

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios Clase #8

Encuentro: 8

Curso: Polinomios

Fecha: 13 de mayo de 2023

Nivel: 5

Semestre: I

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Raíces de Polinomios II

Encontrar raíces enteras o racionales de polinomios en general es bastante complicado, pero resulta que para polinomios con coeficientes enteros esta búsqueda puede simplificarse al analizar los coeficientes del polinomio en cuestión. En esta octava sesión de clase nos centraremos en algunas propiedades y resultados interesantes de los polinomios con coeficientes enteros.

1. Desarrollo

Teorema 1.1. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, entonces $P(a) - P(b)$ es divisible entre $(a - b)$, para cualesquiera enteros distintos a y b .

$$(a - b) \mid P(a) - P(b)$$

En particular, todas las raíces enteras de $P(x)$ dividen a $P(0)$. Esto nos conduce a la siguiente propiedad aritmética.

Definición 1.1. Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ en los enteros y sea $z \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z \mid a_0.$$

En efecto, $a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -z(a_n z^{n-1} + \cdots + a_1)$. Además, si $a_n = 1$, entonces cada raíz racional de P es un entero. En efecto, sea $\frac{p}{q}$ una raíz con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 &= 0 \\ \hookrightarrow \frac{p^n}{q} &= -a_{n-1} p^{n-1} - a_{n-2} p^{n-2} q - \cdots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1} \end{aligned}$$

El lado derecho de la ecuación es entera, por lo tanto $q = 1$.

Teorema 1.2 (Teorema de la raíz racional). Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ en los enteros y sea $\frac{p}{q}$, con $\text{mcd}(p, q) = 1$, una raíz cualquiera de P . Entonces se cumple que $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$.

Demostración. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n &= 0 \end{aligned}$$

Todos los sumandos excepto, posiblemente, el primero, son múltiplos de q y todos los sumandos excepto, posiblemente, el último son múltiplos de p . Como p y q dividen a 0, se deberá tener que $q \mid a_n p^n$ y $p \mid a_0 q^n$, y de aquí se sigue la afirmación, ya que¹ $(p, q) = 1$.

Ejemplo 1. Encontrar todas la raíces de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Solución. Primero tratemos de ver las raíces racionales de la ecuación. Los divisores del término principal y los divisores del término independiente son

$$\begin{aligned} &\{-1, 1\} \\ &\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \end{aligned}$$

respectivamente. Por el Teorema de la raíz racional, las raíces de la ecuación tiene la forma $\frac{p}{q}$, es decir, el conjunto de valores candidatos a ser raíces es (ya simplificado)

$$\left\{ \frac{\pm 1}{\pm 1}, \frac{\pm 2}{\pm 1}, \frac{\pm 3}{\pm 1}, \frac{\pm 6}{\pm 1} \right\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

Pero, ¿cómo sabemos cuáles de estos valores es una raíz?. Por el Teorema del factor, sabemos que $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ es divisible por $x - r$, donde r es una raíz.

Entonces, por ejemplo si $x = -6$ la división $\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x + 6} = x^2 - 8x + 3 - \frac{12}{x + 6}$ no es exacta, por lo tanto -6 no es raíz². Este proceso lo aplicamos a todos los valores del conjunto.

En particular, si $x = 1$ la división $\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 1} = x^2 - x - 6$ en este caso es exacta, por lo tanto 1 es raíz. Para terminar solo falta encontrar las raíces de $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, las cuales son -2 y 3 . Luego, las raíces del polinomio son $\{-2, 1, 3\}$. \square

Ejemplo 2. Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ y $P(3) = 2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

Solución. Rápidamente, por el Teorema del resto

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x) + x + 1$$

Cuando hacemos $x = 3$, entonces obtenemos $2016 = 2Q(3) + 4$, lo cual es $Q(3) = 1006$. Ahora bien, cuando hacemos $x = 2016$, obtenemos $P(2016) = 2015 \cdot 2014Q(2016) + 2017$. Por el Teorema 1.1, sabemos que

$$\begin{aligned} 2016 - 3 &\mid Q(2016) - Q(3) \\ 2013 &\mid Q(2016) - Q(3) \end{aligned}$$

¹ $(p, q) = 1$ es una manera corta de escribir $\text{mcd}(p, q) = 1$.

²También, se puede ir evaluado los valores en el polinomio y ver si da cero. Como hacer este análisis es elección del estudiante.

El mínimo valor de $Q(2016)$ tal que $P(2016) \geq 0$ es $Q(2016) = Q(3) = 1006$, por lo tanto

$$P(2016) = 2015 \cdot 2014 \cdot 1006 + 2017 \equiv (-1)(-2)(1006) + 2017 \equiv \boxed{2013} \pmod{2016}$$

□

Otra solución al problema anterior sería por medio del Teorema Chino del Resto.

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 2.1. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

Problema 2.2. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $6x^4 + x^3 - 3x^2 - 9x - 4$.

Problema 2.3. Encontrar todas las raíces racionales del polinomio $30x^4 - 133x^3 - 121x^2 + 189x - 45$.

Problema 2.4. Encontrar todos los r tal que $12r^4 - 16r^3 > 41r^2 - 69r + 18$.

Problema 2.5. Si el polinomio $P(x) = x^{n+2} + Ax^{n+1} + ABx^n$ es divisible por $C(x) = x^2 - (A+B)x + AB$ con $AB \neq 0$. Hallar el valor de $E = \frac{A}{B}$.

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 3.1. Sea el polinomio $F(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4x - 3$. Notemos que $F(2) = 0$, así que 2 es raíz de F . Pero 2 no divide al término independiente de F , es decir que esta raíz viola el Teorema de la raíz racional. Argumente por qué pasa esto.

Problema 3.2. Encontrar las raíces del polinomio $R(x) = 6x^3 + x^2 - 19x + 6$.

Problema 3.3. Encontrar las raíces del polinomio $G(x) = 12x^3 - 107x^2 - 15x + 54$.

4. Extra

Problema 4.1. El polinomio $P(x)$ de coeficientes enteros es divisible por 3 al evaluarlo en k , $k+1$ y $k+2$. Probar que $P(m)$ es múltiplo de 3 para cualquier entero m .

Referencias

- [BGV14] Radmila Bulajich, José Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.
- [LN22] Ricardo Largaespada and William Nicoya. Clase 8 y 9. Raíces de Polinomios II. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Mayo 2022.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco

Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)

Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte

Teléfono: +505 8420 4002 (*Claro*)

Correo: joseandanduarte@gmail.com