Lista de problemas para el curso de polinomios 2024

1. Polynomial questions

Polynomial Exam Questions por T. Madas. Documento encontrado en internet.

Ejercicio 1.1. Multiplicar y simplificar

$$(2x^2 - x - 3)(1 + 2x - x^2),$$

escribir la respuesta en potencias ascendentes de x.

Respuesta, $\boxed{-3 - 7x + 3x^2 + 5x^3 - 2x^4}$.

Ejercicio 1.2. Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 40$.

a. Probar que $(x - 5)$ no es factor de $f(x)$.
b. Encontrar un factor lineal de $f(x)$.

Respuesa, $\boxed{(x - 4)}$.

Ejercicio 1.3. Sea $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + 8$.

a. Usar el teorema del factor para probar que $(x + 2)$ es factor de $f(x)$.
b. Factorizar $f(x)$ completamente.

Respuesta, $\boxed{(3x - 2)(x - 2)(x + 2)}$.

Ejercicio 1.4. El polinomio $x^3 + 4x^2 + 7x + k$, donde k es una constante, es denotado por $f(x)$.

a. Dado que $(x + 2)$ es un factor de $f(x)$, probar que $k = 6$.
b. Expresar $f(x)$ como el producto de un factor lineal y uno cuadrático.

Respuesta, $\boxed{(x + 2)(x^2 + 2x + 3)}$.

Ejercicio 1.5. Usar el teorema del factor para demostrar que $(x+3)$ es un factor de $x^3+5x^2-2x-24$. Luego, factorize completamente el polinomio.

Respuesta, $\boxed{(x + 3)(x - 2)(x + 4)}$.

Ejercicio 1.6. Encontrar el coeficiente de x^3 en la expansión de

$$(2x^3 - 5x^2 + 2x - 1)(3x^3 + 2x^2 - 9x + 7).$$

Respuesta, $\boxed{60x^3}$.

Ejercicio 1.7. Multiplicar y simplificar

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 - x + x^2)$$

escribir la respuesta en potencias ascendentes de x.

Respuesta, $\boxed{1 + x^2 + x^3 + x^5}$.

Ejercicio 1.8. Usar el teorema del factor para probar que $(x-5)$ es un factor de $x^3-19x-30$. Luego, factorize el polinomio en tres factores lineales.

Respuesta, $\boxed{(x + 3)(x + 2)(x - 5)}$.

Ejercicio 1.9. Sea $f(x) = ax^3 - x^2 - 5x + b$, donde a y b son constantes. Tal que, cuando $f(x)$ se divide por $(x - 2)$ y $(x + 2)$ los restos son 36 y 40 respectivamente. Hallar el valor de a^{b+2024}.

Respuesta, 1.

Ejercicio 1.10. Un polinomio cúbico es definido en términos de la constante k como

$$P(x) = x^3 + x^2 - x + k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dado que $(x-k)$ es un factor de $P(x)$ determinar los posibles valores de k.

Respuesta, $\boxed{k = -1, 0}$.

Ejercicio 1.11. Sea $G(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 6$, donde k es una constante.

a. Dado que $(x - 3)$ es un factor de $G(x)$, probar que $k = -5$.
b. Factorizar $G(x)$ en tres factores lineales.
c. Hallar el resto cuando $G(x)$ es dividido por $(x + 3)$.

Respuesta, $\boxed{(x-1)(x+2)(x-3)}$ y $\boxed{R=-24}$.

Ejercicio 1.12. Use el teorema del factor para demostrar $(x+2)$ es factor de $2x^3+3x^2-5x-6$. Luego, factorize el polinomio en tres factores lineales.

Respuesta, $\boxed{(x+1)(x+2)(2x-3)}$.

Ejercicio 1.13. Sea $H(x)=2x^3-7x^2-5x+4$.

a. Encontrar el resto cuando $H(x)$ es dividido por $(x+2)$.
b. Usar el teorema del factor para probar que $(x-4)$ es un factor de $H(x)$.
c. Factorizar completamente $H(x)$.

Respuesta, $\boxed{R=-30}$ y $\boxed{(2x-1)(x+1)(x-4)}$.

Ejercicio 1.14. Sea $g(x)=x^3+x^2+ax+b$, donde a y b son constantes. Tal que, cuando $g(x)$ se divide por $(x-2)$ y $(x+1)$ los restos son -7 y 32 respectivamente. Hallar los valores de a, b y demostrar que $(x-3)$ es factor de $g(x)$.

Respuesta, $\boxed{a=-17}$, $\boxed{b=15}$.

Ejercicio 1.15. Sea $R(x)=px^3-32x^2-10x+q$, donde p y q son constantes. Cuando $R(x)$ es dividido por $(x-2)$ el resto es exactemente igual cuando $R(x)$ es dividido por $(2x+3)$. Probar que $p=8$.

Ejercicio 1.16. Resolver la ecuación

$$x^3+x^2-(x-1)(x-2)(x-2)=12.$$

Respuesta, $\boxed{x=-\frac{3}{7},2}$.

Ejercicio 1.17. Sea $P(x)=3x^3-2x^2-12x+8$.

a. Encontrar el resto cuando $P(x)$ es divido por $(x-4)$.
b. Dado que $(x-2)$ es un factor de $P(x)$ resolver la ecuación $P(x)=0$.

Respuesta, $\boxed{R=120}$ y $\boxed{x=-2,\frac{2}{2},2}$.

[1]El el archivo pdf es la página 273.

2. TR98

3. Flo07

[Flo07] [TR98]

4. Clase 06

Problema 4.1 ([BLW22]. Example 4.4. Page 7)**.** Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1)=2$, $P(2)=3$ y $P(3)=2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

5. Clase 07

Clase práctica #2

Problema 5.1. Para que la división de $6x^4-11x^2+ax+b$ entre $3x^2-3x-1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Problema 5.2. Calcular la suma de coeficientes del resto que deja $x^{3333}-9$ entre x^2-729.

Problema 5.3 ([RC08]. Problem 8.25. Page 253[1].)**.** Sea r una raíz de x^2-x+7. Hallar el valor de $r^3+6r+\pi$.

Problema 5.4 ([RC08]. Problem 8.27. Page 254.)**.** Sean a, b y c las raíces reales de la ecuación $x^3+3x^2-24x+1=0$. Probar que $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$.

Problema 5.5 ([Iha20]. Exercise 13. Page 12). Sean r_1, r_2 y r_3 raíces distintas del polinomio $y^3-22y^2+80y-67$. De tal manera que existen números reales α, β y θ tal que

$$\frac{1}{y^3-22y^2+80y-67}=\frac{\alpha}{y-r_1}+\frac{\beta}{y-r_2}+\frac{\theta}{y-r_3}$$

$\forall y \notin \{r_1,r_2,r_3\}$. ¿Cuál es valor de $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\theta}$?

Problema 5.6 ([NF21]. Exercise 3.14. Page 12). La ecuación $2^{333x-2}+2^{111x+2}=2^{222x+1}+1$ tiene tres raíces reales. Dado que su suma es $\dfrac{m}{n}$ con $m,n\in\mathbb{Z}^+$ y $mcd(m,n)=1$. Calcular $m+n$.

Problema 5.7. Si $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ es un polinomio tal que $P(1)=10$, $P(2)=20$ y $P(3)=30$, determine el valor de

$$\frac{P(12)+P(-8)}{10}.$$

Problema 5.8 ([Eng97]. Problem 34. Page 256). Sea $F(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a, b, c y d tal que $F(a)=F(b)=F(c)=F(d)=5$, entonces no existe un entero k tal que $F(k)=8$.

Problema 5.9 ([NF21]. Exercise 3.15. Page 12). Sea el polinomio $P_0(x)=x^3+313x^2-77x-8$. Para enteros $n\geq 0$, definimos $P_n(x)=P_{n-1}(x-n)$. ¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{20}(x)$?

6. Clase 08

Problema 6.1 ([Lee11]. Problem 6. Page 5). Considera el polinomio $P(x)=x^6-x^5-x^3-x^2-x$ y $Q(x)=x^4-x^3-x^2-1$. Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 las raíces de Q, encontrar $P(z_1)+P(z_2)+P(z_3)+P(z_4)$.

Problema 6.2 ([Eng97]. Problem 15. Page 255). Sea $N(x)=(1-x+x^2-\cdots+x^{100})(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$. Probar que después de multiplicar y reducir términos solo quedan potencias pares de x.

Problema 6.3 ([BLW22]. Problem 6.2. Page 12). Sea $R(x)=15x-2016$. Si $R^5(x)=R(x)$, encontrar la suma de todos los posibles valores de x.

Problema 6.4 ([Iha20]. Exercise 14. Page 12). Sean r y s raíces reales distintas de $P(x)=x^3+ax+b$. También, sean $r+4$ y $s-3$ raíces de $Q(x)=x^3+ax+b+240$. Encontrar la suma de todos los posibles valores de $|b|$.

Problema 6.5 ([Lee11]. Problem 4. Page 5). Sean a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 cinco números reales tales que satisfacen la siguiente ecuación

$$\frac{a_1}{k^2+1}+\frac{a_2}{k^2+2}+\frac{a_3}{k^2+3}+\frac{a_4}{k^2+4}+\frac{a_5}{k^2+5}=\frac{1}{k^2},\quad k\in\{1,2,3,4$$

Encontrar $\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}$.

7. Clase 11

Problema 7.1. Si a, b, c y d son las raíces de la ecuación $x^4-3x^3+1=0$, calcular el valor de

$$\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}+\frac{1}{c^6}+\frac{1}{d^6}.$$

Referencias

[BLW22] Adithay B., Brian L., and William W. Polynomials. *AoPS*, 2022.

[Eng97] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1997.

[Flo07] Mikhaild Flores. *Álgebra. Teoría y práctica*. Editorial San Marcos, 2007.

[Iha20] Ihatemath123. Vieta's Formulas. 2020.

[Lee11] Holden Lee. Lecture 8. Polynomials, part 1. *OMC*, 2011.

[NF21] Naman12 and Freeman66. Polynomials in the AIME. *AoPS*, 2021.

[RC08] Richard Rusczyk and Mathew Crawford. *Intermediate Algebra*. AoPS, 2008.

[TR98] Armando Tori and Juan Ramos. *Problemas de Álgebra y cómo resolverlos*. RASCO Editores, 1998.