Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Colinealidad y Concurrencia
Clase #4

Encuentro: 18
Curso: Colinealidad y Concurrencia
Fecha: 12 de agosto de 2023

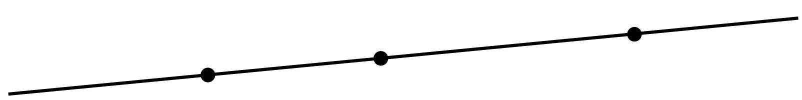
Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Unidad II: Colinealidad
Contenido: Colinealidad I

En esta cuarta sesión de clase iniciaremos con la segunda unidad del curso llamada Colinealidad. Conoceremos su hecho principal el cual es el teorema de Menelao. También veremos otros teoremas clásicos, como La recta de Gauss, Pappus y Desargues, importantes y de gran utilidad en la resolución de problemas.

1. Desarrollo

1.1. Colinealidad



Tres puntos son **colineales** si se encuentran sobre una misma recta. Dicho esto, presentaremos algunos enfoques que nos ayudarán a probar que tres puntos son colineales al resolver problemas de geometría.

Hay tres formas más comunes de angulear que nos permiten probar que tres puntos A, B y C son colineales.

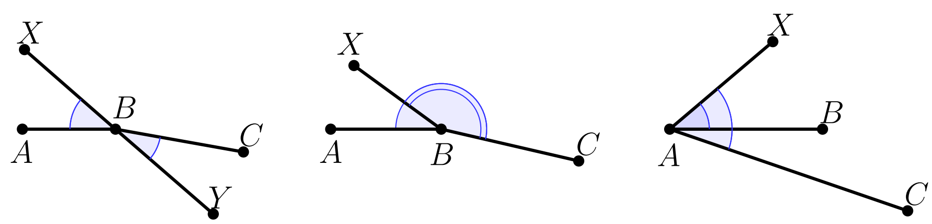


Figura 1: Tres configuraciones de colinealidad.

En la primera configuración, comenzando de izquierda a derecha, necesitaremos dos puntos adicionales que ya son colineales con nuestro punto "medio" B. Sean esos puntos X e Y. Si $\angle XBA = \angle YBC$, entonces los puntos A, B y C son colineales.

En la segunda configuración, necesitaremos un punto extra X que no esté en la supuesta recta $A-B-C$. Si $\angle ABX + \angle XBC = 180°$, entonces los puntos A, B y C son colineales.

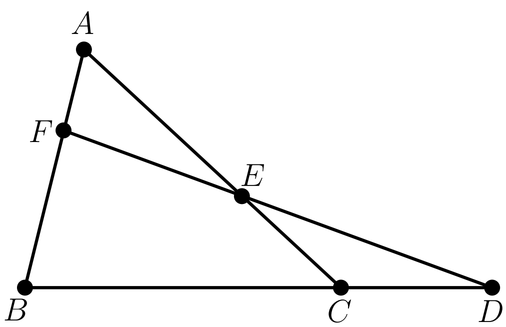
En la tercera configuración, también necesitaremos un punto extra X que no esté en la supuesta recta $A-B-C$. Si $\angle XAB = \angle XAC$, entonces los puntos A, B y C son colineales.

1.2. Teorema de Menelao

Teorema 1.1 (Teorema de Menelao).

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (posiblemente en sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$



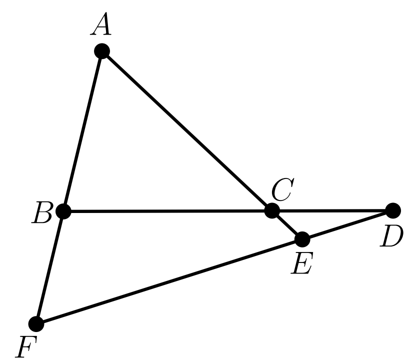


Figura 2: Configuraciones típicas del teorema de Menelao.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

Observación 1.

Una manera fácil de recordar cómo escribir esas proporciones[a] es la siguiente. Si tenemos el $\triangle XYZ$ y los puntos $M \in XY$, $N \in YZ$ y $P \in ZX$, entonces primero, vamos a escribir los lados de manera cíclica, algo como

$$\frac{X\quad}{\quad Y} \cdot \frac{Y\quad}{\quad Z} \cdot \frac{Z\quad}{\quad X}$$

y después solo tendremos que agregar el punto en el numerador y denominador en la fracción del lado correspondientes, es decir

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YN}{NZ} \cdot \frac{ZP}{PX}.$$

[a] También funciona para el teorema de **Ceva**.

Teorema 1.2 (Menelao trigonométrico).

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (posiblemente en sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales si y sólo si

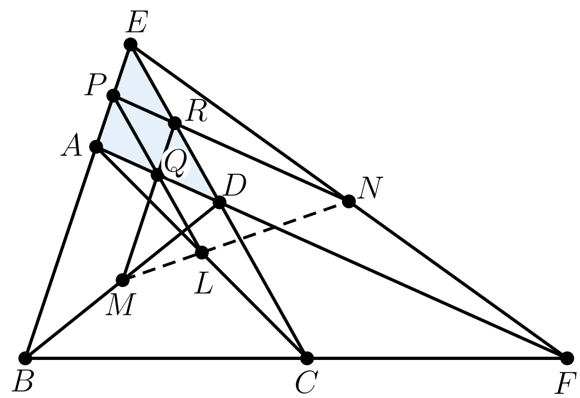
$$\frac{\operatorname{sen}(\angle BAD)}{\operatorname{sen}(\angle DAC)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle CBE)}{\operatorname{sen}(\angle EBA)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle ACF)}{\operatorname{sen}(\angle FCB)} = 1.$$

Demostración. La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

Teorema 1.3 (Recta de Gauss).

Sean L y M los puntos medios de las diagonales AC y BD del cuadrilátero $ABCD$. Las rectas AB y CD se cortan en E, y las rectas AD y BC se cortan en F. Sea N el punto medio de EF. Entonces los puntos L, M y N colineales.

Demostración. Sean P, Q y R los puntos medios de AE, AD y DE respectivamente.



Las rectas PQ, QR y PR son **bases medias** de $\triangle ADE$, por lo tanto son las respectivas bases medias de $\triangle ACE$, $\triangle BDE$ y $\triangle AFE$, así que estas pasan por L, M y N.

Por semejanza, tenemos que

$$\frac{LQ}{LP} = \frac{CD}{CE}, \quad \frac{NP}{NR} = \frac{FA}{FD} \quad \text{y} \quad \frac{MR}{MQ} = \frac{BE}{BA}.$$

Al multiplicar y reordenar se obtiene:

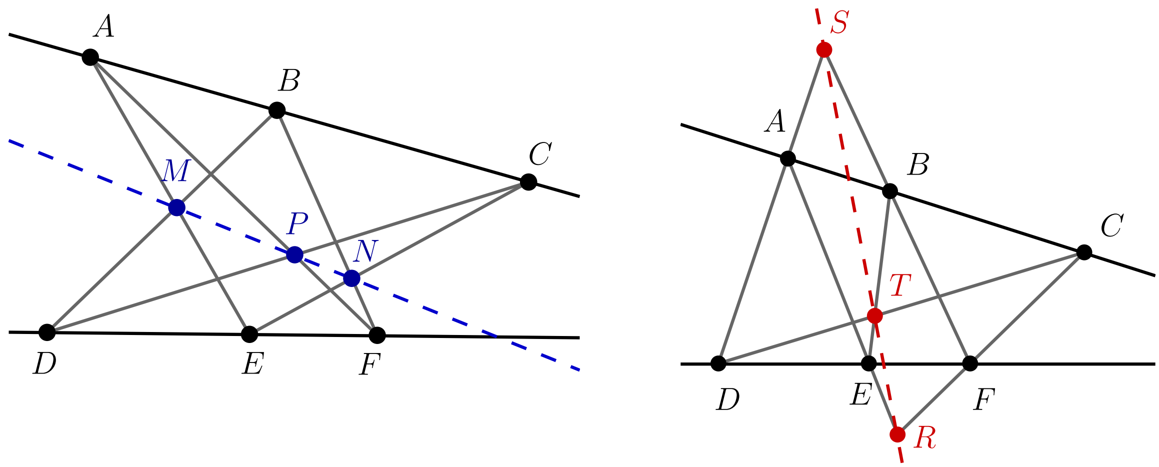
$$\frac{QL}{LP} \cdot \frac{PN}{NR} \cdot \frac{RM}{MQ} = \frac{AF}{FD} \cdot \frac{DC}{CE} \cdot \frac{EB}{BA}$$

Pero este producto es igual a 1, ya que se cumple el **Teorema 1.1** para el triángulo $\triangle ADE$ con respecto a la transversal $B-C-F$. Se concluye entonces que L, M y N son colineales. ■

1.3. Teorema de Pappus

Teorema 1.4 (Teorema de Pappus).

Sean A, B y C tres puntos colineales (no necesariamente en ese orden) y D, E y F otros tres puntos colineales (no necesariamente en ese orden). Entonces, los puntos de intersección de las rectas AE, BD; AF, CD y BF, CE son colineales.



(a) Transversal $M - P - N$.

(b) Transversal $S - T - R$.

Figura 3: Teorema de Pappus.

Naturalmente, existen muchas configuraciones aparte de las mostradas en la figura 3, pero estas son las más comunes.

Observación 2.

Una manera mnemotécnica de indentificar y no olvidar los puntos colineales es la mostrada en la figura 4.

Donde la primera y segunda fila contienen a los trios de puntos que sabemos son colineales y la tercera los nuevos puntos N, P y M. Cada uno de estos es la intersección de las rectas formadas con los puntos en posición diagonal de las columnas en la que dicho punto no está.

A	B	C
D	E	F
N	P	M

Figura 4: Mnemotécnia de Pappus.

Es decir $N = \overline{BF} \cap \overline{CE}$, $P = \overline{AF} \cap \overline{CD}$ y $M = \overline{AE} \cap \overline{BD}$.

Demostración. Sean $M = AE \cap BD$, $N = BF \cap CE$ y $P = AF \cap CD$. Divideremos la demostración en dos casos, basado en si las rectas AE y BF se intersecan o son paralelas.

Caso 1. Si estas se intersecan, sea $AE \cap BF = X$. Sea $Y = BF \cap CD$ y $Z = AE \cap CD$.

Dado que M, N y P son laterales a $\triangle XYZ$, podemos usar el **Teorema 1.1** para tratar de probar que son colineales, es decir necesitamos probar que

$$\frac{XN}{NY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZM}{MX} = 1.$$

Ahora, trataremos de encontrar cada una de estas tres proporciones por medio de la aplicación del **Teorema 1.1** con otras rectas que se cruzen con $\triangle XYZ$.

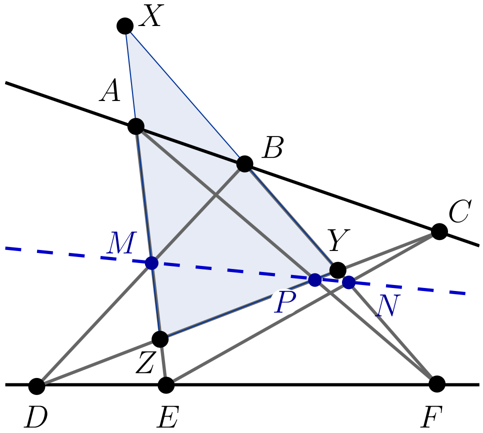


Figura 5: Demostración de Pappus, caso 1.

Para lograr esto, usaremos el **Teorema 1.1** tres veces en el $\triangle XYZ$ con las transversales $C-N-E$, $A-P-F$ y $D-M-B$, respectivamente, obtendremos

$$\frac{XN}{NY}\cdot\frac{YC}{CZ}\cdot\frac{ZE}{EX}=1$$
$$\frac{XF}{FY}\cdot\frac{YP}{PZ}\cdot\frac{ZA}{AX}=1$$
$$\frac{XB}{BY}\cdot\frac{YD}{DZ}\cdot\frac{ZM}{MX}=1.$$

Sin embargo, vemos que al multiplicar estos resultados nada se cancela, así que necesitamos hallar otras igualdades tal que usen esos segmentos de recta.

Rápidamente, vemos que usando el **Teorema 1.1** dos veces más en $\triangle XYZ$, pero ahora con las transversales $A-B-C$ y $D-E-F$, obtenemos

$$1=\frac{XB}{BY}\cdot\frac{YC}{CZ}\cdot\frac{ZA}{AX}\quad \text{y} \quad 1=\frac{XF}{FY}\cdot\frac{YD}{DZ}\cdot\frac{ZE}{EX}.$$

Multiplicando estas 5 igualdades lado a lado, y viendo que 6 de las proporciones del lado izquierdo de la ecuación se cancelan con cada una las proporciones del lado derecho. Quedándonos con lo que queríamos demostrar.

Caso 2. Ahora, veamos que pasa si el punto X no existe, es decir $AE \parallel BF$. Observemos que el punto X aparece exactamente dos veces en cada una de las 5 igualdades de arriba, una vez en el numerador y una vez en el denominador. Trataremos de encontrar igualdades análogas tal que no usen segmentos que contengan X.

En realidad podemos lograr esto, usando rectas paralelas para encontrar triángulos semejantes. Por el criterio *(AA)*, obtenemos que $\triangle CYN \sim \triangle CZE$.

$$\therefore \quad \frac{CY}{YN}=\frac{CZ}{ZE} \quad \Longrightarrow \quad \frac{CY}{YN}\cdot\frac{ZE}{CZ}=1.$$

Así mismo, obtenemos las siguientes semejanzas $\triangle PYF \sim \triangle PZA$, $\triangle DYB \sim \triangle DZM$, $\triangle YCB \sim \triangle ZCA$ y $\triangle YDF \sim \triangle ZDE$. De donde, sacamos igualdades análogas.

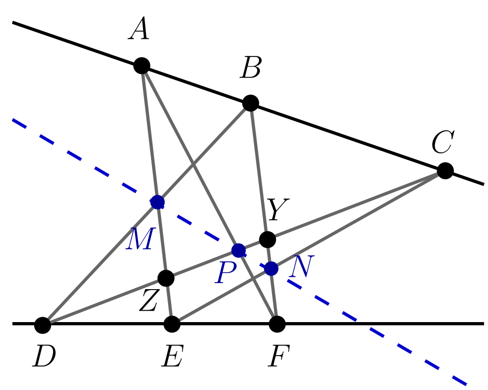


Figura 6: Demostración de Pappus, caso 2.

Multiplicando estas igualdades, obtenemos

$$\frac{CY}{YN}\cdot\frac{ZE}{CZ}\cdot\frac{PY}{YF}\cdot\frac{ZA}{PZ}\cdot\frac{DY}{YB}\cdot\frac{ZM}{DZ}\cdot\frac{YB}{YC}\cdot\frac{ZC}{ZA}\cdot\frac{YF}{YD}\cdot\frac{ZD}{ZE}=1$$

$$\therefore \quad \frac{PY}{YN} \cdot \frac{ZM}{PZ} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{PY}{YN} = \frac{PZ}{ZM}$$

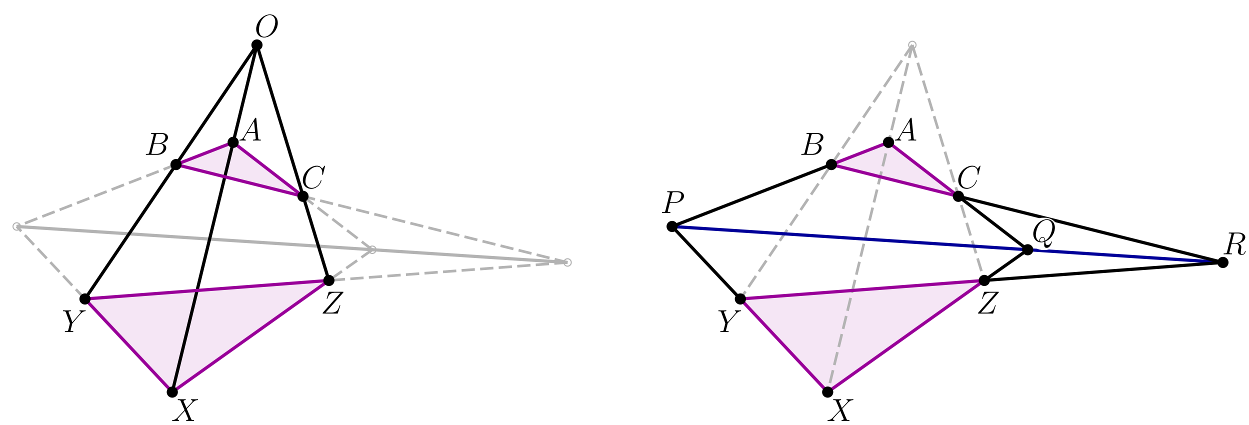
Como $\angle PYN = \angle PZM$, por *(LAL)* obtenemos que $\triangle PYN \sim \triangle PZM$ y por lo tanto $\angle YPN = \angle ZPM$. Ya que $Y - P - Z$ son colineales, por consiguiente $N - P - M$. ■

1.4. Teorema de Desargues

Consideremos dos triángulos arbitrarios $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$. Antes de establecer el resultado principal, es necesario proporcionar dos definiciones fundamentales.

Definición 1.1.

- Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en *perspectiva respecto a un* ***punto*** (digamos O) si las rectas AX, BY y CZ son concurrentes.
- Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en *perspectiva respecto a una* ***recta*** si los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes de ambos triángulos (digamos $P = AB \cap XY$, $Q = CA \cap ZX$ y $R = BC \cap YZ$) son colineales.



(a) Perspectiva con respecto a un punto. (b) Perspectiva con respecto a una recta.

Figura 7: Perspectiva de dos triángulos.

Teorema 1.5 (Teorema de Desargues).

Dos triángulos están en perspectiva con respecto a una recta si y solo si están en perspectiva con respecto un punto.

Claramente, al igual que el **Teorema 1.4**, el teorema de Desargues tiene muchas más configuraciones.

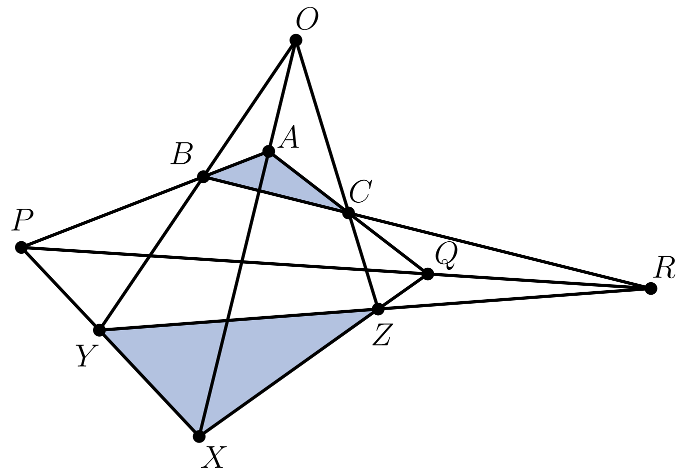


Figura 8: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva con O y la recta PR.

Demostración. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ dos triángulos en perspectiva a un punto, entonces AX, BY y CZ son concurrentes con el punto O.

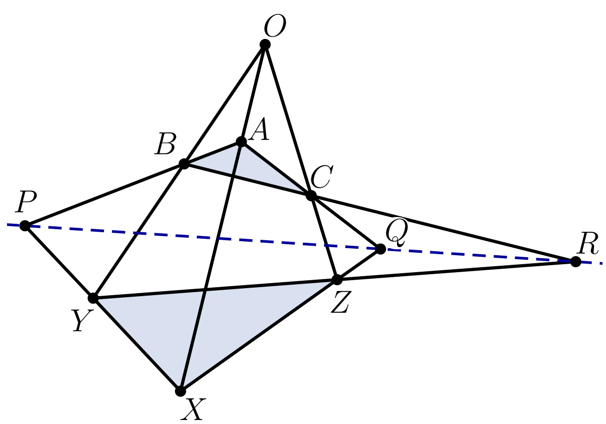


Figura 9: Desargues, prueba de que $P-Q-R$.

Sea $P = AB \cap XY$, $R = BC \cap YZ$ y $Q = CA \cap ZX$. Aplicando el **Teorema 1.1** a los triángulos $\triangle OAB$ con la transversal $P-Y-X$, $\triangle OBC$ con la transversal $R-Z-Y$ y $\triangle OCA$ con la transversal $Q-Z-X$, obtenemos que;

$$\frac{OX}{XA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BY}{YO} = 1,$$
$$\frac{OY}{YB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CZ}{ZO} = 1 \quad \text{y}$$
$$\frac{OZ}{ZC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AX}{XO} = 1.$$

Multiplicando estas tres igualdades, llegamos al siguiente resultado

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1,$$

que por el **Teorema 1.1** aplicado al triángulo $\triangle ABC$, significa que los puntos P, R y Q son colineales, es decir $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva con respecto a la recta PQ.

Ahora, probaremos la otra dirección. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ dos triángulos en perspectiva a un recta, entonces los puntos $P = AB \cap XY$, $Q = CA \cap ZX$ y $R = BC \cap YZ$ son colineales.

Sean $O = BY \cap CZ$. Debemos de probar que AX también pasa por O. Observemos los triángulos $\triangle QCZ$ y $\triangle PBY$.

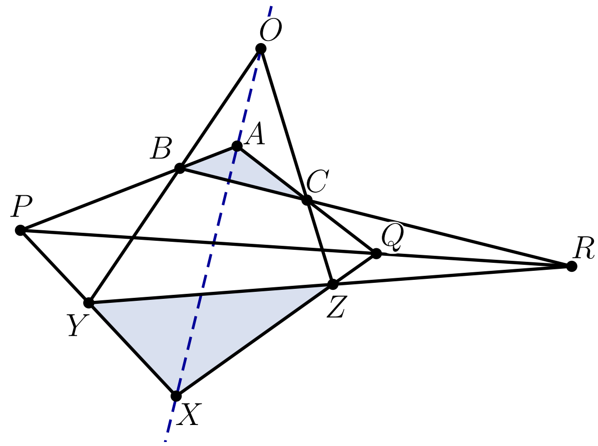


Figura 10: Desargues, prueba de que $O = AX \cap BY \cap CZ$.

Las rectas QP, CB y ZY con concurrentes en R, así que los triángulos están en perspectiva con respecto a ese punto.

Por la dirección del teorema de Desargues que acabamos de demostrar, se deduce que los triángulos deben de estar en perspectiva respecto a una recta.

Es decir, los puntos $QC \cap PB = A$, $CZ \cap BY = O$ y $ZQ \cap YP = X$ son colineales.

Con esto, probamos que AX pasa por O, luego $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva respecto al punto O. ■

1.5. Agregados culturales y preguntas

- La eficiencia de aplicar el teorema de Menelao puede acelerarse utilizando su versión trigonométrica.
- El teorema de Desargues puede servir para transformar una colinealidad en una concurrencia más fácil de trabajar por Ceva, o viceversa, transformando una concurrencia en una colinealidad más fácil de trabajar por Menelao.
- ¿Conoces los polígonos degenerados? Pues es un polígono en el que algunos de sus vértices coinciden. Ejemplos, una recta la podemos considerar tanto como un triángulo degenerado o cuadrilátero degenerado, un pentágono como un héxagono degenerado, etc.
- Tanto el teorema de Menelao, Pappus como Desargues tienen su versiones degeneradas, para lo cual se vuelve conveniente considerar rectas paralelas y puntos al infinito. En particular la versión degenerada del teorema de Desargues aparece frecuentemente.

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 2.1. Demuestre que las tangentes a la circunferencia circunscrita a un triángulo en los vértices de este, cortan a los lados opuestos de dicho triángulo en tres puntos colineales.

Problema 2.2. Si los lados AB, BC, CD y DA de un cuadrilátero $ABCD$ son cortados por una transversal en los puntos A', B', C' y D', respectivamente. Probar que

$$\frac{AA}{A'B} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DD'}{D'A} = 1.$$

Problema 2.3. Sean AD, BE y CF tres cevianas concurrentes en un triángulo $\triangle ABC$. Se toma un punto D' en BC tal que $BD = CD'$. Las paralelas a BC por E y F cortan AD y AD' en G y H respectivamente. Prueba que C, G y H son colineales.

Problema 2.4. En un paralelogramo $ABCD$ con $\angle B < 90°$, el círculo de diámetro AC corta las rectas CB y CD en E y F, respectivamente, y la tangente al círculo por A corto BD en P. Demuestre que P, F y E están alineados.

Problema 2.5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Las diagonales AC y BD se cortan en E, y los lados AB y CD se cortan en F. Sean J y K los ortocentros de $\triangle ADF$ y $\triangle BCF$ respectivamente. Demuestre que J, E y K están alineados.

Problema 2.6. Sea $ABCD$ un trapecio con AB mayor y paralelo a CD. Sean E y F puntos en AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}$. Sean K y L puntos en EF tales que $\angle AKB = \angle DCB$ y $\angle CLD = \angle CBA$. Demuestre que $KLCB$ es cíclo.

Problema 2.7. Sea P la intersección de las diagonales AC y BD en el cuadrilátero cíclico $ABCD$. Sean E, F, G y H los pies de las perpendiculares desde P hacía AB, BC, CD y DA, respectivamente. Pruebe que las rectas EH, BD y FG son concurrentes o son paralelas.

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Ejercicio 3.1. Realizar la demostración del teorema de **Menealao** tanto en su forma normal como trigonométrica.

Problema 3.1. Sea ABC un triángulo, y sean A_1, B_1 y C_1 los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA y AB, respectivamente. Sea A_2 el simétrico de A_1 con respecto a B_1C_1, y se definen B_2 y C_2 de manera análoga. Sea A_3 la intersección de AA_2 con BC, B_3 la intersección de BB_2 con AC y C_3 la intersección de CC_2 con AB. Demuestre que A_3, B_3 y C_3 con colineales.

4. Extra

Problema 4.1 (Olimpiada Matemática de Macedonia, 2016). Sea K el punto medio del segmento AB. Sea C un punto fuera de la recta AB. Sea N la intersección de AC con la recta que pasa a traves de B y el punto medio del segmento CK. Sea U la intersección de AB y la recta que pasa a traves de C y L, el cual es punto medio de BN. Probar que la razón de las áreas de $\triangle CNL$ y $\triangle BUL$ no dependen de la elección del punto C.

Referencias

[Agu19] Eduardo Aguilar. *Estrategias sintéticas en Geometría Euclídea*. Editorial, 2019.

[Bac22] Jafet Baca. *Apuntes de Geometría Euclidiana para Competiciones Matemáticas*. Independent publication, 2022.

[Loz17] Stefan Lozanovski. *A beautiful journey through Olympiad Geometry*. Independent publication, 2017.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)
Correo: `kenny.tinoco10@gmail.com`

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 (*Claro*)
Correo: `joseandanduarte@gmail.com`