Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Ecuaciones Diofánticas
Clase #5

Encuentro: 20
Curso: Ecuaciones Diofánticas
Fecha: 7 de septiembre de 2024

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Gema Tapia

Contenido: Inducción matemática y Descenso a infinito de Fermat

El principio de inducción matemática es una poderosa y elegante herramienta para probar dependencias en enteros. En esta clase veremos la definición y analogías de este principio, así como ejemplos y problemas.

1. Desarrollo

1.1. Inducción matemática

Inducción matemática es una técnica utilizada para probar declaraciones o proposiciones. La idea es similar a la de hacer caer varias piezas de dominó. Si cada pieza está

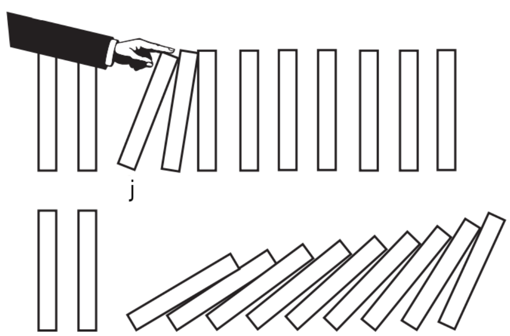

Figura 1: Fichas de dominó cayendo.

lo suficientemente cerca de la anterior y hacemos caer la primera, entonces todas las piezas eventualmente van a caer. Cuando queremos demostrar que una proposición se cumple sobre números naturales, la idea es la misma. Dicho de otro modo, la inducción nos permite demostrar una propiedad en **infinitos números** con **pasos finitos**.

Principio 1.1 (Inducción simple)**.** Sea el entero j y $S(n)$ una proposición sobre el entero n con $n \geq j$,

i) si $S(j)$ es cierto, y

ii) para cada entero $k \geq j$, $S(k) \implies S(k+1)$,

entonces $S(n)$ es cierta para todo $n \geq j$.

Asi por ejemplo, si tenemos $j = 1$ y una proposición $T(n)$ cumple las dos condiciones anteriores, entonces $T(n)$ se cumple para todo natural n, lo más común en la mayoría de los problemas es demostrar una propiedad a partir de $j = 1$ o $j = 0$.

Es importante mencionar el vocabulario utilizado en la inducción matemática, el cual nos permite moldear una solución.

1. **Paso base:** Identificar y validar el primer entero que cumple, $S(j)$ cierto.
2. **Hipótesis de inducción:** Formular y tomar la proposición como cierta para un entero dado, $S(k)$ cierto.
3. **Tesis de inducción:** Identificar la proposición a validar, $S(k+1)$ cierto.
4. **Paso inductivo:** Demostrar por medio de argumentos que la hipótesis implica a la tesis, $S(k) \implies S(k+1)$.

Hay varias maneras de interpretar la hipótesis y la tesis, por ejemplo

- lo que sabemos y lo que buscamos,
- lo que tenemos y lo que debemos,
- entradas (input) y salidas (output),

entre otros, de cualquier modo todos siguen el objetivo de transformar la hipótesis en argumentos para demostrar la tesis.

Hay situaciones donde demostrar que una propiedad $S(n+1)$ es verdadera no basta con solo tomar a $S(n)$ como cierto, puesto que estas proposiciones a menudo dependen de la validez de más de un elemento anterior, dicho de otro modo, necesitamos más información para demostrar la propiedad, para ello utilizamos la inducción fuerte.

Principio 1.2 (Inducción fuerte)**.** Sea j un entero y $S(n)$ una proposición sobre el entero $n \geq j$. Si

$$\forall k \geq j, \quad (\forall m < k,\ S(m)) \implies S(k),$$

entonces $S(n)$ es cierta para todo $n \geq j$.

La expresión $(\forall m < k,\ S(m)) \implies S(k)$ con $k \geq j$, es equivalente a la expresión

$$(S(j) \wedge S(j+1) \wedge \cdots \wedge S(k-1)) \implies S(k).$$

Cuando $k = j$ de manera lógica obtenemos $S(j)$ cierto, lo cual es equivalente al paso base de la inducción simple, por lo tanto, no es difícil notar que la inducción fuerte es el caso general de la inducción simple.

Veamos un ejemplo, que ilustra estos principios.

Ejemplo 1.1. Hallar el $n_0 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ tal que cualquier entero $n \geq n_0$ cumple $n = 3i + 5j$ para algunos $i, j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

Solución. Haciendo unas algunas pruebas, encontramos que

$0 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0$	$5 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1$	$10 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2$
1 no cumple	$6 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0$	$11 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1$
2 no cumple	7 no cumple	$12 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0$
$3 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0$	$8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$	$13 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2$
4 no cumple	$9 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0$	etc ...

Es decir, a partir de $n_0 = 8$ notamos que los enteros siguientes empiezan a cumplir la propiedad **(paso base)**. Sea la proposición $S(n)$: "existen $i, j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ tales que $n = 3i + 5j$" y supongamos que para un entero $k \geq 8$, $S(8), S(9), \ldots, S(k)$ son todos ciertos **(hipótesis de inducción)**, entonces vamos a demostrar que $S(k+1)$ también es cierto **(tesis de inducción)**. Se distinguen dos casos,

- $k = 8, 9, 10$, los cuales sabemos son ciertos y
- $k \geq 11$, de donde obtenemos que $8 \leq k - 3 \leq k$.

Por la hipótesis sabemos que existen $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ tales que $k - 3 = 3i_0 + 5j_0$, por lo tanto $k = 3(i_0 + 1) + 5j_0$ donde $i = i_0 + 1$ y $j = j_0$ **(paso inductivo)**. Luego, $S(n)$ se cumple para todo entero $n \geq 8$. ∎

1.2. Descenso infinito de Fermat

Sigamos con otro principio, uno bastante intuitivo.

Principio 1.3 (Buen orden)**.** Para todo subconjunto no vacío de los naturales, este debe tener un elemento mínimo.

De igual manera, es fácil pensar que un subconjunto no vacío de los números naturales debe tener un elemento máximo, por consiguiente, cualquier subconjunto no vacío de los naturales debe tener un elemento mínimo y máximo.

Al trata de problemas en específicos, a menudo utilizamos estas nociones del principio de Buen orden, lo cual podemos formalizar con el siguiente axioma.

Axioma 1.1 (Axioma del Orden)**.** Si M es un conjunto de n números reales distintos, entonces podemos escribirlo como $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Las demostraciones por el principio del buen orden a menudo implica realizar una prueba por contradicción, en este texto no abordaremos a detalle este principio, pero se invita a investigar más de este tema. Esta noción de orden será de útilidad con el siguiente y último principio.

El descenso infinito proviene de resolver ecuaciones diofánticas indeterminadas, el matemático Pierre de Fermat (1601-1665) utilizó este método hace unos 400 años cuando demostró que no existen soluciones enteras positivas para[1] $x^4 + y^4 = z^4$.

[1]Se recomienda al lector buscar la solución de Fermat, para enrriquecer su lectura.

Principio 1.4 (Descenso infinito de Fermat)**.** Sea $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ y $S(n)$ una proposición sobre n,

i) si $S(k)$ no es cierto, y

ii) para todo $m > k$, $S(m) \implies S(r)$ con $m > r > k$,

entonces $S(n)$ no se cumple para ningún $n \geq k$.

Podemos entender el descenso infinito de fermat metafóricamente con una escalera, si para alcanzar un escalón más alto es necesario pasar primero uno más bajo, pero no existe un escalón más bajo en la escalera, entonces es imposible subir a ningún escalón.

Veamos dos variantes o casos concretos de este principio, útiles en el estudio de las ecuaciones diofánticas.

i) No existe una secuencia $n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$ estrictamente decreciente de enteros no negativos.

ii) Si se tiene la secuencia $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \ldots$ de enteros no negativos, entonces existe un $k \geq 1$ tal que $n_k = n_{k+1} = n_{k+2} = \cdots$.

Cabe destacar que los principios de Inducción matemática, Buen orden y Descenso infinito son de hecho equivalentes en el conjunto de los enteros no negativos. Con lo cual, si tomamos uno es posible demostrar con este los dos restantes[2].

Ejemplo 1.2. Probar que la ecuación $x^2 + y^2 = 3z^2$ no tiene soluciones (x, y, z) en enteros positivos cuando $z \neq 0$.

Solución. Supongamos que hay al menos una solución (x_1, y_1, z_1) con $z_1 > 0$, es claro que en módulo 3 llegamos a $x_1^2 + y_1^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Como los cuadrados perfectos solo dejan resto 0 o 1 en módulo tres, necesariamente $x_1^2 \equiv y_1^2 \equiv 0 \pmod{3}$, por lo cual $x_1 = 3x_2$, $y_1 = 3y_2$ con $x_1 > x_2$ y $y_1 > y_2$.

Al reemplazar en la ecuación $9x_2^2 + 9y_2^2 = 3z_1^2 \iff 3(x_2^2 + y_2^2) = z_1^2 \iff 3 \mid z_1^2 \iff 3 \mid z_1$. Si tomamos $z_1 = 3z_2$ con $z_1 > z_2$, entonces

$$x_2^2 + y_2^2 = 3z_2^2.$$

Es decir, hemos encontrado una nueva solución (x_2, y_2, z_2) a la ecuación original. Al analizar esta solución, obtendríamos otra nueva solución (x_3, y_3, z_3), de la misma manera, aplicando este proceso obtendríamos soluciones (x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5), (x_6, y_6, z_6) y así sucesivamente. Sin embargo, esto implica que

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots, \quad y_1 > y_2 > y_3 > \cdots \quad \text{y} \quad z_1 > z_2 > z_3 > \cdots.$$

Lo cual es imposible, luego la ecuación original no tiene soluciones. ■

[2]Se recomienda al lector investigar cómo son esas demostraciones

1.3. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

1.3.1. Inducción

Ejercicio 1. Hallar el $n_0 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ tal que $\forall n \geq n_0,\ n = 5i + 6j$ con $i, j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

Ejercicio 2. Probar para todo $n \in \mathbb{N}$ que el número $A_n = 3^n - 2n^2 - 1$ es múltiplo de 8. Además, si $3 \nmid n$, entonces A_n es múltiplo de 24.

Problema 1.1. Probar $\forall n \in \mathbb{N}$ que las ecuaciones tienen soluciones enteras

$$1)\ x^2 + y^2 = z^n, \qquad 2)\ (x^2 + y^2)(u^2 + v^2 + w^2) = 2009^n.$$

Problema 1.2. Resolver $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2002}^2 = 1335\,(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2002})$ en enteros positivos distintos

1.3.2. Descenso infinito

Ejercicio 3. Encuentre todas las soluciones enteras de la ecuación $a^2 - 2b^2 = 0$.

Ejercicio 4. Hallar todos los números enteros a, b, c tales que $a^2 = 2b^2 + 3c^2$.

Ejercicio 5. Probar que $x^2 + y^2 = 3(m^2 + n^2)$ no tiene soluciones enteras positivas.

Ejercicio 6. Hallar las soluciones $(a, b) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ para $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$.

Ejercicio 7. Resolver en enteros de la ecuación $2005x^3 = y^3 + 25z^3$.

Ejercicio 8. Muestre que no hay enteros positivos x, y, z tal que $x^2 + 10y^2 = z^2$.

Problema 1.3. ¿Hay soluciones racionales para $x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0$?

Problema 1.4. Hallar las triplas $(x, y, z) \in \mathbb{N}$ que cumplen $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0$.

Problema 1.5. Hallar todos los enteros x, y, z para los cuales $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 0$.

Problema 1.6. Resolver en enteros positivos la ecuación $m^2 - mn - n^2 = \pm 1$.

1.3.3. Buen orden

Ejercicio 9. Hallar el mínimo, máximo y orden, de los siguientes conjuntos.

1. $A = \{4, 7, 6, 3, 78, 10, 5, 1, 6\}$.
2. Los divisores de 121.
3. Múltiplos de 3 entre 20 y 80.
4. Los primos impares menores a 50.
5. Los primos entre 50 y 100.
6. Cubos perfectos menores de 200

2. Problemas propuestos

Se asigna como **tarea** los problemas de esta sección, el estudiante debe entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase, en caso de no resolverlos se pueden entregar borradores. Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Ejercicio 10. Hallar las soluciones enteras no negativas (x, y, z) tal que $x^3+2y^3 = 4z^3$.

Problema 2.1. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 7^n$ tiene soluciones enteras.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso, estos se califican distinto a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Todo entero $n \geq 2$ es producto de un número finito de primos (resolver por inducción y por buen orden).

Problema 3.2. Resolver en enteros positivos la ecuación

$$x^2 + y^2 + x + y + 1 = xyz.$$

Referencias

[Gun10] David Gunderson. *Handbook of Mathematical Induction. Theory and Applications.* CRS Press, 2010.

[Som85] I. Sominski. *Método de Inducción Matemática.* Editorial MIR, 1985.

[Tin22a] Kenny Tinoco. V Nivel. Ecuaciones diofánticas. Clase 7. Método de Inducción matemática. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, Octubre 2022.

[Tin22b] Kenny Tinoco. V Nivel. Ecuaciones diofánticas. Clase 9. Método de Descenso infinito de Fermat. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, Octubre 2022.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Gema Tapia
Teléfono: +505 8825 1565 *(Claro)*
Correo: gematapia97@gmail.com

4. Plan de clase

4.1. ¿Qué?

Dar a conocer los principios de Inducción Matemática y Descenso al infinito de Fermat, además de mencionar el principio del Buen orden. Dando énfasis en el uso de estos principios para la solución de ecuaciones diofánticas, tanto solubles como insolubles. Mostrar ejemplos concretos de estos principios.

4.2. ¿Cómo?

Act. 1 [*****][**8 min**]. Explicar inducción simple, utilizando la analogía de dóminos. Hacer énfasis en el vocabulario y en el objectivo principal de la inducción “El gran problema de la matemática es acceder al infinito con recursos finitos”.

Act. 2 [*****][**10 min**]. Explicar inducción fuerte, explicar que un paso inductivo puede dar “saltos” $[P(n) \implies P(n+k)]$ o depender de uno o más pasos anteriores $[(P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n)) \implies P(n+1)]$.

Act. 3 [**Ejemplo 1.1**][**15 min**]. Leer el ejemplo 1.1, escribir y explicar la solución del ejemplo, además de hacer énfasis en cómo se aplica el vocabulario. Comentar que la tésis de inducción generalmente se obtiene del enunciado, que el paso inductivo es muchas veces lo más complicado en la inducción y en ciertos problemas hay que buscar el paso base. Claramente, para problemas más difíciles esto tiene más complejidad.

Act. 4 [**Ejercicio 1**][**10 min**]. Dar unos 3 minutos de intento y luego pasar a la pizarra, que todos los estudiantes participen.

Solución. Notar que a partir de $n = 20$ la propiedad se empieza a cumplir, se hacen los primeros 5 o 6 casos que cumple y luego es análogo al ejemplo 1.1.

Act. 5 [*****][**10 min**]. Explicar el principio del buen orden, dar los resultados importantes y mostrar un ejemplo con los conjuntos del ejercicio 7 (1, 2, 3).

Act. 6 [*****][**15 min**]. Explicar descenso infinito, utilizar la analogía de una escalera o bien la analogía de una reflexión entre espejos hacía el infinito. Mostrar la similitud con la inducción. Mostrar las variantes.

Act. 7 [**Ejemplo 1.2**][**10 min**]. Leer el ejemplo, escribir y explicar la solución por contradicción. Hacer énfasis en como se llega a una situación absurda (justificada por el descenso infinito) cuando se asume que existe una solución. Además, resolver el ejercicio por medio de un argumento de buen order.

Solución 2. Asumir que existe una solución mínima en el conjunto de soluciones, la cual produce otra solución mínima contradiciendo la minimalidad de la primera, luego no hay soluciones.

Act. 8 [**Ejercicio 2**][**10 min**]. Se nota que las variables deben ser pares, luego una solución implicaría otra solución más pequeña y asi sucesivamente. Se puede usar módulo 2.

Act. 9 [Ejercico 3][10 min]. Usando módulo 3, notamos que a, b son múltiplos de 3, luego una solución implicaría otra solución más pequeña y asi sucesivamente.

Act. 10 [Ejercico 4][10 min]. Utilizar módulo 3 para obtener que dos de las variables son múltiplos de 3.

Act. 11 [Ejercico 5][10 min]. Utilizar módulo 4 para obtener que dos de las variables son múltiplos de 4.

Definición de buen orden con simbología.

$$A \subseteq \mathbb{N} \wedge A \neq \varnothing \implies \exists m \in A \setminus \forall n \in A,\ m \leq n.$$

4.3. Comentarios

Preguntas claves: ¿me entendieron? ¿me salté algún tema? ¿di tiempo suficiente para pensar los problemas? ¿participaron? ¿problemas muy fáciles o muy difíciles, demasiados o muy pocos? ¿las explicaciones/ejemplos fueron suficientes y buenos?