

Ecuaciones Diofánticas

Clase #3

Encuentro: 18

Curso: Ecuaciones Diofánticas

Fecha: 24 de agosto de 2024

Nivel: 5

Semestre: II

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

Instructor Aux: Gema Tapia

Contenido: Método de parametrización

En esta clase seguimos con los métodos básicos de resolución de ecuaciones diofánticas. Este es el caso del método de parametrización, el cual consiste en expresar las familias de soluciones en términos de variables auxiliares. Veremos algunos ejemplos, ejercicios y problemas, con el propósito de afianzar lo aprendido hasta el momento.

1. Desarrollo

1.1. Método de parametrización

En muchas situaciones, las soluciones enteras a una ecuación diofántica pueden ser expresadas de forma paramétrica, donde dichos parámetros son variables enteras.

El conjunto de soluciones de algunas ecuaciones diofánticas podría tener múltiples representaciones paramétricas. Para la mayoría de ecuaciones diofánticas, no es posible encontrar todas las soluciones explícitamente. En muchos casos, el método paramétrico proporciona una prueba de la existencia de infinitas soluciones.

Ejemplo 1.1. Hallar todas las soluciones enteras (m, n) que satisfacen la ecuación

$$12m - 5n = 97 - mn.$$

Solución. Transformando la ecuación convenientemente

$$\begin{aligned} 12m + mn &= 97 + 5n \iff m(12 + n) = 97 + 5n \\ &\iff m = \frac{97 + 5n}{12 + n} \iff m = 5 + \frac{37}{n + 12}. \end{aligned}$$

Consideremos la variable $t = \frac{37}{n+12}$ con lo cual $m = t + 5$, como m es entero necesariamente t también lo es. Es fácil ver $n = \frac{37}{t} - 12$, ya que n es entero, entonces t debe ser divisor de 37. Con esta información, es claro que los posibles valores son $t \in \{\pm 1, \pm 37\}$. Finalmente, las soluciones de la ecuación están dadas por $(m, n) \in \{(4, -49), (6, 25), (-32, -13), (42, -11)\}$. ■

Como vimos en el ejemplo anterior, la idea es expresar las variables m y n en términos de un parámetro t , reduciendo el problema a solo encontrar los posibles valores de t , y puesto de que estamos trabajando en enteros y que hay ciertas condiciones con respecto a esta variable, la pudimos acotar fácilmente.

1.1.1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación diofántica

$$2(x + y) = xy + 9.$$

Ejercicio 1.2. Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 - x + 3y - z - 4 = 0$ posee infinitas soluciones en los números enteros.

Ejercicio 1.3. Determinar los números enteros x que verifican que $x^4 + 2$ es múltiplo de $x + 2$.

Ejercicio 1.4. Dado tres números enteros positivos x, y, z hallar el valor de su producto sabiendo que cumplen

$$x + 2y = z \quad \text{y} \quad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310.$$

Ejercicio 1.5. Encontrar todas las soluciones enteras (x, y) de la ecuación

$$p(x + y) = xy,$$

donde p es un número primo.

Ejercicio 1.6. Hallar todas las triplas (x, y, z) de enteros positivos tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Ejercicio 1.7. Probar que existen infinitas triplas (x, y, z) de enteros tales que

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Problema 1.1. Probar que si a, b, c son enteros positivos tales que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, entonces

- $a + b$ es un cuadrado perfecto.
- $a^2 + b^2 + c^2$ es un cuadrado perfecto.

1.2. Clase práctica

En esta segunda parte haremos una pequeña clase práctica para recordar las técnicas de factorización y uso de desigualdades.

Ejercicio 1.8. Resolver la ecuación diofántica $2^x + 1 = y^2$.

Ejercicio 1.9. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$xy + 3x - 5y = -3.$$

Ejercicio 1.10. Probar que la ecuación $m^2 = n^4 + n^2 + 1$ no tiene soluciones enteras.

Ejercicio 1.11. Encuentra números positivos de dos cifras que sean iguales a tres veces el producto de los mismos.

Ejercicio 1.12. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2.$$

Ejercicio 1.13. Hallar las soluciones enteras de la ecuación $13x - 7y = 0$, si las variables cumplen que $80 < x + y < 120$.

Ejercicio 1.14. Probar que existe infinitos pares ordenados de enteros positivos (m, n) tal que

$$\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$$

es un entero positivo.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Ejercicio 2.1. Hallar los números enteros positivos x que verifican que $x^5 - 23$ es múltiplo de $x + 1$.

Ejercicio 2.2. Hallar todos los pares ordenados (x, y) tales que $xy = 20 - 3x + y$.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Sea p un número primo, determinar todos los números enteros k tales que $\sqrt{k^2 - kp}$ es un número natural.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco

Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)

Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Gema Tapia

Teléfono: +505 8825 1565 (*Claro*)

Correo: gematapia97@gmail.com

4. Notas de clase

4.1. Qué

Mostrar cómo usar el método de parametrización para resolver ecuaciones diofánticas con las cuales no se puede, o es más fácil de usar, los métodos de factorización y desigualdades.

Repasar los temas de factorización y desigualdades con una pequeña lista de problemas.

4.2. Cómo

4.2.1. Problemas para motivar el tema

Ejercicio 1.2 (ejemplo).

Ejercicio 1.9, 1.11 y 1.13 (Para los estudiantes).

Ejercicio 1.10 (ejemplo).

4.2.2. Ejemplos

Los ejercicios 1.1 y 1.3.

4.2.3. Contraejemplos

Actualmente, no conozco una manera adecuada de desarrollar contraejemplos, y tampoco una perspectiva clara de como aplicarlos.

4.2.4. Cómo ser más claro al explicar

Por el momento, para lograr claridad solo se me ocurre ser minucioso y detallista con los ejemplos que se desarrollen.

4.2.5. Problemas retadores pero posibles de resolver

Los ejercicios 1.4 y 1.7.

Los ejercicios 1.8 y 1.12.

4.2.6. Cantidad de tiempo por actividad

10 min: Problema para motivar el tema.

15 min: Primer ejemplo práctico (5 min para intentarlo)

15 min: Segundo ejemplo práctico (5 min para intentarlo)

15 min: Primer problema retador (10 min para la solución)

5 min: de descanso

30 min: Ejercicios para estudiantes (10 min por ejercicios)

* min: Dar las ideas generales de los últimos problemas retadores, formar dos grupos y a trabajar en la pizarra.

4.3. Evaluación
