Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Ecuaciones Diofánticas
Clase #3

Encuentro: 18
Curso: Ecuaciones Diofánticas
Fecha: 24 de agosto de 2024

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Gema Tapia

Contenido: Método de parametrización

En esta clase seguimos con los métodos básicos de resolución de ecuaciones diofánticas. Este es el caso del método de parametrización, el cual consiste en expresar las familias de soluciones en términos de variables auxiliares. Veremos algunos ejemplos, ejercicios y problemas, con el propósito de afianzar lo aprendido hasta el momento.

1. Desarrollo

1.1. Método de parametrización

En muchas situaciones, las soluciones enteras a una ecuación diofántica pueden ser expresadas de forma paramétrica, dónde dichos parámetros son variables enteras.

El conjunto de soluciones de algunas ecuaciones diofánticas podría tener múltiples representaciones paramétricas. Para la mayoría de ecuaciones diofánticas, no es posible encontrar todas las soluciones explícitamente. En muchos casos, el método paramétrico proporciona una prueba de la existencia de infinitas soluciones.

Ejemplo 1.1. Hallar todas las soluciones enteras (m, n) que satisfacen la ecuación

$$12m - 5n = 97 - mn.$$

Solución. Transformando la ecuación convenientemente

$$\begin{aligned} 12m + mn = 97 + 5n \iff m(12+n) = 97 + 5n \\ \iff m = \frac{97+5n}{12+n} \iff m = 5 + \frac{37}{n+12}. \end{aligned}$$

Consideremos la variable $t = \frac{37}{n+12}$ con lo cual $m = t + 5$, como m es entero necesariamente t también lo es. Es fácil ver $n = \frac{37}{t} - 12$, ya que n es entero, entonces t debe ser divisor de 37. Con esta información, es claro que los posibles valores son $t \in \{\pm 1, \pm 37\}$. Finalmente, las soluciones de la ecuación están dadas por $(m, n) \in \{(4, -49), (6, 25), (-32, -13), (42, -11)\}$. ■

Como vimos en el ejemplo anterior, la idea es expresar las variables m y n en términos de un parámetro t, reduciendo el problema a solo encontrar los posibles valores de t, y puesto de que estamos trabajando en enteros y que hay ciertas condiciones con respecto a esta variable, la pudimos acotar fácilmente.

1.1.1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación diofántica

$$2(x+y) = xy + 9.$$

Ejercicio 1.2. Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 - x + 3y - z - 4 = 0$ posee infinitas soluciones en los números enteros.

Ejercicio 1.3. Determinar los números enteros x que verifican que $x^4 + 2$ es múltiplo de $x + 2$.

Ejercicio 1.4. Dado tres números enteros positivos x, y, z hallar el valor de su producto sabiendo que cumplen

$$x + 2y = z \quad \text{y} \quad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310.$$

Ejercicio 1.5. Encontrar todas las soluciones enteras (x, y) de la ecuación

$$p(x+y) = xy,$$

donde p es un número primo.

Ejercicio 1.6. Hallar todas las triplas (x, y, z) de enteros positivos tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Ejercicio 1.7. Probar que existen infinitas triplas (x, y, z) de enteros tales que

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Problema 1.1. Probar que si a, b, c son enteros positivos tales que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, entonces

- $a + b$ es un cuadrado perfecto.
- $a^2 + b^2 + c^2$ es un cuadrado perfecto.

1.2. Clase práctica

En esta segunda parte haremos una pequeña clase práctica para recordar las técnicas de factorización y uso de desigualdades.

Ejercicio 1.8. Resolver la ecuación diofántica $2^x + 1 = y^2$.

Ejercicio 1.9. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$xy + 3x - 5y = -3.$$

Ejercicio 1.10. Probar que la ecuación $m^2 = n^4 + n^2 + 1$ no tiene soluciones enteras.

Ejercicio 1.11. Encuentra números positivos de dos cifras que sean iguales a tres veces el producto de los mismos.

Ejercicio 1.12. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2.$$

Ejercicio 1.13. Hallar las soluciones enteras de la ecuación $13x - 7y = 0$, si las variables cumplen que $80 < x + y < 120$.

Ejercicio 1.14. Probar que existe infinitos pares ordenas de enteros positivos (m, n) tal que

$$\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$$

es un entero positivo.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Ejercicio 2.1. Hallar los números enteros positivos x que verifican que $x^5 - 23$ es múltiplo de $x + 1$.

Ejercicio 2.2. Hallar todos los pares ordenados (x, y) tales que $xy = 20 - 3x + y$.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Sea p un número primo, determinar todos los números enteros k tales que $\sqrt{k^2 - kp}$ es un número natural.

Referencias

[BDMS98] Hugo Barrantes, Pedro Díaz, Manuel Murillo, and Alberto Soto. *Introducción a la Teoría de Números.* Universidad Estatal a Distancia. Costa Rica, 1998.

[Lar21] Ricardo Largaespada. Ecuaciones diofánticas. Clase 4. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, Abril 2021.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Gema Tapia
Teléfono: +505 8825 1565 *(Claro)*
Correo: gematapia97@gmail.com