Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #x

Encuentro: x
Curso: Polinomios
Fecha: x de x de 2024

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Raíces de Polinomios I

Hay muchas situaciones donde se necesita tener información a cerca de las raíces de un polinomio, y una considerable cantidad de atención es dedicada a los métodos de resolver ecuaciones como $P(x)=0$ de manera exacta o aproximada. Por lo que en esta segunda sesión veremos el tema de raíces de polinomios.

1. Desarrollo

1.1. Factorización

Factorizar un polinomio significa descomponer la expresión original en un producto de polinomios con grados menores. Tenemos dos herramientas principales para esto: agrupar o usar identidades. La aplicación de la primera herramienta incluye dividir la expresión en grupos con factores comunes. Por ejemplo,

$$a^2+ab+bc+ca=(a^2+ab)+(ac+bc)=a(a+b)+c(a+b)=(a+c)(a+b).$$

Ejemplo 1.1. Factorizar la siguiente expresión $xyz+3xy+2xz-yz+6x-3y-2z-6$.

Solución. Agrupamos la expresión de arriba como $(xyz+3xy)+(2xz+6x)-(yz+3y)-(2z+6)$. Ahora podemos sacar el factor $z+3$ para cada grupo, $(z+3)(xy+2x-y-2)$. Nuevamente, podemos agrupar la expresión $xy+2x-y-2$ como $x(y+2)-(y+2)=(x-1)(y+2)$. Por tanto, nuestra expresión queda factorizada como $(x-1)(y+2)(z+3)$. ■

El segundo caso se refiere a identidades para factorizar. Las identidades son los pilares de los cálculos matemáticos. Se encuentran comunmente en las competiciones matemáticas, donde muchos problemas requieren de su conocimiento.

Aquí recopilamos algunas de las identidades más útiles. Es importante que, para mejorar tu fortaleza en el trabajo con expresiones algebraicas, te esforcés en aprender estas identidades.

Identidades útiles

(Diferencia de cuadrados) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

(Binomio al cuadrado) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(Trinomio al cuadrado) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(Identidad de Gauss) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(Diferencia de potencias) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$

(Suma de potencias) $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$ con n impar

(Binomio de Newton) $(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n$

Por ejemplo, podemos factorizar la expresión $(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3$. Primero, notemos que $a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2=0$. Por lo tanto, por la Identidad de Gauss, obtenemos que

$$(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3=3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2).$$

Ahora por diferencia de cuadrados, encontramos

$$3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)=3(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a).$$

1.1.1. Factorización clásica

Dado un polinomio cuadrático $P(x)=ax^2+bx+c$ donde $a,b,c\in\mathbb{R}$, este puede ser factorizado como

$$P(x)=\frac{(ax+\triangle)(ax+\square)}{a},\ \text{donde}\ \begin{cases}\triangle+\square=b\\ \triangle\times\square=ac\end{cases}$$

Ejemplo 1.2. Factorizar el polinomio $10x^2-13x-3$.

Solución. Calculamos el valor $(10)(-3)=-30$, después escribimos los siguientes paréntesis

$$\frac{1}{10}(10x+\quad)(10x+\quad).$$

Luego, nos preguntamos lo siguiente ¿qué números cumplen que al sumarse den -13 y al multiplicarse den -30? Tras un breve análisis nos damos cuenta que dichos números son -15 y 2. El mayor de los números (sin considerar el signo) se coloca en el primer paréntesis, el menor en el segundo y finalmente se reduce la expresión. Es decir,

$$\frac{1}{10}(10x-15)(10x+2)=\frac{1}{10}(5)(2x-3)(2)(5x+1)=\boxed{(2x-3)(5x+1)}.$$ ■

1.1.2. Completación de cuadrados

No todos los polinomios cuadráticos pueden ser factorizados fácilmente. Por ejemplo, al tratar de factorizar x^2+6x-1 llegar directamente a $(x+3-\sqrt{10})(x-3-\sqrt{10})$ no resulta tan evidente, por lo cual podemos auxiliarnos en técnicas como la **completación de cuadrados**. Si se tiene el polinomio $P(x)=x^2\pm bx$ entonces podemos expresarlo de la forma:

$$P(x)=\left(x\pm\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Lo cual facilita aplicar la diferencia de cuadrados.

Ejemplo 1.3. Factorizar el polinomio $R(r) = r^2 - 10r + 7$.

Solución. Utilizando la completación de cuadrados en la expresión $r^2 - 10r$, tenemos que

$$\begin{aligned}
R(r) =& r^2 - 10r + 7 \\
=& \left(r - \frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 7 = (r-5)^2 - 18 \\
=& \left(r - 5 + \sqrt{18}\right)\left(r - 5 - \sqrt{18}\right)
\end{aligned}$$

De esta manera sabemos que $R(r) = \left[r - \left(5 - 3\sqrt{2}\right)\right]\left[r - \left(5 + 3\sqrt{2}\right)\right]$. ■

1.2. Definiciones

Definición 1.1 (Raíz de un Polinomio)**.** La ***raíz*** o ***cero*** de un polinomio $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ es un número r, tal que $P(r) = 0$. También, diremos que r es una solución de la ecuación $a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$.

Definición 1.2 (Factor de un Polinomio)**.** Dado $P(x)$ un polinomio con grado n y un número $a \in \mathbb{R}$, diremos que $(x - a)$ es un ***factor*** de $P(x)$ si se cumple que

$$P(x) = (x - a)Q(x),$$

para algún polinomio $Q(x)$ con $\deg Q(x) = n - 1$.

Ejemplo 1.4. Demuestre que u es raíz del polinomio $R(x) = x^2 - (u + 17)x + 17u$.

Solución. Para demostrar que u es raíz de $R(x)$, basta probar que $R(u) = 0$. Lo cual es fácil ver cuando evaluamos $R(u) = u^2 - (u + 17)u + 17u = u^2 - u^2 - 17u + 17u = 0$. ■

El polinomio anterior resulta que puede ser factorizado como $R(x) = (x - u)(x - 17)$, que al igualarlo a cero y analizamos, cada factor nos da una raíz. Luego, vemos que $x = u, 17$ son sus raíces. Es decir, que si factorizamos un polinomio hasta sus factores lineales automáticamente obtenemos sus raíces.

Ejemplo 1.5. Dado $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 40$, probar que $(x - 5)$ no es factor un de $f(x)$.

Solución. Supongamos que $(x - 5)$ es un factor de $f(x)$, entonces debe pasar que

$$f(x) = (x - 5)g(x)$$

para un polinomio cuadrático $g(x)$. Si $(x - 5)$ es factor de $f(x)$, al evaluarlo en $x = 5$ vemos que dicho factor se hace cero, es decir $f(5) = 0$. Pero vemos que $f(5) = 5^3 - 3(5)^2 + 6(5) - 40 = 40 \neq 0$, una contradicción. ■

Teorema 1.1 (Teorema del factor).

Dado un polinomio $P(x)$ con grado n y un número $a \in \mathbb{R}$, diremos que a es una raíz de $P(x)$ si y sólo si $(x-a)$ es un factor de $P(x)$, i.e.

$$P(a)=0 \iff P(x)=(x-a)Q(x)$$

para algún polinomio $Q(x)$.

Sean a_1, a_2 y a_3 tres raíces distintas de un polinomio cúbico $P(x)$, por el teorema anterior sabemos que

$$P(x)=(x-a_1)Q(x),$$

para algún polinomio cuadrático $Q(x)$. Como $P(a_2)=(a_2-a_1)Q(a_2)=0$ y tenemos que $a_2 \neq a_1$, necesariamente $Q(a_2)=0$, es decir a_2 es raíz de Q, nuevamente por el teorema anterior sabemos que

$$Q(x)=(x-a_2)R(x)$$

para algún polinomio líneal $R(x)$. Análogamente, tendremos que $R(x)=(x-a_3)S(x)$, para algún polinomio constante $S(x)=c$. Luego

$$P(x)=c(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3), \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

Vemos que saber las raíces de $P(x)$ nos condujo a su factorización. Además, generalizando obtenemos el siguiente resultado.

Observación 1.

Sea el polinomio $P(x)$ de grado n y raíces r_i con $1 \leq i \leq n$, este puede ser expresado como

$$P(x)=c(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_{n-1})(x-r_n), \text{ donde } c \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

De este resultado obtenemos las siguientes propiedades.

1. Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces.
2. Si una cantidad $m \leq n$ de los r_i son iguales, digamos a k, se cumple que $P(x)=(x-k)^m Q(x)$. Entonces diremos que la raíz k tiene multiplicidad m.

Ejemplo 1.6. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y suponga que $P(1)$ y $P(2)$ son ambos impares. Demuestre que no existe ningún entero n para el cual $P(n)=0$.

Solución. Nos piden demostrar que $P(x)$ no tiene raíces enteras. Supongamos lo contrario, que existe un entero n tal que $P(n)=0$. Entonces, por el teorema del factor tenemos $P(x)=(x-n)Q(x)$, con $Q(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Así podemos ver que, $P(1)=(1-n)Q(1)$ y $P(2)=(2-n)Q(2)$ son impares, pero $(1-n)$ y $(2-n)$ son enteros consecutivos, así que uno de ellos debe ser par. Por lo tanto, $P(1)$ o bien $P(2)$ tiene que ser par, lo cual contradice las condiciones del problema. Luego, n no existe. ■

Ejemplo 1.7. Sea $M(x)$ un polinomio cúbico con coeficientes enteros y sean $a,b,c \in \mathbb{Z}$ distintos tal que $M(a)=M(b)=M(c)=2$. Demostrar que no existe un $d \in \mathbb{Z}$ para el que $M(d)=3$.

Solución. Sea $N(x) = M(x) - 2$, como a, b y c son raíces de $N(x)$, por el teorema del factor $N(x) = \alpha(x-a)(x-b)(x-c)$, para algún entero α. Si para algún entero d se cumple $M(d) = 3$, entonces $N(d) = \alpha(d-a)(d-b)(d-c) = 1$. Para que esto suceda los factores deben ser 1 o -1, por lo tanto, dos de ellos tendrían que ser iguales. Pero por la condición $a \neq b \neq c$ esto no puede ser, luego d no existe. ■

1.3. Métodos para determinar raíces de polinomios

1.3.1. Fórmula general

En un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, podemos encontrar sus dos raíces en función de los coeficientes. A esta fórmula le conoceremos como la ***fórmula general*** cuadrática.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demostración. Completemos cuadrados en el polinomio

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] && \text{(Sumando y restando} \, (b/2a)^2) \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] && \text{(Simplificando)} \\
&= a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] && \text{(Por diferencia de cuadrados)} \\
&= a\left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right] && \text{(Agrupando coeficientes)}
\end{aligned}$$

Así, por el teorema del factor, se obtiene el resultado deseado. ■

Ejemplo 1.8. Sabiendo que $a_1 = m+2$, $a_2 = m-1$ y $a_3 = 1-m$ son los coeficientes del al ecuación $a_1x^4 + a_2x^2 + a_3 = 0$, tal que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$. Determinar el valor de mayor raíz.

Solución. De la condición $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \implies (m-1) - (m+2) = (2-m) - (m-1) \implies -3 = -2m + 3 \implies m = 3$. Luego, la ecuación es $5x^4 + 2x^2 - 1 = 0$, haciendo $y = x^2$ tenemos la cuadrática $5y^2 + 2y - 1$. Que aplicando la fómula general, obtenemos

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{10} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}.$$

Por consiguiente las raíces de x son las raíces cuadradas de estos valores, es decir $x = \pm\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{6}}{5}}$. Luego de un breve análisis vemos que la mayor de las raíces es $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{6}}{5}}$. ■

En el ejemplo anterior, las raíces $x = \pm\sqrt{\frac{-1-\sqrt{6}}{5}}$ son valores complejos, cuya forma reducida es $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{6}}{5}}i$, donde $i = \sqrt{-1}$ es la ***unidad imaginaria***. En general, dependerá del contexto del problema si estos valores son tomados en cuenta o no.

En nuestro curso no veremos el tema de ***Números Complejos*** tal cual, pero al menos tendremos en cuenta elementos básicos como su definición.

1.3.2. Análisis de discriminate

Para el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, la cantidad $\Delta = b^2 - 4ac$, es llamada ***discriminante*** y su signo conduce a tres casos.

Caso	Descripción	Ejemplo
$\Delta > 0$	El polinomio $P(x)$ tiene dos raíces reales distintas.	$P(x) = x^2 - 5x + 6$ con raíces $x = 2, 5$ y $\Delta = 1$.
$\Delta = 0$	El polinomio $P(x)$ tiene una raíz real, que es una raíz ***doble***.	$P(x) = x^2 - 6x + 9$ con raíz doble $x = 3$ y $\Delta = 0$.
$\Delta < 0$	El polinomio $P(x)$ no tiene raíces reales.	$P(x) = x^2 - 5x + 7$ sin raíces reales y $\Delta = -3$.

Cuadro 1: Análisis de discriminate para polinomios cuadráticos.

Ejemplo 1.9. ¿Para qué valores de δ el polinomio $\delta x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{\delta}$ tiene sus dos raíces iguales?

Solución. Si el polinomio tiene raíces iguales, quiere decir que su discriminante es nulo, es decir $\Delta = 4 - 4\delta\left(1 - \frac{1}{\delta}\right) = 0$. Multiplicando por δ y dividiendo por 4, $\delta - \delta(\delta - 1) = 0 \implies 2\delta - \delta^2 = 0$. Luego, $\delta = 2$ es la única posibilidad. ■

En la ecuación polinómica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, con $a \neq 0$, al hacer la sustitución $y = x + \frac{b}{3a}$ se obtiene como resultado la ecuación de la forma $y^3 + py + q$, que se nombra como la ecuación ***cúbica reducida***, donde

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{y} \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}.$$

Esta ecuación nos ayuda a obtener la valor $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ que llamaremos ***discriminante*** y su signo conduce a tres casos.

Caso	Descripción	Ejemplo
$\Delta > 0$	El polinomio $P(x)$ tiene una raíz real y dos raíces complejas.	$P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ con raíces $x = 3, \pm i$ y $\Delta = 0.074$. Cuya forma reducida es $y^3 - 2y - 4$.
$\Delta = 0$	El polinomio $P(x)$ en el caso de que $p = q = 0$ tiene una raíz de multiplicidad tres. Si $p = -q \neq 0$ tiene dos raíces reales (una simple y una doble, respectivamente).	$P(x) = x^3 - 3x + 2$ con raíz simple $x = -2$, raíz doble $x = 1$ y $\Delta = 0$. Cuando $p = q = 0$, es claro que $P(x) = x^3$ y la raíz triple es 0.
$\Delta < 0$	El polinomio $P(x)$ tiene tres raíces reales diferentes.	$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ con raíces $x = -1, 1, 2$ y $\Delta = -0.33$.

Cuadro 2: Análisis de discriminate para polinomios cúbicos.

1.4. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Determina las raíces los siguientes polinomios con el método que más te guste

1. x^2+x-20
2. $9t^2+88t-20$
3. x^3-6x+9
4. x^3-1331
5. $-21x^2-11x+2$
6. r^4-13r^2+36
7. $x^3-9x^2-9x-15$
8. $12p^2-7p-12$
9. $(c+d)^2-18(c+d)+65$

Ejercicio 1.2. Sea $f(x)=3x^3-2x^2-12x+8$.

a. Usar el teorema del factor para probar que $(x+2)$ es factor de $f(x)$.

b. Factorizar $f(x)$ completamente.

Ejercicio 1.3. El polinomio x^3+4x^2+7x+k, donde k es una constante, es denotado por $f(x)$.

a. Dado que $(x+2)$ es un factor de $f(x)$, probar que $k=6$.

b. Expresar $f(x)$ como el producto de un factor lineal y uno cuadrático.

Ejercicio 1.4. Usar el teorema del factor para demostrar que $(x+3)$ es un factor de $x^3+5x^2-2x-24$. Luego, factorize completamente el polinomio.

Ejercicio 1.5. Usar el teorema del factor para probar que $(x-5)$ es un factor de $x^3-19x-30$. Luego, factorize el polinomio en tres factores lineales.

Ejercicio 1.6. Un polinomio cúbico es definido en términos de la constante k como

$$P(x)=x^3+x^2-x+k, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Dado que $(x-k)$ es un factor de $P(x)$ determinar los posibles valores de k.

Ejercicio 1.7. Use el teorema del factor para demostrar $(x+2)$ es factor de $2x^3+3x^2-5x-6$. Luego, factorize el polinomio en tres factores lineales.

Ejercicio 1.8. Resolver la ecuación

$$x^3+x^2-(x-1)(x-2)(x-2)=12.$$

Ejercicio 1.9. Si se cumple $6x^2+xy=15y^2$ con $x,y\neq 0$, hallar todos los valores de $\frac{x}{y}$.

Ejercicio 1.10. Si $x=K^2(x-1)(x-2)$ con $K\in\mathbb{R}$, tiene raíces reales, hallar K.

Ejercicio 1.11. Encontrar las soluciones de la ecuación $m^2-3m+1=n^2+n-1$, con $m,n\in\mathbb{Z}^+$.

Problema 1.1. Sean a, b y c números reales positivos. ¿Es posible que cada uno de los polinomios $P(x)=ax^2+bx+c$, $Q(x)=bx^2+cx+a$ y $R(x)=cx^2+ax+b$ tenga sus dos raíces reales?

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Problema 2.1. Sea $P(x)$ un polinomio cúbico mónico tal que $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ y $P(3) = 3$. Encontrar $P(4)$.

Problema 2.2. Dado el polinomio

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

que cumple $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ y $P(3) = 30$. Determinar el valor de

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10}.$$

Problema 2.3. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático. Demostrar que existen polinomios cuadráticos $G(x)$ y $H(x)$ tales que

$$P(x)P(x+1) = (G \circ H)(x).$$

Problema 2.4. Sea $P(x) = mx^3 + mx^2 + nx + n$ un polinomio cuyas raíces son a, b y c. Demostrar que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Sean a y b enteros. Determinar todas las soluciones de la ecuación

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x,$$

si se sabe que tiene una solución entera.

Problema 3.2. Supóngase que el polinomio $5x^3 + 4x^2 - 8x + 6$ tiene tres raíces reales a, b y c. Encuentra el valor de

$$a(1 + b + c) + b(1 + a + c) + c(1 + a + b).$$

Referencias

[Bar89] Edward Barbeau. *Polynomials*. Springer, 1989.

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 2. Raíces de polinomios I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2022.

[Lul16] Lulú. Polinomios. *OMMBC*, 2016.

[TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 2. Raíces de polinomios I. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2023.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com