Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Examen final

Nombre: ____. **Código ASJT:** ____________.

Problemas

Estimado estudiante, resolver los siguientes problemas de manera clara y ordenada. Recordar justificar la respuesta.

Problema 1. Sea $Q(x) = 2x - 4096$ y $P(x) = Q^{12}(x)$, hallar la raíz de P.

Problema 2. Hallar $Q(x)$, si $P(Q(x) - 3) = 6x + 2$ y $P(x + 3) = 2x + 10$.

Problema 3. Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$. ¿Cuál es el coeficiente del término cuadrático en $P_{23}(x)$?

Problema 4. Demostrar por inducción matemática, que $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, se cumple

$$17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}.$$

Problema 5. Sean a, b y c números reales distintos de cero, con $a + b + c \neq 0$. Probar que si

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c},$$

entonces para n impar se cumple

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

Tipo: A **Fecha:** 24 de junio de 2023

Soluciones

Problema 1.

Nos piden hallar la raíz de $P(x) = Q^{12}(x)$, lo cual es igual a $P(x) = \underbrace{Q(Q(...Q(}_{12\ veces} x) \dots))$.

Teniendo esto en cuenta, al encontrar $Q^2(x)$, $Q^3(x)$, $Q^4(x)$, $\cdots$ veremos un patrón el cual nos ayuda a deducir la forma de $P(x)$

$$Q^2(x) = Q(Q(x)) = 2Q(x) - 4096 = 2(2x - 2^{12}) - 2^{12} = \boxed{2^2x - 2^{12}(1+2)}$$
$$Q^3(x) = Q(Q^2(x)) = 2Q^2(x) - 4096 = 2(2^2x - 2^{12}(1+2)) - 2^{12} = \boxed{2^3x - 2^{12}(1+2+2^2)}$$
$$Q^4(x) = Q(Q^3(x)) = 2Q^3(x) - 4096 = 2\left(2^3x - 2^{12}(1+2+3)\right) - 2^{12} = \boxed{2^4x - 2^{12}(1+2+2^2+2^3)}$$
$$\vdots$$

Es decir

$$\boxed{Q^k(x) = 2^kx - 2^{12}(1+2+2^2+\cdots+2^{k-1})}$$

Lo cual, por propiedades que ya hemos visto en clase, podemos reducir el lado derecho la expresión como se sigue

$$Q^k(x) = 2^kx - 2^{12}\left(\frac{2^k-1}{2-1}\right) = \boxed{2^kx - 2^{12}(2^k-1)}$$

Por lo tanto, podemos decir que la forma de $P(x)$ es la siguiente

$$P(x) = Q^{12}(x) = 2^{12}x - 2^{12}\left(2^{12}-1\right)$$
$$\longrightarrow P(x) = 2^{12}\left(x - (2^{12}-1)\right)$$

De donde es fácil ver que $\boxed{x = 2^{12}-1}$ es raíz de P.

Problema 2.

Primero encontremos $P(x)$, lo cual lo podemos lograr sustituyendo $x-3$ por x en la segunda condición del problema, es decir

$$P((x-3)+3) = 2(x-3)+10$$
$$P(x) = 2x - 6 + 10$$
$$P(x) = 2x + 4$$

Con este resultado, podemos ver que $P(Q(x)-3) = 2(Q(x)-3)+4$, lo cual nos permite decir que $2(Q(x)-3)+4 = 6x+2$. De donde rápidamente llegamos a que $\boxed{Q(x) = 3x+2}$.

Problema 3.

Siguiendo la idea del problema 1, vamos a encontrar los primeros $P_i(x)$ para lograr indentificar un patrón que nos ayude a simplificar los cálculos:

$$P_1(x) = P_0(x-1) = (x-1)^3 + 313(x-1)^2 - 77(x-1) - 8$$
$$\rightarrow \boxed{P_1(x) = (x-1)^3 + 313(x-1)^2 - 77(x-1) - 8}$$
$$P_2(x) = P_1(x-2) = [(x-2)-1]^3 + 313[(x-2)-1]^2 - 77[(x-2)-1] - 8$$
$$\rightarrow \boxed{P_2(x) = [x-(1+2)]^3 + 313[x-(1+2)]^2 - 77[x-(1+2)] - 8}$$
$$P_3(x) = P_2(x-3) = [(x-3)-(1+2)]^3 + 313[(x-3)-(1+2)]^2 - 77[(x-3)-(1+2)] - 8$$
$$\rightarrow \boxed{P_3(x) = [x-(1+2+3)]^3 + 313[x-(1+2+3)]^2 - 77[x-(1+2+3)] - 8}$$
$$\vdots$$

Es decir

$$P_k(x) = [x-(1+2+\cdots+k)]^3 + 313[x-(1+2+\cdots+k)]^2 - 77[x-(1+2+\cdots+k)] - 8$$

Lo cual por la sumas de Gauss podemos simplificar y obtener

$$P_k(x) = \left[x - \frac{k(k+1)}{2}\right]^3 + 313\left[x - \frac{k(k+1)}{2}\right]^2 - 77\left[x - \frac{k(k+1)}{2}\right] - 8$$

Por lo tanto $P_{20}(x)$ es igual a

$$P_{20}(x) = \left[x - \frac{20\cdot 21}{2}\right]^3 + 313\left[x - \frac{20\cdot 21}{2}\right]^2 - 77\left[x - \frac{20\cdot 21}{2}\right] - 8$$
$$\rightarrow \boxed{P_{20}(x) = (x-210)^3 + 313(x-210)^2 - 77(x-210) - 8}$$

En la expansión de $(x-210)^3$ el único término cuadrático es $3\cdot(-210)\cdot x^2$ y en la expansión de $313(x-210)^2$ es $313x^2$. Por lo tanto el valor que buscamos es $3\cdot(-210)+313 = -630+313 = \boxed{-317}$.

Problema 4.

Caso base. Veamos que pasa para $n = 0$

$$17 \mid 2^{5(0)+3} + 5^0 \cdot 3^{0+2}$$
$$17 \mid 2^3 + 1 \cdot 3^2$$
$$17 \mid 8 + 9$$
$$17 \mid 17$$

claramente 17 divide a 17.

Hipótesis de inducción. Supongamos, entonces, que para un entero fijo $k \geq 0$, se cumple que

$$17 \mid 2^{5k+3} + 5^k \cdot 3^{k+2}$$

Paso inductivo. Vamos a demostrar que como para k se cumple la divisibilidad entonces para $k+1$ también se va a cumplir. Es decir

$$17 \mid 2^{5(k+1)+3} + 5^{k+1} \cdot 3^{(k+1)+2}$$
$$17 \mid 2^{5k+8} + 5^{k+1} \cdot 3^{k+3}$$

Por propiedades de potencia podemos hacer lo siguiente

$$17 \mid 2^{5k+8} + 5^{k+1} \cdot 3^{k+3}$$
$$17 \mid 2^{5k+3} \cdot 2^5 + (5^k \cdot 5^1) \cdot (3^{k+2} \cdot 3^1)$$
$$17 \mid 32 \cdot 2^{5k+3} + 15 \cdot 5^k \cdot 3^{k+2}$$

Sumando y restando $17 \cdot 5^k \cdot 3^{k+2}$ en el lado derecho, vemos que

$$17 \mid 32 \cdot 2^{5k+3} + 15 \cdot 5^k \cdot 3^{k+2}$$
$$17 \mid 32 \cdot 2^{5k+3} + 15 \cdot 5^k \cdot 3^{k+2} + 17 \cdot 5^k \cdot 3^{k+2} - 17 \cdot 5^k \cdot 3^{k+2}$$
$$17 \mid 32 \cdot 2^{5k+3} + 32 \cdot 5^k \cdot 3^{k+2} - 17 \cdot 5^k \cdot 3^{k+2}$$
$$\boxed{17 \mid 32 \cdot (2^{5k+3} + 5^k \cdot 3^{k+2}) - 17 \cdot (5^k \cdot 3^{k+2})}$$

Lo cual por la hipótesis de inducción es cierto.

Problema 5.

Al trabajar la condición del problema vemos que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \to \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$$
$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$$
$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 0$$

Lo cual por propiedad es

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

Como es una ecuación que tiene el producto de 3 números igual a cero, entonces no queda más opción que al menos uno de los números sea cero. Si $a+b=0$, entonces $a=-b$. Para un n impar vemos que $a^n = (-b)^n = -b^n$, por lo tanto la expresión

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n+b^n+c^n} \to \frac{1}{-b^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{-b^n+b^n+c^n}$$
$$\boxed{\frac{1}{c^n} = \frac{1}{c^n}}$$

Hecho que no pasa con n par. Si hacemos este análisis para $b+c=0$ y $c+a=0$ el resultado es el mismo, luego el problema está hecho.