Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Corto #3

Nombre: ____________________________________. **Código ASJT:** __________.

Ejercicios

Estimado estudiante, resolver los siguientes ejercicios de manera clara y ordenada. Recordar justificar la respuesta.

Ejercicio 1. Para que la división de $x^5 + ax + b$ entre $x^2 + x + 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Ejercicio 2. Calcular el producto[1] de coeficientes del resto que deja $x^{2023} + 8$ entre $x^2 - 4$.

Ejercicio 3. Sean los polinomios $2023x^2 + ax + 3202$ y $3202x^2 + ax + 2023$ tal que tienen una raíz en común. Hallar el valor de a.

Ejercicio 4. Sean a, b y c las raíces de $x^3 + 3x^2 + 4x - 11$ y sean $a + b$, $b + c$ y $c + a$ las raíces de $x^3 + rx^2 + sx + t$. Hallar t.

Ejercicio 5. Sea el polinomo $f(x) = x^3 + 3x - 1$ con raíces a, b y c. Calcular[2]

$$\frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{b^3 + c^3} + \frac{1}{c^3 + a^3}.$$

[1] Dejar el resultado los más compacto posible.
[2] Dar la respuesta como una fracción.

Fecha: 13 de mayo de 2023

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Soluciones

Ejercicio 1.

Ejercicio 2. Podemos expresar el problema de la siguiente manera

$$x^{2023} + 2^3 = (x-2)(x+2)Q(x) + ax + b$$

Por el teorema del resto $P(2) = 2a + b$ y $P(-2) = -2a + b$, con lo cual podemos hacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2^{2023} + 2^3 & = & 2a + b \\ -2^{2023} + 2^3 & = & -2a + b \end{cases}$$

De donde obtenemos las soluciones $(a, b) = (2^{2022}, 2^3)$. Luego, el producto que nos piden es

$$a \cdot b = 2^{2022} \cdot 2^3 = \boxed{2^{2025}}$$

Ejercicio 3. Restando los dos polinomios tenemos que

$$(3202 - 2023)x^2 - (3202 - 2023) = 1179x^2 - 1179$$

De donde claramente, las soluciones para x son ± 1. Luego, sustituyendo $x = 1$ en cualquiera de las ecuaciones (ya que tienen una raíz en común) tenemos que

$$2023(1)^2 + a(1) + 3202 = 0 \longrightarrow \boxed{a = -5225}$$

Ejercicio 4. Al aplicar Vieta al primer polinomio

$$a + b + c = -3$$
$$ab + bc + ca = 4$$
$$abc = 11$$

Por Vieta aplicado al segundo polinomio sabemos que

$$(a+b)(b+c)(c+a) = -t$$

Al desarrollar este producto tenemos que

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = -t$$

De donde es claro que

$$t = abc - (a+b+c)(ab+bc+ca) = 11 - (-3)(4) = 11 + 12 = \boxed{23}$$

Fecha: 13 de mayo de 2023

Ejercicio 5. Sabemos que $a^3+3a-1=0 \to a^3 = 1-3a$. También, sabemos por Vieta que $a+b+c=0$, $ab+bc+ca=3$ y $abc=1$. Por lo tanto, la expresión es equivalente a

$$\frac{1}{1-3a+1-3b}+\frac{1}{1-3b+1-3c}+\frac{1}{1-3c+1-3a}$$
$$\hookrightarrow \frac{1}{2-3(a+b)}+\frac{1}{2-3(b+c)}+\frac{1}{2-3(c+a)}$$
$$\hookrightarrow \frac{1}{2+3a}+\frac{1}{2+3b}+\frac{1}{2+3c}$$

Luego, solo desarrollamos y evaluamos

$$\hookrightarrow \frac{(3a+2)(3b+2)+(3b+2)(3c+2)+(3c+2)(3a+2)}{(3a+2)(3b+2)(3c+2)}$$
$$\hookrightarrow \frac{(9ab+6a+6b+4)+(9bc+6b+6c+4)+(9ca+6c+6a+4)}{27abc+12(a+b+c)+18(ab+bc+ca)+8}$$
$$\hookrightarrow \frac{12(a+b+c)+9(ab+bc+ca)+12}{27abc+12(a+b+c)+18(ab+bc+ca)+8}$$
$$\hookrightarrow \frac{12(0)+9(3)+12}{27(1)+12(0)+18(3)+8}=\frac{27+12}{27+54+8}=\boxed{\frac{39}{89}}$$