Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Ecuaciones Diofánticas
Clase #7

Encuentro: 22
Curso: Ecuaciones Diofánticas
Fecha: x de octubre (prob) de 2024

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Gema Tapia

Contenido: Ecuaciones diofánticas lineales

En esta ocasión abordaremos el tema de ecuaciones Lineales el primero de la tercera unidad ecuaciones diofánticas clásicas. Primero recordaremos algunos hechos básicos y luego veremos un poco teoría de las ecuaciones lineales clásicas, los teoremas y técnicas más comunes, ejemplos y problemas.

1. Desarrollo

Antes de empezar recordemos lo siguiente.

Definición 1.1 (Máximo divisor común)**.** Dados $a, b \in \mathbb{Z}^{\neq 0}$, el máximo $d \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d \mid a$ y $d \mid b$ es el máximo divisor común, y lo denotamos por $d = \text{mcd}(a, b)$.

Definición 1.2. Dados $a, b \in \mathbb{Z}^{\neq 0}$, si $\text{mcd}(a, b) = 1$, entonces diremos que a y b son coprimos, primos relativos o primos entre sí.

Teorema 1.1 (Algoritmo de la división)**.** Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, existen $k, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = kb + r$ con $0 \leq r < |b|$, donde k, r son únicos.

Teorema 1.2. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a, b \neq 0$, la ecuación $ax + by = c$;

1. tiene solución si y solo si $\text{mcd}(a, b) \mid c$, además, es equivalente a otra ecuación de coeficientes coprimos,
2. si (x_0, y_0) es una solución particular, entonces la solución general es
$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$
3. si $c = \text{mcd}(a, b)$ y $|a|, |b| \neq 1$, entonces una solución particular (x_0, y_0) cumple que $|x_0| < |b|$ y $|y_0| < |a|$.

Ejemplo 1.1. Resolver la ecuación $5x - 3y = 52$ en enteros positivos.

Solución. Primero, como $\text{mcd}(5, 3) = 1$ y $1 \mid 52$, entonces la ecuación tiene soluciones enteras. Ahora, analizando en módulo 5 tenemos que

$$-3y \equiv 52 \pmod 5 \implies 2y \equiv 2 \pmod 5 \implies y \equiv 1 \pmod 5.$$

Claramente $y = 1$ es solución a esta congruencia, sustituyendo en la ecuación original $5x - 3 \cdot 1 = 52 \iff 5x = 55$ por lo cual, la ecuación tiene una solución $(11, 1)$, luego con la solución $(x_0, y_0) = (11, 1)$ llegamos a

$$(x, y) = (11 + 3t, 1 - 5t), \text{ donde } t \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 1.2. Resolver la siguiente ecuación $8c + 7p = 100$.

Solución. Claramente la ecuación tiene soluciones enteras, analizando en módulo 8,

$$7p \equiv 100 \pmod 8 \implies -p \equiv 4 \pmod 8 \implies p \equiv -4 \pmod 8 \implies p \equiv 4 \pmod 8.$$

Rápidamente, podemos decir que $p = 4$ es una solución para dicha congruencia, sustituyendo en la ecuación obtenemos $c = 9$. Luego, con la solución $(c_0, p_0) = (9, 4)$ tenemos

$$(c, p) = (9 + 7t, 4 - 8t), \quad \text{con } t \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

1.1. Aplicando el algoritmo de Euclides

Definición 1.3 (Algoritmo de Euclides)**.** Sean $a, b \in \mathbb{Z}^{\neq 0}$, si $a > b$ y se tiene $a = bk + r$ con $0 < r < b$, entonces

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r).$$

Podemos usar este algoritmo para resolver ecuaciones lineales de una manera iterativa. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a, b \neq 0$ y $d = \text{mcd}(a, b)$, considerando la ecuación

$$ax + by = c.$$

1. Si $d \nmid c$, entonces no hay solución.
2. Si $d \mid c$, entonces se divide la ecuación por d.
3. Por el paso anterior la ecuación tiene coeficiente coprimos;
   a) Si $a \mid c$, entonces $ac_0 = c$, luego $(x, y) = (c_0, 0)$ es solución.
   b) Si $a \nmid c$, entonces tomamos el menor de $|a|, |b|$ (supongamos que es $|a|$) y obtenemos
   $$b = aq_1 + r_1, \text{ con } 0 < r_1 < |a|, \qquad c = aq_2 + r_2, \text{ con } 0 < r_2 < |a|.$$
4. Sustituimos en la ecuación
   $$ax + (aq_1 + r_1)y = aq_2 + r_2 \iff a(x + q_1 y - q_2) + r_1 y = r_2.$$
   Si $z = x + q_1 y - q_2$, entonces la ecuación anterior se transforma en $az + r_1 y = r_2$.
   a) Si $r_1 \mid r_2$, entonces terminamos con el paso 3.a.

b) Si $r_1 \nmid r_2$, entonces vamos al paso 3.b y repetimos el proceso.

Ejemplo 1.3. Resuelva la siguiente ecuación $350x + 425y = 1200$.

Solución. Como $(350, 425) = 25$ y $25 \mid 1200$, dividimos ambos lados de la ecuación por 25 y tenemos

$$14x + 17y = 48$$

Por el algoritmo de euclides se tiene que $17 = 1 \cdot 14 + 3$ y $48 = 3 \cdot 14 + 6$. Sustituyendo y agrupando, tenemos $14(x + y - 3) + 3y = 6$. Haciendo $z = x + y - 3$ y sustituyendo en esta última ecuación se tiene $14z + 3y = 6$. Como $3 \mid 6$, para esta ecuación tenemos una solución de la forma $z = 0$ y $y = 2$. Escribiendo z en términos de x y $y = 2$, obtenemos el valor de $x = 1$. Luego, la solución general de la ecuación inicial es:

$$x = 1 + 17k, \quad y = 2 - 14k, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Hasta el momento sólo hemos trabajado en ecuaciones lineales de dos variables, pero en realidad la ecuación $ax + by = c$ no es más que un caso particular de la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$, y c son coeficientes.

Teorema 1.3. La ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$ tiene solución si y solo si $\operatorname{mcd}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid c$.

Ejemplo 1.4. Resuelva la ecuación $3x + 4y + 5z = 6$

Solución. Primero garantizamos que $(3, 4, 5) = 1$ efectivamente divide a 6. Trabajando con módulo 5 tenemos que $3x + 4y \equiv 1 \pmod{5}$, y de esto que $3x + 4y = 1 + 5s, \quad s \in \mathbb{Z}$. Una solución para esta ecuación es $x = -1 + 3s$, $y = 1 - s$. Usando el resultado anterior, obtenemos $x = -1 + 3s + 4t$, $y = 1 - s - 3t$, con $t \in \mathbb{Z}$, y sustituyendo en la ecuación original $z = 1 - s$. Por lo que todas las soluciones son

$$(x, y, z) = (-1 + 3s + 4t, 1 - s - 3t, 1 - s), \quad s, t \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Definición 1.4. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos con $\operatorname{mcd}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ se define a $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ como el mayor entero positivo N para el cual

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = N,$$

no tiene soluciones enteras.

El problema de determinar $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es conocido como el problema de las monedas de Frobenius. Fue este quien planteó el problema de encontrar la mayor cantidad de dinero que no se puede pagar con monedas de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ centavos. El ejemplo clásico de este problema es que con monedas de 3 y 5 centavos nunca se podrá llegar a la cantidad de 7 centavos.

Teorema 1.4 (Sylvester)**.** Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$, con $\text{mcd}(a, b) = 1$, entonces

$$g(a, b) = ab - a - b.$$

Para el caso de $n = 2$, existe el Teorema de Sylvester el cual nos brinda el valor de N (rápidamente podemos verificar el ejemplo anterior con 3 y 5), pero para $n \geq 2$ no se conoce ninguna fórmula explicíta, aunque sí se han encontrado rangos en donde N puede estar. Estos caso para $n \geq 2$ sobrepasan los objetivos de este escrito, se invita al lector investigar este tema por su cuenta.

Finalmente por con teorema de Sylvester podemos entender de mejor manera el siguiente teorema.

Teorema 1.5 (Chicken McNugget)**.** Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ con $\text{mcd}(a, b) = 1$, se tiene

1. Si $n = ab - a - b$, entonces $ax + by = n$ es insoluble $\forall x, y \in \mathbb{Z}^+$.
2. Si $n > ab - a - b$, entonces la ecuación es soluble.

Como recomendación general, se deja que siempre se verifique que una ecuación diofántica lineal de dos variables cumpla con el **Teorema 1.1** punto 2.

1.2. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1. ¿Tiene la ecuación $24x + 18y = 12$ soluciones enteras?

Ejercicio 2. Resuelva la ecuación diofántica $125x - 25y = 28$.

Ejercicio 3. Resuelva la ecuación $69x + 123y = 3000$. (ejemplo donde se utiliza la recursividad del método de euclides.)

2. Problemas propuestos

Se asigna como **tarea** los problemas de esta sección, el estudiante debe entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase, en caso de no resolverlos se pueden entregar borradores. Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso, estos se califican distinto a los problemas propuestos.

Referencias

[BDMS98] Hugo Barrantes, Pedro Díaz, Manuel Murillo, and Alberto Soto. *Introducción a la Teoría de Números.* Universidad Estatal a Distancia. Costa Rica, 1998.

[Tin22] Kenny Tinoco. V Nivel. Ecuaciones diofánticas. Clase 10. Ecuaciones diofánticas clásicas. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, Octubre 2022.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Gema Tapia
Teléfono: +505 8825 1565 *(Claro)*
Correo: gematapia97@gmail.com

4. Plan de clase

4.1. ¿Qué?

4.2. ¿Cómo?

4.3. Comentarios

Preguntas claves: ¿me entendieron? ¿me salté algún tema? ¿di tiempo suficiente para pensar los problemas? ¿participaron? ¿problemas muy fáciles o muy difíciles, demasiados o muy pocos? ¿las explicaciones/ejemplos fueron suficientes y buenos?