

## Ecuaciones Diofánticas Clase #11

**Encuentro:** 21

**Curso:** Ecuaciones Diofánticas

**Fecha:** 9 de noviembre de 2024

**Nivel:** 5

**Semestre:** II

**Instructor:** Kenny Jordan Tinoco

**Instructor Aux:** Gema Tapia

### Contenido: Fracciones continuas

En esta clase abordaremos el tema de fracciones continuas, una herramienta muy útil para la resolución de ecuaciones diofánticas. Trataremos de comprender el proceso de descomposición en fracciones continuas y su aplicación en el análisis de soluciones de ecuaciones de Pell, así como en ecuaciones diofánticas lineales.

## 1. Desarrollo

### 1.1. Definiciones

**Definición 1.1** (Fracción continua generalizada). Definiremos a una fracción continua generalizada como una expresión de la forma:

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{\ddots a_{n-2} + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}}}$$

donde los  $a_i$  y  $b_i$ , con  $i = 0, 1, \dots, n$ , son números reales.

Los  $a_i$  y  $b_i$  se llamarán términos de la fracción continua, es fácil concluir que, es posible encontrar fracciones continuas con una cantidad finita e infinita de términos. Cuando todos los  $b_i$  son iguales a 1 se forman un tipo de fracciones continuas importantes.

**Definición 1.2** (Fracción continua simple). Si todo  $b_i = 1$  y para  $i \geq 1$  se tiene que  $a_i$  es positivo, entonces la expresión

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

se llamará fracción continua simple, y la denotaremos por  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$

Es claro que para un número  $[a_0] = a_0$  y para una fracción continua simple infinita se tiene  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ . Esto toma relevancia a partir del siguiente teorema.

**Teorema 1.1.** Si  $x$  es número racional, entonces  $x$  se puede expresar como una fracción continua simple con una cantidad finita de términos.

Del teorema anterior podemos deducir el siguiente resultado.

**Corolario 1.1.** Toda fracción continua simple con cantidad infinita de términos representa un número irracional.

Cabe mencionar que el corolario anterior implica que no todo real puede expresarse como una fracción continua. Además, los números irracionales que sí pueden ser expresados presentan una característica, esto es que sus términos se repiten de manera cíclica.

**Definición 1.3** (Fracción continua periódica). Definiremos como fracción continua periódica a una fracción continua simple infinita de la forma

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+k}}],$$

donde  $k \geq 1$ , el periodo es la sucesión de términos  $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+k}$  y la longitud del periodo es  $k$ .

Cuando se tiene que  $n = 0$  diremos que la fracción continua  $[\overline{a_0; a_1, \dots, a_k}]$  es una fracción continua periódica pura. Con esto podemos entender el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.** Todo irracional cuadrático puede ser expresado como una fracción continua periódica.

Entenderemos por irracional cuadrático a un número que es una raíz no racional de una ecuación cuadrática, es decir, un número de la forma  $\frac{a+b\sqrt{d}}{c}$  donde  $a, b \in \mathbb{Z}$ , con  $d$  un entero positivo no cuadrado perfecto y  $c$  un entero distinto de cero.

**Definición 1.4** (Convergentes  $c_k$ ). Los convergentes de la fracción continua simple  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  son las fracciones continuas simples finitas

$$c_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

La definición de  $c_k$  dice que son fracciones continuas finitas, por lo cual estos convergentes representan números racionales, entonces, podemos decir que  $c_k = \frac{p_k}{q_k}$ , este hecho nos permite encontrar resultados importantes, como por ejemplo los siguientes teoremas.

**Teorema 1.3.** Si  $c_n = \frac{p_n}{q_n}$  es el  $n$ -ésimo convergente de la fracción continua simple  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ , entonces

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1, \\ p_1 &= a_1 p_0 + 1, & q_1 &= a_1, \\ p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad \forall k \geq 2 & q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad \forall k \geq 2 \end{aligned}$$

**Teorema 1.4.** Si  $c_n = \frac{p_n}{q_n}$  es el  $n$ -ésimo convergente de una fracción continua simple infinita, entonces

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}^{\geq 1}.$$

Del teorema anterior es posible determinar que todo convergente de una fracción continua representa una fracción irreducible, este hecho será de utilidad al momento de resolver ecuaciones diofánticas.

**Corolario 1.2.** Si  $c_k = \frac{p_k}{q_k}$  es un convergente de una fracción continua simple infinita, entonces  $\text{mcd}(p_k, q_k) = 1$ .

## 1.2. Resolución de ecuación diofánticas

### 1.2.1. Ecuaciones lineales

Dada la ecuación

$$ax + by = c, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

y  $\text{mcd}(a, b) = 1$ . Consideramos la fracción  $\frac{a}{b}$ , dicha fracción puede ser expresada como una fracción continua finita de  $n$  términos. Sabiendo esto, es claro que  $c_n = \frac{a}{b}$  y usando el teorema 1.3 obtenemos que

$$a \cdot q_{n-1} - b \cdot p_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

multiplicando esta expresión por  $[c \cdot (-1)^{n-1}]$  y ordenado los signos, obtenemos

$$a [c \cdot q_{n-1} (-1)^{n-1}] + b [c \cdot p_{n-1} (-1)^n] = c$$

con lo cual las soluciones de la ecuación estaría dada por

$$x = c \cdot q_{n-1} (-1)^{n-1} \quad \text{y} \quad y = c \cdot p_{n-1} (-1)^n.$$

Es decir, que al calcular  $c_{n-1}$  podemos resolver la ecuación diofántica lineal.

**Ejemplo 1.1.** Resolver la ecuación  $7x + 11y = 25$ .

**Solución.** Consideramos la fracción  $\frac{7}{11}$ , esta fracción está representada por la fracción continua  $[0; 1, 1, 1, 3]$ . Los convergente sería

$k$	0	1	2	3	4
$a_k$	0	1	1	1	3
$p_k$	0	1	1	2	
$q_k$	1	1	2	3	

Por lo cual, una solución para esta ecuación estaría dada por

$$x = 25 \cdot (2)(-1)^{3-1} = 50$$

$$y = 25 \cdot (1)(-1)^3 = -25$$

Así, la solución general es  $(x, y) = (50 + 11t, -25 - 7t)$  para todo entero  $t$ . ■

### 1.2.2. Ecuaciones de Pell

Sabemos que la ecuación de Pell

$$x^2 - dy^2 = 1$$

siempre tiene una solución mínima  $(x_0, y_0)$ . Resulta ser que dicha solución mínima está dada por el convergente

$$c_{k-1} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{x_0}{y_0}$$

de la fracción continua del número  $\sqrt{d}$ , donde  $k$  es el periodo de la fracción continua. Teniendo presente que  $\sqrt{d}$  es un número irracional cuadrático se cumple que es equivalente a una fracción continua periódica.

**Ejemplo 1.2.** Resolver la ecuación  $x^2 - 7y^2 = 1$ .

**Solución.** Se tiene que  $\sqrt{7}$  está representada por la fracción continua  $[2; \overline{1, 1, 1, 4}]$ , entonces el periodo es  $k = 4$ . Considerano los primeros 5 convergentes de la fracción.

$k$	0	1	2	3	4
$a_k$	2	1	1	1	4
$p_k$	2	3	5	8	37
$q_k$	1	1	2	3	14

Por lo cual, una solución para esta ecuación estaría dada por

$$c_{4-1} = c_3 = \frac{8}{3} = \frac{x_0}{y_0}$$

Así, la solución mínima es  $(x, y) = (8, 3)$ . ■

### 1.3. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

**Ejercicio 1.** Encontrar las fracciones continuas de las siguientes fracciones.

1.  $\frac{45}{37}$

3.  $\frac{43}{38}$

5.  $\frac{35}{14}$

2.  $\frac{51}{25}$

4.  $\frac{120}{84}$

**Problema 1.1.** Calcular el valor de

$$\sqrt[8]{2207 - \frac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \ddots}}}}$$

Expresar la respuesta con forma  $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .

## 2. Problemas propuestos

Se asigna como **tarea** los problemas de esta sección, el estudiante debe entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase, dado el caso, también se pueden entregar avances de las soluciones. Recordar ser claro, ordenado y limpio en el trabajo a realizar.

## 3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso, estos se califican distinto a los problemas propuestos.

## Referencias

- [Ala04] Sonia Alanya. Fracciones continuas, ecuaciones de Pell y unidades en el anillo de enteros de los cuerpos cuadráticos. *Universidad Nacional Mayor de San Marcos*, 2004.

### En caso de consultas

**Instructor:** Kenny J. Tinoco  
**Teléfono:** +505 7836 3102 (*Tigo*)  
**Correo:** kenny.tinoco10@gmail.com

**Instructor:** Gema Tapia  
**Teléfono:** +505 8825 1565 (*Claro*)  
**Correo:** gematapia97@gmail.com

## **4. Plan de clase**

**4.1. ¿Qué?**

**4.2. ¿Cómo?**

Preguntas claves: ¿me entendieron? ¿me salté algún tema? ¿di tiempo suficiente para pensar los problemas? ¿participaron? ¿problemas muy fáciles o muy difíciles, demasiados o muy pocos? ¿las explicaciones/ejemplos fueron suficientes y buenos?

[illegible]