Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #9

Encuentro: 9
Curso: Polinomios
Fecha: 20 de mayo de 2023

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Fórmulas de Vieta II y Polinomios simétricos

En esta novena clase veremos los llamados polinomios simétricos, un tipo particular de polinomios multivariables que de manera intrínseca ya hemos visto. Luego, nos centraremos en los polinomios simétricos elementales y sus relaciones con la fórmulas de Vieta.

1. Desarrollo

1.1. Polinomios simétricos elementales

Un polinomio de dos variables $P(x, y)$ es simétrico si $P(x, y) = P(y, x)$ para toda x, y. Por ejemplo, $7x^2 - 5xy + 7y^2$ es simétrico, ya que $P(x, y) = 7x^2 - 5xy + 7y^2$ es igual a $P(y, x) = 7y^2 - 5yx + 7x^2$.

Así mismo, un polinmio de tres variables $P(x, y, z)$ es simétrico si $P(x, y, z) = P(x, z, y) = P(y, x, z) = P(y, z, x) = P(z, x, y) = P(z, y, x)$. Por ejemplo, $13x^5 + 13y^5 + 13z^5 - 8xyz + 1$ es simétrico, ya que

$$\begin{aligned}
P(x, y, z) &= 13x^5 + 13y^5 + 13z^5 - 8xyz + 1 \\
P(x, z, y) &= 13x^5 + 13z^5 + 13y^5 - 8xzy + 1 \\
P(y, x, z) &= 13y^5 + 13x^5 + 13z^5 - 8yxz + 1 \\
P(y, z, x) &= 13y^5 + 13z^5 + 13x^5 - 8yzx + 1 \\
P(z, x, y) &= 13z^5 + 13x^5 + 13y^5 - 8zxy + 1 \\
P(z, y, x) &= 13z^5 + 13y^5 + 13x^5 - 8zyx + 1
\end{aligned}$$

son todos iguales. Análogamente, un polinomio de n variables $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es simétrico si $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(x_1, x_3, \cdots, x_n) = \cdots$, es decir si P evaluado en todas las permutaciones de las n variables da el mismo resultado.

Observación 1. En el polinomio de ejemplo $7x^2 - 5xy + 7y^2$, veamos que $P(x, 1) = P(1, x)$. Es decir, $7x^2 - 5x + 7$ es un polinomio simétrico o **recíproco**, esta es la manera en la que se presentaron los polinomios recíprocos en la primera clase del curso[1].

[1] Ver [TD23a], página 1.

Resulta que los polinomios simétricos más simples son los que tienen sus variables con grado 1, como por ejemplo $x + y$, xy, $x + y + z$, etc. Esto se puede llevar a la formalización, por lo cual veamos la siguiente definición.

Definición 1.1 (Polinomio simétrico elemental). Sea $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. El k-ésimo polinomio simétrico elemental en las variables $x_1, \cdots, x_n$ es el polinomio[2] σ_k definido por

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

donde la suma se realiza sobre los subconjuntos $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ de tamaño k del conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Para más claridad veamos algunos casos:

Variables	Polinomios simétricos elementales
a, b	$\sigma_1 = a + b$ $\sigma_2 = ab$
a, b, c	$\sigma_1 = a + b + c$ $\sigma_2 = ab + bc + ca$ $\sigma_3 = abc$
a, b, c, d	$\sigma_1 = a + b + c + d$ $\sigma_2 = ab + ac + ad + bc + bd + da$ $\sigma_3 = abc + bcd + cda$ $\sigma_4 = abcd$
a, b, c, d, e	$\sigma_1 = a + b + c + d + e$ $\sigma_2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cb + ce + de$ $\sigma_3 = abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + ced$ $\sigma_4 = abcd + abce + abde + acde + bced$ $\sigma_5 = abcde$

Ejemplo 1. Hallar $x^2 + y^2$ si

$$\begin{cases} x + y & = & 1 \\ x^4 + y^4 & = & 7 \end{cases}$$

Solución. De la primera ecuación $x + y = 1$ al cuadrado obtenemos que $x^2 + 2xy + y^2 = 1$, es decir $x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. Por lo tanto sólo basta encontrar el valor de xy para solucionar el problema. Veamos que

$$(x^2 + y^2)^2 = (1 - 2xy)^2$$
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 1 - 4xy + 4x^2y^2$$
$$x^4 + y^4 = 2x^2y^2 - 4xy + 1$$
$$7 = 2x^2y^2 - 4xy + 1$$
$$2x^2y^2 - 4xy - 6 = 0$$
$$2(x^2y^2 - 2xy - 3) = 0$$
$$2(xy - 3)(xy + 1) = 0$$

[2] σ_k: Se lee sigma sub k.

Es decir, xy puede tomar los valores de 3 y -1. Luego, $x^2 + y^2$ puede tomar los valores de $\boxed{-5}$ y $\boxed{3}$. $\square$

Otra notación útil para polinomios simétricos, es la siguiente.

Definición 1.2 (Suma simétrica de potencias). La suma simétrica de la k-ésimas potencias en las variables $x_1, \cdots, x_n$ es el polinomio s_k definido por

$$s_k = s_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

Algunas relaciones clásicas entre las sumas simétricas de potencias y los polinomios simétricos elementales, como por ejemplo $\boxed{s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2}$ para cualquier cantidad de variables. La relación $\boxed{s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}}$ para dos variables y $\boxed{s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}}$ para tres variables.

Estas relaciones casos particulares de las llamadas **Fórmulas de Newton**. Se invita al estudiante investigar por su propia cuenta sobre estas fórmulas.

1.2. Fórmulas de Vieta

Ya conociendo los polinomios simétricos elementales, podemos volver a ver la defición de las fórmulas de Vieta que ya conocemos[3].

Definición (Fórmulas de Vieta). Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$, entonces

$$\sigma_k = (-1)^k \times \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Ejemplo 2. Determine el producto de las raíces de $50x^{50} + 49x^{49} + \cdots + x + 1$.

Solución. Por las fórmulas de Vieta, tenemos que

$$\sigma_{50} = (-1)^{50} \times \frac{a_0}{a_{50}} = \boxed{\frac{1}{50}}.$$

$\square$

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 2.1. Consideremos el polinomio $P(x) = x^n - (x-1)^n$, donde n es un entero positivo impar. Encontrar el valor de la suma y el valor del producto de sus raíces.

[3] Ver [TD23b], página 1.

Problema 2.2. Encontrar los números reales x y y, que satisfacen

$$\begin{cases} x^3 + y^3 &= 7 \\ x^2 + y^2 + x + y + xy &= 4 \end{cases}$$

Problema 2.3. Encontrar todas las soluciones reales del sistema

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz &= x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}$$

Problema 2.4. Sean x, y y z números reales, encontrar todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z &= 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 30 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 132 \end{cases}$$

Problema 2.5. Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, demostrar que

$$3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5) = 5(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4).$$

Problema 2.6. Sean a, b y c números reales distintos de cero, con $a + b + c \neq 0$. Probar que si

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c},$$

entonces para n impar se cumple

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 3.1. Sean x, y y z números reales tales que

$$\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 7 \end{cases}$$

Hallar el valor de $x^4 + y^4 + z^4$.

Problema 3.2. Sean a, b y c las raíces del polinomio $3x^3 + x + 2023$. Calcular

$$(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3.$$

Problema 3.3. Considera el polinomio $P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ y $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 las raíces de Q, encontrar $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$.

4. Extra

Problema 4.1. Sea x un número real tal que $\sin^{10}(x)+\cos^{10}(x)=\frac{11}{36}$, entonces $\sin^{12}(x)+\cos^{12}(x)=\frac{m}{n}$ con m y n primos relativos. Encontrar $m+n$.

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[Eng97] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1997.

[GR23] Jonathan Gutiérrez and Reynaldo Romero. Álgebra, Nivel Centro. Sesión 5. Polinomios simétricos elementales. Relaciones de Vieta. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Mayo 2023.

[NL22a] William Nicoya and Ricardo Largaespada. Clase 11. Fórmulas de Vieta para polinomios de grado n. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Junio 2022.

[NL22b] William Nicoya and Ricardo Largaespada. Clase 12. Polinomios simétricos. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Junio 2022.

[TD23a] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 1. Polinomios cuadráticos y cúbicos. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2023.

[TD23b] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 4. Fórmulas de Vieta. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com