

## Polinomios Clase #2

**Encuentro:** 2

**Curso:** Polinomios

**Fecha:** 25 de marzo de 2023

**Nivel:** 5

**Semestre:** I

**Instructor:** Kenny Jordan Tinoco

**D. auxiliar:** José Adán Duarte

### Contenido: Raíces de polinomios I

En esta segunda sesión abordaremos el tema de Raíces de polinomios, un tema muy interesante y extenso, que nos brinda una perspectiva diferente sobre estas expresiones. Veremos definiciones, teoremas, ejemplos, fórmulas, ejercicios y problemas que nos ayudarán a aventurarnos al mundo de las raíces de polinomios. Se espera que el estudiante logre comprender la teoría aquí expuesta y que en caso de preguntas o dudas se comunique con nosotros para ayudarlo.

## 1. Desarrollo

### 1.1. Definiciones

**Definición 1.1 (Raíz de un Polinomio).** La raíz de un polinomio  $P(x)$  es un número  $r$ , tal que  $P(r) = 0$ . También, diremos que  $r$  es una solución de la ecuación  $P(x) = 0$ .

**Ejemplo 1.** Demuestre que  $u$  es raíz del polinomio  $R(x) = x^2 - (u + 17)x + 17u$ .

**Solución.** Para demostrar que  $u$  es raíz<sup>1</sup> de  $R(x)$ , basta probar que  $R(u) = 0$ . Lo cual es fácil ver cuando evaluamos  $R(u) = u^2 - (u + 17)u + 17u = u^2 - u^2 - 17u + 17u = 0$ .  $\square$

**Definición 1.2 (Factor de un Polinomio).** Sea  $P$  un polinomio con  $\deg(P) = n$  y  $a \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $(x - a)$  es un *factor* de  $P(x)$  si existe un polinomio<sup>2</sup>  $Q(x)$  tal que

$$P(x) = (x - a)Q(x).$$

**Teorema 1.1 (Teorema del factor).** Dado un polinomio  $P$ , de grado  $n$  y  $a \in \mathbb{R}$ , diremos que  $a$  es una raíz de  $P$  si y sólo si  $(x - a)$  es un factor de  $P(x)$ . Es decir

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x)$$

para algún polinomio  $Q(x)$ .

---

<sup>1</sup>¿Podés encontrar otra raíz de  $R(x)$ ?

<sup>2</sup>¿Por qué  $\deg(Q) = (n - 1)$ ?

Si  $a_1, a_2$  y  $a_3$  son tres raíces distintas del polinomio cúbico  $P(x)$ , por el **Teorema 1.1**,

$$P(x) = (x - a_1)Q(x)$$

Para algún  $Q(x)$ , pero como  $P(a_2) = (a_2 - a_1)Q(a_2) = 0$  y  $a_2 \neq a_1$ , entonces  $Q(a_2) = 0$ , es decir  $a_2$  es raíz de  $Q$ , por lo tanto por el **Teorema 1.1**

$$Q(x) = (x - a_2)R(x)$$

Para algún  $R(x)$ . Análogamente, tendremos que  $R(x) = (x - a_3)S(x)$ , para algún  $S$  constante. Así,

$$P(x) = c(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3), \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Vemos que saber las raíces de  $P$  nos condujo a su factorización<sup>3</sup>. Y en general, para un polinomio  $P(x)$  de grado  $n$  y raíces  $r_i$  con  $1 \leq i \leq n$ , este puede ser expresado como:

$$P(x) = c(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_{n-1})(x - r_n), \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

**Cantidad de raíces de un polinomio:** Un polinomio de grado  $n$  tiene como máximo  $n$  raíces (o ceros). Así, por ejemplo, un polinomio  $P$  con  $\deg(P) = 7$ , tiene a lo más 7 raíces.

**Multiplicidad de raíces:** Si existe  $m \in \mathbb{N}$  y un polinomio  $Q(x)$  tal que

$$P(x) = (x - a)^m Q(x)$$

diremos que la raíz  $a$  tiene multiplicidad  $m$ . Si  $m = 1$  diremos que la raíz  $a$  es simple.

**Ejemplo 2.** Sea  $P(x)$  un polinomio con coeficientes enteros y suponga que  $P(1)$  y  $P(2)$  son ambos impares. Demuestre que no existe ningún entero  $n$  para el cual  $P(n) = 0$ .

**Solución.** Nos piden mostrar que  $P(x)$  no tiene raíces enteras, entonces supongamos por el contrario, que existe un entero  $n$  tal que  $P(n) = 0$ . Entonces, por el **Teorema 1.1**  $P(x) = (x - n)Q(x)$ , con  $Q(x)$  un polinomio con coeficientes enteros. Así podemos ver que,  $P(1) = (1 - n)Q(1)$  y  $P(2) = (2 - n)Q(2)$  son impares, pero  $(1 - n)$  y  $(2 - n)$  son enteros consecutivos, así que uno de ellos debe ser par. Por lo tanto,  $P(1)$  o bien  $P(2)$  tiene que ser par, lo cual contradice las condiciones del problema. Luego,  $n$  no existe.  $\square$

**Ejemplo 3.** Sea  $M(x)$  un polinomio cúbico con coeficientes enteros y sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , con  $a \neq b \neq c$  tal que  $M(a) = M(b) = M(c) = 2$ . Demostrar que no existe un  $d \in \mathbb{Z}$  para el que  $M(d) = 3$ .

**Solución.** Sea  $N(x) = M(x) - 2$ , como  $a, b$  y  $c$  son raíces de  $N(x)$ , es claro que  $N(x) = \alpha(x - a)(x - b)(x - c)$ , para algún entero  $\alpha$ . Si para algún entero  $d$  se tiene que  $M(d) = 3$ , entonces  $N(d) = \alpha(d - a)(d - b)(d - c) = 1$ . Para que esto suceda los factores deben ser 1 o  $-1$  y por lo tanto dos de ellos tendrían que ser iguales. Pero por la condición  $a \neq b \neq c$  esto no puede ser, luego  $d$  no existe.  $\square$

---

<sup>3</sup>Tema que se introduce en la sección 1.2.1.

## 1.2. Métodos para determinar raíces de polinomios

En este apartado nos centraremos en los métodos para la determinación de raíces de polinomios, particularmente para polinomios cuadráticos y cúbicos. Para determinar el valor de las raíces de polinomios se pueden utilizar diversos métodos, como por ejemplo; la factorización, las fórmulas de Cardano, la completación de cuadrados, fórmulas cuadráticas y cúbicas general, soluciones trigonométricas e hiperbólicas con valores auxiliares, métodos numéricos, entre otros. El presente escrito, solo abordará algunos de estos métodos y se invita al lector complementar su aprendizaje con la búsqueda e investigación de otros métodos.

### 1.2.1. Factorización

Si un polinomio  $P(x)$  es equivalente al producto de otros polinomios con grado menor, entonces diremos que  $P(x)$  está factorizado. Por ejemplo, el polinomio  $M(x) = 5x^3 + 4x^2 + 5x + 4$ , es equivalente a  $(5x + 4)(x^2 + 1)$ , así diremos que  $M(x)$  está factorizado y sus factores son  $(5x + 4)$  y  $(x^2 + 1)$ .

**Definición 1.3.** Dado un polinomio cuadrático  $P(x) = ax^2 + bx + c$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , este puede ser factorizado como

$$P(x) = \frac{(ax + m)(ax + n)}{a}, \text{ donde } \begin{cases} m + n = b \\ mn = ac \end{cases}$$

### 1.2.2. Completación de cuadrados

No todos los polinomios cuadráticos pueden ser factorizados fácilmente. Por ejemplo, al tratar de factorizar  $x^2 + 6x - 1$  llegar directamente a  $(x + 3 - \sqrt{10})(x - 3 - \sqrt{10})$  no resulta tan evidente, por lo cual podemos auxiliarnos en técnicas como la **completación de cuadrados**. Si se tiene el polinomio<sup>4</sup>  $P(x) = x^2 + bx$  entonces podemos expresarlo de la forma:

$$P(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Lo cual facilita aplicar la **diferencia de cuadrados**.

**Ejemplo 4.** Hallar las raíces del polinomio  $R(r) = r^2 - 10r + 7$ .

**Solución.** Utilizando la completación de cuadrados, tenemos que

$$\begin{aligned} R(r) &= r^2 - 10r + 7 \\ &= \left(r - \frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 7 \\ &= (r - 5)^2 - 18 = (r - 5 + \sqrt{18})(r - 5 - \sqrt{18}) \\ &= [r - (5 - 3\sqrt{2})][r - (5 + 3\sqrt{2})] \end{aligned}$$

<sup>4</sup>¿Cómo sería la fórmula si  $P(x) = ax^2 + bx$ ?

De esta manera sabemos que  $R(r)$  tiene como raíces a  $(5 - 3\sqrt{2})$  y  $(5 + 3\sqrt{2})$ .  $\square$

### 1.2.3. Fórmula general

Cuando tenemos un polinomio cuadrático  $P(x) = ax^2 + bx + c$  con  $a \neq 0$ , podemos encontrar los valores para sus dos raíces en función de los coeficientes, a esta fórmula le conoceremos como fórmula general

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

**Demostración:** Al completar cuadrado en  $P(x)$  tenemos que

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] \\ &= a \left[ x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] \left[ x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] \\ &= a \left[ x - \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \left[ x - \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \right] \end{aligned}$$

Así,  $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  y  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  son la raíces del polinomio.

### 1.2.4. Análisis del discriminante

Sea el polinomio cuadrático  $P(x) = ax^2 + bx + c$  y sea  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Diremos que  $\Delta$  es el **discriminante** de  $P$  y que dependiendo de su signo se cumplirán los siguientes hechos:

- Si  $\Delta > 0$ , entonces  $P$  tiene dos raíces reales distintas, las cuales son:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si  $\Delta = 0$ , entonces  $P$  tiene una raíz real de multiplicidad 2, la cual es  $x = -\frac{b}{2a}$ .
- Si  $\Delta < 0$ , entonces  $P$  no tiene raíces reales, sino raíces complejas conjugadas<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Vale aclarar que el presente curso no entrará de lleno con las raíces complejas. Aunque sí veremos algunos ejercicios y problemas bonitos.

Nos piden hallar las raíces del polinomio  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Para ello podemos plantear la ecuación

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ con } a \neq 0.$$

Al hacer la sustitución  $y = x + \frac{b}{3a}$  nos da como resultado la ecuación de la forma  $y^3 + py + q$ , que desde ahora llamaremos la ecuación **Cúbica reducida**. La cual nos ayuda a obtener la expresión  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$  que llamaremos **discriminante** y que dependiendo de su signo se cumplirán los siguientes hechos:

- Si  $\Delta > 0$ , entonces  $P$  tiene una raíz real y dos raíces complejas.
- Si  $\Delta = 0$ , entonces  $P$  tiene una raíz real de multiplicidad tres en el caso de que  $p = q = 0$  o bien dos raíces reales (de multiplicidad uno y dos, respectivamente) en el caso de que  $p^3 = -q^3 \neq 0$ .
- Si  $\Delta < 0$ , entonces  $P$  tiene tres raíces reales diferentes.

### 1.2.5. Método de Cardano

Si se hace  $y = A + B$ , elevando al cubo y reacomodando se obtiene:

$$y^3 - 3AB y - (A^3 + B^3) = 0$$

Así, al comparar coeficientes homólogos con la ecuación **cúbica reducida**, se obtiene que  $3AB = -p$  y  $A^3 + B^3 = -q$ , y en base a estas dos ecuaciones podemos formar:

$$(A^3)^2 + q(A^3) - \frac{p^3}{27} = 0$$

la cual es una ecuación cuadrática en  $A^3$ , que por la **fórmula general** podemos encontrar sus soluciones. Procediendo análogamente para  $B^3$ , llegamos a

$$A = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-q}{4} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$B = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-q}{4} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Así obtenemos que  $y = \sqrt[3]{\frac{-q}{4} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{4} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ . Finalmente, obtuvimos las soluciones de la ecuación **cúbica reducida** y por lo tanto las soluciones de la ecuación cúbica general. A este resultado le conoceremos como la fórmula o Método de Cardano para un polinomio cúbico.

**Ejemplo 5.** ¿Para qué valores de  $\delta$  el polinomio  $\delta x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{\delta}$  tiene sus dos raíces iguales?

**Solución.** El polinomio tiene raíces iguales si el discriminante es nulo. Es decir,  $\Delta = 4 - 4\delta(1 - \frac{1}{\delta})$  de donde es fácil ver que  $\delta(1 - \frac{1}{\delta}) = 1$ . Luego,  $\delta = 2$  es la única posibilidad.  $\square$

### 1.3. Agregados culturales y preguntas

1. Los números reales son un subconjunto de los números complejos. ( $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ).
2. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que cualquier polinomio de grado mayor a cero con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja<sup>6</sup>.
3. **Pregunta:** ¿Cuántas raíces reales tiene el polinomio  $P(x) = x^2 + 1$ ?

## 2. Ejercicios y Problemas

**Ejercicio 1.** Determina las raíces los siguientes polinomios con el método que más te guste

- |                      |                             |                           |
|----------------------|-----------------------------|---------------------------|
| 1. $x^2 + x - 20$    | 4. $x^3 - 1331$             | 7. $r^4 - 13r^2 + 36$     |
| 2. $9t^2 + 88t - 20$ | 5. $-21x^2 - 11x + 2$       | 8. $x^3 - 9x^2 - 9x - 15$ |
| 3. $x^3 - 6x + 9$    | 6. $(c+d)^2 - 18(c+d) + 65$ | 9. $12p^2 - 7p - 12$      |

**Problema 2.1.** Determine todos los posibles valores que puede tomar  $\frac{x}{y}$  si  $x, y \neq 0$  y  $6x^2 + xy = 15y^2$ .

**Problema 2.2.** Hallar  $K \in \mathbb{R}$  tal que  $x = K^2(x-1)(x-2)$  tiene raíces reales.

**Problema 2.3.** Encontrar todas las soluciones de la ecuación  $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}^+$ .

**Problema 2.4.** Sean  $a, b$  y  $c$  números reales positivos. ¿Es posible que cada uno de los polinomios  $P(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $Q(x) = bx^2 + cx + a$  y  $R(x) = cx^2 + ax + b$  tenga sus dos raíces reales?

## 3. Problemas propuestos

**Problema 3.1.** Si  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  es un polinomio tal que  $P(1) = 10$ ,  $P(2) = 20$  y  $P(3) = 30$ , determine el valor de  $\frac{P(12)+P(-8)}{10}$ .

**Problema 3.2.** Sea  $P(x)$  un polinomio cuadrático. Demostrar que existen polinomios cuadráticos  $G(x)$  y  $H(x)$  tales que  $P(x)P(x+1) = (G \circ H)(x)$ .

**Problema 3.3.** Sea  $P(x) = mx^3 + mx^3 + nx + n$  un polinomio cuyas raíces son  $a, b$  y  $c$ . Demostrar que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

**Problema 3.4.** Sea  $P(x)$  un polinomio cúbico mónico tal que  $P(1) = 1$ ,  $P(2) = 2$  y  $P(3) = 3$ . Encontrar  $P(4)$ .

---

<sup>6</sup>Este teorema lo veremos más adelante.

## 4. Extra

**Problema 4.1.** Sean  $a$  y  $b$  enteros. Determinar todas las soluciones de la ecuación

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x,$$

si se sabe que tiene una solución entera.

**Problema 4.2.** Supóngase que el polinomio  $5x^3 + 4x^2 - 8x + 6$  tiene tres raíces reales  $a, b$  y  $c$ . Encuentra el valor de

$$a(1 + b + c) + b(1 + a + c) + c(1 + a + b).$$

## Referencias

- [Bar89] Edward Barbeau. *Polynomials*. Springer, 1989.
- [BGV14] Radmila Bulajich, José Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.
- [CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 2. Raíces de polinomios I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2022.
- [Lul16] Lulú. Polinomios. *OMMBC*, 2016.

### En caso de consultas

**Instructor:** Kenny J. Tinoco

**Teléfono:** +505 7836 3102 (*Tigo*)

**Correo:** kenny.tinoco10@gmail.com

**Docente:** José A. Duarte

**Teléfono:** +505 8420 4002 (*Claro*)

**Correo:** joseandanduarte@gmail.com