

Colinealidad y Concurrencia Clase #3

Encuentro: 17

Curso: Colinealidad y Concurrencia

Fecha: 5 de agosto de 2023

Nivel: 5

Semestre: II

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

D. auxiliar: José Adán Duarte

Unidad I: Concurrencias

Contenido: Concurrencias de Cevianas III

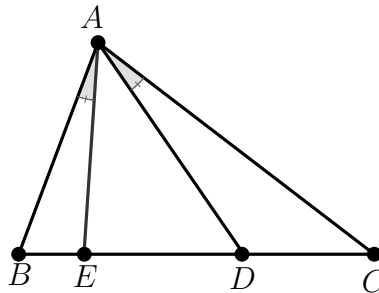
En esta tercera clase, seguiremos viendo la concurrencia de cevianas, en particular de una ceviana notable no tan popular llamada simediana. Veremos algunos teoremas y lemas útiles para trabajar con las simedianas, así como ejercicios, ejemplos y problemas.

1. Desarrollo

Teorema 1.1 (Steiner).

Sean D y E dos puntos sobre el segmento BC del triángulo ABC tal que $\angle BAE = \angle DAC$. Así

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{BE}{CE} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2.$$



Demostración. Aplicando el **Teorema 2.2** al $\triangle ABC$ con los puntos D y E , respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{BD}{DC} &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BAD)}{\text{sen}(\angle DAC)} \quad \wedge \quad \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BAE)}{\text{sen}(\angle EAC)} \\ \Rightarrow \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} &= \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 \cdot \frac{\text{sen}(\angle BAD)}{\text{sen}(\angle DAC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BAE)}{\text{sen}(\angle EAC)} \end{aligned}$$

Pero como $\angle BAE = \angle DAC$, entonces $\angle BAD = \angle EAC$, de donde se sigue el resultado. ■

1.1. Simedianas

Definición 1.1 (Simediana).

La simediana correspondiente al vértice A se define como la reflexión de A -mediana con respecto a la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$. En otras palabras, es la recta isogonal correspondiente a la mediana que parte del mismo vértice de referencia.

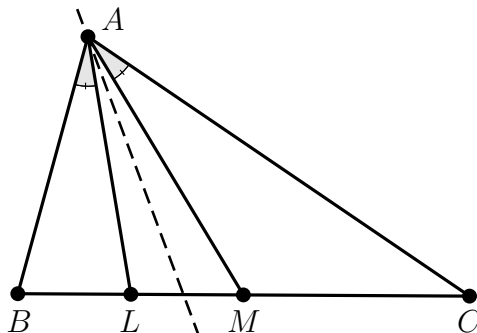


Figura 1: La recta AL es la A -simediana del triángulo ABC .

En el caso de la figura 1, la recta AL es la A -simediana del $\triangle ABC$. Es decir $\angle BAL = \angle MAC$. No hace falta decir que todo triángulo contiene tres simedianas. Por la **Definición 1.4** vista en la clase anterior, sabemos que, al concurrir las medianas en el baricentro, las simedianas comparten también un punto en común, llamado el **punto de Lemoine**.

Lema 1.1.

Sea N un punto sobre el segmento BC ; entonces, N pertenece a la A -simediana si y solo si

$$\frac{BN}{NC} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2.$$

Demostración. Es una aplicación directa del **Teorema 1.1**. ■

Lema 1.2.

Sea D el punto de intersección de las tangentes por B y C al circuncírculo del triángulo ABC . Luego, AD es una simediana de $\triangle ABC$.

Demostración. Supongamos que las prolongaciones de los lados AB y AC cortan a la paralela a BC por P en S y T , respectivamente. Es claro que $\angle PSB = \angle CBA$ y $\angle PTC = \angle BCA$. Además, $\angle PBS = \angle BCA$ y $\angle PCT = \angle CBA$ por la condición de tangencia de PB y PC .

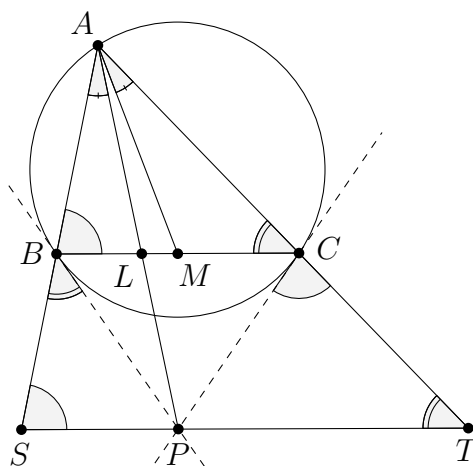


Figura 2: Una forma de construir e identificar la A -simediana.

De este modo, $\triangle BPS \sim \triangle CAB \sim \triangle TPC$, lo que a su vez implica que:

$$\begin{aligned} \frac{SP}{PB} = \frac{AB}{AC} \wedge \frac{PC}{PT} = \frac{AB}{AC} &\Rightarrow \frac{SP}{PB} \cdot \frac{PC}{PT} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \\ \frac{SP}{PB} \cdot \frac{PC}{PT} &= \left(\frac{AS}{AT}\right)^2 \quad (\text{Por } \triangle CAB \sim \triangle TAS) \\ \frac{SP}{PT} &= \left(\frac{AS}{AT}\right)^2 \quad (PB = PC \text{ por tangencia}) \end{aligned}$$

luego, por el lema 1.1, AP es simediana de $\triangle SAT$ y, de paso, también de $\triangle BAC$. ■

Definición 1.2 (Recta de Lemoine).

Sea el triángulo ABC y Ω su circuncírculo, las tangentes a Ω por A , B y C se intersecan con los lados opuestos BC , AC y BA en los puntos E , F y D , respectivamente. Así, se cumple que E , F y D están sobre una misma recta, llamada la **recta de Lemoine** del triángulo ABC .

2. Conocimiento previo

Teorema 2.1 (Ley de los Senos).

Sea el triángulo ABC con circunradio R . Entonces

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R.$$

Pista: Considerar las antípodas de los vértices en el circuncírculo de $\triangle ABC$, notar ciertas igualdades de ángulos por cuadriláteros cíclicos y luego utilizar la definición del seno para el triángulo rectángulo.

Teorema 2.2 (Teorema de bisectriz generalizada).

Dado el triángulo ABC , sea el punto X en BC . Entonces se cumple que

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\angle BAX)}{\sin(\angle XAC)}.$$

Pista: Utilizar el **Teorema 2.1** y la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{Si } \alpha + \beta = 180^\circ, \text{ entonces } \sin(\alpha) = \sin(\beta).$$

3. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 3.1. Realizar la construcción de las tres simedianas de un triángulo ABC con la ayuda del Lemma ?? y ubicar el punto de **Lemoine**.

Ejercicio 3.2. Realizar la construcción de la recta de **Lemoine** para un triángulo ABC .

Problema 3.1. Sea L el punto de **Lemoine** de un triángulo ABC y M el punto en BC tal que AM contiene a L . Demostrar que

$$\frac{AL}{LM} = \frac{BA^2 + AC^2}{BC^2}.$$

Problema 3.2. Las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle BAC$ de $\triangle ABC$, intersecan a la recta BC en E y D , respectivamente. El circuncírculo de $\triangle DEA$ interseca al circuncírculo de $\triangle ABC$ en X . Probar que AX es la A -simediana de $\triangle ABC$.

Problema 3.3. Sea AD una altura de $\triangle ABC$. Consideremos AD como diámetro de una circunferencia que corta los AB y AC en K y L , respectivamente. Las tangentes a la circunferencia en los puntos K y L se intersectan en un punto M . Demuestra que la recta AM divide BC por la mitad.

Problema 3.4. Un cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene $AD = CD$ y $\angle DAB = \angle ABC < 90^\circ$. La recta por D y el punto medio de BC intersecta a la recta AB en un punto E . Demuestra que $\angle BEC = \angle DAC$.

Problema 3.5. Una recta paralela a BC corta a los lados AB y AC en M y N en el $\triangle ABC$, respectivamente. Sea P el punto de corte de BN y CM . Sea Q el segundo punto de corte de los circuncírculos de MPB y NCP . Demostrar que $\angle BAQ = \angle PAC$.

4. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 4.1. Sea el $\triangle ABC$ con puntos D y E sobre las rectas AB y AC , respectivamente, tal que ($E \neq B, D \neq C$). Entonces la A -simediana de $\triangle ABC$ biseca al segmento DE si y solo si los puntos D, B, C y E son concíclicos.

Problema 4.2. Sea el $\triangle ABC$ y M un punto sobre el segmento BC . Se escoge un punto D sobre la recta AB tal que el circuncírculo del triángulo BCD es tangente a AC . Entonces, AM es la simediana del triángulo ACD si y solo si M es el punto medio de BC .

5. Extra

Problema 5.1. Sea Γ el circuncírculo de $\triangle ABC$. Las tangentes a Γ en B y C se cortan en T . Se toma un punto S en la recta BC tal que $AS \perp AT$. Se toma los puntos B_1 y C_1 en ST con $B_1T = C_1T$ y T punto medio B_1C_1 . Demuestre que los triángulos ABC y AB_1C_1 son semejantes.

Referencias

- [Agu19] Eduardo Aguilar. *Estrategias sintéticas en Geometría Euclídea*. Editorial, 2019.
- [Bac20] Jafet Baca. Conjugados isogonales y simedianas. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, 2020.
- [Bac22] Jafet Baca. *Apuntes de Geometría Euclidiana para Competiciones Matemáticas*. Independent publication, 2022.
- [Cas20] Rufo Casco. Una guía de Luis Gonzales, un reto de vida. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, 2020.
- [CM16] Mauricio Che and Luis Montes. Las simedianas y el punto de Lemoine. *Tzaloa*, (2), 2016.
- [Loz17] Stefan Lozanovski. *A beautiful journey through Olympiad Geometry*. Independent publication, 2017.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco

Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)

Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte

Teléfono: +505 8420 4002 (*Claro*)

Correo: joseandanduarte@gmail.com