Introducción a las ecuaciones funcionales
Propiedades de funciones

Kenny J. Tinoco

Septiembre de 2024

Con la técnica de sustitución vista en las sesiones pasadas se pueden resolver los siguientes problemas, con ciertas evaluaciones y manipuleos es posible hallar sus soluciones fácilmente, además estos han aparecido en olimpiadas internacionales. Por favor, intentá resolver estos problemas por tu cuenta.

Problema 1 (India, 2010)**.** Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x+y) + xy = f(x)f(y), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 2 (IMO, 2002)**.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera x, y, u, v reales, se cumple

$$[f(x) + f(y)]\,[f(u) + f(v)] = f(xu - yv).$$

Problema 3 (Korea, 2000)**.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)\left(f(x) + f(y)\right), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Propieades de funciones

Veamos algunas propiedades importantes sobre las funciones.

Definición 1.1 (Inyectiva)**.** Una función $f : A \to B$ es **inyectiva** si para los números $x_1, x_2 \in A$ con $f(x_1) = f(x_2)$, entonces se tiene $x_1 = x_2$. Es decir, valores de entrada distintos tienen salidas distintas.

Definición 1.2 (Sobreyectiva)**.** Una función $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si para todo $y \in B$ existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Definición 1.3 (Biyectiva)**.** Una función $f : A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Definición 1.4 (Creciente)**.** Una función $f : A \to B$ es **creciente** si para todo $(x_1 \leq x_2) \in A$ se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$. En el caso de que la igualdad no se cumpla se dice que es estrictamente creciente.

Definición 1.5 (Decreciente)**.** Una función $f : A \to B$ es **decreciente** si para todo $(x_1 \leq x_2) \in A$ se tiene que $f(x_2) \leq f(x_1)$. En el caso de que la igualdad no se cumpla se dice que es estrictamente decreciente.

Definición 1.6 (Monótona)**.** Una función $f : A \to B$ es **monótona** si es creciente o decreciente. Además, se dice que es **estrictamente monótona** si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Ejercicio 1. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $f(0) = 1$ que satisfacen

$$f(f(n)) = f(f(n+2)+2) = n,$$

para todo entero n.

Ejercicio 2. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 3. Hallar todas las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que g es inyectiva y

$$f(g(x) + y) = g(x + f(y)), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 4. Hallar todas las funciones f de reales a reales tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cualesquieras $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(y+1)f(x)f(xf(y) + f(x+y)) = y.$$

Ejercicio 6. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

i) f es estrictamente decreciente,

ii) $f(x) > -\frac{1}{x}$ para todo $x > 0$ y

iii) $f(x)f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$ para todo $x > 0$.

Hallar $f(1)$.

Ejercicio 7. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Problemas

Problema 4 (Lista corta IMO, 1988)**.** Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que cumple

$$f(f(m) + f(n)) = m + n, \text{ para todos } m, n.$$

Hallar los posibles valores de $f(1988)$.

Problema 5 (Lista corta IMO, 2002)**.** Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 6 (Ibero, 1993)**.** Encontrar todas las funciones estrictamente crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfacen

$$f(nf(m)) = m^2 f(mn), \text{ para todos } m, n \in \mathbb{R}.$$

Problema 7 (Italia, 1999)**.** Encontrar todas las funciones estrictamente monótonas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$