Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Selectivo OTM

Quinto Nivel

Nombre: ____. **Código ASJT:** __________.

1. Problemas

Estimado estudiante, resolver los siguientes problemas de manera clara y ordenada. Recordar justificar la respuesta.

Problema 1.1. Un trapecio rectángulo $\square ABCD$ circunscrito a una circunferencia es recto en A y B. El inradio del triángulo $\triangle ABC$ mide 5 unidades, el inradio del triángulo $\triangle ACD$ mide 8 unidades y además $AC \perp CD$. Calcular la medida de BC.

Problema 1.2. Encontrar todos lo pares de enteros (x, y) para los cuales se cumple la ecuación

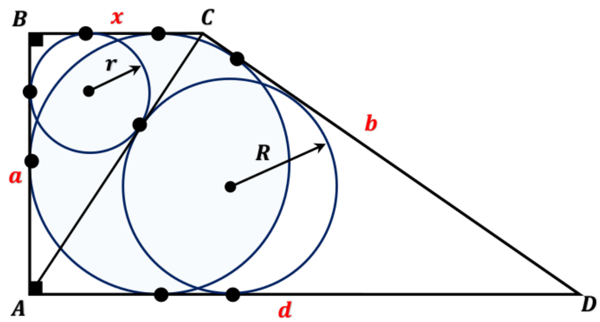
$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

Problema 1.3. En un triángulo $\triangle ABC$ en el cual se traza la altura BH, la mediana AM y la ceviana CN las cuales concurren en el punto P. Si $BP = 3PH$ y $NB = 16$. Hallar AN.

Fecha: 19 de agosto de 2023

Soluciones y Criterios

Problema 1.



Usando el teorema de Pitot, tenemos que $x + d = a + b$.

Al usar el teorema de Poncelet en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$, tenoemos que

$$a + x = AC + 2 \cdot 5 \quad \text{y} \quad AC + b = d + 2 \cdot 8$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (a + b) + x + AC = AC + d + 26 \\
&\Rightarrow x + d + x = d + 26 \\
&\Rightarrow 2x = 26 \\
&\Rightarrow \boxed{x = 13}.
\end{aligned}$$

Criterios de evaluación.

- **2 puntos.** Por realizar correctamente la gráfica (saber representar un trapecio rectángulo circunscrito, inradios, perpendicularidad y puntos de tangencias).
- **1 punto.** Por utilizar correctamente el teorema de Pitot $x + d = a + b$.
- **2 puntos.** Por usar correctamente el teorema de Poncelet (uno por cada ecuación) $a + x = AC + 10$, $AC + b = d + 16$.
- **2 puntos.** Por resolver y concluir que $x = 13$.

Fecha: 19 de agosto de 2023

Problema 2.

Escribimos la ecuación en la forma $(x^3+1)^2+(x^3+1)=y^4+1$, la cual es equivalente a $(2x^3+3)^2-4y^4=5$. De donde obtenemos los siguientes casos

$$\begin{cases} 2x^3-2y^2+3=1 \\ 2x^3+2y^2+3=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^3-2y^2+3=-1 \\ 2x^3+2y^2+3=-5 \end{cases}$$

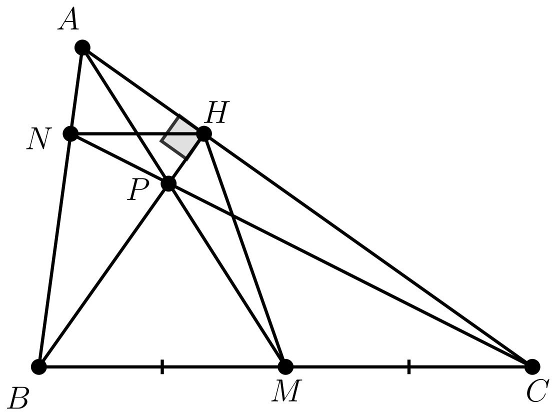
$$\begin{cases} 2x^3-2y^2+3=5 \\ 2x^3+2y^2+3=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^3-2y^2+3=-5 \\ 2x^3+2y^2+3=-1 \end{cases}$$

Después de resolver estos sistemas, otenemos como únicas soluciones a $(0,-1)$ y $(0,-1)$.

Criterios de evaluación.

- **3 puntos.** Por notar que la ecuación se puede expresar de la forma $(2x^3+3)^2-4y^4=5$.
- **3 puntos.** Por resolver correctamente los sistema de ecuaciones.
- **1 punto.** Por indicar las soluciones correctas.

Problema 3.



Por el teorema de Ceva aplicado al triángulo $\triangle ABC$ con los puntos M, H y N sabemos que

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CH}{HA} = 1.$$

Como M es punto medio de BC, entonces $BM = MC$, sustituyendo este resultado y despejando el segmento AN llegamos a que

$$AN = NB \cdot \frac{AH}{HC} \quad \Rightarrow \quad AN = 16 \cdot \frac{AH}{HC}$$

Por lo tanto, solo nos basta hallar la razon $\dfrac{AH}{HC}$, para ello apliquemos el teorema de Menelao al triángulo $\triangle BCH$ con la transversal $A - P - M$.

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CA}{AH} \cdot \frac{HP}{PB} = 1.$$

Ya sabemos que $BM = MC$ y por dato también sabemos que $BP = 3PH$, al sustituir estos resultados y despejar llegamos a

$$\frac{CA}{AH} \cdot \frac{HP}{3HP} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{CH + HA}{AH} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{CH}{AH} + 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{AH}{HC} = \frac{1}{2}$$

Luego, $AN = \dfrac{16}{2} = 8$.

Criterios de evaluación.

- **1 punto.** Por aplicar correctamente el teorema de Ceva y el teorema de Menelao.
- **2 puntos.** Por deducir que $AN = 16 \cdot \dfrac{AH}{HC}$.
- **3 puntos.** Por deducir que $\dfrac{AH}{HC} = \dfrac{1}{2}$.
- **1 punto.** Por indicar el valor de $AN = 8$.