Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Ecuaciones Diofánticas
Clase #4

Encuentro: 19
Curso: Ecuaciones Diofánticas
Fecha: 31 de agosto de 2024

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Gema Tapia

Contenido: Método de Congruencia

En esta sesión de clase se sigue con los métodos básico para la resolución de ecuaciones diofánticas, en concreto con el método de congruencia, el cual nos permite utilizar las propiedades de divisibilidad para hallar posibles soluciones de una ecuación.

1. Desarrollo

La congruencia en enteros es una poderosa herramienta en la solución de ecuaciones diofánticas, usualmente aplicaremos este método para probar que ciertas ecuaciones son insolubles o bien deducir condiciones que las soluciones deben cumplir. Ahora, vemos algunas definiciones.

Definición 1.1 (Divisibilidad)**.** Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.

Definición 1.2 (Congruencias)**.** Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $(a - b)$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.

Teorema 1.1 (Propiedades de Congrencia)**.** Sean los enteros a, b, c, d, m con $m \geq 1$.

1. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.
2. Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.
3. Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.
4. Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{d}}$ donde $d = mcd(b, m)$.

Teorema 1.2 (Pequeño teorema de Fermat)**.** Si p es primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema 1.3 (Teorema de Euler)**.** Si a y n son dos enteros positivos, entonces

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Donde $\varphi(n)$ representa[1] la cantidad de primos relativos menores a n.

[1]Se conoce a $\varphi(x)$ como la función phi de Euler.

Es claro que el teorema de Fermat es un caso concreto del teorema de Euler, puesto que un primo p tiene exactamente $(p-1)$ primos relativos, por la propia definición de números primos, el resultado es evidente.

De estas definiciones y teoremas se obtienen los siguientes resultados.

- $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$
- $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$
- $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$
- $x^2 \equiv 0, 1, 4, 9 \pmod{16}$
- $x^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod{9}$
- $x^4 \equiv 0, 1 \pmod{16}$
- $x^5 \equiv 0, \pm 1 \pmod{11}$

Estos resultados pueden ser probados fácilmente, algunos son resultados inmediatos de teoremas como Fermat o Euler. O bien, se puede considerar el conjunto de residuos de cada módulo y luego investigar el comportamiento de las potencias. En cualquier caso, se deja al lector el ejercicios de probar estos resultados.

1.1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Si se cumple que $n \equiv 4 \pmod{9}$, probar que la ecuación $x^3+y^3+z^3 = n$ no tiene soluciones enteras.

Ejercicio 1.2. Probar que la ecuación $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+2001)^2 = y^2$ no es soluble en enteros x, y.

Ejercicio 1.3. Encontrar todas las soluciones (p, q) de números primos tales que $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

Ejercicio 1.4. Determinar todos los primos p para los cuales el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} p+1 = 2x^2 \\ p^2+1 = 2y^2 \end{cases}$$

tiene soluciones enteras (x, y).

Ejercicio 1.5. Probar que la ecuación $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+99)^2 = y^z$ no tiene soluciones enteras (x, y, z) con $z > 1$.

Ejercicio 1.6. Probar que la ecuación $x^5 - y^2 = 4$ es insoluble en los enteros.

Ejercicio 1.7. Si n es un entero positivo tal que la ecuación $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ tiene tres soluciones enteras (x, y). Probar que la ecuación es insoluble cuando $n = 2891$.

Ejercicio 1.8. Determinar las posibles soluciones enteras no negativas $(x_1, x_2, \ldots, x_{14})$ de la ecuación $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 15999$.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Hallar los pares (a, b) de enteros positivos tales que satisfacen la ecuación $a^{b^2} = b^a$.

Referencias

[BDMS98] Hugo Barrantes, Pedro Díaz, Manuel Murillo, and Alberto Soto. *Introducción a la Teoría de Números.* Universidad Estatal a Distancia. Costa Rica, 1998.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Gema Tapia
Teléfono: +505 8825 1565 *(Claro)*
Correo: gematapia97@gmail.com

4. Notas de clase

4.1. ¿Qué?

4.2. ¿Cómo?