

Entrenamiento 2023

Lista de problemas

Kenny J. Tinoco

ASJT - Nicaragua

1. OMCC y PAGMO

Problema 1.1. El entero positivo n verifica

$$\frac{1}{1 \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{2}) + \sqrt{1}} + \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) + \sqrt{n+1}} = \frac{2022}{2023}$$

Hallar la suma de digitos de n .

Problema 1.2. Sean reales $a, b, c > 0$, tales que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Demostrar que se cumple

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3.$$

Problema 1.3. Si $x + y + z = 1$, con $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ Probar que

$$xy + yz + 2zx \leq \frac{1}{2}.$$

Problema 1.4. Si $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 16$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ Probar que

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \leq 32.$$

Problema 1.5. Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Probar que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 1.6. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, con $y \neq -z$, $z \neq -x$ y $x \neq -y$. Probar que

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq 0.$$

Problema 1.7. Sea $a_0 = 1$ y $a_n = \prod_{i=0}^{n-1} a_i + 1, n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1} - 1} = 1.$$

Problema 1.8. Definimos la secuencia $\{x_i\}_{i \geq 1}$ por $x_1 = \frac{1}{1012}$ y para $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n^2}{1 + x_n + x_n^2}$$

Hallar el valor de

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \cdots + \frac{1}{x_{1011} + 1} + \frac{1}{x_{1012}}.$$

Problema 1.9. Sean los reales positivos a_1, a_2, \dots, a_n tales que $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$. Probar que

$$\frac{a_1}{1 + a_1} + \frac{a_2}{(1 + a_1)(1 + a_2)} + \frac{a_3}{(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)} + \cdots + \frac{a_n}{(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)} \geq \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Problema 1.10. Sea $n \geq 2$ un entero positivo y a_1, a_2, \dots, a_n números reales positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Probar que la siguiente desigualdad se cumple

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n - 1}.$$

Problema 1.11. Definamos la siguiente secuencia como

$$B_1 = B_2 = 1$$

$$B_n = 2B_{n-2} + B_{n-1}, \quad n \geq 3.$$

Probar que para n impar

$$\sum_{i=1}^{n-1} B_i = B_n - 1.$$

Problema 1.12. Sea $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, tal que $xyz = 1$, probar que la siguiente desigualdad se cumple

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq 2.$$

Problema 1.13. Sea $a_0 = a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_1^2}{a_0} + \frac{a_2^2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Hallar a_n en función de n .

Problema 1.14. Sea $P(x)$ un polinomio no nulo tal que $(x - 1)P(x + 1) = (x + 2)P(x)$ para todo real x , y $P(2)^2 = P(3)$. Hallar $m + n$, si $P\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{m}{n}$ donde m y n son primos relativos.

Problema 1.15. En un tablero cuadrado $n \times n$ se escriben números dentro de cada casilla mediante el siguiente proceso:

- Se seleccionan números reales $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ todos distintos entre sí.
- En la casilla de la fila i columna j se escribe el número $a_i + b_j$.

Suponiendo que los n productos de los números en cada fila del tablero son iguales entre sí, demostrar que los n productos de los números en cada columna también son iguales entre sí.

2. IMO y OIM

Problema 2.1. Hallar todos los posibles números reales que satisfacen¹

$$x \cdot \lfloor x \rfloor + 2022 = \lfloor x^2 \rfloor$$

Problema 2.2. Demuestre que para todo $n \geq 4$ existen enteros positivos distintos a_1, a_2, \dots, a_n para los cuales se cumple que

$$\frac{20}{21} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Problema 2.3. Decimos que un conjunto S , posiblemente infinito, de enteros positivos distintos es bueno si para cualesquieras par de elementos $m, n \in S$, con $m \neq n$, se tiene que la diferencia $|m - n|$ divide a m y n , simultáneamente.

- Demuestra que un conjunto bueno no puede tener una cantidad infinita de elementos.
- Demuestra que para todo entero positivo $N \geq 2$, existe un conjunto bueno con N elementos.

Problema 2.4. En un tablero de $n \times n$, el conjunto de todas las casillas que están ubicadas en la diagonal principal del tablero o debajo de ella, es llamado n -escalera. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra una 3-escalera:



¿De cuántas formas se puede dividir una 99-escalera en algunos rectángulos, que tengan sus lados sobre líneas de la cuadrícula, de tal forma que todos los rectángulos tengan áreas distintas?

Problema 2.5. Encontrar todas las funciones inyectivas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tales que satisfacen $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ y

$$f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

Problema 2.6. Sea $n > 2$, un entero y $P(x)$ un polinomio de coeficientes reales tal que para un real k

$$\frac{P(2) - P(1)}{1} = \frac{P(4) - P(2)}{2} = \frac{P(8) - P(4)}{4} = \dots = \frac{P(2^n) - P(2^{n-1})}{2^{n-1}} = k$$

$$\frac{P(2^{n+1}) - P(2^n)}{2^n} \neq k$$

Hallar el valor mínimo del grado de P y todos los posibles polinomios P con grado mínimo.

¹ $\lfloor x \rfloor$ representa la parte entera de x .

Problema 2.7. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, tal que $a + b + c = 0$. Demostrar que

$$\sqrt[n]{ab + bc + ca} \geq a \sqrt[n]{\frac{b+c}{2}} + b \sqrt[n]{\frac{c+a}{2}} + c \sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}.$$

Problema 2.8. Sea

$$\frac{r}{s} = 0.k_1k_2k_3\cdots$$

la expansión decimal de un número racional. Probar que a lo más dos de los números

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 10 \left(\frac{r}{s} \right) - k_1, & \sigma_1 &= 10^2 \left(\frac{r}{s} \right) - (10k_1 + k_2), \\ \sigma_1 &= 10^3 \left(\frac{r}{s} \right) - (10^2k_1 + 10k_2 + k_3), & \cdots\end{aligned}$$

son iguales.

Referencias

- [Her20] Josué Hernández. Sumas telescópicas II. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Agosto 2020.
- [San22] Marcos Sanchez. Hoja de trabajo #1. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Enero 2022.