

## Polinomios Clase #4

Encuentro: 4

Curso: Polinomios

Fecha: 20 de abril de 2024

Nivel: 5

Semestre: I

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

Instructor Aux: Cristian Castilblanco

### Contenido: Fórmulas de Vieta I

Cuando nos enfrentamos a problemas relacionados con las raíces de un polinomio, es común pensar en calcular cada una de estas raíces. Sin embargo, no siempre disponemos de un método que simplifique este proceso, y en muchos casos, encontrar todos los valores de las raíces no resulta completamente necesario. Por este motivo, en esta clase exploraremos las Fórmulas de Vieta, una herramienta que nos permite obtener información sobre las raíces de un polinomio usando sus coeficientes.

## 1. Desarrollo

### Teorema 1.1 (Fórmulas de Vieta).

Dado  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  de grado  $n$  con raíces  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , se cumple que

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$r_1 r_2 \dots r_{n-1} + r_1 r_2 \dots r_{n-1} r_n + \dots + r_2 r_3 \dots r_n = (-1)^{n-1} \left( \frac{a_1}{a_n} \right)$$

$$r_1 r_2 \dots r_n = (-1)^n \left( \frac{a_0}{a_n} \right)$$

Por el teorema del factor, podemos escribir el polinomio como

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n).$$

Al expandir los  $n$  factores lineales del lado derecho, obtenemos el siguiente resultado

$$a_n x^n - a_n (r_1 + r_2 + \dots + r_n) x^{n-1} + a_n (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n) x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n r_1 r_2 \dots r_n,$$

donde el signo del coeficiente de  $x^k$  está dado por  $(-1)^{n-k}$ . Comparando los coeficientes correspondientes obtenemos el resultado deseado.

Las fórmulas de Vieta pueden ser útiles al calcular expresiones que involucren las raíces de un polinomio sin tener que calcular los valores de las propias raíces. Para ser más prácticos, en esta sesión de clase solo nos centraremos en las fórmulas de Vieta para polinomios cuadráticos y cúbicos.

### Observación 1.

Fórmulas de Vieta para polinomios cuadráticos y cúbicos.

Para  $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  con raíces  $r_1$  y  $r_2$ .

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -\frac{a_1}{a_2} \\ r_1 r_2 &= +\frac{a_0}{a_2}. \end{aligned}$$

Para  $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  con raíces  $r_1, r_2$  y  $r_3$ .

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= -\frac{a_2}{a_3} \\ r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 &= +\frac{a_1}{a_3} \\ r_1 r_2 r_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

## 1.1. Ejemplos

**Ejemplo 1.1.** Si  $p$  y  $q$  son raíces de la ecuación  $x^2 + 2bx + 2c = 0$ , determina el valor de  $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$ .

**Solución.** Aplicando las fórmulas de Vieta, tenemos  $p + q = -2b$  y  $pq = 2c$ . Podemos transformar la expresión deseada de la siguiente manera,

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{p^2 + q^2}{p^2 q^2} = \frac{p^2 + 2pq + q^2 - 2pq}{p^2 q^2} = \frac{(p + q)^2 - 2pq}{(pq)^2}$$

Sustituyendo valores, obtenemos  $\frac{(p + q)^2 - 2pq}{(pq)^2} = \frac{(-2b)^2 - 2(2c)}{(2c)^2} = \boxed{\frac{b^2 - c}{c^2}}.$  ■

**Ejemplo 1.2.** El polinomio  $x^3 - 7x^2 + 3x + 1$  tiene raíces  $r_1, r_2$  y  $r_3$ , hallar el valor de  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ .

**Solución.** Por Vieta sabemos que  $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = 3$  y  $r_1 r_2 r_3 = -1$ . Además, notemos que

$$\frac{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}{r_1 r_2 r_3} = \frac{r_1 r_2}{r_1 r_2 r_3} + \frac{r_2 r_3}{r_1 r_2 r_3} + \frac{r_3 r_1}{r_1 r_2 r_3} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Por lo tanto  $\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{3}{-1} = \boxed{-3}.$  ■

**Ejemplo 1.3** (1986 URSS). Las raíces del polinomio  $x^2 + ax + b + 1$  son números naturales. Mostrar que  $a^2 + b^2$  no es un primo.

**Solución.** Para demostrar que  $a^2 + b^2$  no es primo, basta demostrar que es el producto de dos enteros mayores a 1. Digamos entonces que  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces, por Vieta  $r_1 + r_2 = -a$  y  $r_1 r_2 = b + 1$ . Elevando al cuadrado y sumando tenemos  $a^2 + b^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1 r_2 - 1)^2$ , al desarrollar llegamos a

$$a^2 + b^2 = r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 + 1$$

$$\begin{aligned}
 &= r_1^2 + r_2^2 + r_1^2 r_2^2 + 1 \\
 &= (r_1^2 + 1)(r_2^2 + 1).
 \end{aligned}$$

Por dato  $r_1$  y  $r_2$  son naturales por lo que  $(r_1^2 + 1)$  y  $(r_2^2 + 1)$  son naturales mayores a 1 y hemos terminado. ■

**Ejemplo 1.4** (AIME II, 2008). Sean  $r, s$  y  $t$  las tres raíces de la ecuación  $8x^3 + 1001x + 2008 = 0$ . Hallar el valor de  $(r + s)^3 + (s + t)^3 + (t + r)^3$ .

**Solución.** Por Vieta, sabemos que  $r + s + t = 0$  y  $rst = -251$ . Por la primera ecuación, obtenemos  $r + s = -t$  y por tanto  $(r + s)^3 = -t^3$ . Análogamente, llegamos a

$$(r + s)^3 + (s + t)^3 + (t + r)^3 = -(r^3 + s^3 + t^3)$$

Por la identidad de Gauss, tenemos que  $r^3 + s^3 + t^3 - 3rst = 0$  y por tanto  $-(r^3 + s^3 + t^3) = -3rst \Rightarrow -(r^3 + s^3 + t^3) = -3(-251) = \boxed{753}$ . ■

## 1.2. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

**Ejercicio 1.1.** Sean  $r_1$  y  $r_2$  las raíces del polinomio  $P(x) = ax^2 + bx + c$ . Encontrar los siguientes valores en función de los coeficientes de  $P(x)$ .

- |                                |                                    |
|--------------------------------|------------------------------------|
| A) $r_1 - r_2$                 | B) $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$ |
| C) $r_1^2 + r_2^2$             | D) $r_1^3 + r_2^3$                 |
| E) $(r_1 + 1)^2 + (r_2 + 1)^2$ |                                    |

**Ejercicio 1.2.** Sean  $a$  y  $b$  las raíces de la ecuación  $x^2 - 6x + 5 = 0$ , encontrar  $(a + 1)(b + 1)$ .

**Ejercicio 1.3.** Dado que  $m$  y  $n$  son raíces del polinomio  $6x^2 - 5x - 3$ , encuentra un polinomio cuyas raíces sean  $m - n^2$  y  $n - m^2$ , sin calcular los valores de  $m$  y  $n$ .

**Ejercicio 1.4.** Sea el polinomio  $5x^3 + 4x^2 - 8x + 6$  con raíces reales  $a, b$  y  $c$ , hallar

$$a(1 + b + c) + b(1 + a + c) + c(1 + a + b).$$

**Ejercicio 1.5.** ¿Para qué valores reales positivos de  $m$ , las raíces  $x_1$  y  $x_2$  de la ecuación

$$x^2 - \left(\frac{2m-1}{2}\right)x + \frac{m^2-3}{2} = 0$$

cumplen que  $x_1 = x_2 - \frac{1}{2}$ ?

**Ejercicio 1.6.** Supóngase que el polinomio  $5x^3 + 4x^2 - 8x + 6$  tiene tres raíces reales  $a, b$  y  $c$ . Probar que

$$5^2 a \left(\frac{a+b}{2}\right) + 5^2 b \left(\frac{b+c}{2}\right) + 5^2 c \left(\frac{c+a}{2}\right) = 3^3 + 1.$$

**Problema 1.1.** Sea  $P(x) = mx^3 + mx^2 + nx + n$  un polinomio cuyas raíces son  $a, b$  y  $c$ . Demostrar que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

**Problema 1.2.** Si  $z, t$  son las raíces del polinomio  $x^2 + 2x + 4$ , calcular el valor de

$$(z + t)^7 - z^7 - t^7.$$

**Problema 1.3.** Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tal que los polinomios  $ax^2 + bx + c$  y  $cx^2 + bx + a$  tienen dos raíces reales distintas cada uno  $(r_1, r_2)$  y  $(r_3, r_4)$  respectivamente. Se sabe que los números  $r_1, r_2, r_3, r_4$  forman, en ese orden, una progresión aritmética. Demostrar que  $a + c = 0$ .

## 2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

**Problema 2.1.** Sea el polinomio  $P(x) = 4x^2 + 5x + 3$  con raíces  $p$  y  $q$ . Determina  $(p+7)(q+7)$ , sin calcular los valores de  $p$  y  $q$ .

**Problema 2.2.** Sean  $r_1, r_2, r_3$  las raíces del polinomio  $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ . Determina el valor de  $r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$ , sin calcular los valores de  $r_1, r_2, r_3$ .

## 3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

**Problema 3.1.** Para cada entero positivo  $n$ , se definen  $a_n$  y  $b_n$  como las raíces de la ecuación cuadrática  $x^2 + (2n+1)x + n^2 = 0$ . Determinar el valor de

$$\frac{1}{(1+a_3)(1+b_3)} + \frac{1}{(1+a_4)(1+b_4)} + \cdots + \frac{1}{(1+a_{2024})(1+b_{2024})}.$$

## Referencias

- [Arg15] Argel. Fórmulas de Vieta. *OMMBC*, 2015.
- [BGV14] Radmila Bulajich, José Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.
- [CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 3. Fórmulas de Vieta I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2022.
- [TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 4. Fórmulas de Vieta. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2023.

### En caso de consultas

**Instructor:** Kenny J. Tinoco

**Teléfono:** +505 7836 3102 (*Tigo*)

**Correo:** kenny.tinoco10@gmail.com

**Instructor:** Cristian Castilblanco

**Teléfono:** +505 8581 1745 (*Tigo*)

**Correo:** cristian.castilblanco120@gmail.com