Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Colinealidad y Concurrencia
Clase #9

Encuentro: 23
Curso: Colinealidad y Concurrencia
Fecha: 23 de septiembre de 2023

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Clase práctica #3

En esta tercera clase práctica se presentan los primeros diez de los veinte problemas del trabajo de Concurrencia y Colinealidad.

1. Problemas propuestos

Primeros diez problemas del trabajo de concurrencia y colinealidad.

Problema 1.1. Sea D el pie de altura desde A en el triángulo $\triangle ABC$ y M, N puntos en los lados CA y AB talque las rectas BM y CN se intersecan en AD. Probar que AD es bisectriz del ángulo $\angle MDN$.

Problema 1.2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro I. Sea Γ un círculo centrado en I con radio mayor al inradio. Sean X_1 la intersección de Γ con AB más cercana a B; X_2 y X_3 las intersecciones de Γ con BC donde X_2 es más cercana a B; y X_4 la intersección de Γ con CA más cercana a C. Sea K la intersección de X_1X_2 con X_3X_4. Probar que AK biseca X_2X_3.

Problema 1.3. Sea $ABCD$ un cuadrado y sea X un punto en lado BC. Sea Y un punto en la recta CD tal que $BX = YD$ y D se encuentra entre C y Y. Demuestra que el punto medio de XY se encuetra sobre la diagonal BD.

Problema 1.4. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las rectas tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM interseca de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA interseca de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB interseca de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE interseca a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F). Muetra que las rectas AF, BP y CE concurren.

Problema 1.5. Sea Ω el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$ y sea ω_a la circunferencia tangente al segmento CA, segmento AB y Ω. Se definen ω_b y ω_c de manera análoga. Sea A', B', C' los puntos de toque de $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ con Ω, respectivamente. Probar que AA', BB', CC' concurren en la recta OI donde O e I son el cincuncentro y el incentro de $\triangle ABC$, respectivamente.

Problema 1.6. Sea $ABCD$ un trapezoide con $AB > CD$ y $AB||CD$. Sean los puntos K, L sobre los segmentos AB, CD, respectivamente, tal que $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Suponga que existen los puntos P, Q en la recta KL que satisfacen $\angle APB = \angle BCD$ y $\angle CQD = \angle ABC$. Probar que los puntos P, Q, B, C con concíclicos.

Problema 1.7. Los puntos P, Q y R están sobre los lados AB, BC y CA del triángulo acutángulo $\triangle ABC$, respectivamente. Si $\angle BAQ = \angle CAQ$, $QP \perp AB$, $QR \perp AC$ y CP y BR se intersecan en S probar que $AS \perp BC$.

Problema 1.8. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con circuncentro O y baricentro G. Sean A', B', C' las reflexiones de los puntos medios de BC, CA, AB con respecto a O, respectivamente. Probar que AA', BB', CC' y GO con concurrente.

Problema 1.9. Un triángulo isósceles $\triangle ABC$ tiene base AB y altura CD con $BC = CA$. Sean P un punto sobre CD, E la intersección de la recta AP con BC y F la intersección de la recta BP con CA. Suponga que los incírculos del triángulo $\triangle ABP$ y del cuadrilátero $PECF$ son congruentes. Demuestre que los incírculos de $\triangle ADP$ y $\triangle BCP$ son también congruentes.

Problema 1.10. Sea el triángulo $\triangle ABC$ con $AC = BC$, sea P un punto dentro del triángulo tal que $\angle PAB = \angle PBC$. Si M es el punto medio de AB, entonce probar que $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

Nota: los problemas no está ordenados por orden de dificultad.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)
Correo: `kenny.tinoco10@gmail.com`

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 (*Claro*)
Correo: `joseandanduarte@gmail.com`