Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Colinealidad y Concurrencia
Clase #13

Encuentro: 29
Curso: Colinealidad y Concurrencia
Fecha: 4 de noviembre de 2023

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Clase práctica #7

En esta séptima clase práctica se presentan las soluciones de los 20 problemas de Concurrencia y Colinealidad.

1. Problemas propuestos

Problema 1.1. Sea D el pie de altura desde A en el triángulo $\triangle ABC$ y M, N puntos en los lados CA y AB talque las rectas BM y CN se intersecan en AD. Probar que AD es bisectriz del ángulo $\angle MDN$.

Pista. Sea T la intersección de AD y MN, probar que $\frac{TM}{TN} = \frac{DM}{DN}$. Considerar aplicar el teorema de la bisectriz generalizada al triángulo $\triangle ABC$ y La ley de los senos a los triángulos $\triangle BDN$ y $\triangle CDM$. Utilizar la propiedad $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$ y luego probar que $\tan(\angle MDA) = \tan(\angle NDA)$.

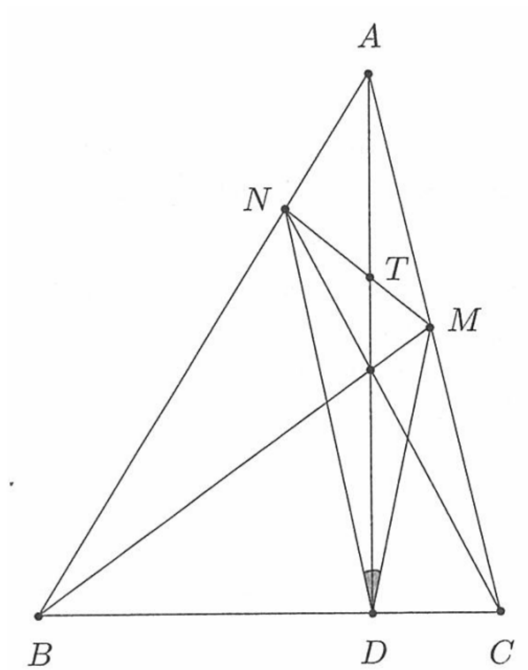

Figura 1: Problema 1.

Solución. Sea T la intersección de AD con MN. Por el teorema de la bisectriz generalizada, tenemos que

$$\frac{TM}{TN} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{\sin(DAC)}{\sin(DAB)}.$$

También, por el teorema de la bisectriz generaliza, podemos decir que

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{\sin(DAC)}{\sin(DAB)}.$$

Por consiguiente, tenemos que

$$\frac{TM}{TN} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{\sin(C)}{\sin(B)},$$

donde la última ecuación se deduce por la ley de lo Senos aplicado al triángulo $\triangle ABC$. Por otro lado, por la misma ley de los Senos, aplicada a los triángulos $\triangle BDN$ y $\triangle CDM$, temos que

$$DM = CM \cdot \frac{\sin(C)}{\sin(CDM)} = CM \cdot \frac{\sin(C)}{\sin(90° - MDA)} = CM \cdot \frac{\sin(C)}{\cos(MDA)},$$

y análogamente

$$DN = BN \cdot \frac{\sin(B)}{\cos NDA};$$

entonces,

$$\frac{DM}{DN} = \frac{CM}{BN} \cdot \frac{\sin(C)}{\sin(B)} \cdot \frac{\cos(NDA)}{\cos(MDA)}.$$

Pero las rectas AD, BM, CN son concurrentes, por lo que por el teorema de Ceva sabemos que

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1, \text{ es decir } \frac{DC}{DB} \cdot \frac{AM}{AN} = \frac{CM}{BN}.$$

Por consiguiente, tenemos que

$$\frac{TM}{TN} = \frac{CM}{BN} \cdot \frac{\sin(C)}{\sin(B)} = \frac{DM}{DN} \cdot \frac{\cos(MDA)}{\cos(NDA)}.$$

Pero, por el teorema de la bisectriz generalizada nos da que

$$\frac{TM}{TN} = \frac{DM}{DN} \cdot \frac{\sin(MDA)}{\sin(NDA)};$$

de este modo $\tan(MDA) = \tan(NDA)$, y entonces los angulos $\angle MDA = \angle NDA$ son iguales, como se afirma. ■

Problema 1.2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro I. Sea Γ un círculo centrado en I con radio mayor al inradio. Sean X_1 la intersección de Γ con AB más cercana a B; X_2 y X_3 las intersecciones de Γ con BC donde X_2 es más cercana a B; y X_4 la intersección de Γ con CA más cercana a C. Sea K la intersección de X_1X_2 con X_3X_4. Probar que AK biseca X_2X_3.

Pista. Sean D, E y F a los puntos de tangecias del incírculo con BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que $FX_1 = DX_2 = EX_4$.

Solución. Sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA y AB, respectivamente.

Por Pitágoras $X_2D = \sqrt{X_2I^2 - ID^2} = \sqrt{X_1I^2 - IF^2} = X_1F$, y como $BF = BD$, entoncees $BX_1 = BX_2$. De este modo $X_1X_2||DE$, y de manera análoga $X_3X_4||DE$ y $FE||X_1X_4$.

Por lo tanto los triángulos $\triangle DEF$ y $\triangle X_1X_4K$ son homotéticos y las rectas X_1F, X_4E y KD concurren en A, y dado que D es el punto medio de X_2X_3 se demuestra el resultado pedido. ■

Problema 1.3. Sea $ABCD$ un cuadrado y sea X un punto en lado BC. Sea Y un punto en la recta CD tal que $BX = YD$ y D se encuentra entre C y Y. Demuestra que el punto medio de XY se encuetra sobre la diagonal BD.

Pista. Aplicar el teorema de Menelao a los triángulos $\triangle BCD$ y $\triangle XCY$.

Problema 1.4. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las rectas tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM interseca de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA interseca de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB interseca de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE interseca a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F). Muetra que las rectas AF, BP y CE concurren.

Pista (Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2014). Probar que los triángulos $\triangle BEF$ y $\triangle PCA$ son homotéticos.

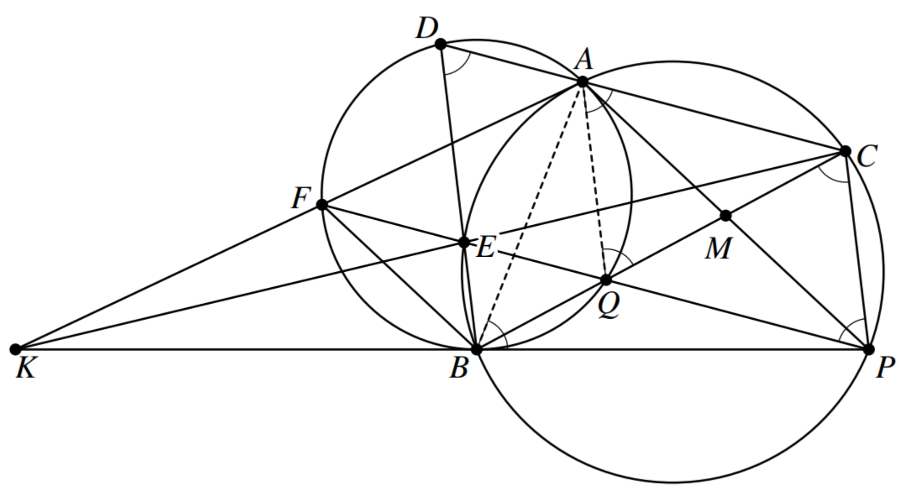

Figura 2: Problema 3.

Solución. Sea Q el segundo punto de intersección de BC y Γ_1. Como MA es tangente a Γ_1, notemos que

$$MQ \cdot MB = MA^2 = MA \cdot MP = MC \cdot MB$$

así que M también es punto medio de CQ. Siendo así, $AQPC$ un paralelogramo. Luego, conseguimos

$$\angle CQA = \angle QCP = \angle BCP = \angle BAP = \angle PBA = 180^\circ - \angle ACP = \angle QAC$$

de modo que QCA es isósceles en A, por lo que $AQBD$ es un trapecio isóscels. Esto se traduce en $BE||QA||PC$. Además, $\angle BEP = \angle BPC = \angle QAC = \angle BDC$, por tanto $QE||AD$, así que forzosamente P, Q y E están alineados. Tomando en cuenta la definición de F, podemos inferir que $EF||CA$ y que $AQFD$ es un trapecio isósceles. Esto conlleva a que $\angle BFQ = \angle BAQ = \angle PAC = \angle QPA$, luego $BF||PA$.

En resumen, los lados correspondientes de $\triangle BEF$ y $\triangle PCA$ son paralelos, por lo que estos triángulos son homotéticos; por consiguiente, AF, CE y PB concurren en el centro de homotecia de estos triángulos. ■

Problema 1.5. Sea Ω el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$ y sea ω_a la circunferencia tangente al segmento CA, segmento AB y Ω. Se definen ω_b y ω_c de manera análoga. Sea A', B', C' los puntos de toque de $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ con Ω, respectivamente. Probar que AA', BB', CC' concurren en la recta OI donde O e I son el cincuncentro y el incentro de $\triangle ABC$, respectivamente.

Pista. Considerar el incírculo del triángulo $\triangle ABC$ y considerar el exsimilicentro de este con Ω. Luego, aplicar los teoremas de Monge y Monge D'Alembert.

Problema 1.6. Sea $ABCD$ un trapezoide con $AB > CD$ y $AB||CD$. Sean los puntos K, L sobre los segmentos AB, CD, respectivamente, tal que $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Suponga que existen los puntos P, Q en la recta KL que satisfacen $\angle APB = \angle BCD$ y $\angle CQD = \angle ABC$. Probar que los puntos P, Q, B, C con concíclicos.

Pista. Considerar la intersección de AD con BC y analizar si existe alguno homotecia centrado en ese punto. Luego, por medio de angulo en cuadrilátero cíclicos llegar a lo pedido.

Problema 1.7. Los puntos P, Q y R están sobre los lados AB, BC y CA del triángulo acutángulo $\triangle ABC$, respectivamente. Si $\angle BAQ = \angle CAQ$, $QP \perp AB$, $QR \perp AC$ y CP y BR se intersecan en S probar que $AS \perp BC$.

Pista. Aplicar Ceva al triángulo $\triangle ABC$ con los puntos P, Q y R. Utilizar la definición del coseno.

Problema 1.8. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con circuncentro O y baricentro G. Sean A', B', C' las reflexiones de los puntos medios de BC, CA, AB con respecto a O, respectivamente. Probar que AA', BB', CC' y GO con concurrente.

Pista. Considere el ortocentro H, y demuestre que los triángulos $\triangle ABH$ y $\triangle A'B'O$ son homotéticos.

Problema 1.9. Un triángulo isósceles $\triangle ABC$ tiene base AB y altura CD con $BC = CA$. Sean P un punto sobre CD, E la intersección de la recta AP con BC y F la intersección de la recta BP con CA. Suponga que los incírculos del triángulo $\triangle ABP$ y del cuadrilátero $PECF$ son congruentes. Demuestre que los incírculos de $\triangle ADP$ y $\triangle BCP$ son también congruentes.

Pista. Trazar la tangente común externa más cercana al punto A, y note que esta es paralela a CD. Considera ahora una homotecia de centro B.

Problema 1.10. Sea el triángulo $\triangle ABC$ con $AC = BC$, sea P un punto dentro del triángulo tal que $\angle PAB = \angle PBC$. Si M es el punto medio de AB, entonce probar que $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

Pista. Probar que CA y CB son tangentes a circuncírculo del triángulo $\triangle APB$. Luego, usar la construción de simediana.

Problema 1.11. Sea P un punto en el plano del triángulo $\triangle ABC$ y sea Q su conjugado isogonal respecto a $\triangle ABC$. Probar que

$$\frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} + \frac{BP \cdot BQ}{BA \cdot BC} + \frac{CP \cdot CQ}{CA \cdot CB} = 1.$$

Pista (Lista corta, IMO 1998)**.** Considerar a X, Y, Z los pies de las proyecciones desde P hacía BC, CA, AB, respectivamente. Luego, utilizar áreas para lograr el resultado.

Problema 1.12. Sea el triángulo $\triangle ABC$ y P un punto en su interior. Sea A_1, B_1 y C_1 las intersecciones de AP, BP y CP con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Considerando a X, Y y Z como la intersecciones de BC con B_1C_1, CA con C_1A_1 y AB con A_1B_1, respectivamente. Probar que X, Y y Z son colineales.

Pista. Aplicar Menelao al triángulo $\triangle ABC$ tres veces y multiplicar los resultados.

Problema 1.13. Sea el triángulo $\triangle ABC$ con incentro I. Sean D, E, F puntos de tangecias de su circuncírculo con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar que los circuncírculos de los triángulos $\triangle AID$, $\triangle BIE$ y $\triangle CIF$ tiene dos puntos en común.

Pista. Probar que los centros de los círculos son colineales. Sean O_1, O_2, O_3 lo centros de los circuncírculos de los triángulos en cuestión, considerar la reflexión de I con respecto a estos centros.

Problema 1.14. Sea $BCXY$ un rectángulo construido fuera del triángulo $\triangle ABC$. Sea D pie de altura desde A hacía BC y sean U y V los puntos de intersección de DY con AB y DX con AC, respectivamente. Probar que $UV||BC$.

Pista. Aplicar el teorema de Desargues en una de sus versiones degeneradas.

Problema 1.15. Sea el triángulo $\triangle ABC$ con $AB < AC$, el punto H denota el ortocentro. Los puntos A_1 y B_1 son pies de alturas desde A y B, respectivamente. El punto D es la reflexión de C respecto al punto A_1. Si $E = AC \cap DH$, $F = DH \cap A_1B_1$ y $G = AF \cap BH$, probar que las rectas CH, EG y AD concurren.

Pista. Aplicar el teorema de Desargues.

Problema 1.16. Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes externamente. Las rectas tangentes desde O_1 hacia C_2 la tocan en A y B; mientras que las rectas tangentes desde O_2 hacia C_1 la tocan en C y D, respectivamente. Sean $E = O_1A \cap O_2C$ y $F = O_1B \cap O_2D$. Demostrar que EF, O_1O_2, AD y BC concurren.

Pista. Aplicar el teorema de Pascal.

Problema 1.17. Sea el triángulo $\triangle ABC$, y sean los puntos B_1, C_1 sobre los lados CA y AB respectivamente. Sea Γ el incírculo del $\triangle ABC$ y sean E y F los puntos de tangencias de Γ con los mismos lados CA y AB, respectivamente. Además, se dibujan las tangentes desde B_1 y C_1 a $\triangle ABC$ y se toma los puntos de tangecias Z y Y, respectivamente. Probar que las rectas B_1C_1, EF y YZ son concurrentes.

Pista. Aplicar el teorema de Pascal en dos hexágonos degenerados.

Problema 1.18. Sea el triángulo $\triangle ABC$ y sea P un punto en el interior del triángulo pedal $\triangle DEF$. Suponga que las rectas DE y DF son perpendiculares. Probar que si Q es el conjugado isogonal de P con respecto al triángulo $\triangle ABC$, entonces Q es el ortocentro del triángulo $\triangle AEF$.

Pista. Considerar las reflexiones A', B', C' de P con respecto a BC, CA, AB, respectivamente. Luego, probar que Q es punto medio de $B'C'$.

Problema 1.19. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera y D, E y F puntos cualesquiera sobre las rectas BC, CA y AB tal que las rectas AD, BE y CF concurren. La paralela a AB por E interseca a la recta DF en el punto Q, la paralela a AB por D interseca a EF en T. Probar que la rectas CF, DE y QT son concurrentes.

Pista. Por conveniencia, considerar dibujar los puntos D, E, F en el interior de los segmentos BC, CA, AB. Aplicar varias veces el teorema de Ceva y el teorema de la bisectriz generalizada.

Problema 1.20. El punto D está sobre el lado AB del triángulo $\triangle ABC$. Sea ω_1 y Ω_1, ω_2 y Ω_2 los incírculos y los excírculos (tangentes al segmento AB) de los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$, respectivamente. Probar que las tangentes externas comunes a ω_1 y ω_2, Ω_1 y Ω_2 se intersecan en AB.

Pista. Considerar los centro de los círculos en cuestión y luego aplicar el teorema de Desargues.

Nota: los problemas no están ordenados por orden de dificultad.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)
Correo: `kenny.tinoco10@gmail.com`

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 (*Claro*)
Correo: `joseandanduarte@gmail.com`