# Academia Sabatina de Jóvenes Talento

## Ecuaciones Diofánticas
## Clase #11

**Encuentro:** 21
**Curso:** Ecuaciones Diofánticas
**Fecha:** 9 de noviembre de 2024

**Nivel:** 5
**Semestre:** II
**Instructor:** Kenny Jordan Tinoco
**Instructor Aux:** Gema Tapia

## **Contenido:** Fracciones continuas

En esta clase abordaremos el tema de fracciones continuas, una herramienta muy útil para la resolución de ecuaciones diofánticas. Trataremos de comprender el proceso de descomposición en fracciones continuas y su aplicación en el análisis de soluciones de ecuaciones de Pell, asi como en ecuaciones diofánticas lineales.

# 1. Desarrollo

## 1.1. Definiciones

**Definición 1.1** (Fracción continua generalizada)**.** Definiremos a una fracción continua generalizada como una expresión de la forma:

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{\ddots \atop a_{n-2} + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}}$$

donde los $a_i$ y $b_i$, con $i = 0, 1, \ldots, n$, son números reales.

Los $a_i$ y $b_i$ se llamarán términos de la fracción continua, es fácil concluir que, es posible encontrar fracciones continuas con una cantidad finita e infinita de términos. Cuando todos los $b_i$ son iguales a 1 se forman un tipo de fracciones continuas importantes.

**Definición 1.2** (Fracción continua simple)**.** Si todo $b_i = 1$ y para $i \geq 1$ se tiene que $a_i$ es positivo, entonces la expresión

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \atop a_{n-2} + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

se llamará fracción continua simple, y la denotaremos por $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$

Es claro que para un número $[a_0] = a_0$ y para una fracción continua simple infinita se tiene $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Esto toma relevancia a partir del siguiente teorema.

**Teorema 1.1.** Si $x$ es número racional, entonces $x$ se puede expresar como una fracción continua simple con una cantidad finita de términos.

Del teorema anterior podemos deducir el siguiente resultado.

**Corolario 1.1.** Toda fracción continua simple con cantidad infinita de términos representa un número irracional.

Cabe mencionar que el corolario anterior implica que no todo real puede expresarse como una fracción continua. Además, los números irracionales que sí pueden ser expresados presentan una característica, esto es que sus términos se repiten de manera cíclica.

**Definición 1.3** (Fracción continua periódica)**.** Definiremos como fracción continua periódica a una fracción continua simple infinita de la forma

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}}],$$

donde $k \geq 1$, el periodo es la sucesión de términos $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}$ y la longitud del periodo es $k$.

Cuando se tiene que $n = 0$ diremos que la fracción continua $[\overline{a_0; a_1, \ldots, a_k}]$ es una fracción continua periódica pura.

Resulta que todo número irracional cuadrático puede ser expresado como una fracción continua periódica. Donde un número irracional cuadrático es una raíz no racional de una ecuación cuadrática, es decir los números de la forma $\frac{a+b\sqrt{d}}{c}$.

**Definición 1.4** (Convergentes $c_k$)**.** Los convergentes de la fracción continua simple $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ son las fracciones continuas simples finitas

$$c_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k], \ \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

La definición de $c_k$ dice que son fracciones continuas finitas, entonces estos convergentes representan números racionales, por tanto, podemos decir que $c_k = \frac{p}{q}$, este echo nos permite encontrar resultados importantes, como por ejemplo los siguientes teoremas.

**Teorema 1.2.** Si $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ es el $n-$ésimo convergente de la fracción continua simple $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, entonces

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1, \\ p_1 &= a_1 p_0 + 1, & q_1 &= a_1, \\ p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \ \forall k \geq 2 & q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \ \forall k \geq 2 \end{aligned}$$

**Teorema 1.3.** Si $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ es el $n-$ésimo convergente de una fracción continua simple infinita, entonces

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}^{\geq 1}.$$

Del teorema anterior es posible determinar que todo convergente de una fracción continua representa una fracción irreducible, este echo será de útilidad al momento de resolver ecuaciones diofánticas.

**Corolario 1.2.** Si $c_k = \frac{p_k}{q_k}$ es un convergente de una fracción continua simple infinita, entonces $\operatorname{mcd}(p_k, q_k) = 1$.

## 1.2. Resolución de ecuación diofánticas

Si consideramos la ecuación diofántica lineal $ax + by = c$ y consideramos la fracción $\frac{a}{b}$ y de donde su fracción continua tiene una cantidad $n$ de términos, con lo cual $c_n = \frac{a}{b}$. Del teorema 1.3 obtenemos que

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

multiplicando esta expresión por $(-1)^{n-1}c$ obtenemos

$$a\left[(-1)^{n-1}q_{n-1}c\right] - b\left[(-1)^{n-1}p_{n-1}c\right] = c$$

con lo cual las soluciones de la ecuación estaría dada por

$$x = (-1)^{n-1}q_{n-1}c$$
$$y = (-1)^{n}p_{n-1}c.$$

Es decir, que al calcular $c_{n-1}$ podemos resolver la ecuación diofántica lineal.

Sabemos que la ecuación de Pell

$$x^2 - dy^2 = 1$$

siempre tiene una solución mínima $(x_0, y_0)$

## 1.3. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

**Ejercicio 1.** Encontrar las fracciones continuas de las siguientes fracciones.

1. $\dfrac{45}{37}$
2. $\dfrac{51}{25}$
3. $\dfrac{43}{38}$
4. $\dfrac{120}{84}$
5. $\dfrac{35}{14}$

**Problema 1.1.** Calcular el valor de

$$\sqrt[8]{2207 - \cfrac{1}{2207 - \cfrac{1}{2207 - \ddots}}}.$$

Expresar la respuesta con forma $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

## 2. Problemas propuestos

Se asigna como **tarea** los problemas de esta sección, el estudiante debe entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase, dado el caso, también se pueden entregar avances de las soluciones. Recordar ser claro, ordenado y limpio en el trabajo a realizar.

## 3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso, estos se califican distinto a los problemas propuestos.

## Referencias

[Ala04] Sonia Alanya. Fracciones continuas, ecuaciones de Pell y unidades en el anillo de enteros de los cuerpos cuadráticos. *Universidad Nacional Mayor de San Marcos*, 2004.

**En caso de consultas**

**Instructor:** Kenny J. Tinoco
**Teléfono:** +505 7836 3102 *(Tigo)*
**Correo:** kenny.tinoco10@gmail.com

**Instructor:** Gema Tapia
**Teléfono:** +505 8825 1565 *(Claro)*
**Correo:** gematapia97@gmail.com

# 4. Plan de clase

## 4.1. ¿Qué?

## 4.2. ¿Cómo?

## 4.3. Comentarios

Preguntas claves: ¿me entendieron? ¿me salté algún tema? ¿di tiempo suficiente para pensar los problemas? ¿participaron? ¿problemas muy fáciles o muy difíciles, demasiados o muy pocos? ¿las explicaciones/ejemplos fueron suficientes y buenos?