Entrenamiento 2023
Lista de problemas

Kenny J. Tinoco

ASJT - Nicaragua

1. OMCC y PAGMO

1.1. Encuentro 1

Problema 1.1. Sean reales $a, b, c > 0$, tales que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Demostrar que se cumple

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3.$$

Problema 1.2. Si $x + y + z = 1$, con $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Probar que

$$xy + yz + 2zx \leq \frac{1}{2}.$$

Problema 1.3. Si $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 16$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ Probar que

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \leq 32.$$

Problema 1.4. Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Probar que

$$\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ac} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 1.5. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, con $y \neq -z$, $z \neq -x$ y $x \neq -y$. Probar que

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq 0.$$

Problema 1.6. Definamos la secuencia $a_0 = 1$ y $a_n = \prod_{i=0}^{n-1} a_i + 1, n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1} - 1} = 1.$$

Problema 1.7. Definimos la secuencia $\{x_i\}_{i \geq 1}$ por $x_1 = \frac{1}{1012}$ y para $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n^2}{1 + x_n + x_n^2}$$

Hallar el valor de

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \cdots + \frac{1}{x_{1011} + 1} + \frac{1}{x_{1012}}.$$

Problema 1.8. Definamos la siguiente secuencia como

$$B_1 = B_2 = 1$$
$$B_n = 2B_{n-2} + B_{n-1}, \quad n \geq 3.$$

Probar que para n impar

$$\sum_{i=1}^{n-1} B_i = B_n - 1.$$

Problema 1.9. Sea x, y, $z \in \mathbb{R}^+$, tal que $xyz = 1$, probar que la siguiente desigualdad se cumple

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq 2.$$

Problema 1.10. Sea $a_0 = a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_1^2}{a_0} + \frac{a_2^2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}, n \geq 1.$$

Hallar a_n en función de n.

Problema 1.11. Sea $P(x)$ un polinomio no nulo tal que $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$ para todo real x, y $P(2)^2 = P(3)$. Hallar $m + n$, si $P\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{m}{n}$ donde m y n son primos relativos.

1.2. Encuentro 2

Problema 1.12. Dado $a-b=2$, $b-c=4$. Hallar el valor de $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$.

Problema 1.13. Dado que $\frac{x}{x^2+3x+1}=a$, $(a\neq 0)$. Encontrar el valor de

$$\frac{x^2}{x^4+3x^2+1}.$$

Problema 1.14. Resolver

$$\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}-x=\sqrt[3]{x^3-3x+2}-1.$$

Problema 1.15. Pruebe que si a, b, c son números reales positivos, entonces:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\geq\frac{2}{a}+\frac{2}{b}-\frac{2}{c}.$$

Problema 1.16. Sean a, b, c números reales positivos, muestre que

$$\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(a+c)}\leq\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Problema 1.17. Sean a, b, c números reales positivos, con $abc=8$, muestre que

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\leq 0$$

Problema 1.18. Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes reales no negativos. Sean x_1, x_2, $\cdots$, x_k reales positivos tales que $x_1x_2\cdots x_k=1$. Demostrar que

$$P(x_1)+P(x_2)+\cdots+P(x_k)\geq kP(1).$$

Problema 1.19. Consideremos la secuencia de números racionales definida por

$$x_1=\frac{4}{3}$$

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{x_n^2-x_n+1}, n\geq 1$$

Demostrar que el numerador de la sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n}x_i$$

reducida en su mínima expresión es un cuadrado perfecto.

1.3. Encuentro 3

Problema 1.20. Hallar el valor de

$$\frac{2^2}{2^2-1}\times\frac{3^2}{3^2-1}\times\frac{4^2}{4^2-1}\times\cdots\times\frac{2023^2}{2023^2-1}.$$

Problema 1.21. Determine el valor de la suma

$$\frac{3}{1^2\times 2^2}+\frac{5}{2^2\times 3^2}+\frac{7}{3^2\times 4^2}+\cdots+\frac{4045}{2022^2\times 2023^2}.$$

Problema 1.22. Dado que $a+b=c+d$ y $a^3+b^3=c^3+d^3$. Probar que

$$a^{2023}+b^{2023}=c^{2023}+d^{2023}.$$

Problema 1.23. Sean a,b y c números naturales tales que

$$ab(c+ab^2)+c^2(b^2c+a^3)=b^2c(a^2c+b)+a(a^2b+c^3)$$

Desmostrar que al menos uno de los números a, b o c es un cuadrado perfecto.

Problema 1.24. Sean $a_1,a_2,\cdots,a_{2023}$ números reales y para cada entero $1\leq n\leq 2023$ sea

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

Si $a_1=2023$ y se cumple que $S_n=n^2a_n$ para todo n, determina el valor de a_{2023}.

Problema 1.25. Existe un único polinomio con coeficiente reales de la forma

$$P(x)=7x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

tal que $P(1)=1$, $P(2)=2$, $\cdots$,$P(6)=6$. Hallar el valor de $P(0)$.

Problema 1.26. El entero positivo n verifica

$$\frac{1}{1\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}}+$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{n\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)+\sqrt{n+1}}=\frac{2022}{2023}$$

Hallar la suma de digitos de n.

Problema 1.27. Sean los reales positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tales que $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$. Probar que

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \vdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \geq \frac{2^n-1}{2^n}.$$

Problema 1.28. Sea $n \geq 2$ un entero positivo y $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reales positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Probar que la siguiente desigualdad se cumple

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n} + \vdots + \frac{a_n}{1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Problema 1.29. Definamos $a_k = (k^2+1)k!$ y $b_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Sea

$$\frac{a_{100}}{b_{100}} = \frac{m}{m}$$

donde m y n naturales primos relativos. Hallar $n - m$.

Problema 1.30. Determine $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ si

$$\frac{a^2}{2^2-1} + \frac{b^2}{2^2-3^2} + \frac{c^2}{2^2-5^2} + \frac{d^2}{2^2-7^2} = 1$$
$$\frac{a^2}{4^2-1} + \frac{b^2}{4^2-3^2} + \frac{c^2}{4^2-5^2} + \frac{d^2}{4^2-7^2} = 1$$
$$\frac{a^2}{6^2-1} + \frac{b^2}{6^2-3^2} + \frac{c^2}{6^2-5^2} + \frac{d^2}{6^2-7^2} = 1$$
$$\frac{a^2}{8^2-1} + \frac{b^2}{8^2-3^2} + \frac{c^2}{8^2-5^2} + \frac{d^2}{8^2-7^2} = 1$$

Problema 1.31. Probar que para todo entero positivo n, se puede encontrar una permutación del conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ de manera que el promedio de dos enteros no aparece en medio de ellos. Por ejemplo, si se tiene $n = 4$, la permutación $\{1, 3, 2, 4\}$ sirve, mientras que $\{1, 4, 2, 3\}$ no, ya que 2 está entre 1 y 3, y $2 = \dfrac{1+3}{2}$.

Problema 1.32. Sea a_{in} una sucesión de reales positivos que satisface

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

para todo entero positivo k. Muestra que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$, para todo $n \geq 2$.

Problema 1.33. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x^2 - y^2) = (x-y)\left(f(x) + f(y)\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 1.34. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x+y) + xy = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 1.35. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera x, y, u, v reales, se cumple

$$\left(f(x) + f(y)\right)\left(f(u) + f(v)\right) = f(xu - yv).$$

Problema 1.36. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que satisfacen que $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ y

$$f(n+2) + \frac{1}{f(n)} = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problema 1.37. Un *triminó* es una ficha rectangular de 1×3. ¿Es posible cubrir un tablero de ajedrez de 8×8 usando 21 *triminó*, de manera que hay exactamente una casilla 1×1 sin ser cubierta?. En caso de que la respuesta sea afirmativa, determine todas las posibles casillas que pueden quedar sin ser cubiertas.

Problema 1.38. En un tablero cuadriculado $n \times n$ se escriben números dentro de cada casilla mediante el siguiente proceso:

- Se seleccionan números reales $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ todos distintos entre sí.

- En la casilla de la fila i columna j se escribe el número $a_i + b_j$.

Suponiendo que los n productos de los números en cada fila del tablero son iguales entre sí, demostrar que los n productos de los números en cada columna también son iguales entre sí.

Referencias

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Desigualdades*. UNAM, 2014.

[Her20a] Josué Hernández. Guia Practica de Productos Notables. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, Agosto 2020.

[Her20b] Josué Hernández. Sumas telescópicas II. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, Agosto 2020.

[Ins20] Olimpiadas InsOMMnia. I Olimpiada de Álgebra. *InsOMMnia*, 2020.

[NN19] Peter Nizić-Nikolac. The alternative IMOs (2001 - 2017). *AoPs*, July 2019.

[San21] Marcos Sanchez. Clase de álgebra. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, Marzo 2021.

[San22] Marcos Sanchez. Hoja de trabajo #1. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, Enero 2022.