

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios Clase #13

Encuentro: 13

Curso: Polinomios

Fecha: 17 de junio de 2023

Nivel: 5

Semestre: I

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Clase práctica 5

En esta quinta clase práctica se verán una serie de problemas a manera de repaso, se pretende abordar todos los temas vistos en el curso y que los estudiantes despejen sus dudas.

1. Problemas propuestos

Problema 1.1. Dado el polinomio $P(x)$ para el cual se cumple que

$$x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9)P(x)$$

Calcular la suma de coeficientes de P .

Problema 1.2. Sea r_1 , r_2 y r_3 las tres raíces de polinomio cúbico P . También, que

$$\frac{P(2) + P(-2)}{P(0)} = 52$$

La expresión $\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}$ puede ser escrita como $\frac{m}{n}$ para m y n coprimos. Encontrar $m \times n$.

Problema 1.3. Dado que

$$\begin{cases} Q(x+1) &= \frac{3}{2}x + 3 \\ Q(F(x) + G(x)) &= 3x + \frac{3}{2} \\ Q(F(x) \times G(x)) &= \frac{15}{2} \end{cases}$$

Calcular $F(G(F(G(\dots F(G(-2)) \dots))))$.

Problema 1.4. Sea $Q(x) = 2x - 4096$ y $P(x) = Q^{12}(x)$, hallar la raíz de P .

Problema 1.5. Hallar el resto de la división de $[(x-1)(x)(x+2)(x+3)]^2 + (x^2+2x)^3x - 50$ entre $x^2 + 2x - 5$.

Problema 1.6. Si $P\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 227$, ¿cuál es el valor de $\sqrt{P(28)}$?

Problema 1.7. Si a y b son raíces distintas del polinomio $x^2 + 1012x + 1011$, entonces

$$\frac{1}{a^2 + 1011a + 1011} + \frac{1}{b^2 + 1011b + 1011} = \frac{m}{n},$$

donde m y n son primos relativos. Calcular $m + n$.

Problema 1.8. Encontrar el resto cuando $(5x + 16)^{2023} + (x + 6)^{98} + (7x + 30)^{49}$ es dividido por $x + 3$.

Problema 1.9. Si la división

$$\frac{x^{80} - 7x^{30} + 9x^5 - mx + 1}{x^3 + x - 2}$$

Deja como resto a $R(x) = x^2 + x - 1$, hallar el valor de m .

Problema 1.10. Demostrar por inducción matemática, que $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, se cumple

$$17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}.$$

Problema 1.11. Sea $R(c) = a^2 + b^2 + 65c^2 + 2ab - 18bc - 18ca$, factorize R y responda. ¿Cuáles son las raíces de R ?

Problema 1.12. Encontrar el resto cuando $x^{2022} + x^{2021} + \dots + x + 1$ es dividido por $x - 3$.

Problema 1.13. Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$. ¿Cuál es el coeficiente del término cuadrático en $P_{23}(x)$?

Problema 1.14. Indique el valor de la expresión

$$M(3) + M(5) + M(7) + \dots + M(2021) + M(2023)$$

Si $M(x) = \frac{2 \cdot 2023}{x(x-2)}.$

Problema 1.15. Dado el polinomio $S(x) = (11 - 15x^3)(17x^6 - 37) + 2^8 x^6 (16 - x + x^2)(16 + x)$, responda lo siguiente:

a. ¿ $S(x)$ es mónico?

R: _____

d. Escriba el coeficiente de x^6 .

R: _____

b. ¿ $S(x)$ es completo?

R: _____

e. Escriba el término independiente.

R: _____

c. ¿ $S(x)$ es simétrico?

R: _____

f. ¿Es $S(\sqrt[3]{x})$ un polinomio?

R: _____

Problema 1.16. Si $P(x - 2) = x^3 - 10x^2 + 28x - 24$, hallar el resto de dividir $P(x)$ por $x - 3$.

Problema 1.17. Encontrar todas las tripletas (x, y, z) de números reales, tal que cumplen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ xy + yz + zx = 94 \\ xyz = 168 \end{cases}$$

Problema 1.18. Sean a , b y c números reales distintos de cero, con $a + b + c \neq 0$. Probar que si

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c},$$

entonces para n impar se cumple

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

Problema 1.19. Hallar $Q(x)$, si $P(Q(x) - 3) = 6x + 2$ y $P(x + 3) = 2x + 10$.

Problema 1.20. Con la ayuda del teorema de la raíz racional, encontrar todas las raíces de los siguiente polinomio

$$2x^3 - 21x^2 + 52x - 21.$$

Problema 1.21. Dado que m y n son raíces del polinomio $6x^2 - 5x - 3$, encuentra un polinomio cuyas raíces sean $m - n^2$ y $n - m^2$, sin calcular los valores de m y n .

Problema 1.22. Si tenemos que

$$\begin{cases} P(x) = 3x^2 - 2x \\ Q(x) = \frac{x-1}{3} \\ R(x) = (P \circ Q)(x) - 673x \end{cases}$$

Calcular el valor de $R(2023)$.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco

Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)

Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte

Teléfono: +505 8420 4002 (*Claro*)

Correo: joseandanduarte@gmail.com