

Polinomios Clase #6

Encuentro: 6

Curso: Polinomios

Fecha: 29 de abril de 2023

Nivel: 5

Semestre: I

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Divisibilidad Polinómica

1. Desarrollo

Teorema 1.1 (Teorema del resto). Dado un polinomio P , de grado n y $a \in \mathbb{R}$, diremos que el resto de P cuando es dividido por $x - a$ es $P(a)$. Es decir

$$P(a) = r \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x) + r$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Demostración. Por la definición de *División con resto*¹ podemos escribir

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$$

Donde $\deg(R) < \deg(x - a) = 1$, es decir R necesariamente tiene que ser un polinomio constante, digamos $R(x) = r$. Sustituyendo $x = a$ en la ecuación anterior, obtenemos que

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R(a) = R(a) = r$$

Esto es, el residuo de la división de P por $x - a$ es $P(a)$.

Notemos que el *Teorema del resto* inmediatamente implica al *Teorema del factor* el cual ya hemos estudiado.

Teorema 1.2 (Teorema del factor). Dado un polinomio P , de grado n y $a \in \mathbb{R}$, diremos que a es una raíz de P si y sólo si $(x - a)$ es un factor de $P(x)$. Es decir

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x)$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Demostración. Si $x - a \mid P(x)$, entonces existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

Y por la unicidad del cociente y el residuo de la *División con resto*, se sigue que el residuo de la división de P entre $x - a$ es cero. Luego, $P(a) = 0$.

¹Ver [TD23] página 1.

Teorema 1.3 (Teorema fundamental del Álgebra). Todo polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, donde $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$, tiene al menos una raíz en \mathbb{C} .

Desafortunadamente, la prueba del *Teorema fundamental del Álgebra* es un poco² complicada para nuestro pequeño curso de polinomios. Sin embargo, vamos usar este teorema para demostrar que todo polinomio de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces (hecho que ya hemos venido utilizando). Esto significa que podemos escribir cualquier polinomio $P(x)$ en la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

donde r_1, r_2, \dots, r_n son reales o complejos.

Esta prueba la haremos por inducción³ en el grado del polinomio. Si el polinomio es de grado 1, el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado es cierto para polinomios de grado $n - 1$ y consideremos un polinomio $P(x)$ de grado n . De acuerdo con el *Teorema Fundamental del Álgebra*, $P(x)$ tiene una raíz r_1 , esto es, $(x - r_1) \mid P(x)$. Luego, existe un polinomio $Q_1(x)$ tal que $P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$.

Como $\deg(P) = n = \deg[(x - r_1)Q_1(x)] = \deg(x - r_1) + \deg[Q_1(x)]$, tenemos que $\deg[Q_1(x)] = n - 1$. Luego, por la hipótesis de inducción, el polinomio $Q_1(x)$ tiene exactamente $n - 1$ raíces, esto es $Q_1(x) = c(x - r_2)(x - r_3) \cdots (x - r_n)$. Por lo tanto, $P(x) = c(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$.

El resultado que acabamos de demostrar, solo muestra la existencia de las raíces; encontrarlas es otro problema, que podemos atacar con la fórmulas de Vieta o la división de polinomios.

Ejemplo 1. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Cuando $P(x)$ es dividido por $x - 1$, el resto es 3. Cuando $P(x)$ es dividido por $x - 2$, el resto es 5. Determinar el resto cuando $P(x)$ es dividido por el polinomio $x^2 - 3x + 2$.

Solución. Escribamos

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + R(x)$$

donde R es el resto que buscamos. Como $\deg(R) < \deg(x^2 - 3x + 2) = 2$, podemos escribir $R(x) = ax + b$ para constantes a, b . Por otra parte, por el *Teorema del resto*, tenemos que $P(1) = 3$ y $P(2) = 5$. Como 1 y 2 son raíces de $x^2 - 3x + 2$, al sustituir estos valores en P , obtenemos que

$$\begin{aligned} P(1) &= 0 \times Q(1) + R(1) = a + b \\ P(2) &= 0 \times Q(2) + R(2) = 2a + b \end{aligned}$$

Como $P(1) = 3$ y $P(2) = 5$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

De donde obtenemos $(a, b) = (2, 1)$. Por lo tanto, el resto buscado es $\boxed{2x + 1}$. □

²Por no decir demasiado XD.

³La Inducción Matemática es un tema que aún no hemos visto, pero por el momento podés buscarlo por tu cuenta.

Ejemplo 2. Encontrar el residuo cuando $x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6$ es dividido por $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Solución. Como el grado de $x^3 - 2x^2 - x + 2$ es 3, el grado del resto puede ser a lo más 2, así que podemos expresar el resto como el polinomio $ax^2 + bx + c$ para constantes a, b, c . Escribamos la división como

$$x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6 = (x^3 - 2x^2 - x + 2)Q(x) + (ax^2 + bx + c)$$

Rápidamente, notamos que $x^3 - 2x^2 - x + 2$ puede factorizarse

$$x^{100} - 4x^{98} + 5x + 6 = (x - 2)(x - 1)(x + 1)Q(x) + (ax^2 + bx + c)$$

Por el **Teorema del resto**, si sustituimos $x = 2, 1, -1$, los cuales hacen al término que multiplica a $Q(x)$ cero

$$\begin{aligned} (2)^{100} - 4(2)^{98} + 5(2) + 6 &= 0 \times Q(2) + a(2)^2 + b(2) + c \\ (1)^{100} - 4(1)^{98} + 5(1) + 6 &= 0 \times Q(1) + a(1)^2 + b(1) + c \\ (-1)^{100} - 4(-1)^{98} + 5(-1) + 6 &= 0 \times Q(-1) + a(-1)^2 + b(-1) + c \end{aligned}$$

Del cual formamos

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 16 \\ a + b + c = 8 \\ a - b + c = -2 \end{cases}$$

Que al resolverlo obtenemos $(a, b, c) = (1, 5, 2)$, de aquí que el residuo sea $\boxed{x^2 + 5x + 2}$. \square

1.1. Agregados culturales y preguntas

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 2.1. ¿Para qué valores de k se cumple que $x - 2$ es factor de $x^3 + 2kx^2 + k^2x + k - 3$?

Problema 2.2. Para un polinomio desconocido que deja un resto 2 al dividirlo por $x - 1$, y un resto 1 al dividirlo por $x - 2$. ¿Cuál es el resto que se obtiene si este polinomio es dividido por $(x - 1)(x - 2)$?

Problema 2.3. Encontrar el resto cuando $(x + 3)^5 + (x + 2)^8 + (5x + 9)^{1997}$ es dividido por $x + 2$.

Problema 2.4. Encontrar el resto cuando $x^{2006} + x^{2005} + \dots + x + 1$ es dividido por $x + 1$.

Problema 2.5. Sea $F(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Encontrar el residuo cuando $F(x^5)$ es dividido por $F(x)$.

Problema 2.6. Determinar todos los enteros positivos n , tales que el polinomio $x^n + x - 1$ sea divisible por el polinomio $x^2 - x + 1$.

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 3.1. El polinomio $P(x)$ deja residuo -2 en la división entre $x - 1$ y residuo -4 en la división entre $x + 2$. Encontrar el residuo cuando el polinomio es dividido por $x^2 + x - 2$.

Problema 3.2. Encontrar el resto cuando el polinomio $x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$ es dividido entre $x^3 - x$.

Problema 3.3. Probar que si un polinomio $F(x)$ deja un residuo de la forma $px + q$ cuando es dividido entre $(x - a)(x - b)(x - c)$ donde a , b y c son todos distintos, entonces

$$(b - c)F(a) + (c - a)F(b) + (a - b)F(c) = 0.$$

4. Extra

Problema 4.1. Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ y $P(3) = 2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

Referencias

- [BGV14] Radmila Bulajich, José Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.
- [NL22a] William Nicoya and Ricardo Largaespada. Clase 6. Divisibilidad polinómica. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2022.
- [NL22b] William Nicoya and Ricardo Largaespada. Clase 7. Teorema del residuo y teorema del factor. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Mayo 2022.
- [TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 5. División de Polinomios. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2023.

En caso de consultas**Instructor:** Kenny J. Tinoco**Teléfono:** +505 7836 3102 (*Tigo*)**Correo:** kenny.tinoco10@gmail.com**Docente:** José A. Duarte**Teléfono:** +505 8420 4002 (*Claro*)**Correo:** joseandanduarte@gmail.com