

# Academia Sabatina de Jóvenes Talento

---

## Polinomios Clase #1

**Encuentro:** 1

**Curso:** Polinomios

**Fecha:** 18 de marzo de 2023

**Nivel:** 5

**Semestre:** I

**Instructor:** Kenny Jordan Tinoco

**D. auxiliar:** José Adán Duarte

### **Contenido:** Polinomios cuadráticos y cúbicos

En esta primera sesión nos toca acometer las primeras nociones sobre los polinomios. Veremos definiciones, propiedades, características particulares y curiosidades sobre estas expresiones, con el fin de cimentar las bases que son necesarias para el resto del presente curso.

## 1. Desarrollo

### 1.1. Definiciones

**Definición:** Un *polinomio* en  $x$  es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde  $n$  es un entero mayor o igual que cero y  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son números que pueden ser enteros, racionales, reales o complejos y son llamados los **coeficientes** de  $P(x)$ . Si  $a_n \neq 0$ , se dice que  $P(x)$  es de *grado*  $n$  y se denota por  $\deg(P) = n$ ; en este caso  $a_n$  es llamado **coeficiente principal**.

En particular, los polinomios de grado 1, 2 y 3 son llamados *lineal*, *cuadrático* y *cúbico*, respectivamente, y son estos el caso de estudio de esta primera sesión.

$$\text{Lineal: } P(x) = a_1 x + a_0$$

$$\text{Cuadrático: } P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\text{Cúbico: } P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Veremos a continuación algunas características resaltables sobre los polinomios.

**Término principal:** El término (monomio) que contiene la mayor potencia es conocido *término principal* y su coeficiente como *coeficiente principal*.

**Valor numérico:** Resultado que se obtiene al evaluar el polinomio en una constante  $c$ , es decir  $P(c)$ . Además, cuando el valor de  $c$  es 0 o 1, el valor numérico es igual al **término independiente** y a la suma de todos los coeficientes, respectivamente. Siendo el término independiente aquel monomio que no tiene variable.

**Polinomio mónico:** Polinomio cuyo término principal tiene como coeficiente a 1.

**Polinomio completo:** Polinomio que tiene todos sus términos. Desde el término con exponente  $n$  hasta el término con exponente 0.

**Polinomio iguales:** Diremos que dos polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$  son iguales si y solo si  $\deg(P) = \deg(Q) = n$  y  $a_i = b_i$ , con  $0 \leq i \leq n$ . Donde  $a_i, b_i$  son los coeficientes de  $P(x)$  y  $Q(x)$ , respectivamente.

**Polinomio recíproco:** Un polinomio  $P(x)$  es recíproco si cumple que  $a_i = a_{n-i}$ , con  $0 \leq i \leq n$ , donde  $\deg(P) = n$ .

**Polinomio de varias variables:** Un polinomio que dependen de más de una variable es llamado multivariante o multivariable, y es denotado por  $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ .

**Polinomio ordenado:** Un polinomio es ordenado cuando los exponente de la variable de referencia, guardan cierto orden, ya sea ascendente o descendente.

**Polinomio homogéneo:** Un polinomio multivariable es homogéneo si todos sus términos tienen el mismo grado absoluto.

## 1.2. Operaciones con polinomios

Sean dos polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$  de grado 3,

$$\begin{aligned} P(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ Q(x) &= b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \end{aligned}$$

se definen:

**Suma:**  $P(x) + Q(x) = (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

**Resta:**  $P(x) - Q(x) = (a_3 - b_3)x^3 + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$

**Multiplicación:**  $P(x) \times Q(x) = P(x)Q(x) = a_3b_3x^6 + (a_2b_3 + a_3b_2)x^5 + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)x^4 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_0b_0$

**Composición:**  $(P \circ Q)(x) = P(Q(x)) = a_3Q(x)^3 + a_2Q(x)^2 + a_1Q(x) + a_0$ . Se lee  $P$  compuesto de  $Q$  y consiste en remplazar la variable  $x$  por  $Q$  en  $P$ .

En general si  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios no nulos, entonces se verifica que

$$\begin{aligned} \deg(P \pm Q) &\leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\} \\ \deg(P \times Q) &= \deg(P) + \deg(Q) \end{aligned}$$

La composición de polinomios es asociativa, es decir,  $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ , mas no conmutativa, salvo casos especiales, así que generalmente supondremos que  $P \circ Q \neq Q \circ P$ .

**Una pequeña aclaración:**  $P(x)^n \neq P^n(x)$ . Denotaremos como  $P(x)^n$  al polinomio elevado a la  $n$ -ésima potencia y a  $P^n(x)$  como la composición  $n$ -ésima de  $P(x)$  con si mismo, es decir  $P(P(P \dots P(P(x)) \dots))$   $n$  veces.

### 1.3. Ejercicios y problemas

**Ejercicio 1.1.** Sean  $P(x) = 5x^2 - 33x + 59$  y  $Q(x) = 3 - 2x$ . Determine

- |                        |                      |
|------------------------|----------------------|
| a. $P(x) + Q(x)$       | e. $(P \circ Q)(x)$  |
| b. $Q(x) - P(x)$       | f. $Q(P(x))$         |
| c. $P(x) + Q((x+1)^2)$ | g. $P(Q(3x-4))$      |
| d. $P(1-x) + Q(x-1)$   | h. $Q^3(x) + P(x)^2$ |

**Problema 1.1.** Sea  $P(x)$  un polinomio mónico de grado 3. Halle la suma de coeficientes del término cuadrático y lineal, siendo su término independiente igual a 5. Además,  $P(x+1) = P(x) + nx + 2$ .

**Problema 1.2.** Hallar un polinomio cuadrático cuyo coeficiente de  $x$  y término independiente son iguales y se cumple que  $P(1) = 7$  y  $P(2) = 18$ .

**Problema 1.3.** Dado que

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x + 3 \\ Q(F(x) + G(x)) &= 4x + 3 \\ Q(F(x) \times G(x)) &= 5 \end{aligned}$$

Calcular  $F(G(F(G(\dots F(G(1))\dots))))$ .

## 2. Problemas propuestos

**Problema 2.1.** Si  $P(x^2 - 2x + 1) = x^2 - 3$  determine  $P((x-2)^2)$ .

**Problema 2.2.** Sea  $P(x) = x^2$ , encontrar  $Q(x)$  si  $(P \circ Q)(x) = 4x^2 - 12x + 9$ .

**Problema 2.3.** Sea  $Q(x) = \frac{1}{5}x - 2$  y  $P(x) = Q^4(x)$ , probar que  $P(1560) = 0$ .

## 3. Extra

**Problema 3.1.** Determine los polinomios  $P$  para los que se cumple  $16P(x^2) = P(2x)^2$ .

**Problema 3.2.** Encontrar todos los polinomios  $P$  que cumplen  $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$  para todo  $x$ .

**Problema 3.3.** Sea  $P(n+1) = x \cdot P(n) + 1$ , para  $n$  entero y  $n \geq 0$ . Además  $P(0) = 1$ . Exprese  $(x-1) \cdot P(x)$  como un polinomio en  $x$  con coeficientes enteros. Luego, calcule  $P(2023)$ .

## Referencias

- [Bar89] Edward Barbeau. *Polynomials*. Springer, 1989.
- [BGV14] Radmila Bulajich, José Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.
- [CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 1. Polinomios cuadráticos y cúbicos. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2022.

### En caso de consultas

**Instructor:** Kenny J. Tinoco

**Teléfono:** +505 7836 3102 (*Tigo*)

**Correo:** kenny.tinoco10@gmail.com

**Docente:** José A. Duarte

**Teléfono:** +505 8420 4002

**Correo:** joseandanduarte@gmail.com