

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios Clase #13

Encuentro: 13

Curso: Polinomios

Fecha: 17 de junio de 2023

Nivel: 5

Semestre: I

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Clase práctica 5

1. Problemas propuestos

Problema 1.1. Sea $Q(x) = 2x - 4096$ y $P(x) = Q^{12}(x)$, hallar la raíz de P .

Problema 1.2. Si a y b son raíces distintas del polinomio $x^2 + 1012x + 1011$, entonces

$$\frac{1}{a^2 + 1011a + 1011} + \frac{1}{b^2 + 1011b + 1011} = \frac{m}{n},$$

donde m y n son primos relativos. Calcular $m + n$.

Problema 1.3. Dado el polinomio $P(x)$ para el cual se cumple que

$$x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9)P(x)$$

Calcular la suma de coeficientes de P .

Problema 1.4. Sea r_1 , r_2 y r_3 las tres raíces de polinomio cúbico P . También, que

$$\frac{P(2) + P(-2)}{P(0)} = 52$$

La expresión $\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}$ puede ser escrita como $\frac{m}{n}$ para m y n coprimos. Encontrar $m \times n$.

Problema 1.5. Dado que

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x + 3 \\ Q(F(x) + G(x)) &= 4x + 3 \\ Q(F(x) \times G(x)) &= 5 \end{aligned}$$

Calcular $F(G(F(G(\dots F(G(1)) \dots))))$.

Problema 1.6. Dado que m y n son raíces del polinomio $6x^2 - 5x - 3$, encuentra un polinomio cuyas raíces sean $m - n^2$ y $n - m^2$, sin calcular los valores de m y n .

Problema 1.7. Si $P(x-2) = x^3 - 10x^2 + 28x - 24$, hallar el resto de dividir $P(x)$ por $x-3$

Problema 1.8. Encontrar el resto cuando $(x+3)^5 + (x+2)^8 + (5x+9)^{1997}$ es dividido por $x+2$.

Problema 1.9. Encontrar el resto cuando $x^{2006} + x^{2005} + \dots + x + 1$ es dividido por $x+1$.

Problema 1.10. Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$. ¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{20}(x)$?

Problema 1.11. Sean a, b y c números reales distintos de cero, con $a+b+c \neq 0$. Probar que si

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

entonces para n impar se cumple

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

Problema 1.12. Sean x, y y z números reales, encontrar todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z &= 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 30 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 132 \end{cases}$$

Problema 1.13. Demostrar $\forall n \in \mathbb{N}$, que

$$8 \mid 3^{2n+2} + 8n - 9$$

Problema 1.14. Con la ayuda del teorema de la raíz racional, encontrar todas las raíces de los siguientes polinomios

$$2x^3 - 21x^2 + 52x - 21$$

Problema 1.15. Si la división

$$\frac{x^{80} - 7x^{30} + 9x^5 - mx + 1}{x^3 + x - 2}$$

Deja como resto a $R(x) = x^2 + x - 1$, hallar el valor de m .

Problema 1.16. Hallar $Q(x)$, si $P[Q(x)-3] = 6x+2$ y $P(x+3) = 2x+10$.

Problema 1.17. Indique el valor de la expresión

$$E(3) \cdot E(5) \cdot E(7) \cdots E(2021) \cdot E(2023)$$

Si $E(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$

Problema 1.18. Hallar el resto de la división de $[(x-1)(x)(x+2)(x+3)]^2 + (x^2+2x)^3x - 50$ entre $x^2 + 2x - 5$.

Problema 1.19. Si $P\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2023$, ¿cuál es el valor de $P(2024)$?

Problema 1.20. Dado el polinomio $S(x) = (11 - 15x^3)(17x^6 - 43) + 2^8x^6(1 - x + x^2)(1 + x)$, responda lo siguiente:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a. ¿ $S(x)$ es mónico?
R: _____ | d. Escriba el coeficiente de x^6 .
R: _____ |
| b. ¿ $S(x)$ es completo?
R: _____ | e. Escriba el término independiente.
R: _____ |
| c. ¿ $S(x)$ es simétrico?
R: _____ | f. ¿Es $S(\sqrt[3]{x})$ un polinomio?
R: _____ |

Problema 1.21. Si tenemos que

$$P(x) = \frac{x-1}{3}$$

$$Q(x) = 3x^2 - 2x$$

$$R(x) = (Q \circ P)(x) - 673x$$

¿Cuál es el valor de $R(2023)$?

- | | | | | |
|-------|---------|------------|------|------|
| a. -4 | b. 2023 | c. 2729701 | d. 0 | e. 1 |
|-------|---------|------------|------|------|

Problema 1.22. Sea $R(y) = 3x^2 - 12x - 36 + 3y^2 + 6xy - 12y$, factorize R y responda.
¿Cuáles son las raíces de R ?

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| a. 6 y -2 | c. $-6 + y$ y $-2 + y$ | e. $-6 - y$ y $2 + x$ |
| b. $6 - y$ y $-2 - y$ | d. $6 - x$ y $-2 - x$ | |

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, José Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 (*Claro*)
Correo: joseandanduarte@gmail.com