Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Ecuaciones Diofánticas
Clase #1

Encuentro: 16
Curso: Ecuaciones Diofánticas
Fecha: 3 de agosto de 2024

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Gema Tapia

Contenido: Introducción a las Ecuaciones Diofánticas

La resolución de ecuaciones es un tema que se presenta en secundaria desde los primeros niveles. Paralelamente se van estudiando los diferentes conjuntos numéricos a saber: el conjunto de números Naturales ($\mathbb{N}$), el conjunto de números enteros ($\mathbb{Z}$), el conjunto de números racionales ($\mathbb{Q}$) y el conjunto de número Reales ($\mathbb{R}$).

Además, se repasan conceptos elementales de teoría de números como son: máximo común divisor, mínimo común múltiplo, números primos, etc. En este curso estudiaremos los métodos de resolución de un tipo especial de ecuaciones llamadas **Ecuaciones Diofánticas.**

1. Desarrollo

1.1. Definiciones

> **Definición 1.1 (Ecuación Diofántica):** Se llama ecuación diofántica o ecuación diofantina a cualquier ecuación polinomial con coeficientes enteros cuya solución se restringe únicamente a aquellos valores enteros que la satisfacen.

Es decir, una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n,\ a_i, b \in \mathbb{Z}.$$

Donde la n-upla de números enteros $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ hace la igualdad. Es claro que una ecuación diofántica puede tener una o más n-upla que hagan la igualdad.

> **Definición 1.2:** A una n-upla, con n entero, que satisface una ecuación diofántica, se le llama solución de la ecuación. Una ecuación diofántica con una o más soluciones se llama ecuación soluble, así también, una ecuación diofántica sin soluciones se llama ecuación insoluble o irresoluble.

Una ecuación diofántica se dice que tiene una familia de soluciones cuando un conjunto de estas, o todas, puede ser expresada en función de uno o más parámetros enteros. Como por ejemplo la ecuación $x^2 + 2y^2 = z^2$, vemos que tiene soluciones $(-2, 0, 2)$, $(-1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$, $\ldots$, las cuales podemos expresar como

$$\begin{cases} x = r^2 - 2 \\ y = 2r \\ z = r^2 + 2 \end{cases}$$

donde r es un número entero sin ninguna restricción, por lo que la ecuación diofántica tiene infinitas soluciones de esta forma.

Ahora, nos centraremos en el conjunto de métodos elementales para la resolución de Ecuaciones Diofánticas, a lo largo del curso haremos uso de estos métodos, tales como factorización, identidades algebraicas, desigualdades, parametrización y congruencias.

1.2. Método de factorización

El método de factorización consiste transformar una expresión algebraica como producto de otras expresiones algebraicas, muchas veces de grado menor. Como trabajamos en números enteros esto nos permite asociar estas expresiones con los divisores de otros números enteros. Logrando así, obtener un conjunto de casos muchas veces más sencillos de resolver.

Es decir, si tenemos una expresión de la forma

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)\cdots(r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n) = k,$$

donde $1 \leq j \leq n$ tenemos $a_j, b_j, \ldots, r_j, k \in \mathbb{Z}$. Si $k_1, k_2, \ldots, k_m$ son los divisores de k, podemos asociar las expresiones del lado izquierdo con estos divisores, formando sistemas de ecuaciones como por ejemplo

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = k_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = k_2 \\ \qquad\vdots \\ r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n = k_p, \end{cases}$$

claramente, dependerá del problema como escoger estas asociaciones.

Ahora, algunas identidades algebraicas nos pueden simplificar la factorización, aquí exponemos una pequeña lista de las más comunes.

Identidades útiles

(Completación de rectángulo) $xy + iy + jx + ij = (x+i)(y+j)$

(Diferencia de cuadrados) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

(Binomio al cuadrado) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(Trinomio al cuadrado) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

(Identidad I) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$

(Identidad de Gauss) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

(Identidad de Argand) $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$

(Identidad de Sophie Germain) $a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)\left(a^2 + 2ab + 2b^2\right)$

(Identidad de Brahmagupta)	$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$
(Diferencia de potencias)	$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$
(Suma de potencias)	$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$ para n impar
(Binomio de Newton)	$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n$

A continuación, tenemos una serie de ejercicios con los cuales podemos prácticar y aplicar el método de factorización.

1.3. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Hallar la cantidad de parejas de enteros positivos x_1, x_2 tales que $x_1 \cdot x_2 = 25 \cdot 15^3$.

Ejercicio 1.2. Probar que la ecuación $x^2+2y^2=z^2$ tiene como solución a $x=a^2-2b^2$, $y=2ab$ y $z=a^2+2b^2$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 1.3. Hallar todos los números naturales x, y para los cuales $\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=1$.

Ejercicio 1.4. Probar que la ecuación $x^3=2y^3$ no tiene soluciones enteras.

Ejercicio 1.5. Resolver $y^2=x^3-x$ sobre los enteros.

Ejercicio 1.6. Hallar los enteros positivos x, y, z tal que $3^x+4^y=z^2$.

Ejercicio 1.7. Encuentre todos los enteros positivos x, y tales que $xy-x+y=49$.

Ejercicio 1.8. Encuentre todas las soluciones enteras de la ecuación

$$(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy).$$

Ejercicio 1.9. Encuentre todos los enteros positivos n tales que, n^4+4^n es primo.

Ejercicio 1.10. ¿Para qué valores de a y b se da la igualdad $a^2-4ab=-4b^2+9$?

Ejercicio 1.11. Resuelve la siguiente ecuación en enteros $x^2+6xy+8y^2+3x+6y=2$.

Ejercicio 1.12. Para cada entero n sea $s(n)$ el número de pares ordenados (x, y) de enteros positivos para los cuales

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}.$$

Encuentre todos los números enteros positivos n para los cuales $s(n)=5$.

Ejercicio 1.13. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación $x^3+y^3-3xy=3$.

Ejercicio 1.14. Hallar todas las soluciones enteras de $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$.

Ejercicio 1.15. Sean p y q números primos distintos. Encuentre el número de pares de enteros positivos x, y que satisfacen la ecuación

$$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}=1.$$

Problema 1.1. Encuentre todos los pares de enteros (x, y) tales que $x^6+3x^3+1=y^4$.

Problema 1.2. Encuentre todos los pares (x, y) de enteros tales que $xy+\dfrac{x^3+y^3}{3}=2007$.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Ejercicio 2.1. Probar que las triplas $\left(\frac{p+1}{3}, \frac{p+1}{3}, \frac{p-2}{3}\right)$ y $\left(\frac{p+2}{3}, \frac{p-1}{3}, \frac{p-1}{3}\right)$ son solución de la ecuación

$$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)=p^2.$$

Ejercicio 2.2. Determinar todos los enteros positivos que son solución de la ecuación

$$(xy-7)^2=x^2+y^2.$$

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Halla todas las triplas (x, y, z) de enteros positivos, con p primo talque

$$x^5+x^4+1=p^y.$$

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Gema Tapia
Teléfono: +505 8825 1565 *(Claro)*
Correo: gematapia97@gmail.com