Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Problemas propuesto para OTM 2023

Quinto Nivel

1. Problemas

Problema 1.1. Sabiedo que $S(x)$ es un polinomio cúbico mónico con $S(-10) = 1$, $S(-17) = 2$ y $S(-24) = 3$. Hallar el valor de $S(-3) - 35$.

Problema 1.2. Sean a, b y c las raíces del polinomio $6x^3 + x + 4046$. Calcular

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3.$$

2. Soluciones y Criterios

Problema 1.1.

Solución 1. Tras un breve análisis notamos que

$$S(x) = -\frac{x+3}{7}, \text{ para } x = -10, -17, -24. \tag{1}$$

Por lo tanto, si definimos al polinomio $T(x) = S(x) + \dfrac{x+3}{7}$, entonces los valores -10, -17 y -24 será raíces de $T(x)$. Además, como $S(x)$ es mónico, entonces $T(x)$ también lo será. Así, por el teorema del factor podemos escribir a $T(x)$ como

$$T(x) = (x+10)(x+17)(x+24) \tag{2}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
T(-3) &= S(-3) + \frac{-3+3}{7} = S(-3) + 0 \\
T(-3) &= (-3+10)(-3+17)(-3+24) \\
S(-3) &= (7)(14)(21) = 2058
\end{aligned}$$

Luego, $S(-3) - 35 = 2058 - 35 = \boxed{2023}$. ■

Solución 1. Criterios de evaluación.

- **3 puntos.** Por llegar al resultado (1).
- **3 puntos.** Por llegar al resultado (2).
- **1 puntos.** Por indicar la respuesta correcta.

Solución 2. Como $S(x)$ es un polinomio cúbico y mónico, podemos decir que tiene la forma

$$S(x) = x^3 + ax^2 + bx + c. \tag{3}$$

Así, al utilizar los valores que nos dan de datos, podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones 3×3

$$\begin{cases} S(-10) = (-10)^3 + a(-10)^2 + b(-10) + c = 1 \\ S(-17) = (-17)^3 + a(-17)^2 + b(-17) + c = 2 \\ S(-24) = (-24)^3 + a(-24)^2 + b(-24) + c = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 100a - 10b + c = 1001 \\ 289a - 17b + c = 4915 \\ 576a - 24b + c = 13827 \end{cases} \tag{4}$$

Luego de resolver este sistema, vemos que tiene como soluciones a $a = 51$, $b = \dfrac{5725}{7}$ y $c = \dfrac{28557}{7}$, por consiguiente

$$S(x) = x^3 + 51x^2 + \frac{5725}{7}x + \frac{28557}{7}. \tag{5}$$

Así, $S(-3) - 35 = (-3)^3 + 51(-3)^2 + \frac{5725}{7}(-3) + \frac{28557}{7} - 35 = 2058 - 35 = \boxed{2023}$. ■

Solución 2. Criterios de evaluación.

- **1 puntos.** Por llegar al resultado (3).
- **2 puntos.** Por llegar al resultado (4).
- **3 puntos.** Por resolver el sistema correctamente y llegar al resultado (5).
- **1 puntos.** Por indicar la respuesta correcta.

Problema 1.2.

Solución 1. Por las fórmulas de Vieta sabemos que la suma de las raíces es igual al coeficiente de x^2 dividido entre el coeficiente principal por menos uno en el polinomio dado, es decir

$$a+b+c=-\frac{0}{6}=0.$$

Además, es conocido que si $x+y+z=0$, entonces $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Es claro que $(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)=0$, entonces $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3=3(a+b)(b+c)(c+a)=3(-c)(-a)(-b)=-3abc$. Luego, sabemos que el producto de las raíces es el término independiente entre el coeficiente principal por menos uno, es decir

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3=-3\left(-\frac{4046}{6}\right)=\boxed{2023}. \qquad \blacksquare$$

Solución 2. Por las fórmulas de Vieta sabemos que $a+b+c=0$. Entonces,

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3=(-c)^3+(-a)^3+(-b)^3=-(a^3+b^3+c^3)$$

Por propiedad sabemos que $-(a^3+b^3+c^3)=-3abc$, nuevamente por Vieta

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3=-3\left(-\frac{4046}{6}\right)=\boxed{2023}. \qquad \blacksquare$$

Solución 3. Desarrollando, tenemos que

$$\begin{aligned}(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3 &= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+(c^3+3c^2a+3ca^2+a^3)\\ &= (3a^3+3a^2b+3ac^2)-a^3+(3b^3+3b^2a+3bc^2)-b^3\\ &\quad +(3c^3+3c^2a+3c^2a)-c^3\\ &= 3a^2(a+b+c)-a^3+3b^2(a+b+c)-b^3+3c^2(a+b+c)-c^3\\ &= -(a^3+b^3+c^3)\end{aligned}$$

Luego el mismo procediemiento en las soluciones 1 y 2. $\blacksquare$

Criterios de evaluación.

- **2 puntos.** Por utilizar correctamente las fórmulas de Vieta..
- **4 puntos.** Por deducir que $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3=-3abc$.
- **1 puntos.** Por indicar la respuesta correcta.