Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Colinealidad y Concurrencia
Clase #5

Encuentro: 19
Curso: Colinealidad y Concurrencia
Fecha: 19 de agosto de 2023

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Unidad II: Colinealidad
Contenido: Colinealidad II

En esta quinta clase del curso seguimos viendo teorema importantes de colinealidad, como lo es el teorema de Pascal y el teorema de Brianchon.

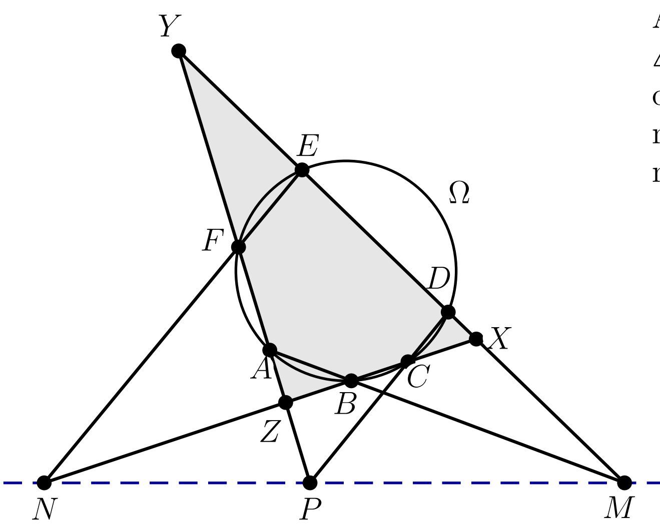
1. Desarrollo

1.1. Teorema de Pascal

Teorema 1.1 (Teorema de Pascal).

Sea $ABCDEF$ un héxagono inscrito, no necesariamente convexo, en una círcunferencia Ω. Entonces, los puntos $M = AB \cap DE$, $N = BC \cap EF$ y $P = CD \cap FA$ son colineales.

Demostración. Sean $X = BC \cap DE$, $Y = DE \cap FA$ y $Z = FA \cap BC$.



Al usar el teorema de **Menelao** tres veces en $\triangle XYZ$, primero con la transversal $A{-}B{-}M$, después con la transversal $P - C - D$ y finalmente con $F - N - E$, respectivamente, obtenemos que

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YA}{AZ} \cdot \frac{ZB}{BX} = 1,$$

$$\frac{XD}{DY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZC}{CX} = 1 \text{ y}$$

$$\frac{XE}{EY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{ZN}{NX} = 1.$$

Multiplicando estas tres igualdades y reordenando los miembros, obtenemos que

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZN}{NX} \cdot \frac{(YA \cdot YF) \cdot (ZB \cdot ZC) \cdot (XD \cdot XE)}{(AZ \cdot FZ) \cdot (BX \cdot CX) \cdot (DY \cdot EF)} = 1. \qquad (*)$$

Ahora por la **Propiedad 2.1** sabemos que para los puntos X, Y y Z se cumple que

$$XD \cdot XE = XC \cdot XB \quad \wedge \quad YF \cdot YA = YE \cdot YD \quad \wedge \quad ZB \cdot ZC = ZA \cdot ZE$$

Así $(*)$ se convierte en

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZN}{NX} = 1,$$

que por el teorema de **Menelao** significa que M, N y P son colineales. ■

Observación 1.

Una manera fácil de recordar las intersecciones es la siguiente: Tomamos dos letras consecutivas, dejamos una letra de espacio, y tomamos otras dos letras consecutivas. La intersección de las rectas formadas con eso pares puntos es el primer punto de la colinealidad. Luego nos movemos a la derecha y repetimos el proceso dos veces más.[a]

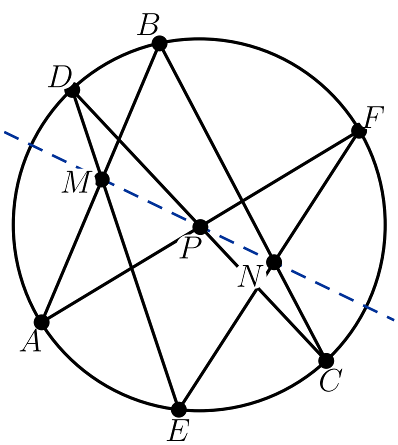


Figura 1: Teorema de Pascal.

A	E	C
D	B	F
N	P	M

Figura 2: Mnemotécnia de Pascal.

Donde $N = \overline{EF} \cap \overline{CB}$, $P = \overline{AF} \cap \overline{CD}$ y $M = \overline{AB} \cap \overline{ED}$.

[a]Otra manera de verlos es tomar vértices consecutivos módulo 3.

El **Teorema 1.1** es independiente de cómo haya sido tomado el hexágono. El mostrado en la demostración es el caso más sencillo en el cual el hexágono es convexo. Sin embargo, la colinealidad se sigue cumpliendo aunque el hexágono no sea convexo, como se puede ver en la figura 1. La demostración de este caso y de cualquier otro es análoga a la primera.

Ejemplo 1.1.

Sean D y E los puntos medios de los arcos menores $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ del circuncírculo del $\triangle ABC$, respectivamente. Sea P un punto en el arco menor BC, $Q = PD \cap AB$ y $R = PE \cap AC$. Probar que la recta QR pasa a traves de incentro I del $\triangle ABC$.

Solución. Dado que D es el punto medio del arco $\widehat{AB}$, CD es bisectriz del ángulo $\angle BCA$. Análogamentes, BE es bisectriz de $\angle ABC$. Por lo tanto, $CD \cap BE = I$.

Ahora, aplicando el **Teorema 1.1** al hexágono $CDPEBA$ tenemos que los puntos $CD \cap BE = I$, $DP \cap BA = Q$ y $PE \cap AC = R$ son colineales. ■

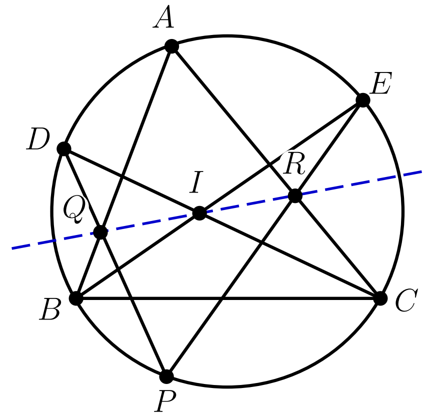


Figura 3: Ejemplo 1.1, aplicación del teorema de Pascal.

El **Teorema 1.1** puede presentar versiones degeneradas, aunque puede suceder, el caso más habitual ya no consiste en un paralelismo, sino en la transformación de un polígono de seis lados a un polígono de cinco, cuatro o tres lados.

Existen $\frac{5!}{2} = 60$ maneras de posibles de formar un hexágono con 6 puntos distribuidos en una circunferencia, y, por el **Teorema 1.1**, a cada hexágono le corresponde una recta de Pascal. Estas 60 rectas de Pascal pasan de tres en tres por 20 puntos llamados puntos de Steiner, que su vez están de cuatro en cuatro sobre 15 rectas, llamadas rectas de Plucker.

1.2. Teorema de Brianchon

Teorema 1.2 (Teorema de Brianchon).

Sea $ABCDEF$ un hexágono circunscrito, no necesariamente convexo, a un círculo Ω. Entonces, las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

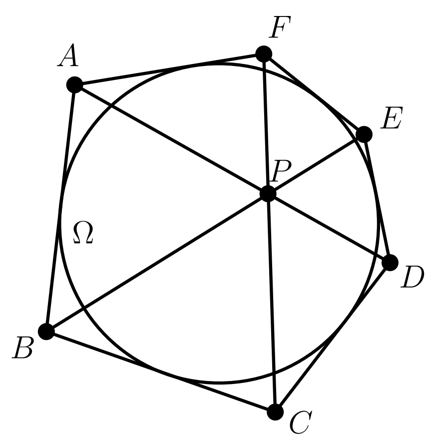


Figura 4: Teorema de Brianchon.

La demostración más sencilla del teorema de Brianchon implica utilizar polos y polares. Pues resulta que el **Teorema 1.1** y **Teorema 1.2** son *duales bajo la transformación polar*. Esto significa que, al tomar la colinealidad proporcionada por el **Teorema 1.1** y aplicarle la transformación polar con respecto al círculo de referencia, inmediatamente obtenemos la concurrencia que el **Teorema 1.2** implica. Ya que el tema de polos y polares no lo veremos en el curso, se invita al estudiante indagar la demostración de este teorema por su cuenta.

De la misma manera que con el primer teorema, el **Teorema 1.2** está sujeto a versiones degeneradas. En este caso, los vértices degenerados coinciden con los puntos de tangencia entre el polígono y el círculo inscrito. En efecto, al aplicar el **Teorema 1.2** al hexagono $ABCDEF$ con D, F y B puntos de tangencia, como se muestra en la figura 5, redescubrimos que los puntos de tangencia del incírculo de $\triangle ACE$ concurren.

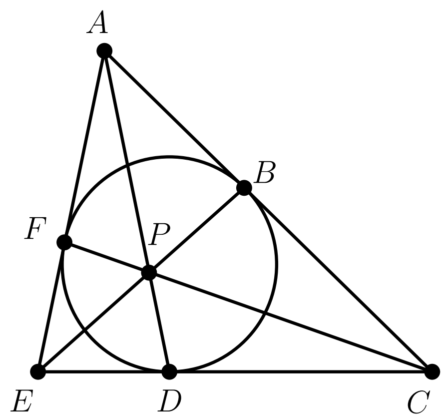


Figura 5: Un caso degenerado del teorema de Brianchon.

Observación 2.

Al igual que con el teorema anterior, existe una manera fácil de obtener el punto de concurrencia. Ordenamos los puntos en una tabla, luego tomamos los segmentos formados con los puntos consecutivos de arriba hacia abajo. La intersección de estos segmentos es el punto de concurrencia.

A	B	C
D	E	F
AD	BE	CF

Figura 6: Mnemotécnia de Brianchon.

Es decir $P = \overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF}$. Otra manera de ver esto, es tomar las rectas formadas por los puntos cuyas posiciones son las mismas en módulo 3.

2. Conocimiento previo

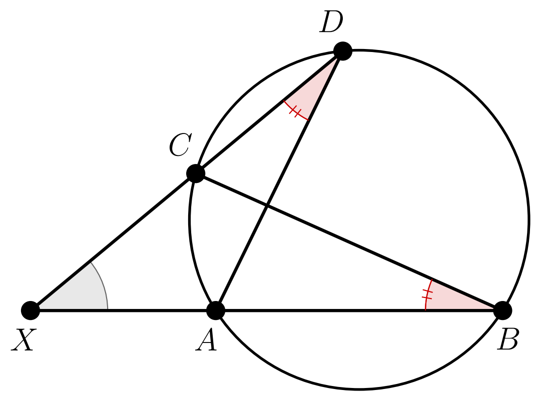
Propiedad 2.1 (Potencia de un punto exterior)**.** Sean AD y CD dos rectas que se intersecan en X tales que $X-A-B$ y $X-C-D$. Entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si

$$\overline{XA}\cdot\overline{XB}=\overline{XC}\cdot\overline{XD}.$$

Demostración. Rápidamente nos damos cuenta de que $\angle CXB=\angle AXD \quad (*)$.

Entonces $ABCD$ es cíclico

$$\begin{aligned}
&\iff \angle ABC=\angle ADC\\
&\iff \angle XBC=\angle ADX\\
&\overset{(*)}{\iff} \triangle XBC\sim\triangle XDA \overset{(*)}{\iff} \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=\frac{\overline{XD}}{\overline{XA}}\\
&\iff \overline{XA}\cdot\overline{XB}=\overline{XC}\cdot\overline{XD}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$



3. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 3.1. Dado el $\triangle ABC$ con circuncentro O. Sea A_1 y B_1 los pies de las alturas trazadas desde A y B, respectivamente. Sea M y N los puntos medios de AC y BC, respectivamente. Sea el punto $X\in BB_1$ tal que $MX\perp AB$ y de manera análoga el punto $Y\in AA_1$ tal que $NY\perp AB$. Se define $P=A_1M\cap B_1N$ y $Q=XN\cap YM$. Demostrar que P, Q y O son colineales.

Problema 3.2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y Γ su circuncírculo. Sea D un punto en el segmento BC, diferente de B y C, y sea M el punto medio de AD. La perpendicular a AB que pasa por D interseca a AB en E y Γ en F, con el punto D entre E y F. Las rectas FC y EM se intersectan en el punto X. Si $\angle DAE=\angle AFE$, demostrar que la recta AX es tangente a Γ.

Problema 3.3. Sea Γ el circuncírculo del $\triangle ABC$. Un círculo que pasa por A y C corta a los lados BC y BA en D y E, respectivamente. Las rectas AD y CE intersecan a Γ por segunda vez en G y H, respectivamente. Las tangentes a Γ por A y C intersecan a la recta DE en L y M, respectivamente. Probar que las rectas LH y MG se cortan en Γ.

Problema 3.4. Sea el triángulo $\triangle ABC$ y sean D, E y F los puntos de tangencia del excírculo en A con respecto a los lados BC, CA y AB. Sean H y G las intersecciones de excírculo con BE y CF respectivamente. Se toma un punto S en AD, sean U y V las intersecciones del excírculo con SH y SG respectivamente. Demuestre que BC, UV, GH y EF son concurrentes.

4. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 4.1. Demostrar la Recta de Lemoine. Ver la definición 1.2 de la clase #3.

Problema 4.2. Sean T_1 y T_2 dos triángulos en perspectiva con el mismo circuncírculo. Pruebe que en el hexágono formado por la intersección de los lados de T_1 y T_2, las diagonales que conectan vértices opuestos son concurrentes.

5. Extra

Problema 5.1. En el triángulo $\triangle ABC$, el punto A_1 están en el lado BC y el punto B_1 está en el lado AC. Sean P y Q puntos en los segmentos AA_1 y BB_1, respectivamente, tales que PQ es paralelo a AB. Sea P_1 un punto en la recta PB_1 distinto de B_1, con B_1 entre P y P_1, y $\angle PP_1C = \angle BAC$. Análogamente, sea Q_1 un punto en la recta QA_1 distinto de A_1 entre Q y Q_1, y $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Demostrar que los punto P, Q, P_1 y Q_1 son concíclicos.

Referencias

[Agu19] Eduardo Aguilar. *Estrategias sintéticas en Geometría Euclídea*. Editorial, 2019.

[Bac22] Jafet Baca. *Apuntes de Geometría Euclidiana para Competiciones Matemáticas*. Independent publication, 2022.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 (*Claro*)
Correo: joseandanduarte@gmail.com