Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Examen final

Nombre: ____. **Código ASJT:** __________.

Problems

Estimado estudiante, resolver los siguientes problemas de manera clara y ordenada. Recordar justificar la respuesta.

Problema 1. Defina qué es un polinomio, mencione las partes más importantes (grados, cantidad de términos, raíces, término principal e independiente) y finalmente de un ejemplo.

Problema 2. Encontrar un polinomio con raíces 0, -3, 5 y 7 dónde su coeficiente principal es -1.

Problema 3. Hallar $Q(z)$, si $T(Q(z)-3)=6z+2$ y $T(z+3)=2z+10$.

Problema 4. Sea $W(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a, b, c y d tal que $W(a)=W(b)=W(c)=W(d)=6$, entonces no existe un entero r tal que $W(r)=11$.

Problema 5. Determine un polinomio cúbico $S(a)$ en los reales, con una raíz igual a cero y que satisface $S(a-1)=18a^2+S(a)$.

Solutions

Problema 6. Defina qué es un polinomio, mencione las partes más importantes (grados, cantidad de términos, raíces, término principal e independiente) y finalmente de un ejemplo.

Solución. Un polinomio es una expresión de la forma

$$P(x)=a_dx^d+a_{d-1}x^{d-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

con d entero no negativo $\left(d\in\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)$ y cada a_ix^i es un término. El valor de d se conoce como el grado del polinomio, un polinomio de grado d tiene $(d+1)$ términos. El término con mayor exponente (d) es el término principal y término con menor exponente (0) es el término independiente.

La raíz un polinomio es un valor r que al evaluarlo da cero, un polinomio de grado d tiene a lo sumo d raíces.

Ejemplo: $R(x)=x^5+2x^3+3x+1$. ■

Problema 7. Encontrar un polinomio con raíces 0, -3, 5 y 7 dónde su coeficiente principal es -1.

Solución. Sea $V(x)$ el polinomio en cuestión, por propiedad (teorema del factor generalizado) es fácil ver que

$$V(x)=(-1)(x-0)(x+3)(x-5)(x-7)$$

Luego de simplificar la expresión obtenemos

$$V(x)=-x^4+9x^3+x^2+105x$$ ■

Fecha: 6 de julio de 2024

Problema 8. Hallar $Q(z)$, si $T\,(Q(z)-3) = 6z+2$ y $T(z+3) = 2z+10$.

Solución. En la definición de T hacemos la evaluación $z = Q(z)-6$ y obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} T\,[(Q(z)-6)+3] &= 2(Q(z)-6)+10 \\ T(Q(z)-3) &= 2Q(z)-12+10 \\ T(Q(z)-3) &= 2Q(z)-2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6z+2 &= 2Q(z)-2 \quad \text{(Por dato)} \\ 6z+4 &= 2Q(z) \\ Q(z) &= 3z+2 \end{aligned}$$

Es decir, la respuesta es $Q(z) = 3z+2$. ■

Problema 9. Sea $W(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a, b, c y d tal que $W(a) = W(b) = W(c) = W(d) = 6$, entonces no existe un entero r tal que $W(r) = 11$.

Solución. Considerando al polinomio $X(x) = W(x)-6$ es claro que a, b, c y d serían sus raíces, por tanto

$$X(x) = (1)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Y(x)$$

Asumiendo que exista un r talque $W(r) = 11$ tendríamos que $X(r) = 11-6 = 5$, es decir

$$5 = (r-a)(r-b)(r-c)(r-d)Y(r)$$

Como $X(x)$ es un polinomio de coeficientes enteros (por estar definido en función de W) y 5 es un número primo, en el resultado anterior el lado derecho solo tiene cuatro posibilidades[1]

$$\begin{aligned} 5 &= (1)(5)(1)(1) \\ 5 &= (1)(5)(-1)(-1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5 &= (-1)(-5)(1)(1) \\ 5 &= (-1)(-5)(-1)(-1) \end{aligned}$$

Lo cual implicaría que al menos dos de las variables a, b, c y d son iguales. Esto es una contradicción, luego, r no existe. ■

Problema 10. Determine un polinomio cúbico $S(a)$ en los reales, con una raíz igual a cero y que satisface $S(a-1) = 18a^2 + S(a)$.

Solución. Si consideramos la expresión $S(a-1)-S(a) = 18a^2$ notamos que esta es una expresión telescópica en la suma, es decir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{a} [S(i-1)-S(i)] &= \sum_{i=1}^{a} 18i^2 \\ S(1-1)-S(a) &= 18\left(1^2+2^2+\cdots+(a-1)^2+a^2\right) \\ S(0)-S(a) &= 18 \cdot \frac{a(a+1)(2a+1)}{6} \end{aligned}$$

Como nos dicen que una raíz es igual a cero entonces $S(0) = 0$, por lo tanto[2], el polinomio que buscamos es

$$S(a) = -3a(a+1)(2a+1).$$ ■

[1] Para más claridad no se consideró $Y(r)$ en las posibilidades, sin embargo el análisis y el resultado serían los mismos.

[2] Otra manera de resolverlo es considerando una forma canonica de S y hacer evaluaciones concretas en el polinomio.

Fecha: 6 de julio de 2024