)\right] \end{aligned}$$

De esta manera sabemos que $R(x)$ tiene como raíces a $\left(5 - 3\sqrt{2}\right)$ y $\left(5 + 3\sqrt{2}\right)$. □

[4] ¿Cómo sería la fórmula si $P(x) = ax^2 + bx$?

1.2.3. Fórmula general

Cuando tenemos un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, podemos encontrar los valores para sus dos raíces en función de los coeficientes, a esta fórmula le conoceremos como fórmula general

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demostración: Al completar cuadrado en $P(x)$ tenemos que

$$\begin{aligned} P(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \\ &= a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \\ &= a\left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right] \end{aligned}$$

Así, $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ son la raíces del polinomio.

1.2.4. Análisis del discriminante

1.3. Agregados culturales y preguntas

Pregunta: ¿Cuántas raíces reales tiene el polinomio $P(x) = x^2 + 1$?

2. Problemas propuestos

3. Extra

Referencias

[Bar89] Edward Barbeau. *Polynomials*. Springer, 1989.

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 2. Raíces de polinomios I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2022.

[Rub19] Carlos Rubio. Un breve recorrido por los polinomios. *Tzaloa*, (2), 2019.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com