Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Examen final

Nombre: ________________________________. **Código ASJT:** __________.

Problemas

Estimado estudiante, resolver los siguientes problemas de manera clara y ordenada. Recordar justificar la respuesta.

Problema 1. Con la ayuda del teorema de la raíz racional, encontrar todas las raíces de los siguiente polinomio

$$2x^3 - 21x^2 + 52x - 21.$$

Problema 2. Si $P\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 227$, ¿cuál es el valor de $\sqrt{P(20)}$?

Problema 3. Si a y b son raíces distintas del polinomio $x^2 + 1012x + 1011$, entonces

$$\frac{1}{a^2 + 1011a + 1011} + \frac{1}{b^2 + 1011b + 1011} = \frac{m}{n},$$

donde m y n son primos relativos. Calcular $m + n$.

Problema 4. Sea $R(c) = a^2 + b^2 + 65c^2 + 2ab - 18bc - 18ca$, factorize R y responda. ¿Cuáles son las raíces de R?

Problema 5. Dado el polinomio $S(x) = (11 - 15x^3)(17x^6 - 37) + 2^8x^6(16 - x + x^2)(16 + x)$, responda lo siguiente:

a. ¿$S(x)$ es mónico?
R: ______

b. ¿$S(x)$ es completo?
R: ______

c. ¿$S(x)$ es simétrico?
R: ______

d. Escriba el coeficiente de x^6.
R: ______

e. Escriba el término independiente.
R: ______

f. ¿Es $S\left(\sqrt[3]{x}\right)$ un polimonio?
R: __________

Tipo: B

Fecha: 24 de junio de 2023

Soluciones

Problema 1.

Los divisores del término principal son : $\{\pm 1, \pm 2\}$.

Los divisores del término independiente son: $\{\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21\}$

Por lo tanto, el conjunto de todas las posibles raíces racionales del polinomio en cuestión es $\{\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{7}{2}, \pm\frac{21}{2}\}$. Al ir probando los valores, de preferencia primero los enteros, vemos que 3 es raíz del polinomio. Luego, al dividir el polinomio entre $x-3$ obtenemos

$$2x^3 - 21x^2 + 52x - 21 = (x-3)(2x^2 - 15x + 7)$$

El polinomio $2x^2 - 15x + 7$ es sencillo de factorizar, por factorización clásica, por lo tanto

$$2x^3 - 21x^2 + 52x - 21 = (x-3)(x-7)(2x-1)$$

Luego, las raíces del polinomios son $\left\{\frac{1}{2}, 3, 7\right\}$.

Problema 2.

Es fácil ver que $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, de aquí que

$$P\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + 225$$
$$P\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 225$$
$$P(y) = y^2 + 225$$

Por lo tanto, si $y = 20$, entonces $P(20) = 20^2 + 225 = 400 + 225 = 625 = 25^2$. Luego, $\sqrt{P(20)} = \sqrt{25^2} = \boxed{\pm 25}$

Problema 3.

Como a es raíz del polinomio, entonces $a^2 + 1012a + 1011 = 0$, de esta ecuación podemos ver que $\boxed{a^2 + 1011a + 1011 = -a}$. Análogamente con b, $\boxed{b^2 + 1011b + 1011 = -b}$. Entonces

$$\frac{1}{a^2 + 1011a + 1011} + \frac{1}{b^2 + 1011b + 1011} = \frac{m}{n}$$
$$\frac{1}{-a} + \frac{1}{-b} = \frac{m}{n}$$
$$-\frac{a+b}{ab} = \frac{m}{n}$$

Que por Vieta sabemos que $a+b=-1012$ y $ab=1011$, entonces

$$-\frac{a+b}{ab}=\frac{m}{n}$$
$$-\frac{-1012}{1011}=\frac{m}{n}$$
$$\frac{1012}{1011}=\frac{m}{n}$$

Como 1012 y 1011 son consecutivos, entonces son coprimos. Por lo tanto, $m=1012$ y $n=1011$. Luego $m+n=\boxed{2023}$.

Problema 4.

Veamos que

$$R(c)=a^2+b^2+65c^2+2ab-18bc-18ca$$
$$R(c)=65c^2-18bc-18ca+a^2+2ab+b^2$$
$$R(c)=65c^2-18c(a+b)+(a+b)^2$$
$$R(c)=[13c-(a+b)][5c-(a+b)]$$

Luego, las raíces de R son $\boxed{\frac{a+b}{13}}$ y $\boxed{\frac{a+b}{5}}$.

Problema 5.

$$S(x)=(11-15x^3)(17x^6-43)+2^8x^6(16-x+x^2)(16+x)$$
$$S(x)=(187x^6-473-255x^9+645x^3)+256x^6(x^3-15x^2+256)$$
$$S(x)=(187x^6-473-255x^9+645x^3)+(256x^9-3840x^8+256^2x^6)$$
$$S(x)=(256x^9-255x^9)-3840x^8+(187x^6+256^2x^6)+645x^3-473$$
$$S(x)=x^9-3840x^8+65536x^6+645x^3-473$$

a. Sí, ya que el su coeficiente principal es 1.

b. No, ya que faltan los términos de x^7, x^5, x^4, x^2, y x.

c. No, ya que con sólo ver que el coeficiente principal y el término independiente no son iguales el polinomio no es simétrico.

d. El coeficiente es 65723.

e. El término independiente es -473.

f. No, ya que al evaluar el polinomio obtenemos $S(\sqrt[3]{x})=x^3-3840x^2\sqrt[3]{x^2}+65536x^2+645x-473$. Expresión que tiene radicales y por lo tanto no es un polinomio.