

Polinomios Clase #9

Encuentro: 11

Curso: Polinomios

Fecha: 8 de junio de 2024

Nivel: 5

Semestre: I

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

Instructor Aux: Cristian Castilblanco

Contenido: Clase práctica #1

En esta primera clase práctica veremos ejercicios y problemas de los contenidos desarrollados en las clases del curso, con el objetivo de afianzar lo aprendido hasta el momento.

1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Sea $P(x)$ un polinomio mónico de grado 3 tal que

$$P(x+1) = P(x) + nx + 2.$$

Hallar la suma de coeficientes del término cuadrático y lineal, sabiendo que su término independiente igual a 5.

Ejercicio 1.2. Determine todos los posibles valores que puede tomar $\frac{x}{y}$ si se cumple la ecuación $6x^2 + xy = 15y^2$ con $x, y \neq 0$.

Ejercicio 1.3. Hallar $K \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = K^2(x-1)(x-2)$ tiene raíces reales.

Ejercicio 1.4. Encontrar todas las soluciones de la ecuación $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$, con $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejercicio 1.5. Sea el polinomio $P(x)$ tal que

$$P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2,$$

encontrar $P(x^2 - 1)$.

Ejercicio 1.6. Sea $S(x)$ un polinomio cúbico tal que $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, $S(3) = 3$ y $S(4) = 5$, encontrar $S(6)$.

Ejercicio 1.7. Para que la división de $6x^4 - 11x^2 + ax + b$ entre $3x^2 - 3x - 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Ejercicio 1.8. Calcular la suma de coeficientes del resto que deja $x^{333} - 9$ entre $x^2 - 729$.

Ejercicio 1.9. Probar que para todo n entero positivo se cumple que

$$1. \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$2. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Ejercicio 1.10. Con la ayuda del teorema de la raíz racional, encontrar todas las raíces de los siguientes polinomios

$$1. \quad 2x^3 - 21x^2 + 52x - 21$$

$$2. \quad x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 103x + 210$$

Ejercicio 1.11. Dado el polinomio

$c^2 = 2021$, hallar el valor de

$$P(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a$$

expresarlo en términos de los polinomios simétricos elementales y en función de sí mismo.

$$E = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}.$$

Problema 1.1. Sea r una raíz de $x^2 - x + 7$. Hallar el valor de $r^3 + 6r + \pi$.

Problema 1.3. El cociente de la división $\frac{x^{n+1} + 2x + 5}{x - 3}$ es $Q(x)$, la suma de coeficientes

Problema 1.2. Si $a + b + c = \sqrt{2023}$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 9^{10} + 3$ de Q es $\frac{9^{10} + 3}{2}$. Hallar el valor de n .

Problema 1.4. Sean a, b y c las raíces reales de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. Probar que

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0.$$

Problema 1.5. Si la división

$$\frac{x^{80} - 7x^{30} + 9x^5 - mx + 1}{x^3 + x - 2}$$

Deja como resto a $R(x) = x^2 + x - 1$, hallar el valor de m .

Problema 1.6. Sean r_1, r_2 y r_3 raíces distintas del polinomio $y^3 - 22y^2 + 80y - 67$. De tal manera que existen números reales α, β y θ tal que

$$\frac{1}{y^3 - 22y^2 + 80y - 67} = \frac{\alpha}{y - r_1} + \frac{\beta}{y - r_2} + \frac{\theta}{y - r_3}$$

para toda $y \notin \{r_1, r_2, r_3\}$. ¿Cuál es valor de $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta}$?

Problema 1.7. La ecuación

$$2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1$$

tiene tres raíces reales. Dado que su suma es $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $\text{mcd}(m, n) = 1$. Calcular $m + n$.

Problema 1.8. Si $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio tal que $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ y $P(3) = 30$, determine el valor de

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10}.$$

Problema 1.9. Sea $F(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a, b, c y d tal que $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$, entonces no existe un entero k tal que $F(k) = 8$.

Problema 1.10. Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$. ¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{20}(x)$?

Problema 1.11. Determine un polinomio cúbico $P(x)$ en los reales, con una raíz igual a cero y que satisface $P(x - 1) = P(x) + 25x^2$.

Problema 1.12. Suponga que x, y y z son números distintos de cero tal que $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = x^3 + y^3 + z^3$. Hallar el valor de

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Problema 1.13 (OMCC 2020, shortlist). Sean a , b y c números reales no nulos tales que $a + b + c = 0$. Determine el valor de la expresión

$$\frac{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)(c^2 + a^2) + (c^2 + a^2)(a^2 + b^2)}{a^4 + b^4 + c^4}.$$

Problema 1.14. Si a , b , c y d son las raíces de la ecuación $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$, calcular el valor de

$$\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^6} + \frac{1}{d^6}.$$

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, José Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[Rub19] Carlos Rubio. Un breve recorrido por los polinomios. *Tzaloa*, (2), 2019.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco

Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)

Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Cristian Castilblanco

Teléfono: +505 8581 1745 (*Tigo*)

Correo: cristian.castilblanco120@gmail.com