Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #6

Encuentro: 6
Curso: Polinomios
Fecha: 29 de abril de 2023

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Teoremas especiales y divisibilidad polinómica

En esta sexta sesión de clase veremos algunos teoremas y resultado útiles en la resolución de problemas de divisibilidad polinómica. Veremos el Teorema del Resto que es el caso general del Teorema del Factor (que ya conocemos) y también el Teorema fundamental del Álgebra, el cual nos ayudará a demostrar un resultado muy útil que también ya hemos venido utilizando. En general es esta clase reforzará conocimiento que ya hemos visto.

1. Desarrollo

Teorema 1.1 (Teorema del resto). Dado un polinomio P, de grado n y $a \in \mathbb{R}$, diremos que el resto de P cuando es dividido por $x - a$ es $P(a)$. Es decir

$$P(a) = r \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x) + r$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Demostración. Por la definición de *División con resto*[1] podemos escribir

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$$

Donde $\deg(R) < \deg(x - a) = 1$, es decir R necesariamente tiene que ser un polinomio constante, digamos $R(x) = r$. Sustituyendo $x = a$ en la ecuación anterior, obtenemos que

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R(a) = R(a) = r$$

Esto es, el residuo de la división de P por $x - a$ es $P(a)$.

Notemos que el *Teorema del resto* inmediatamente implica al *Teorema del factor* el cual ya hemos estudiado.

Teorema 1.2 (Teorema del factor). Dado un polinomio P, de grado n y $a \in \mathbb{R}$, diremos que a es una raíz de P si y sólo si $(x - a)$ es un factor de $P(x)$. Es decir

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x)$$

para algún polinomio $Q(x)$.

[1] Ver [TD23b] página 1.

Demostración. Si $(x-a) \mid P(x)$, entonces existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

Y por la unicidad del cociente y el residuo de la *División con resto*, se sigue que el residuo de la división de P entre $x-a$ es cero. Luego, $P(a) = 0$.

Teorema 1.3 (Teorema fundamental del Álgebra). Todo polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, donde $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$, tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Desafortunadamente, la prueba del *Teorema fundamental del Álgebra* es un poco[2] complicada para nuestro pequeño curso de polinomios. Sin embargo, vamos usar este teorema para demostrar que todo polinomio de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces (hecho que ya hemos venido utilizando[3]). Esto significa que podemos escribir cualquier polinomio $P(x)$ en la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$

donde $r_1, r_2, \cdots, r_n$ son reales o complejos.

Esta prueba la haremos por inducción[4] en el grado del polinomio. Si el polinomio es de grado 1, el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado es cierto para polinomios de grado $n-1$ y consideremos un polinomio $P(x)$ de grado n. De acuerdo con el *Teorema Fundamental del Álgebra*, $P(x)$ tiene una raíz r_1, esto es, $(x-r_1) \mid P(x)$. Luego, existe un polinomio $Q_1(x)$ tal que $P(x) = (x-r_1)Q_1(x)$.

Como $\deg(P) = n = \deg[(x-r_1)Q_1(x)] = \deg(x-r_1) + \deg[Q_1(x)]$, tenemos que $\deg[Q_1(x)] = n-1$. Luego, por la hipótesis de inducción, el polinomio $Q_1(x)$ tiene exactamente $n-1$ raíces, esto es $Q_1(x) = c(x-r_2)(x-r_3)\cdots(x-r_n)$. Por lo tanto, $P(x) = c(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$.

El resultado que acabamos de demostrar, solo muestra al existencia de las raíces; encontrarlas es otro problema, que podemos atacar con la fórmulas de Vieta o la división de polinomios.

Ejemplo 1. ¿Es el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 6$ divisible por $x+3$?

Solución. Es claro ver, por el *Teorema del factor*, que si $x+3$ es factor de P entonces solo basta probar que $P(-3) = 0$. Rápidamente vemos que

$$P(-3) = (-3)^4 + 2(-3)^3 - 2(-3)^2 + (-3) - 6$$
$$P(-3) = 81 - 54 - 18 - 3 - 6 = 81 - 81 = \boxed{0}$$

□

[2]Por no decir demasiado XD.
[3]Ver [TD23a] página 2.
[4]La Inducción Matemática es un tema que aún no hemos visto, pero por el momento podés buscarlo por tu cuenta.

Ejemplo 2. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Cuando $P(x)$ es dividido por $x-1$, el resto es 3. Cuando $P(x)$ es dividido por $x-2$, el resto es 5. Determinar el resto cuando $P(x)$ es dividido por el polinomio x^2-3x+2.

Solución. Escribamos
$$P(x) = (x^2-3x+2)Q(x) + R(x)$$
donde R es el resto que buscamos. Como $\deg(R) < \deg(x^2-3x+2) = 2$, podemos escribir $R(x) = ax+b$ para constantes a, b. Por otra parte, por el *Teorema del resto*, tenemos que $P(1) = 3$ y $P(2) = 5$. Como 1 y 2 son raíces de x^2-3x+2, al sustituir estos valores en P, obtenemos que

$$\begin{gathered} P(1) = 0 \times Q(1) + R(1) = a+b \\ P(2) = 0 \times Q(2) + R(2) = 2a+b \end{gathered}$$

Como $P(1) = 3$ y $P(2) = 5$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 3 \\ 2a+b & = & 5 \end{array} \right.$$

De donde obtenemos $(a, b) = (2, 1)$. Por lo tanto, el resto buscado es $\boxed{2x+1}$. $\square$

Ejemplo 3. Encontrar el residuo cuando $x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6$ es dividido por $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Solución. Como el grado de $x^3 - 2x^2 - x + 2$ es 3, el grado del resto puede ser a lo más 2, así que podemos expresar el resto que buscamos como el polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ para constantes a, b, c. Al escribir la división como

$$x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6 = \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) Q(x) + \left(ax^2 + bx + c\right)$$

Rápidamente, notamos que $x^3 - 2x^2 - x + 2$ puede factorizarse

$$x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6 = (x-2)(x-1)(x+1)Q(x) + (ax^2 + bx + c)$$

Por el *Teorema del resto*, si sustituimos x en los valores $2, 1, -1$ el término que multiplica a $Q(x)$ se hace cero

$$\begin{gathered} (2)^{100} - 4(2)^{98} + 5(2) + 6 = 0 \times Q(2) + a(2)^2 + b(2) + c \\ (1)^{100} - 4(1)^{98} + 5(1) + 6 = 0 \times Q(1) + a(1)^2 + b(1) + c \\ (-1)^{100} - 4(-1)^{98} + 5(-1) + 6 = 0 \times Q(-1) + a(-1)^2 + b(-1) + c \end{gathered}$$

De donde formamos el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4a+2b+c & = & 16 \\ a+b+c & = & 8 \\ a-b+c & = & -2 \end{array} \right.$$

Que al resolverlo obtenemos $(a, b, c) = (1, 5, 2)$, de aquí que el residuo sea $\boxed{x^2 + 5x + 2}$. $\square$

1.1. Agregados culturales y preguntas

- Para un estudiante de matemáticas, escuchar a alguien hablar sobre las matemáticas difícilmente le hace mayor bien que a un estudiante de natación el escuchar a alguien hablar sobre la natación. Vos no podés aprender la técnica de natación teniendo a alguien que te dice cómo poner tus brazos y piernas; y no podés aprender a resolver problemas teniendo a alguien que te dice a cada momento cómo completar el cuadrado o sustitur $sen(u)$ por y. ¡La mejor forma de aprender es hacer!

- No te limités a memorizar teoremas importantes. Aprendé a probarlos. Los métodos usados para probar teoremas también pueden usarse para resolver otros problemas a los que no es fácil aplicar directamente estos teoremas.

- Si $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ y $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ ¿será cierto que $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \cdots + 2a_{n-1}a_n$?

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 2.1. Calcular el valor de $a+b$ si $1+i$ es raíz del polinomio $x^5 + ax^3 + b$.

Problema 2.2. ¿Para qué valores de k se cumple que $x-2$ es factor de $x^3+2kx^2+k^2x+k-3$?

Problema 2.3. Para un polinomio desconocido que deja un resto 2 al dividirlo por $x-1$, y un resto 1 al dividirlo por $x-2$. ¿Cuál es el resto que se obtiene si este polinomio es dividido por $(x-1)(x-2)$?

Problema 2.4. Encontrar el resto cuando $(x+3)^5 + (x+2)^8 + (5x+9)^{1997}$ es dividido por $x+2$.

Problema 2.5. Encontrar el resto cuando $x^{2006} + x^{2005} + \cdots + x + 1$ es dividido por $x+1$.

Problema 2.6. Sea $F(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Encontrar el residuo cuando $F(x^5)$ es dividido por $F(x)$.

Problema 2.7. Determinar todos los enteros positivos n, tales que el polinomio $x^n + x - 1$ sea divisible por el polinomio $x^2 - x + 1$.

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 3.1. El polinomio $P(x)$ deja residuo -2 en la división entre $x-1$ y residuo -4 en la división entre $x+2$. Encontrar el residuo cuando el polinomio es dividido por x^2+x-2.

Problema 3.2. Encontrar el resto cuando el polinomio $x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x$ es dividido entre x^3-x.

Problema 3.3. Probar que si un polinomio $F(x)$ deja un residuo de la forma $px+q$ cuando es dividido entre $(x-a)(x-b)(x-c)$ donde a, b y c son todos distintos, entonces

$$(b-c)F(a)+(c-a)F(b)+(a-b)F(c)=0.$$

4. Extra

Problema 4.1. Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1)=2$, $P(2)=3$ y $P(3)=2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[NL22a] William Nicoya and Ricardo Largaespada. Clase 6. Divisibilidad polinómica. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2022.

[NL22b] William Nicoya and Ricardo Largaespada. Clase 7. Teorema del residuo y teorema del factor. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Mayo 2022.

[TD23a] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 2. Raíces de polinomios I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2023.

[TD23b] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 5. División de Polinomios. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com