Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Ecuaciones Diofánticas
Clase #11

Encuentro: 21
Curso: Ecuaciones Diofánticas
Fecha: 9 de noviembre de 2024

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Gema Tapia

Contenido: Fracciones continuas

En esta clase abordaremos el tema de fracciones continuas, una herramienta muy útil para la resolución de ecuaciones diofánticas. Trataremos de comprender el proceso de descomposición en fracciones continuas y su aplicación en el análisis de soluciones de ecuaciones de Pell, asi como en ecuaciones diofánticas lineales.

1. Desarrollo

Definición 1.1 (Fracción continua generalizada)**.** Definiremos a una fracción continua generalizada como una expresión de la forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}}$$

donde los a_i y b_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$, son números reales.

Donde los a_i, b_i se llamarán términos de la fracción continua. Por lo cual, es posible encontrar fracciones continuas con una cantidad finita e infinita de términos. Cuando todos los b_i son iguales a 1 se forman un tipo de fracciones continuas importantes.

Definición 1.2 (Fracción continua simple)**.** Si todo $b_i = 1$ y para $i \geq 2$ se tiene que a_i es positivo, entonces la expresión

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

se llamará fracción continua simple, y la denotaremos por $[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n]$

Es claro que para un número $[a_1] = a_1$ y para una fracción continua simple infinita se tiene $[a_1; a_2, a_3, \ldots]$. Esto toma relevancia a partir del siguiente teorema.

Teorema 1.1. Si x es número racional, entonces x se puede expresar como una fracción continua simple con una cantidad finita de términos.

Del teorema anterior podemos deducir el siguiente resultado.

Corolario 1.1. Toda fracción continua simple con cantidad infinita de términos representa un número irracional.

Definición 1.3 (Fracción continua periódica)**.** Definiremos como fracción continua periódica a una fracción continua simple de la forma

$$[a_1; a_2, a_3, \ldots, a_n, \overline{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}}],$$

donde $m \geq 1$, el periodo es la sucesión de términos $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}$ y la longitud del periodo es k.

Cuando se tiene que $n = 0$ diremos que la fracción continua $[\overline{a_1; a_2, \ldots, a_k}]$ es una fracción continua periódica pura.

Convergencia

1.1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

2. Problemas propuestos

Se asigna como **tarea** los problemas de esta sección, el estudiante debe entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase, dado el caso, también se pueden entregar avances de las soluciones. Recordar ser claro, ordenado y limpio en el trabajo a realizar.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso, estos se califican distinto a los problemas propuestos.

Referencias

[BDMS98] Hugo Barrantes, Pedro Díaz, Manuel Murillo, and Alberto Soto. *Introducción a la Teoría de Números*. Universidad Estatal a Distancia. Costa Rica, 1998.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Gema Tapia
Teléfono: +505 8825 1565 *(Claro)*
Correo: gematapia97@gmail.com

4. Plan de clase

4.1. ¿Qué?

4.2. ¿Cómo?

4.3. Comentarios

Preguntas claves: ¿me entendieron? ¿me salté algún tema? ¿di tiempo suficiente para pensar los problemas? ¿participaron? ¿problemas muy fáciles o muy difíciles, demasiados o muy pocos? ¿las explicaciones/ejemplos fueron suficientes y buenos?