Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #6

Encuentro: 6
Curso: Polinomios
Fecha: 4 de mayo de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Raíces de Polinomios II

Encontrar raíces enteras o racionales de polinomios en general es bastante complicado, pero resulta que para polinomios con coeficientes enteros esta búsqueda puede simplificarse al analizar los coeficientes del polinomio en cuestión. En esta clase nos centraremos en algunas propiedades y resultados interesantes de los polinomios con coeficientes enteros.

1. Desarrollo

Teorema 1.1.

Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, entonces $P(a)-P(b)$ es divisible entre $(a-b)$, para cualesquiera enteros distintos a y b.

$$(a-b) \mid P(a)-P(b).$$

En particular, todas las raíces enteras de $P(x)$ dividen a $P(0)$. Esto nos conduce a la siguiente propiedad aritmética.

Definición 1.1. Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ en los enteros y sea $z \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$P(z) = 0 \Longleftrightarrow z \mid a_0.$$

En efecto, $a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \Longleftrightarrow a_0 = -z(a_n z^{n-1} + \cdots + a_1)$. Además, si $a_n = 1$, entonces cada raíz racional de P es un entero. En efecto, sea $\frac{p}{q}$ una raíz con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $mcd(p,q) = 1$. Entonces

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$
$$\hookrightarrow \frac{p^n}{q} = -a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \cdots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1}$$

El lado derecho de la ecuación es entera, por lo tanto $q = 1$.

Teorema 1.2 (Teorema de la raíz racional).

Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ en los enteros y sea $\frac{p}{q}$, con $mcd(p,q) = 1$, una raíz cualquiera de P. Entonces se cumple que $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$.

Demostración. En efecto, tenemos que

$$\begin{gathered}a_n\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0\\ \hookrightarrow a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0\end{gathered}$$

Todos los sumandos excepto, posiblemente, el primero, son múltiplos de q y todos los sumandos excepto, posiblemente, el último son múltiplos de p. Como p y q dividen a 0, se deberá tener que $q \mid a_np^n$ y $p \mid a_0q^n$, y de aquí se sigue la afirmación, ya que[1] $(p,q)=1$. ■

Ejemplo 1.1. Encontrar todas las raíces de x^3-2x^2-5x+6.

Solución. Primero tratemos de ver las raíces racionales de la ecuación. Los divisores del término principal y los divisores del término independiente son

$$\begin{gathered}\{-1,1\}\\ \{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}\end{gathered}$$

respectivamente. Por el Teorema de la raíz racional, las raíces de la ecuación tiene la forma $\frac{p}{q}$, es decir, el conjunto de valores candidatos a ser raíces es (ya simplificado)

$$\left\{\frac{\pm1}{\pm1},\frac{\pm2}{\pm1},\frac{\pm3}{\pm1},\frac{\pm6}{\pm1}\right\}=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$$

Pero, ¿cómo sabemos cuáles de estos valores es una raíz?. Por el Teorema del factor, sabemos que x^3-2x^2-5x+6 es divisible por $x-r$, donde r es una raíz.

Entonces, por ejemplo si $x=-6$ la división $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x+6}=x^2-8x+3-\frac{12}{x+6}$ no es exacta, por lo tanto -6 no es raíz[2]. Este proceso lo aplicamos a todos los valores del conjunto.

En particular, si $x=1$ la división $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-1}=x^2-x-6$ en este caso es exacta, por lo tanto 1 es raíz. Para términar solo falta encontar las raíces de $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$, las cuales son -2 y 3. Luego, las raíces del polinomio son $\{-2,1,3\}$. ■

Ejemplo 1.2. Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1)=2$, $P(2)=3$ y $P(3)=2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

Solución. Rápidamente, por el Teorema del resto

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+x+1.$$

Cuando hacemos $x=3$, entonces obtenemos $2016=2Q(3)+4$, lo cual es $Q(3)=1006$. Ahora bien, cuando hacemos $x=2016$, obtenemos $P(2016)=2015\cdot2014Q(2016)+2017$. Por el Teorema 1.1, sabemos que

$$\begin{gathered}2016-3 \mid Q(2016)-Q(3)\\ 2013 \mid Q(2016)-Q(3)\end{gathered}$$

[1] $(p,q)=1$ es una manera corta de escribir $mcd(p,q)=1$.

[2] También, se puede ir evaluado los valores en el polinomio y ver si da cero. Como hacer este análisis es elección del estudiante.

El mínimo valor de $Q(2016)$ tal que $P(2016) \geq 0$ es $Q(2016) = Q(3) = 1006$, por lo tanto

$$P(2016) = 2015 \cdot 2014 \cdot 1006 + 2017 \equiv (-1)(-2)(1006) + 2017 \equiv \boxed{2013} \pmod{2016}$$

■

Otra solución al problema anterior sería por medio del Teorema Chino del Resto.

1.1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 1.1. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

Problema 1.2. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $6x^4 + x^3 - 3x^2 - 9x - 4$.

Problema 1.3. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $30x^4 - 133x^3 - 121x^2 + 189x - 45$.

Problema 1.4. Encontrar todos los r tal que $12r^4 - 16r^3 > 41r^2 - 69r + 18$.

Problema 1.5. Si el polinomio $P(x) = x^{n+2} + Ax^{n+1} + ABx^n$ es divisible por $C(x) = x^2 - (A + B)x + AB$ con $AB \neq 0$. Hallar el valor de $E = \frac{A}{B}$.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Problema 2.1. Sea el polinomio $F(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4x - 3$. Notemos que $F(2) = 0$, así que 2 es raíz de F. Pero 2 no divide al término independiente de F, es decir que esta raíz viola el Teorema de la raíz racional. Argumente por qué pasa esto.

Problema 2.2. Encontrar las raíces del polinomio $R(x) = 6x^3 + x^2 - 19x + 6$.

Problema 2.3. Encontrar las raíces del polinomio $G(x) = 12x^3 - 107x^2 - 15x + 54$.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. El polinomio $P(x)$ de coeficientes enteros es divisible por 3 al evaluarlo en k, $k + 1$ y $k + 2$. Probar que $P(m)$ es múltiplo de 3 para cualquier entero m.

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[LN22] Ricardo Largaespada and William Nicoya. Clase 8 y 9. Raíces de Polinomios II. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Mayo 2022.

[TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 8. Raíces de polinomios ii. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Mayo 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com