

Notas para la clase

1. Clase 02

Se empieza la clase dando un pequeño resumen de lo visto en la sesión anterior, se hace énfasis en la evaluación de polinomios

$P(\text{expresión}) \rightarrow \text{expresión}$. (Expresión algebraica \equiv polinomio)

$P(\text{constante}) \rightarrow \text{constante}$. (Constante \equiv número)

Se hace mención a evaluaciones notables como $P(0)$ y $P(1)$. Luego, se introduce la definición de raíz de un polinomio (alusión a la **definición 1.1**) y la razón por la que se estudia.

Se muestra el polinomio $M(x) = x^5 - 3x^4 - 29x^3 - 13x^2 + 120x + 140$ y se pide a los estudiante hallar una raíz por tanteo. También, describir el polinomio a manera de ejercicio. El docente podrá hacer las siguientes preguntas ¿qué características tiene M ? ¿es mónico? ¿es completo? ¿es simétrico? ¿está ordenado?. Después que el estudiante intentó encontrar soluciones por su cuenta, anunciar que 7 es una raíz. Y a continuación, comprobar que $x = 7$ es una raíz.

$$1 \times 16807 = +16807$$

$$-3 \times 2401 = -..7203$$

$$-29 \times 343 = -..9947$$

$$-13 \times 49 = -....637$$

$$120 \times 7 = +....840$$

$$1 \times 140 = +....140$$

Hacer la siguiente pregunta: ¿es fácil o obvio deducir que $x = 7$ es una raíz?. Introducir la definición de factor (alusión a la **definición 1.2**) y mencionar la factorización. Luego, expresar el polinomio M como el producto del factor $(x - 7)$ con otro polinomio¹:

$$\begin{aligned} & x^5 + 4x^4 - x^3 - 20x^2 - 20x \\ & \quad - 7x^4 - 28x^3 + 7x^2 + 140x + 140 \\ & x^5 - 3x^4 - 29x^3 - 13x^2 + 120x + 140 \\ \Rightarrow M(x) &= (x - 7)(x^4 + 4x^3 - x^2 - 20x - 20) \end{aligned}$$

Dar énfasis en cómo los factores dan información de las raíces de un polinomio y hacer referencia al **Teorema del factor**.

¹Preguntar nuevamente si los polinomios son completos y mostrar la completación de polinomios

Terminar la factorización de M

$$\begin{aligned}
 & x^4 + 4x^3 + 4x^2 \\
 & \quad - 5x^2 - 20x - 20 \\
 & x^4 + 4x^3 - x^2 - 20x - 20 \\
 \Rightarrow M(x) &= (x - 7)(x^2 - 5)(x + 2)^2 \\
 \Rightarrow M(x) &= (x - 7)(x - \sqrt{5})(x + 2)(x + 2)(x + \sqrt{5})
 \end{aligned}$$

Hacer referencia a que la cantidad de raíces de un polinomio está determinado por su grado e indicar las multiplicidades de las raíces del polinomio M .

2. Clase 04

2.1. Solución de la tarea

Problema 2.1. Sea el polinomio P para el cual $P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Encontrar $P(x^2 - 1)$.

Solución 1. La solución de este problema se reduce a encontrar una expresión ' E ' que al remplazarla por x nos de como resultado $x^2 - 1$. Podemos encontrar esta expresión con una simple ecuación:

$$\begin{aligned}
 E^2 + 1 &= x^2 - 1 \\
 E^2 &= x^2 - 2 \\
 E &= \pm\sqrt{x^2 - 2}
 \end{aligned}$$

Es decir que si transformamos x en $\pm\sqrt{x^2 - 2}$ obtendremos lo que nos piden².

Haciendo $x \rightarrow \pm\sqrt{x^2 - 2}$

$$\begin{aligned}
 P\left[\left(\pm\sqrt{x^2 - 2}\right)^2 + 1\right] &= \left(\pm\sqrt{x^2 - 2}\right)^4 + 4\left(\pm\sqrt{x^2 - 2}\right)^2 \\
 P\left(x^2 - 2 + 1\right) &= \left(x^2 - 2\right)^2 + 4\left(x^2 - 2\right) \\
 P\left(x^2 - 1\right) &= x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 8 \\
 P\left(x^2 - 1\right) &= \boxed{x^4 - 4}
 \end{aligned}$$

□

²A esta transformación vamos a denotarla por $x \rightarrow \pm\sqrt{x^2 - 2}$

Solución 2. La segunda solución es muy parecida a la primera pero en lugar de encontrar directamente $P(x^2 - 1)$ encontramos $P(x)$ como paso intermedio.

$$\begin{aligned}E^2 + 1 &= x \\E^2 &= x - 1 \\E &= \pm\sqrt{x - 1}\end{aligned}$$

Haciendo $x \rightarrow \pm\sqrt{x - 1}$

$$\begin{aligned}P\left[\left(\pm\sqrt{x - 1}\right)^2 + 1\right] &= \left(\pm\sqrt{x - 1}\right)^4 + 4\left(\pm\sqrt{x - 1}\right)^2 \\P(x - 1 + 1) &= (x - 1)^2 + 4(x - 1) \\P(x) &= x^2 - 2x + 1 + 4x - 4 \\P(x) &= x^2 + 2x - 3\end{aligned}$$

Luego solo evaluamos $P(x^2 - 1)$

$$\begin{aligned}P(x^2 - 1) &= (x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) - 3 \\P(x^2 - 1) &= x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 2 - 3 \\P(x^2 - 1) &= \boxed{x^4 - 4}\end{aligned}$$

□

Problema 2.2. Sea $S(x)$ un polinomio cúbico con $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, $S(3) = 3$ y $S(4) = 5$. Encontrar $S(6)$.

Solución 1. Al tomar al polinomio auxiliar R como $R(x) = S(x) - x$. Vemos que $R(1) = 0$, $R(2) = 0$ y $R(3) = 0$. Es decir que 1, 2 y 3 son raíces de R . Luego, por el teorema del factor

$$R(x) = a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Donde a es el coeficiente principal de R . Nos piden $S(6)$, lo cual lo podemos encontrar como $S(6) = R(6) + 6$. Pero para obtener $R(6)$ primero debemos saber el valor de a . Valor que podemos encontrar como

$$\begin{aligned}R(4) &= S(4) - 4 \\a(4 - 1)(4 - 2)(4 - 3) &= 5 - 4 \\6a &= 1 \\a &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Finalmente hallamos $S(6)$:

$$\begin{aligned}S(6) &= R(6) + 6 \\S(6) &= \frac{1}{6}(6 - 1)(6 - 2)(6 - 3) + 6 = \frac{5 \times 4 \times 3}{6} + 6 \\S(6) &= 10 + 6 = \boxed{16}\end{aligned}$$

□

Solución 2. Sabemos que S tiene la forma $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Al utilizar las evaluaciones que nos dan como datos podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones 4×4

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 2 \\ 27a + 9b + 3c + d = 3 \\ 64a + 16b + 4c + d = 5 \end{cases}$$

Al resolver este sistema, por el método que más te guste, veremos que $(a, b, c, d) = (\frac{1}{6}, -1, \frac{17}{6}, -1)$ es la única solución. Luego $S(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{17}{6}x - 1$. Finalmente al evaluar $S(6)$, llegamos a

$$\begin{aligned} S(6) &= \frac{1}{6} \times 6^3 - 6^2 + \frac{17}{6} \times 6 - 1 \\ S(6) &= 6^2 - 6^2 + 17 - 1 = \boxed{16} \end{aligned}$$

□

Problema 2.3. Determine un polinomio cúbico P en los reales, con una raíz igual a cero y que satisfice $P(x-1) = P(x) + 25x^2$.

Solución 1. Como P tiene una solución igual a cero, entonces este no tiene término independiente, es decir, tiene la forma $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Al evaluar el polinomio en ciertos valores veremos que

Si $x = 0$:

$$P(-1) = P(0) + 25(0)^2 \longrightarrow \boxed{P(-1) = 0}$$

Si $x = 1$:

$$P(0) = P(1) + 25(1)^2 \longrightarrow \boxed{P(1) = -25}$$

Si $x = -1$:

$$P(-2) = P(-1) + 25(-1)^2 \longrightarrow \boxed{P(-2) = 25}$$

Con estas evaluaciones formaremos el siguiente sistema de ecuaciones 3×3

$$\begin{cases} -a + b - c = 0 \\ a + b + c = -25 \\ -8a + 4b - 3c = 25 \end{cases}$$

Que al resolverlo, con el método que más te guste, vemos que tiene a $(a, b, c) = (-\frac{25}{3}, \frac{25}{2}, -\frac{25}{6})$ como única solución. Luego

$$\boxed{P(x) = -\frac{25}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2 - \frac{25}{6}x}$$

es la solución.

□

Solución 2. Esta solución se basa en la comparación de coeficientes del polinomio. Primero caracterizemos a P , como ya sabemos de la solución anterior

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Así $P(x-1)$ es igual a

$$\begin{aligned} P(x-1) &= a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) \\ P(x-1) &= a[x^3 - 3x^2 + 3x - 1] + b[x^2 - 2x + 1] + c(x-1) \\ P(x-1) &= ax^3 - 3ax^2 + 3ax - a + bx^2 - 2bx + b + cx - c \\ P(x-1) &= ax^3 - 3ax^2 + bx^2 + 3ax - 2bx + cx - a + b - c \\ P(x-1) &= ax^3 + (-3a+b)x^2 + (3a-2b+c)x + (-a+b-c) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} ax^3 + (-3a+b)x^2 + (3a-2b+c)x + (-a+b-c) &= ax^3 + bx^2 + cx + 25x^2 \\ ax^3 + \boxed{(-3a+b)}x^2 + \boxed{(3a-2b+c)}x + \boxed{(-a+b-c)} &= ax^3 + \boxed{(b+25)}x^2 + \boxed{c}x + \boxed{0} \end{aligned}$$

De la comparación de coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones 3×3

$$\begin{cases} -a + b - c = 0 \\ 3a - 2b + c = c \\ -3a + b = b + 25 \end{cases}$$

De donde rápidamente vemos que la única solución es $(a, b, c) = \left(-\frac{25}{3}, \frac{25}{2}, -\frac{25}{6}\right)$. Luego

$$P(x) = -\frac{25}{3}x^3 + \frac{25}{2}x^2 - \frac{25}{6}x$$

□

3. Clase 05

3.1. Solución de la tarea

Problema 3.1. Si p y q son las raíces del polinomio $P(x) = 4x^2 + 5x + 3$. Determina $(p+7)(q+7)$, sin calcular los valores de p y q .

Solución. Por las fórmulas de Vieta

□

Problema 3.2. Supóngase que el polinomio $5x^3 + 4x^2 - 8x + 6$ tiene tres raíces reales a, b y c . Demuestra que

$$(5a)^2 \left(\frac{b}{2}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + (5b)^2 \left(\frac{c}{2}\right) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + (5c)^2 \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = 3^3.$$

Problema 3.3. Sean r_1, r_2, r_3 las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$. Determina el valor de $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$, sin calcular los valores de r_1, r_2, r_3 .