

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Folleto de Concurrencia y Colinealidad

Kenny J. Tinoco
kenny.tinoco10@gmail.com

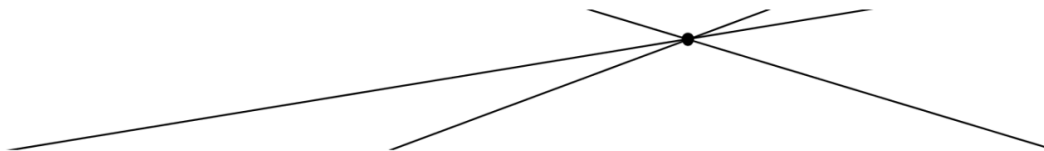
Junio 2023

Índice

1. Concurrencia	2
1.1. Concurrencia de Cevianas	2
1.2. Simedianas	5
1.3. Ejercicios y Problemas	6
2. Colinenalidad	9
2.1. Teorema de Menelao	9
2.2. Teorema de Pappus	11
2.3. Teorema de Desargues	13
2.4. Teorema de Pascal	15
2.5. Teorema de Brianchon	19
2.6. Ejercicios y Problemas	20
3. Teoremas de Colinealidad	22
4. Homotecia	23
5.	24
6. Conocimiento previo	25

1. Concurrencia

1.1. Concurrencia de Cevianas



Tres rectas son concurrentes si pasan por un punto común. Sabiendo esto, veamos el primer hecho fundamental para abordar los problemas de concurrencia.

Teorema 1.1 (Teorema de Ceva).

Dado un triángulo ABC , sean D , E y F puntos sobre los lados BC , CA y AB (o sus prolongaciones), respectivamente. Entonces las rectas AD , BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

A partir de este teorema se vuelve evidente la concurrencia de las principales rectas notables¹. De igual forma muchos otros problemas pueden ser resueltos por el teorema de Ceva, la dificultad radica en transformar las proporciones evidentes en otras que sean más fáciles de manipular para que el producto de todas sea igual a 1.

Es importante resaltar que la manipulación de razones con áreas no funciona, pues a partir de la manipulación de áreas también puede ser demostrado este teorema, y lo único que se obtendría es un avance circular, por ello es mejor hacerlo con semejanza de triángulos, potencia de punto o trigonometría como se verá más adelante.

Definición 1.1 (Ceviana).

A toda recta que parte del vértice hacia el lado opuesto se le denomina *ceviana*.

Definición 1.2 (Triángulo ceviano).

Para todo punto P , las cevianas desde A , B y C que pasan por P y cortan a los lados opuestos en A' , B' y C' . El triángulo $A'B'C'$ es el triángulo ceviano de P y sus vértices se llaman trazas cevianas de P .

¹Ver los ejercicios del 2.1 al 2.4.

Teorema 1.2 (Ceva trigonométrico).

Las rectas AD , BE y CF son cevianas concurrentes del triángulo ABC si y sólo si

$$\frac{\text{sen}(\angle BAD)}{\text{sen}(\angle DAC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle CBE)}{\text{sen}(\angle EBA)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle ACF)}{\text{sen}(\angle FCB)} = 1.$$

La manipulación trigonométrica del teorema de Ceva se vuelve muy importante a la hora de enfrentarse a problemas que pueden parecer prácticamente inaccesibles, pues es más general y más aplicable que la semejanza de triángulos.

Definición 1.3 (El punto de Gergonne).

Sea ABC un triángulo, y sean D , E y F los puntos de tangencia del incírculo con BC , CA y AB , respectivamente. Entonces, AD , BE y CF son concurrentes.

Definición 1.4 (El punto de Nagel).

Sea ABC un triángulo, y sean D' , E' y F' los puntos de tangencia de los excírculos respectivos a A , B y C con BC , CA y AB , respectivamente. Entonces, AD' , BE' y CF' son concurrentes.

Teorema 1.3 (Teorema de Ceva sobre la circunferencia).

Sean ABC y DEF dos triángulos sobre la misma circunferencia. Entonces las rectas AD , BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Definición 1.5 (Triángulo circuncéviano).

A todo punto que no esté sobre alguno de los lados de un triángulo dado es posible asignarle un nuevo triángulo, que surge a partir de la intersección de las cevianas con el circuncírculo del triángulo.

Teorema 1.4 (Teorema de Steinbart).

Sea ABC un triángulo, D , E y F los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC , CA y AB , respectivamente. Sean P , Q y R puntos sobre el incírculo de ABC . Llamemos A' , B' y C' las intersecciones de EF con PD , DF con QE y DE con FR . Entonces AP , BQ y CR son concurrentes si y sólo si DP , EQ y FR son concurrentes.

Teorema 1.5 (Teorema de Jacobi).

Sea ABC un triángulo, y sean X, Y, Z tres puntos en el plano tales que $\angle YAC = \angle BAZ$, $\angle ZBA = \angle CBX$, $\angle XCB = \angle ACY$. Entonces las rectas AX, BY y CZ son concurrentes.

Definición 1.6 (Puntos isotómicos).

Dos puntos son isotómicos si estos coinciden al ser reflejados por el punto medio del segmento al que pertenecen.

Definición 1.7 (Conjugados isotómicos).

Dado un triángulo ABC se tienen tres cevianas AD, BE y CF las cuales son concurrentes en un punto P . Sean D', E' y F' las reflexiones de D, E y F sobre los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. Entonces las rectas AD', BE' y CF' son concurrentes.

Definición 1.8 (Cevianas isogonales).

Dos cevianas son isogonales del $\triangle ABC$ si ambas parte del mismo vértice del triángulo y una es la reflexión de la otra con respecto a la bisectriz interna de $\triangle ABC$.

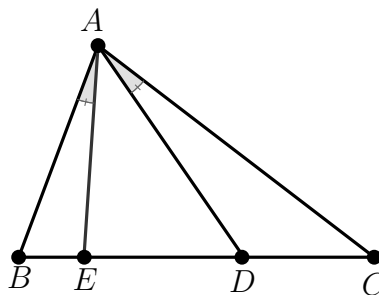
Definición 1.9 (Conjugados isogonales).

Dado un triángulo ABC se tienen tres cevianas AD, BE y CF las cuales son concurrentes en un punto P . Sean AD', BE' y CF' las reflexiones de AD, BE y CF sobre las bisectrices de $\angle A, \angle B$ y $\angle C$ respectivamente. Entonces las rectas AD', BE', CF' son concurrentes.

Teorema 1.6 (Steiner).

Sean D y E dos puntos sobre el segmento BC del triángulo ABC tal que $\angle BAE = \angle DAC$. Así

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{BE}{CE} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2.$$



Demostración. Aplicando el **Teorema 6.2** al $\triangle ABC$ con los puntos D y E , respectivamente, se obtiene:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle DAC)} \quad \wedge \quad \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\angle BAE)}{\sin(\angle EAC)}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle DAC)} \cdot \frac{\sin(\angle BAE)}{\sin(\angle EAC)}$$

Pero como $\angle BAE = \angle DAC$, entonces $\angle BAD = \angle EAC$, de donde se sigue el resultado. ■

1.2. Simedianas

Definición 1.10 (Simediana).

La simediana correspondiente al vértice A se define como la reflexión de A -mediana con respecto a la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$. En otras palabras, es la recta isogonal correspondiente a la mediana que parte del mismo vértice de referencia.

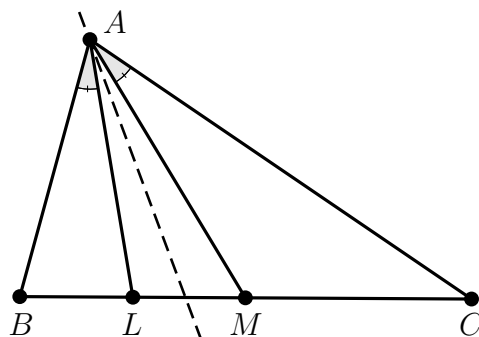


Figura 1: La recta AL es la A -simediana del triángulo ABC .

En el caso de la figura 1, la recta AL es la A -simediana del $\triangle ABC$. Es decir $\angle BAL = \angle MAC$. No hace falta decir que todo triángulo contiene tres simedianas. Por la **Definición 1.4** vista en la clase anterior, sabemos que, al concurrir las medianas en el baricentro, las simedianas comparten también un punto en común, llamado el **punto de Lemoine**.

Lema 1.1.

Sea N un punto sobre el segmento BC ; entonces, N pertenece a la A -simediana si y solo si

$$\frac{BN}{NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Demostración. Es una aplicación directa del **Teorema 1.6**. ■

Lema 1.2.

Sea D el punto de intersección de las tangentes por B y C al circuncírculo del triángulo ABC . Luego, AD es una simediana de $\triangle ABC$.

Demostración. Supongamos que las prolongaciones de los lados AB y AC cortan a la paralela a BC por P en S y T , respectivamente. Es claro que $\angle PSB = \angle CBA$ y $\angle PTC = \angle BCA$. Además, $\angle PBS = \angle BCA$ y $\angle PCT = \angle CBA$ por la condición de tangencia de PB y PC .

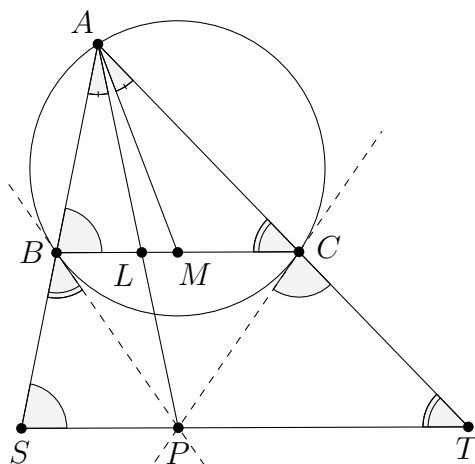


Figura 2: Una forma de construir e identificar la A -simediana.

De este modo, $\triangle BPS \sim \triangle CAB \sim \triangle TPC$, lo que a su vez implica que:

$$\begin{aligned} \frac{SP}{PB} = \frac{AB}{AC} \wedge \frac{PC}{PT} = \frac{AB}{AC} &\Rightarrow \frac{SP}{PB} \cdot \frac{PC}{PT} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \\ \frac{SP}{PB} \cdot \frac{PC}{PT} &= \left(\frac{AS}{AT}\right)^2 \quad (\text{Por } \triangle CAB \sim \triangle TAS) \\ \frac{SP}{PT} &= \left(\frac{AS}{AT}\right)^2 \quad (PB = PC \text{ por tangencia}) \end{aligned}$$

luego, por el lema 1.1, AP es simediana de $\triangle SAT$ y, de paso, también de $\triangle BAC$. ■

Definición 1.11 (Recta de Lemoine).

Sea el triángulo ABC y Ω su circuncírculo, las tangentes a Ω por A , B y C se intersecan con los lados opuestos BC , AC y BA en los puntos E , F y D , respectivamente. Así, se cumple que E , F y D están sobre una misma recta, llamada la **recta de Lemoine** del triángulo ABC .

1.3. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Demostrar que todas las medianas de un triángulo concurren en un punto (Baricentro).

Ejercicio 1.2. Demostrar que todas las alturas de un triángulo concurren en un punto (Ortocentro).

Ejercicio 1.3. Demostrar que todas las bisectrices interiores de un triángulo concurren en un punto (Incentro).

Ejercicio 1.4. Demostrar que dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior de un triángulo concurren en un punto (Excentro).

Ejercicio 1.5. Sean BE , AD y CF líneas tales que dividen a un triángulo en $AE = 12$, $EC = 6$, $CD = 7$, $DB = 10$, $BF = 5$, $FA = 7$. Demostrar que BE , AD y CF son concurrentes.

Ejercicio 1.6. Sea ABC un triángulo con lados AB , BC , CA que tienen longitudes 13, 15, 14, respectivamente. Si CF , AD y BE concurren y $\frac{AF}{FB} = \frac{2}{5}$ y $\frac{CE}{EA} = \frac{5}{8}$, encuentra el valor de BD y DC .

Ejercicio 1.7. En un triángulo ABC en el cual se traza la altura BH , la mediana AM y la ceviana CN las cuales concurren en el punto P . Si $BP = 3PH$ y $NB = 16$. Hallar AN .

Ejercicio 1.8. Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC , y si BQ y CP se cortan en O , demuestra que AO es una mediana.

Ejercicio 1.9. Sean L , M y N puntos en los lados BC , CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL , BM y CN concurren en O , demostrar que

$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1.$$

Ejercicio 1.10. Sean L , M y N puntos en los lados BC , CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL , BM y CN concurren en O , demostrar que

$$\frac{AO}{OL} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}.$$

Problema 1.1. Sea ABC un triángulo. Se toman los puntos D , E y F en las mediatrices de BC , CA y AB respectivamente. Probar que las rectas que pasan por A , B y C que son perpendiculares a EF , FD y DE , respectivamente, son concurrentes.

Ejercicio 1.11. Realizar la construcción de las tres simedianas de un triángulo ABC con la ayuda del Lemma ?? y ubicar el punto de **Lemoine**.

Ejercicio 1.12. Realizar la construcción de la recta de **Lemoine** para un triángulo ABC .

Problema 1.2. Sea L el punto de **Lemoine** de un triángulo ABC y M el punto en BC tal que AM contiene a L . Demostrar que

$$\frac{AL}{LM} = \frac{BA^2 + AC^2}{BC^2}.$$

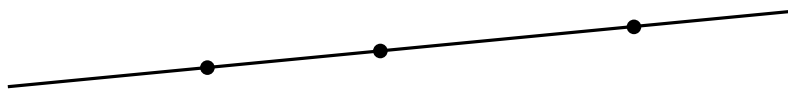
Problema 1.3. Las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle BAC$ de $\triangle ABC$, intersecan a la recta BC en E y D , respectivamente. El circuncírculo de $\triangle DEA$ interseca al circuncírculo de $\triangle ABC$ en X . Probar que AX es la A -simediana de $\triangle ABC$.

Problema 1.4. Sea AD una altura de $\triangle ABC$. Consideremos AD como diámetro de una circunferencia que corta los AB y AC en K y L , respectivamente. Las tangentes a la circunferencia en los puntos K y L se intersectan en un punto M . Demuestra que la recta AM divide BC por la mitad.

Problema 1.5. Un cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene $AD = CD$ y $\angle DAB = \angle ABC < 90^\circ$. La recta por D y el punto medio de BC intersecta a la recta AB en un punto E . Demuestra que $\angle BEC = \angle DAC$.

Problema 1.6. Una recta paralela a BC corta a los lados AB y AC en M y N en el $\triangle ABC$, respectivamente. Sea P el punto de corte de BN y CM . Sea Q el segundo punto de corte de los circuncírculos de MPB y NCP . Demostrar que $\angle BAQ = \angle PAC$.

2. Colinealidad



Tres puntos son **colineales** si se encuentran sobre una misma recta. Dicho esto, presentaremos algunos enfoques que nos ayudarán a probar que tres puntos son colineales al resolver problemas de geometría.

Hay tres formas más comunes de angular que nos permiten probar que tres puntos A , B y C son colineales.

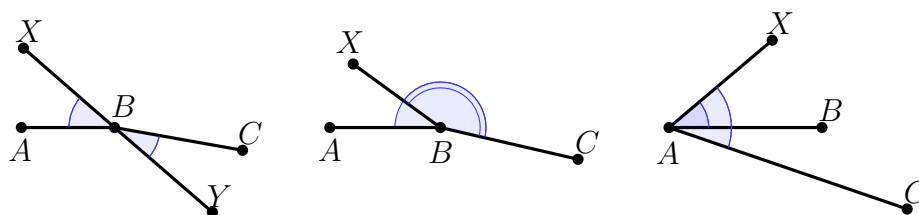


Figura 3: Tres configuraciones de colinealidad.

En la primera configuración, comenzando de izquierda a derecha, necesitaremos dos puntos adicionales que ya son colineales con nuestro punto “medio” B . Sean esos puntos X e Y . Si $\angle XBA = \angle YBC$, entonces los puntos A , B y C son colineales.

En la segunda configuración, necesitaremos un punto extra X que no esté en la supuesta recta $A - B - C$. Si $\angle ABX + \angle XBC = 180^\circ$, entonces los puntos A , B y C son colineales.

En la tercera configuración, también necesitaremos un punto extra X que no esté en la supuesta recta $A - B - C$. Si $\angle XAB = \angle XAC$, entonces los puntos A , B y C son colineales.

2.1. Teorema de Menelao

Teorema 2.1 (Teorema de Menelao).

Dado un triángulo ABC , sean D , E y F puntos sobre los lados (posiblemente en sus prolongaciones) BC , CA y AB , respectivamente. Entonces los puntos D , E y F son colineales si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

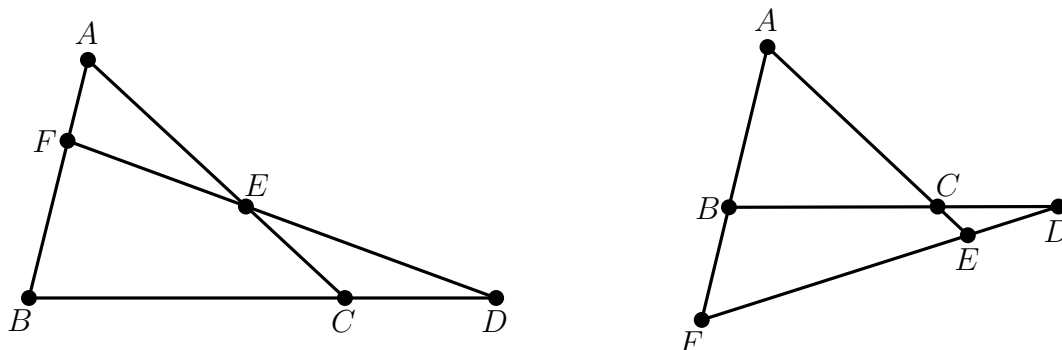


Figura 4: Configuraciones típicas del teorema de Menelao.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

Observación 1.

Una manera fácil de recordar cómo escribir esas proporciones^a es la siguiente. Si tenemos el $\triangle XYZ$ y los puntos $M \in XY$, $N \in YZ$ y $P \in ZX$, entonces primero, vamos a escribir los lados de manera cíclica, algo como

$$\frac{X}{Y} \cdot \frac{Y}{Z} \cdot \frac{Z}{X}$$

y después solo tendremos que agregar el punto en el numerador y denominador en la fracción del lado correspondientes, es decir

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YN}{NZ} \cdot \frac{ZP}{PX}.$$

^aTambién funciona para el teorema de **Ceva**.

Teorema 2.2 (Menelao trigonométrico).

Dado un triángulo ABC , sean D , E y F puntos sobre los lados (posiblemente en sus prolongaciones) BC , CA y AB , respectivamente. Entonces los puntos D , E y F son colineales si y sólo si

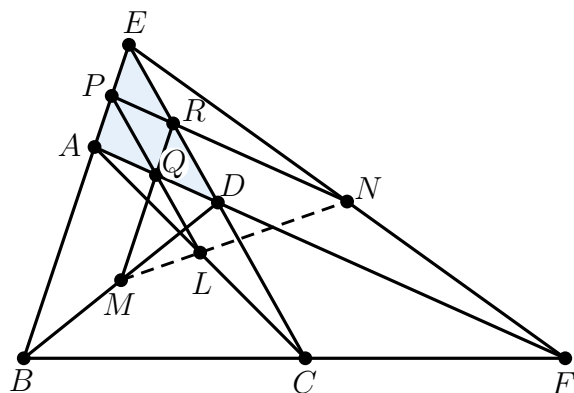
$$\frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle DAC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBE)}{\sin(\angle EBA)} \cdot \frac{\sin(\angle ACF)}{\sin(\angle FCB)} = 1.$$

Demostración. La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

Teorema 2.3 (Recta de Gauss).

Sean L y M los puntos medios de las diagonales AC y BD del cuadrilátero $ABCD$. Las rectas AB y CD se cortan en E , y las rectas AD y BC se cortan en F . Sea N el punto medio de EF . Entonces los puntos L , M y N colineales.

Demostración. Sean P , Q y R los puntos medios de AE , AD y DE respectivamente.



Las rectas PQ , QR y PR son **bases medias** de $\triangle ADE$, por lo tanto son las respectivas bases medias de $\triangle ACE$, $\triangle BDE$ y $\triangle AFE$, así que estas pasan por L , M y N .

Por semejanza, tenemos que

$$\frac{LQ}{LP} = \frac{CD}{CE}, \quad \frac{NP}{NR} = \frac{FA}{FD} \quad \text{y} \quad \frac{MR}{MQ} = \frac{BE}{BA}.$$

Al multiplicar y reordenar se obtiene:

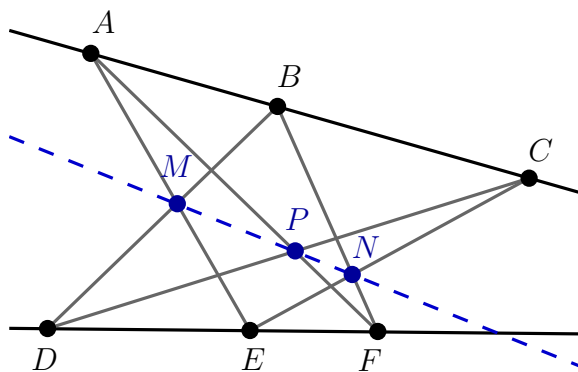
$$\frac{QL}{LP} \cdot \frac{PN}{NR} \cdot \frac{RM}{MQ} = \frac{AF}{FD} \cdot \frac{DC}{CE} \cdot \frac{EB}{BA}$$

Pero este producto es igual a 1, ya que se cumple el **Teorema 2.1** para el triángulo $\triangle ADE$ con respecto a la transversal $B-C-F$. Se concluye entonces que L , M y N son colineales. ■

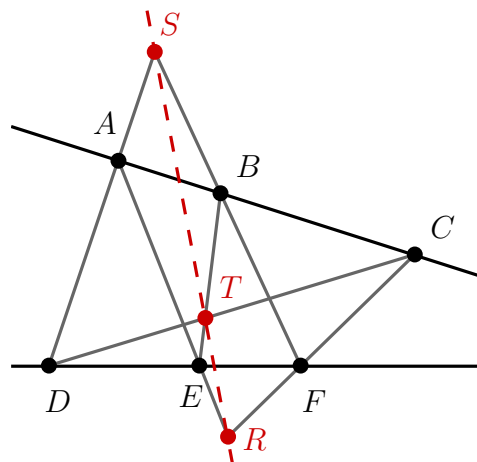
2.2. Teorema de Pappus

Teorema 2.4 (Teorema de Pappus).

Sean A , B y C tres puntos colineales (no necesariamente en ese orden) y D , E y F otros tres puntos colineales (no necesariamente en ese orden). Entonces, los puntos de intersección de las rectas AE , BD ; AF , CD y BF , CE son colineales.



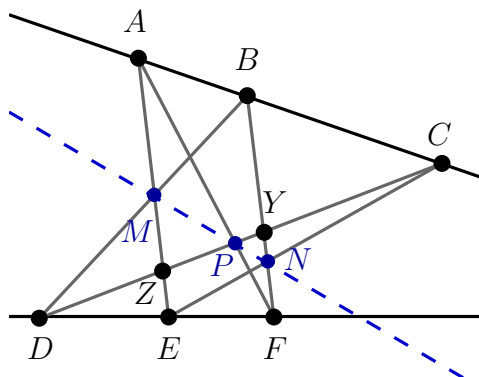
(a) Transversal $M - P - N$.



(b) Transversal $S - T - R$.

Figura 5: Teorema de Pappus.

Caso 2. Ahora, veamos que pasa si el punto X no existe, es decir $AE \parallel BF$. Observemos que el punto X aparece exactamente dos veces en cada una de las 5 igualdades de arriba, una vez en el numerador y una vez en el denominador. Trataremos de encontrar igualdades análogas tal que no usen segmentos que contengan X . En realidad podemos lograr esto, usando rectas paralelas para encontrar triángulos semejantes.



Por el criterio (AA) , obtenemos que $\triangle CYN \sim \triangle CZE$.

$$\therefore \frac{CY}{YN} = \frac{CZ}{ZE} \Rightarrow \frac{CY}{YN} \cdot \frac{ZE}{CZ} = 1.$$

Así mismo, obtenemos las siguientes semejanzas $\triangle PYF \sim \triangle PZA$, $\triangle DYB \sim \triangle DZM$, $\triangle YCB \sim \triangle ZCA$ y $\triangle YDF \sim \triangle ZDE$. De donde, sacamos igualdades análogas.

Multiplicando estas igualdades, obtenemos

$$\frac{CY}{YN} \cdot \frac{ZE}{CZ} \cdot \frac{PY}{YF} \cdot \frac{ZA}{PZ} \cdot \frac{DY}{YB} \cdot \frac{ZM}{DZ} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{YF}{YD} \cdot \frac{ZD}{ZE} = 1$$

$$\therefore \frac{PY}{YN} \cdot \frac{ZM}{PZ} = 1 \Rightarrow \frac{PY}{YN} = \frac{PZ}{ZM}$$

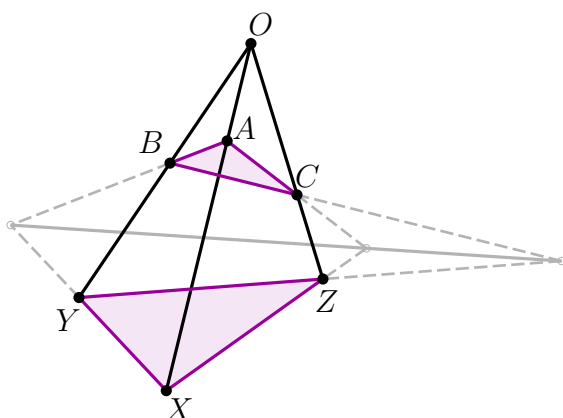
Como $\angle PYN = \angle PZM$, por (LAL) obtenemos que $\triangle PYN \sim \triangle PZM$ y por lo tanto $\angle YPN = \angle ZPM$. Ya que $Y - P - Z$ son colineales, por consiguiente $N - P - M$. ■

2.3. Teorema de Desargues

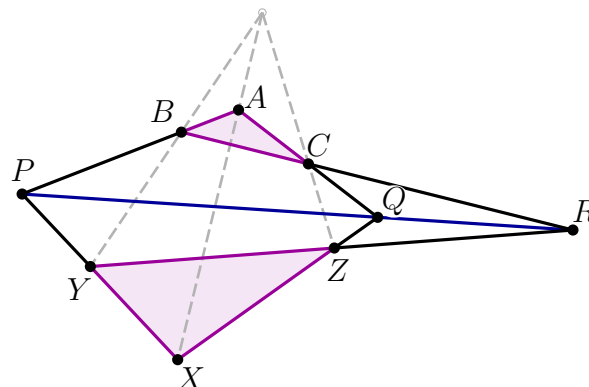
Consideremos dos triángulos arbitrarios $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$. Antes de establecer el resultado principal, es necesario proporcionar dos definiciones fundamentales.

Definición 2.1.

- Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en *perspectiva respecto a un punto* (digamos O) si las rectas AX , BY y CZ son concurrentes.
- Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en *perspectiva respecto a una recta* si los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes de ambos triángulos (digamos $P = AB \cap XY$, $Q = CA \cap ZX$ y $R = BC \cap YZ$) son colineales.



(a) Perspectiva con respecto a un punto.

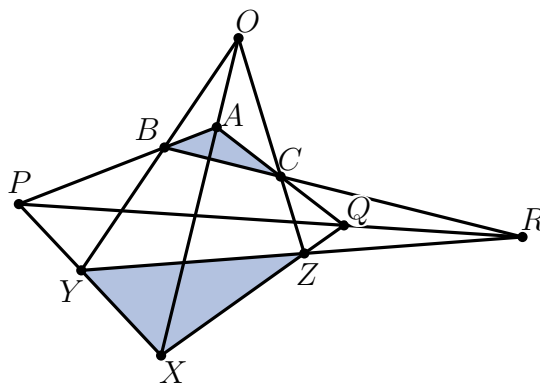


(b) Perspectiva con respecto a una recta.

Figura 7: Perspectiva de dos triángulos.

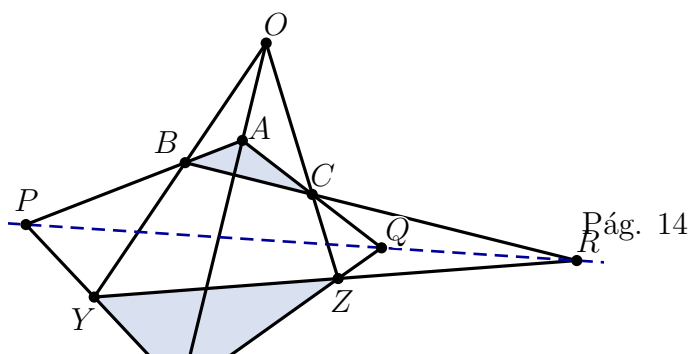
Teorema 2.5 (Teorema de Desargues).

Dos triángulos están en perspectiva con respecto a una recta si y solo si están en perspectiva con respecto a un punto.

Figura 8: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva con O y la recta PR .

Claramente, al igual que el **Teorema 2.4**, el teorema de Desargues tiene muchas más configuraciones.

Demostración. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ dos triángulos en perspectiva a un punto, entonces AX , BY y CZ son concurrentes con el punto O . Sea $P = AB \cap XY$, $R = BC \cap YZ$ y $Q = CA \cap ZX$.



Aplicando el **Teorema 2.1** a los triángulos $\triangle OAB$ con la transversal $P-Y-X$, $\triangle OBC$ con la transversal $R-Z-Y$ y $\triangle OCA$ con la transversal $Q-Z-X$, obtenemos que;

$$\frac{OX}{XA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BY}{YO} = 1,$$

$$\frac{OY}{YB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CZ}{ZO} = 1 \quad \text{y}$$

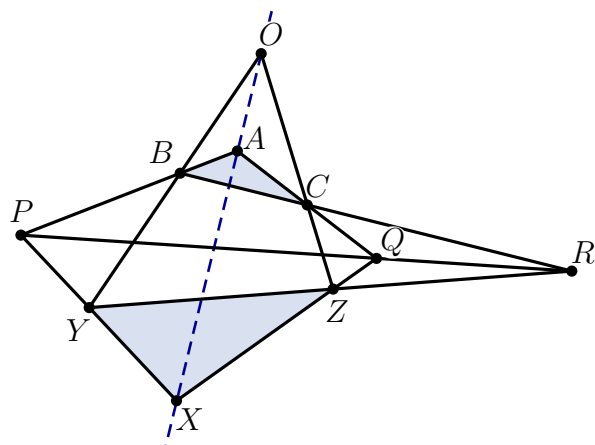
$$\frac{OZ}{ZC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AX}{XO} = 1.$$

Multiplicando estas tres igualdades, llegamos al siguiente resultado

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1,$$

que por el **Teorema 2.1** aplicado al triángulo $\triangle ABC$, significa que los puntos P , R y Q son colineales, es decir $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva con respecto a la recta PQ .

Ahora, probaremos la otra dirección. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ dos triángulos en perspectiva a una recta, entonces los puntos $P = AB \cap XY$, $Q = CA \cap ZX$ y $R = BC \cap YZ$ son colineales.



Sean $O = BY \cap CZ$. Debemos de probar que AX también pasa por O .

Observemos los triángulos $\triangle QPZ$ y $\triangle PBY$. Las rectas QP , CB y ZY son concurrentes en R , así que los triángulos están en perspectiva con respecto a ese punto.

Por la dirección del teorema de Desargues que acabamos de demostrar, se deduce que los triángulos deben de estar en perspectiva respecto a una recta.

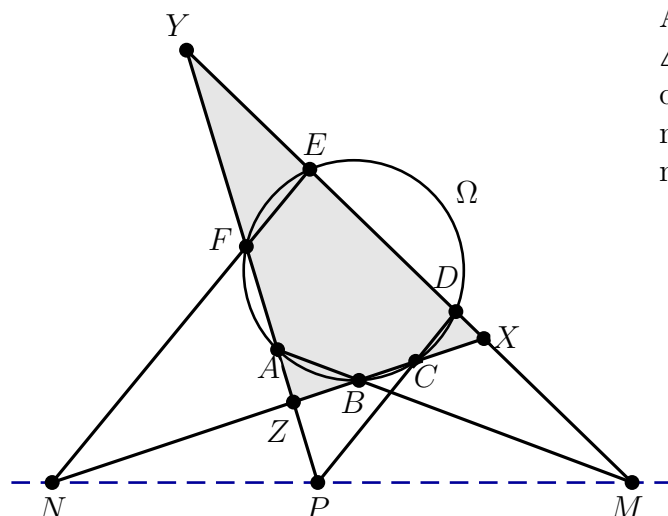
Es decir, los puntos $QC \cap PB = A$, $CZ \cap BY = O$ y $ZQ \cap YP = X$ son colineales. Con esto, probamos que AX pasa por O , luego $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva respecto al punto O . ■

2.4. Teorema de Pascal

Teorema 2.6 (Teorema de Pascal).

Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito, no necesariamente convexo, en una circunferencia Ω . Entonces, los puntos $M = AB \cap DE$, $N = BC \cap EF$ y $P = CD \cap FA$ son colineales.

Demostración. Sean $X = BC \cap DE$, $Y = DE \cap FA$ y $Z = FA \cap BC$.



Al usar el teorema de **Menelao** tres veces en $\triangle XYZ$, primero con la transversal $A-B-M$, después con la transversal $P-C-D$ y finalmente con $F-N-E$, respectivamente, obtenemos que

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YA}{AZ} \cdot \frac{ZB}{BX} = 1,$$

$$\frac{XD}{DY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZC}{CX} = 1 \text{ y}$$

$$\frac{XE}{EY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{ZN}{NX} = 1.$$

Multiplicando estas tres igualdades y reordenando los miembros, obtenemos que

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZN}{NX} \cdot \frac{(YA \cdot YF) \cdot (ZB \cdot ZC) \cdot (XD \cdot XE)}{(AZ \cdot FZ) \cdot (BX \cdot CX) \cdot (DY \cdot EF)} = 1. \quad (*)$$

Ahora por la **Propiedad 6.1** sabemos que para los puntos X, Y y Z se cumple que

$$XD \cdot XE = XC \cdot XB \quad \wedge \quad YF \cdot YA = YE \cdot YD \quad \wedge \quad ZB \cdot ZC = ZA \cdot ZE$$

Así $(*)$ se convierte en

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZN}{NX} = 1,$$

que por el teorema de **Menelao** significa que M, N y P son colineales. ■

Observación 2.

Una manera fácil de recordar las intersecciones es la siguiente: Tomamos dos letras consecutivas, dejamos una letra de espacio, y tomamos otras dos letras consecutivas. La intersección de las rectas formadas con eso pares puntos es el primer punto de la colinealidad. Luego nos movemos a la derecha y repetimos el proceso dos veces más.^a

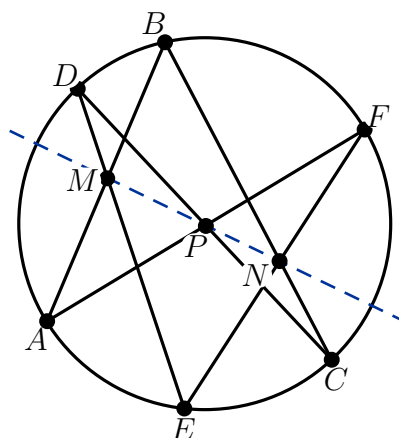


Figura 9: Teorema de Pascal.

A	E	C
D	B	F
N	P	M

Figura 10: Mnemotécnia de Pascal.

Donde $N = \overline{EF} \cap \overline{CB}$, $P = \overline{AF} \cap \overline{CD}$ y $M = \overline{AB} \cap \overline{ED}$.

^aOtra manera de verlos es tomar vértices consecutivos módulo 3.

El **Teorema 2.6** es independiente de cómo haya sido tomado el hexágono. El mostrado en la demostración es el caso más sencillo en el cual el hexágono es convexo. Sin embargo, la colinealidad se sigue cumpliendo aunque el hexágono no sea convexo, como se puede ver en la figura 9. La demostración de este caso y de cualquier otro es análoga a la primera.

Ejemplo 2.1.

Sean D y E los puntos medios de los arcos menores \widehat{AB} y \widehat{AC} del circuncírculo del $\triangle ABC$, respectivamente. Sea P un punto en el arco menor BC , $Q = PD \cap AB$ y $R = PE \cap AC$. Probar que la recta QR pasa a través de incentro I del $\triangle ABC$.

Solución. Dado que D es el punto medio del arco \widehat{AB} , CD es bisectriz del ángulo $\angle BCA$. Análogamente, BE es bisectriz de $\angle ABC$. Por lo tanto, $CD \cap BE = I$.

Ahora, aplicando el **Teorema 2.6** al hexágono $CDPEBA$ tenemos que los puntos $CD \cap BE = I$, $DP \cap BA = Q$ y $PE \cap AC = R$ son colineales. ■

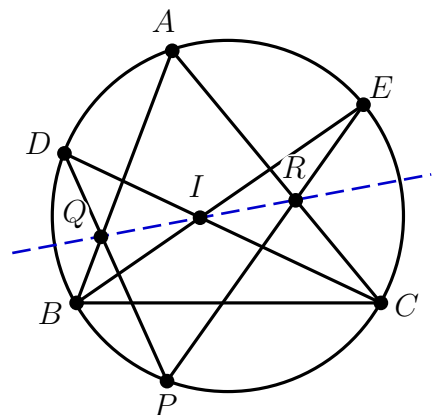
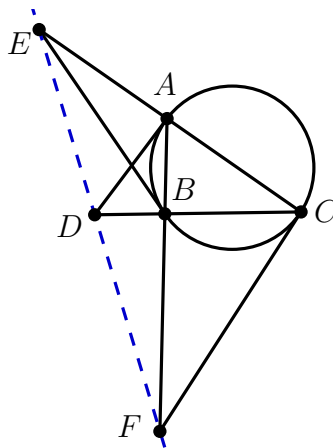


Figura 11: Ejemplo 2.1, aplicación del teorema de Pascal.

El **Teorema 2.6** puede presentar versiones degeneradas, aunque puede suceder, el caso más habitual ya no consiste en un paralelismo, sino en la transformación de un polígono de seis lados a un polígono de cinco, cuatro o tres lados.

Ejemplo 2.2.

Sea ω el circuncírculo del $\triangle ABC$. Las tangentes a ω por los puntos A , B y C intersecan a las rectas BC , CA y AB en los puntos D , E y F , respectivamente. Probar que los puntos D , E y F están alineados.



Solución. Aplicando el **Teorema 2.6** al hexágono degenerado $AABBCC$. Tenemos que los puntos $AA \cap BC = D$, $AB \cap CC = F$ y $BB \cap CA = E$ son colineales. ■

Existen $\frac{5!}{2} = 60$ maneras de posibles de formar un hexágono con 6 puntos distribuidos en una circunferencia, y, por el **Teorema 2.6**, a cada hexágono le corresponde una recta de Pascal. Estas 60 rectas de Pascal pasan de tres en tres por 20 puntos llamados puntos de Steiner, que su vez están de cuatro en cuatro sobre 15 rectas, llamadas rectas de Plucker.

2.5. Teorema de Brianchon

Teorema 2.7 (Teorema de Brianchon).

Sea $ABCDEF$ un hexágono circunscrito, no necesariamente convexo, a un círculo Ω . Entonces, las rectas AD , BE y CF son concurrentes.

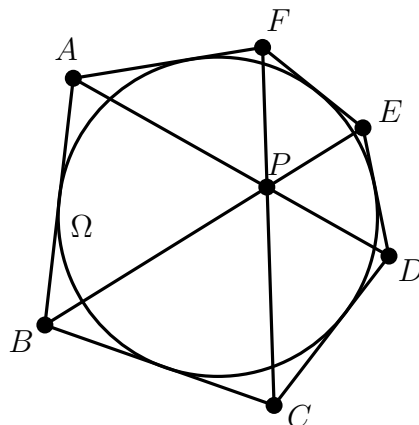


Figura 12: Teorema de Brianchon.

La demostración más sencilla del teorema de Brianchon implica utilizar polos y polares. Pues resulta que el **Teorema 2.6** y **Teorema 2.7** son *duals bajo la transformación polar*. Esto significa que, al tomar la colinealidad proporcionada por el **Teorema 2.6** y aplicarle la transformación polar con respecto al círculo de referencia, inmediatamente obtenemos la concurrencia que el **Teorema 2.7** implica. Ya que el tema de polos y polares no lo veremos en el curso, se invita al estudiante indagar la demostración de este teorema por su cuenta.

De la misma manera que con el primer teorema, el **Teorema 2.7** está sujeto a versiones degeneradas. En este caso, los vértices degenerados coinciden con los puntos de tangencia entre el polígono y el círculo inscrito. En efecto, al aplicar el **Teorema 2.7** al hexágono $ABCDEF$ con D, F y B puntos de tangencia, como se muestra en la figura 13, redescubrimos que los puntos de tangencia del incírculo de $\triangle ACE$ concurren.

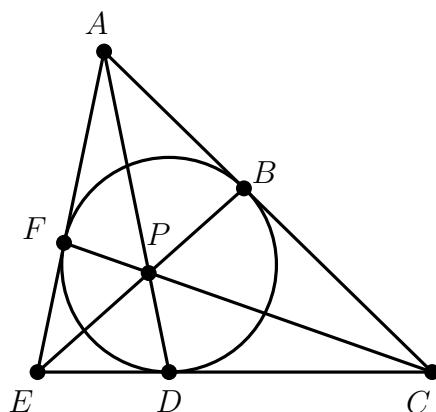


Figura 13: Un caso degenerado del teorema de Brianchon.

Observación 3.

Al igual que con el teorema anterior, existe una manera fácil de obtener el punto de concurrencia. Ordenamos los puntos en una tabla, luego tomamos los segmentos formados con los puntos consecutivos de arriba hacia abajo. La intersección de estos segmentos es el punto de concurrencia.

A	B	C
D	E	F
AD	BE	CF

Figura 14: Mnemotécnica de Brianchon.

Es decir $P = \overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF}$. Otra manera de ver esto, es tomar las rectas formadas por los puntos cuyas posiciones son las mismas en módulo 3.

2.6. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 2.1. Demuestre que las tangentes a la circunferencia circunscrita a un triángulo en los vértices de este, cortan a los lados opuestos de dicho triángulo en tres puntos colineales.

Problema 2.2. Si los lados AB , BC , CD y DA de un cuadrilátero $ABCD$ son cortados por una transversal en los puntos A' , B' , C' y D' , respectivamente. Probar que

$$\frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DD'}{D'A} = 1.$$

Problema 2.3. Sean AD , BE y CF tres cevianas concurrentes en un triángulo $\triangle ABC$. Se toma un punto D' en BC tal que $BD = CD'$. Las paralelas a BC por E y F cortan AD y AD' en G y H respectivamente. Prueba que C , G y H son colineales.

Problema 2.4. En un paralelogramo $ABCD$ con $\angle B < 90^\circ$, el círculo de diámetro AC corta las rectas CB y CD en E y F , respectivamente, y la tangente al círculo por A corta BD en P . Demuestre que P , F y E están alineados.

Problema 2.5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Las diagonales AC y BD se cortan en E , y los lados AB y CD se cortan en F . Sean J y K los ortocentros de $\triangle ADF$ y $\triangle BCF$ respectivamente. Demuestre que J , E y K están alineados.

Problema 2.6. Sea $ABCD$ un trapecio con AB mayor y paralelo a CD . Sean E y F puntos en AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}$. Sean K y L puntos en EF tales que $\angle AKB = \angle DCB$ y $\angle CLD = \angle CBA$. Demuestre que $KLCB$ es cíclico.

Problema 2.7. Sea P la intersección de las diagonales AC y BD en el cuadrilátero cíclico $ABCD$. Sean E , F , G y H los pies de las perpendiculares desde P hacia AB , BC , CD y DA , respectivamente. Pruebe que las rectas EH , BD y FG son concurrentes o son paralelas.

Problema 2.8. Dado el $\triangle ABC$ con circuncentro O . Sea A_1 y B_1 los pies de las alturas trazadas desde A y B , respectivamente. Sea M y N los puntos medios de AC y BC , respectivamente. Sea el punto $X \in BB_1$ tal que $MX \perp AB$ y de manera análoga el punto $Y \in AA_1$ tal que $NY \perp AB$. Se define $P = A_1M \cap B_1N$ y $Q = XN \cap YM$. Demostrar que P , Q y O son colineales.

Problema 2.9. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y Γ su circuncírculo. Sea D un punto en el segmento BC , diferente de B y C , y sea M el punto medio de AD . La perpendicular a AB que pasa por D interseca a AB en E y Γ en F , con el punto D entre E y F . Las rectas FC y EM se intersectan en el punto X . Si $\angle DAE = \angle AFE$, demostrar que la recta AX es tangente a Γ .

Problema 2.10. Sea Γ el circuncírculo del $\triangle ABC$. Un círculo que pasa por A y C corta a los lados BC y BA en D y E , respectivamente. Las rectas AD y CE intersecan a Γ por segunda vez en G y H , respectivamente. Las tangentes a Γ por A y C intersecan a la recta DE en L y M , respectivamente. Probar que las rectas LH y MG se cortan en Γ .

Problema 2.11. Sea el triángulo $\triangle ABC$ y sean D , E y F los puntos de tangencia del excírculo en A con respecto a los lados BC , CA y AB . Sean H y G las intersecciones de excírculo con BE y CF respectivamente. Se toma un punto S en AD , sean U y V las intersecciones del excírculo con SH y SG respectivamente. Demuestre que BC , UV , GH y EF son concurrentes.

3. Teoremas de Colinealidad

4. Homotecia

5.

6. Conocimiento previo

Teorema 6.1 (Ley de los Senos).

Sea el triángulo ABC con circunradio R . Entonces

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R.$$

Pista: Considerar las antípodas de los vértices en el circuncírculo de $\triangle ABC$, notar ciertas igualdades de ángulos por cuadriláteros cíclicos y luego utilizar la definición del seno para el triángulo rectángulo.

Teorema 6.2 (Teorema de bisectriz generalizada).

Dado el triángulo ABC , sea el punto X en BC . Entonces se cumple que

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\angle BAX)}{\sin(\angle XAC)}.$$

Pista: Utilizar el **Teorema 6.1** y la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{Si } \alpha + \beta = 180^\circ, \text{ entonces } \sin(\alpha) = \sin(\beta).$$

Propiedad 6.1 (Potencia de un punto exterior). Sean AD y CD dos rectas que se intersecan en X tales que $X - A - B$ y $X - C - D$. Entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si

$$\overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XC} \cdot \overline{XD}.$$

Demostración. Rápidamente nos damos cuenta de que $\angle CXB = \angle AXD$ (*).

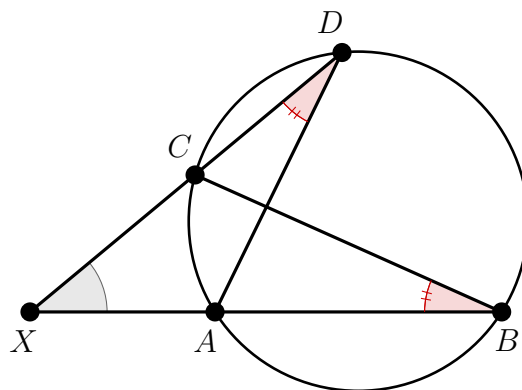
Entonces $ABCD$ es cíclico

$$\iff \angle ABC = \angle ADC$$

$$\iff \angle XBC = \angle ADX$$

$$\stackrel{(*)}{\iff} \triangle XBC \sim \triangle XDA \stackrel{(*)}{\iff} \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{XD}}{\overline{XA}}$$

$$\iff \overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XC} \cdot \overline{XD}. \quad \blacksquare$$



Referencias

- [Agu19] Eduardo Aguilar. *Estrategias sintéticas en Geometría Euclídea*. Editorial, 2019.
- [Bac22] Jafet Baca. *Apuntes de Geometría Euclidiana para Competiciones Matemáticas*. Independent publication, 2022.