117 Problemas de Polinomios del Programa de Verano AwesomeMath

Titu Adreescu, Navide Safei y Alessandro Ventullo

Traducido del inglés por Kenny J. Tinoco

Managua, 2023

Índice general

Abreviaciones y notaciones

Abreviaciones

APMO	Asian Pacific Mathematical Olympiad
JBMO	Junior Balkan Mathematical Olympiad
IMO	International Mathematical Olympiad
OIM	Olímpiada Iberoaméricana de Matemáticas
OMCC	Olímpada Matemática Centroamérica y Caribe
OMR	Olímpiada Matemática Rioplatense
MR	Mathematical Reflections

Notaciones matemáticas

$\Longrightarrow$	implica
$\therefore$	por lo tanto
$\Longleftrightarrow$	si y solo si

Índice general

Capítulo 1

Propiedades básicas - Parte I

Un *polinomio* es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Los números a_i diremos se dicen *coefientes* del polinomio $P(x)$. Usualmente, consideramos a_i, en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y decimos que el polinomio tiene coeficientes enteros, racionales, reales o complejos, respectivamente. Denotamos por $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes enteros, racionales reales o complejos, respectivamente.

El coeficiente a_0 se dice el *término constante*. Por la definición, se sigue que dos polinomios

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ y } Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

son iguales si y solo si $a_i = b_i$ para todo i (si $m > n$, entonces $b_{n+1} = \ldots = b_m = 0$).

Definimos el *grado* del polinomio $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ como el mayor entero i tal que $a_i \neq 0$ y denotamos el grado por $\deg P(x)$. Si i es el mayor entero i tal que $a_i \neq 0$, decimos que a_i es el *coeficiente principal* de $P(x)$. Si el coeficiente principal es igual a 1, decimos que el polinomio es *mónico*. Observe que el grado de un polinomio constante $P(x) = a_0 \neq 0$ es cero. No damos ningún grado al *polinomio cero* $P(x) \equiv 0$ (i.e. el polinomio cuyos coeficientes son todos ceros)[1]. Normalmente, omitimos los términos que tiene coeficiente cero. Por ejemplo, escribimos el polinomio $0x^3 + 1x^2 + 2x + 0$ como $x^2 + 2x$. Este es claramente un ejemplo de un polinomio mónico de grado 2.

Podemos realizar algunas operaciones sobre polinomios.

Por ejemplo, si $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ son dos polinomios y $n \leq m$, entonces la

[1] Por conveción, también podemos asignar al polinomio cero el grado $-\infty$.

suma y el producto de $P(x)$ y $Q(x)$ es definida por

$$P(x)+Q(x)=\sum_{h=0}^{m}(a_h+b_h)x^h \quad \text{y} \quad P(x)Q(x)=\sum_{h=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=h}a_ib_j\right)x^h,$$

respectivamente. Sabiendo lo anterior obtenemos lo siguiente.

Teorema 1.1.

Sea $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios y sea k un entero positivo. Entonces,

1. $\deg[P(x)Q(x)]=\deg P(x)+\deg Q(x)$
2. $\deg[P(x)+Q(x)]\leq \text{máx}(\deg P(x),\deg Q(x))$
3. $\deg[P(x)^k]=k\cdot\deg P(x)$.

1.1. Identidades

El término *identidad* designa una igualdad que se cumple para todo valor permitido de las incognitas que contenga (normalmente todo los números reales o todos los números complejos). Cuando está claro por el contexto a menudo se omite específicar explicidamente el rango permitido de las incognitas. Por ejemplo, las siguientes ecuaciones son identidades:

$$\begin{aligned}
a^2-b^2&=(a-b)(a+b),\\
a^3-b^3&=(a-b)(a^2+ab+b^2),\\
(a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+2(a+b+c),\\
\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}&=\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{a+c}.
\end{aligned}$$

Las primeras tres se cumplen para todos los valores reales (o complejos) a, b y c, mientras que el último solo se cumple si ninguno de los valores $a+b$, $b+c$ y $c+a$ es cero. Sin embargo, la ecuaciones a continuación no cumplen con este criterio ya que no se cumplen universalmente:

$$\begin{aligned}
2x+1&=5,\\
\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}&=3,\\
a^3+b^3+c^3&=3abc.
\end{aligned}$$

Las identidades son los pilares de los cálculos matemáticos. Se encuentran comunmente en las competiciones matemáticas, donde muchos problemas requieren de su conocimiento.

Aquí recopilamos algunas de las identidades más útiles. Es importante que, para mejorar tu fortaleza en el trabajo con expresiones algebraicas, te esforcés en aprender estas identidades.

Identidades Útiles

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	(Diferencia de cuadrados)
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	(Binomio al cuadrado)
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$	(Trinomio al cuadrado)
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$	(Diferencia de potencias)
$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ con n impar	(Suma de potencias)
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$	(Identidad de Gauss)
$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$	(Binomio de Newton)

Observación 1.

La *Identidad de Gauss* implica que si $a+b+c=0$, entonces $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Observación 2.

El *Binomio al cuadrado* tiene un caso general, esto es, sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n números, entonces

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j.$$

Por ejemplo, cuando $n = 4$ tenemos

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Observación 3.

El caso general del *Binomio de Newton* es de especial interés. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n números y sea m un entero positivo, entonces

$$(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{0 \le i_1, i_2, \ldots, i_n \le m}^{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m} \binom{m}{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}.$$

Esta identidad es llamada *Identidad Multinomial*.

Por ejemplo, cuando $n = m = 3$ tenemos

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c) + 6abc.$$

Muchos problemas elementales de álgebra se simplifican enormemente con las identidades. No obstante, veremos algunas de las aplicaciones creativas en soluciones más complejas.

1.2. El coeficiente de x^d

1.3. Factorización y sus implicaciones

1.4. Valores de polinomios

1.5. División, MCD de polinomios

1.6. La composición de polinomios

1.7. Polinomios pares e impares

Capítulo 2

Propiedades básicas - Parte II

2.1. Raíces

2.2. Raíces enteras y racionales

2.3. Teorema del valor intermedio, creciente y decreciente

Capítulo 3

Polinomios de segundo grado

3.1. De la forma $ax^2 + bx + c$

3.2. El discriminante

3.3. Raíces

3.4. Fórmulas de Vieta

3.5. Resolviendo desigualdades

3.6. Problemas variados

3.7. Problemas más avanzados

Capítulo 4

Problemas

4.1. Problemas introductorios

Problema 4.1.1.

4.2. Problemas avanzados

Problema 4.2.1.

4.3. Soluciones Problemas Introductorios