

# Academia Sabatina de Jóvenes Talento

---

## Polinomios Clase #5

**Encuentro:** 5

**Curso:** Polinomios

**Fecha:** 22 de abril de 2023

**Nivel:** 5

**Semestre:** I

**Instructor:** Kenny Jordan Tinoco

**D. auxiliar:** José Adán Duarte

### Contenido: División de Polinomios

En esta quinta sesión de clase veremos la división de polinomios. Abordaremos los métodos de Horner, Ruffini y división clásica, estos son los métodos básicos (y en general suficientes) para la mayoría de problemas de división polinómica.

## 1. Desarrollo

**Definición 1.1 (División con resto).** Para todo polinomio  $F$  y  $G$  existen los polinomios  $Q$  y  $R$  tal que

$$F(x) = G(x)Q(x) + R(x), \quad \text{con } 0 \leq \deg(R) < \deg(G).$$

Donde  $Q$  y  $R$  son el *cociente* y *resto* (o *residuo*) de la división de  $F$  por  $G$ . Si  $R(x) = 0$ , entonces diremos que  $G$  divide a  $F$ , y lo vamos a denotar como  $G(x) \mid F(x)$ .

Abreviaremos  $G(x) \mid F(x)$  como  $G \mid F$  ya que al efectuar una división polinómica los polinomios en cuestión deben de tener la misma variable.

**Ejemplo 1.** Con  $F(x) = x^7 - 1$  y  $G(x) = x^3 + x + 1$  llegaremos a que

$$x^7 - 1 = (x^3 + x + 1)(x^4 - x^2 - x + 1) + 2x^2 - 2.$$

Aquí  $Q(x) = x^4 - x^2 - x + 1$  y  $R(x) = 2x^2 - 2$ .

### 1.1. Método clásico

Se recomienda cuando los polinomios a dividir son de una sola variable o para polinomios homogéneos. El algoritmo es el siguiente:

- Completar y ordenar los dos polinomios, tanto el divisor como el dividendo.
- Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.
- Multiplicar el divisor con signo cambiado por los términos del cociente y sumar ordenadamente el producto obtenido con el dividendo.

- d. Tratar el resto obtenido en el paso anterior como el nuevo dividiendo y repetir los pasos b y c.<sup>1</sup>.
- e. Continuar el proceso hasta que el resto obtenido tenga un grado menor al divisor o bien al obtener cero.

## 1.2. Método de Horner

Se recomienda usar el método de Horner cuando el polinomio divisor es de segundo grado o más y se opera solo con los coeficientes de los polinomios ordenados y completos. Los coeficientes se distribuyen en un cuadro como el que sigue:

Con su mismo signo	{	D	D	I	V	I	D	E	N	D	O
		I									
Con signo cambiado		V									
		I									
		S									
		O									
		R	C	O	C	I	E	N	T	E	
											R
											E
											S
											I
											D
											O

Algoritmo del método de Horner

- a. Se anotan los coeficientes del dividiendo en la parte superior del cuadro en forma horizontal.
- b. Se anotan los coeficientes del divisor en la parte izquierda del cuadro en forma vertical con los signos cambiados a excepción del primero.
- c. La línea de trazos separa el cociente del resto y para su trazo se considera el grado del divisor. En el cociente se cuentan tantos términos como el grado del dividendo menos el grado del divisor más uno.
- d. El primer término del cociente se obtiene dividiendo el primer coeficiente del dividendo entre el primer coeficiente del divisor.
- e. El coeficiente obtenido en el paso anterior se multiplica con los demás coeficientes del divisor con signo opuesto y los resultados se escriben en forma horizontal a partir de la siguiente columna hacia la derecha.
- f. Las cantidades que se encuentran en la segunda columna se suman y el resultado se divide entre el primer coeficiente del divisor, repitiéndose el procedimiento hasta coincidir con la última columna del dividendo.
- g. Para finalizar, se suman directamente las columnas correspondientes al residuo, lo que conformará los coeficientes del polinomio residuo o resto.

<sup>1</sup>En general, los métodos para la división de polinomios son recursivos.

### 1.3. Método de Ruffini

Se recomienda usar este método cuando el divisor tiene la forma  $ax \pm b$ . El método de Ruffini se considera como un caso particular del método de Horner. Este método se apoya de un cuadro como el siguiente

	DIVIDENDO	
$\square$	↓	
	COCIENTE	RESTO

Donde  $\square$  es el resultado de resolver la ecuación  $ax \pm b = 0$ .

Algoritmo del método de Ruffini

- Se anotan los coeficientes del dividiendo en forma horizontal y el valor de  $\square$  en la columna izquierda.
- Se baja el primer coeficiente del dividendo y se multiplica por el valor de  $\square$ , el resultado se anota en la siguiente columna, debajo del segundo coeficiente del dividendo.
- Se suman las cantidades de la segunda columna y se sigue el mismo procedimiento hasta obtener un término debajo del último coeficiente del dividendo.
- El residuo es la suma de cantidades de la última columna.

### 1.4. Agregados culturales y preguntas

- Existe una rica y abundante literatura sobre la resolución de problemas, entre todas ellas destacamos *El arte de resolver problemas* de José Luis Córdova.
- He aquí una cita "*En pocas palabras: cualquier problema (por trivial que parezca) lleva a una investigación. El gusto por la investigación, la curiosidad, es una de las mayores riquezas de la humanidad. Y para investigar no existe ningún camino lógico, sólo el camino de la intuición y la convicción de que existe un orden detrás del caos de percepciones.*"

## 2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

**Problema 2.1.** Si el polinomio  $3x^5 + 6x^3 - 3x$  se le divide entre  $x + 1$  se obtiene como resultado un cociente de grado  $m$ , un término independiente  $b$  y un resto  $a$ . Hallar  $m + a + b$ .

**Problema 2.2.** Al dividir  $x^4 - x^2 - 2x + 1$  entre  $x^2 + x + 1$ , determine el producto de los términos del cociente.

**Problema 2.3.** Si  $P(x - 2) = x^3 - 10x^2 + 28x - 24$ , hallar el resto de dividir  $P(x)$  por  $x - 3$

**Problema 2.4.** Si el resto de la división de  $6x^4 - 11x^2 + ax + b$  entre  $3x^2 - 3x - 1$  es  $3x + 2$ . Hallar  $a - b$ .

**Problema 2.5.** Para que la división de  $x^4 + ax^2 + b$  entre  $x^2 + x + 1$  sea exacta, encuentre los valores de  $a$  y  $b$  apropiados.

**Problema 2.6.** Si el polinomio  $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x + 1$  se divide por  $x^2 - x + 2$  se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es 22 y un resto  $R(x) = 10x - 1$ , calcular  $b + c$ .

**Problema 2.7.** Al dividir el polinomio  $P(x) = 55x^3 + (166 + b)x - x^2 - 2$  entre  $Q(x) = ax^2 - 39x + 2$ , el residuo es de la forma  $R(x) = mx$ . Calcular el valor de  $a + b$ .

**Problema 2.8.** ¿Qué valor adquiere  $\frac{n + 19}{k + 1}$ , si la división  $\frac{x^{19} - nx + k}{x^2 - 2x + 1}$  es exacta?

### 3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

**Asignación.** Complementar el estudio de la división polinómica con recursos en internet; vídeos, foros, documentos, etc.

**Problema 3.1.** Dado los polinomios  $P(x) = 2x^5 + x^4 + ax^2 + bx + c$  y  $Q(x) = x^4 - 1$ , se sabe que  $Q \mid P$ . Hallar  $\frac{a + b}{a - b}$ .

**Problema 3.2.** Dado los polinomios  $P(x) = 16x^5 + ax^2 + bx + c$  y  $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ , se sabe que  $Q \mid P$ . Hallar  $a + b + c$ .

**Problema 3.3.** Dado los polinomios  $P(x) = 6x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 10x + a$  y  $Q(x) = 3x^2 + 2x + b$ , se sabe que  $Q \mid P$ . Hallar  $a^2 + b^2$ .

### 4. Extra

**Problema 4.1.** ¿Para qué valores de  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que  $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$ ?

## Referencias

- [BGV14] Radmila Bulajich, José Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.
- [CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 5. División de polinomios. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2022.
- [Eng97] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1997.

### En caso de consultas

**Instructor:** Kenny J. Tinoco

**Teléfono:** +505 7836 3102 (*Tigo*)

**Correo:** kenny.tinoco10@gmail.com

**Docente:** José A. Duarte

**Teléfono:** +505 8420 4002 (*Claro*)

**Correo:** joseandanduarte@gmail.com