

## Folleto de Concurrencia y Colinealidad

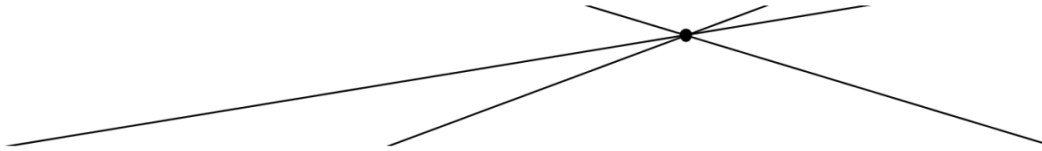
Kenny J. Tinoco  
kenny.tinoco10@gmail.com  
Agosto 2023

### Índice

<b>1. Concurrencia</b>	<b>2</b>
1.1. Concurrencia de Cevianas . . . . .	2
1.2. Simedianas . . . . .	5
1.3. Ejercicios y Problemas . . . . .	6
<b>2. Colinealidad</b>	<b>9</b>
2.1. Teorema de Menelao . . . . .	9
2.2. Teorema de Pappus . . . . .	11
2.3. Teorema de Desargues . . . . .	14
2.4. Teorema de Pascal . . . . .	16
2.5. Teorema de Brianchon . . . . .	19
2.6. Ejercicios y Problemas . . . . .	20
<b>3. Homotecia</b>	<b>22</b>
3.1. Homotecia en polígonos . . . . .	22
3.1.1. Propiedades . . . . .	23
3.1.2. Ejemplos . . . . .	23
3.2. Homotecia en circunferencias . . . . .	24
3.2.1. Estrategias . . . . .	27
3.2.2. Ejemplos . . . . .	27
3.3. Agregados culturales y preguntas . . . . .	28
3.4. Ejercicios y Problemas . . . . .	28
<b>4. Problemas</b>	<b>30</b>
<b>5. Conocimiento previo</b>	<b>31</b>

# 1. Concurrencia

## 1.1. Concurrencia de Cevianas



Tres rectas son concurrentes si pasan por un punto común. Sabiendo esto, veamos el primer hecho fundamental para abordar los problemas de concurrencia.

### Teorema 1.1 (Teorema de Ceva).

Dado un triángulo  $ABC$ , sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  puntos sobre los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  (o sus prolongaciones), respectivamente. Entonces las rectas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son concurrentes si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

A partir de este teorema se vuelve evidente la concurrencia de las principales rectas notables<sup>1</sup>. De igual forma muchos otros problemas pueden ser resueltos por el teorema de Ceva, la dificultad radica en transformar las proporciones evidentes en otras que sean más fáciles de manipular para que el producto de todas sea igual a 1.

Es importante resaltar que la manipulación de razones con áreas no funciona, pues a partir de la manipulación de áreas también puede ser demostrado este teorema, y lo único que se obtendría es un avance circular, por ello es mejor hacerlo con semejanza de triángulos, potencia de punto o trigonometría como se verá más adelante.

### Definición 1.1 (Ceviana).

A toda recta que parte del vértice hacia el lado opuesto se le denomina *ceviana*.

### Definición 1.2 (Triángulo ceviano).

Para todo punto  $P$ , las cevianas desde  $A$ ,  $B$  y  $C$  que pasan por  $P$  y cortan a los lados opuestos en  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ . El triángulo  $A'B'C'$  es el triángulo ceviano de  $P$  y sus vértices se llaman trazas cevianas de  $P$ .

<sup>1</sup>Ver los ejercicios del 2.1 al 2.4.

**Teorema 1.2 (Ceva trigonométrico).**

Las rectas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son cevianas concurrentes del triángulo  $ABC$  si y sólo si

$$\frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle DAC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBE)}{\sin(\angle EBA)} \cdot \frac{\sin(\angle ACF)}{\sin(\angle FCB)} = 1.$$

La manipulación trigonométrica del teorema de Ceva se vuelve muy importante a la hora de enfrentarse a problemas que pueden parecer prácticamente inaccesibles, pues es más general y más aplicable que la semejanza de triángulos.

**Definición 1.3 (El punto de Gergonne).**

Sea  $ABC$  un triángulo, y sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  los puntos de tangencia del incírculo con  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Entonces,  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son concurrentes.

**Definición 1.4 (El punto de Nagel).**

Sea  $ABC$  un triángulo, y sean  $D'$ ,  $E'$  y  $F'$  los puntos de tangencia de los excírculos respectivos a  $A$ ,  $B$  y  $C$  con  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Entonces,  $AD'$ ,  $BE'$  y  $CF'$  son concurrentes.

**Teorema 1.3 (Teorema de Ceva sobre la circunferencia).**

Sean  $ABC$  y  $DEF$  dos triángulos sobre la misma circunferencia. Entonces las rectas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son concurrentes si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

**Definición 1.5 (Triángulo circuncéviano).**

A todo punto que no esté sobre alguno de los lados de un triángulo dado es posible asignarle un nuevo triángulo, que surge a partir de la intersección de las cevianas con el circuncírculo del triángulo.

**Teorema 1.4 (Teorema de Steinbart).**

Sea  $ABC$  un triángulo,  $D$ ,  $E$  y  $F$  los puntos de tangencia del incírculo con los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  puntos sobre el incírculo de  $ABC$ . Llamemos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  las intersecciones de  $EF$  con  $PD$ ,  $DF$  con  $QE$  y  $DE$  con  $FR$ . Entonces  $AP$ ,  $BQ$  y  $CR$  son concurrentes si y sólo si  $DP$ ,  $EQ$  y  $FR$  son concurrentes.

**Teorema 1.5 (Teorema de Jacobi).**

Sea  $ABC$  un triángulo, y sean  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  tres puntos en el plano tales que  $\angle YAC = \angle BAZ$ ,  $\angle ZBA = \angle CBX$ ,  $\angle XCB = \angle ACY$ . Entonces las rectas  $AX$ ,  $BY$  y  $CZ$  son concurrentes.

**Definición 1.6 (Puntos isotómicos).**

Dos puntos son isotómicos si estos coinciden al ser reflejados por el punto medio del segmento al que pertenecen.

**Definición 1.7 (Conjugados isotómicos).**

Dado un triángulo  $ABC$  se tienen tres cevianas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  las cuales son concurrentes en un punto  $P$ . Sean  $D'$ ,  $E'$  y  $F'$  las reflexiones de  $D$ ,  $E$  y  $F$  sobre los puntos medios de  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  respectivamente. Entonces las rectas  $AD'$ ,  $BE'$  y  $CF'$  son concurrentes.

**Definición 1.8 (Cevianas isogonales).**

Dos cevianas son isogonales del  $\triangle ABC$  si ambas parte del mismo vértice del triángulo y una es la reflexión de la otra con respecto a la bisectriz interna de  $\triangle ABC$ .

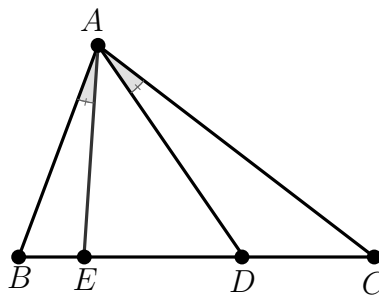
**Definición 1.9 (Conjugados isogonales).**

Dado un triángulo  $ABC$  se tienen tres cevianas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  las cuales son concurrentes en un punto  $P$ . Sean  $AD'$ ,  $BE'$  y  $CF'$  las reflexiones de  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  sobre las bisectrices de  $\angle A$ ,  $\angle B$  y  $\angle C$  respectivamente. Entonces las rectas  $AD'$ ,  $BE'$ ,  $CF'$  son concurrentes.

**Teorema 1.6 (Steiner).**

Sean  $D$  y  $E$  dos puntos sobre el segmento  $BC$  del triángulo  $ABC$  tal que  $\angle BAE = \angle DAC$ . Así

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{BE}{CE} = \left( \frac{AB}{AC} \right)^2.$$



**Demostración.** Aplicando el **Teorema 5.2** al  $\triangle ABC$  con los puntos  $D$  y  $E$ , respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{BD}{DC} &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle DAC)} \quad \wedge \quad \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\angle BAE)}{\sin(\angle EAC)} \\ \Rightarrow \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} &= \left( \frac{AB}{AC} \right)^2 \cdot \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle DAC)} \cdot \frac{\sin(\angle BAE)}{\sin(\angle EAC)} \end{aligned}$$

Pero como  $\angle BAE = \angle DAC$ , entonces  $\angle BAD = \angle EAC$ , de donde se sigue el resultado. ■

## 1.2. Simedianas

### Definición 1.10 (Simediana).

La simediana correspondiente al vértice  $A$  se define como la reflexión de  $A$ -mediana con respecto a la bisectriz interna del ángulo  $\angle BAC$ . En otras palabras, es la recta isogonal correspondiente a la mediana que parte del mismo vértice de referencia.

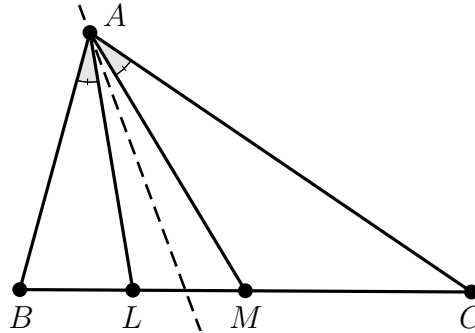


Figura 1: La recta  $AL$  es la  $A$ -simediana del triángulo  $ABC$ .

En el caso de la figura 1, la recta  $AL$  es la  $A$ -simediana del  $\triangle ABC$ . Es decir  $\angle BAL = \angle MAC$ . No hace falta decir que todo triángulo contiene tres simedianas. Por la **Definición 1.4** vista en la clase anterior, sabemos que, al concurrir las medianas en el baricentro, las simedianas comparten también un punto en común, llamado el **punto de Lemoine**.

### Lema 1.1.

Sea  $N$  un punto sobre el segmento  $BC$ ; entonces,  $N$  pertenece a la  $A$ -simediana si y solo si

$$\frac{BN}{NC} = \left( \frac{AB}{AC} \right)^2.$$

**Demostración.** Es una aplicación directa del **Teorema 1.6**. ■

### Lema 1.2.

Sea  $D$  el punto de intersección de las tangentes por  $B$  y  $C$  al circuncírculo del triángulo  $ABC$ . Luego,  $AD$  es una simediana de  $\triangle ABC$ .

**Demostración.** Supongamos que las prolongaciones de los lados  $AB$  y  $AC$  cortan a la paralela a  $BC$  por  $P$  en  $S$  y  $T$ , respectivamente. Es claro que  $\angle PSB = \angle CBA$  y  $\angle PTC = \angle BCA$ . Además,  $\angle PBS = \angle BCA$  y  $\angle PCT = \angle CBA$  por la condición de tangencia de  $PB$  y  $PC$ .

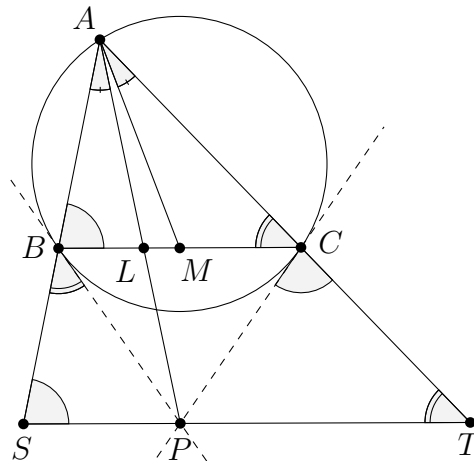


Figura 2: Una forma de construir e identificar la  $A$ -simediana.

De este modo,  $\triangle BPS \sim \triangle CAB \sim \triangle TPC$ , lo que a su vez implica que:

$$\begin{aligned} \frac{SP}{PB} = \frac{AB}{AC} \wedge \frac{PC}{PT} = \frac{AB}{AC} &\implies \frac{SP}{PB} \cdot \frac{PC}{PT} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \\ \frac{SP}{PB} \cdot \frac{PC}{PT} &= \left(\frac{AS}{AT}\right)^2 \quad (\text{Por } \triangle CAB \sim \triangle TAS) \\ \frac{SP}{PT} &= \left(\frac{AS}{AT}\right)^2 \quad (PB = PC \text{ por tangencia}) \end{aligned}$$

luego, por el lema 1.1,  $AP$  es simediana de  $\triangle SAT$  y, de paso, también de  $\triangle BAC$ . ■

### Definición 1.11 (Recta de Lemoine).

Sea el triángulo  $ABC$  y  $\Omega$  su circuncírculo, las tangentes a  $\Omega$  por  $A$ ,  $B$  y  $C$  se intersecan con los lados opuestos  $BC$ ,  $AC$  y  $BA$  en los puntos  $E$ ,  $F$  y  $D$ , respectivamente. Así, se cumple que  $E$ ,  $F$  y  $D$  están sobre una misma recta, llamada la **recta de Lemoine** del triángulo  $ABC$ .

## 1.3. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

**Ejercicio 1.1.** Demostrar que todas las medianas de un triángulo concurren en un punto (Baricentro).

**Ejercicio 1.2.** Demostrar que todas las alturas de un triángulo concurren en un punto (Ortocentro).

**Ejercicio 1.3.** Demostrar que todas las bisectrices interiores de un triángulo concurren en un punto (Incentro).

**Ejercicio 1.4.** Demostrar que dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior de un triángulo concurren en un punto (Excentro).

**Ejercicio 1.5.** Sean  $BE$ ,  $AD$  y  $CF$  líneas tales que dividen a un triángulo en  $AE = 12$ ,  $EC = 6$ ,  $CD = 7$ ,  $DB = 10$ ,  $BF = 5$ ,  $FA = 7$ . Demostrar que  $BE$ ,  $AD$  y  $CF$  son concurrentes.

**Ejercicio 1.6.** Sea  $ABC$  un triángulo con lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  que tienen longitudes 13, 15, 14, respectivamente. Si  $CF$ ,  $AD$  y  $BE$  concurren y  $\frac{AF}{FB} = \frac{2}{5}$  y  $\frac{CE}{EA} = \frac{5}{8}$ , encuentra el valor de  $BD$  y  $DC$ .

**Ejercicio 1.7.** En un triángulo  $ABC$  en el cual se traza la altura  $BH$ , la mediana  $AM$  y la ceviana  $CN$  las cuales concurren en el punto  $P$ . Si  $BP = 3PH$  y  $NB = 16$ . Hallar  $AN$ .

**Ejercicio 1.8.** Si  $P$  y  $Q$  son puntos en  $AB$  y  $AC$  del triángulo  $ABC$  de tal forma que  $PQ$  es paralelo a  $BC$ , y si  $BQ$  y  $CP$  se cortan en  $O$ , demuestra que  $AO$  es una mediana.

**Ejercicio 1.9.** Sean  $L$ ,  $M$  y  $N$  puntos en los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  de un triángulo, respectivamente. Si  $AL$ ,  $BM$  y  $CN$  concurren en  $O$ , demostrar que

$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1.$$

**Ejercicio 1.10.** Sean  $L$ ,  $M$  y  $N$  puntos en los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  de un triángulo, respectivamente. Si  $AL$ ,  $BM$  y  $CN$  concurren en  $O$ , demostrar que

$$\frac{AO}{OL} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}.$$

**Ejercicio 1.11.** Realizar la construcción de las tres simedianas de un triángulo  $ABC$  con la ayuda del Lemma 1.2 y ubicar el punto de **Lemoine**.

**Ejercicio 1.12.** Realizar la construcción de la recta de **Lemoine** para un triángulo  $ABC$ .

**Problema 1.1.** Sea  $ABC$  un triángulo. Se toman los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$  en las mediatrices de  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  respectivamente. Probar que las rectas que pasan por  $A$ ,  $B$  y  $C$  que son perpendiculares a  $EF$ ,  $FD$  y  $DE$ , respectivamente, son concurrentes.

**Problema 1.2.** Sea  $L$  el punto de **Lemoine** de un triángulo  $ABC$  y  $M$  el punto en  $BC$  tal que  $AM$  contiene a  $L$ . Demostrar que

$$\frac{AL}{LM} = \frac{BA^2 + AC^2}{BC^2}.$$

**Problema 1.3.** Las bisectrices interna y externa del ángulo  $\angle BAC$  de  $\triangle ABC$ , intersecan a la recta  $BC$  en  $E$  y  $D$ , respectivamente. El circuncírculo de  $\triangle DEA$  interseca al circuncírculo de  $\triangle ABC$  en  $X$ . Probar que  $AX$  es la  $A$ -simediana de  $\triangle ABC$ .

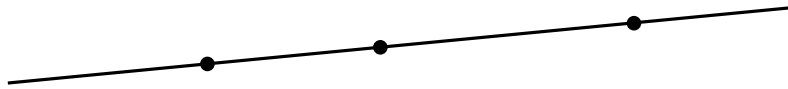
**Problema 1.4.** Sea  $AD$  una altura de  $\triangle ABC$ . Consideremos  $AD$  como diámetro de una circunferencia que corta los  $AB$  y  $AC$  en  $K$  y  $L$ , respectivamente. Las tangentes a la circunferencia en los puntos  $K$  y  $L$  se intersectan en un punto  $M$ . Demuestra que la recta  $AM$  divide  $BC$  por la mitad.

**Problema 1.5.** Un cuadrilátero convexo  $ABCD$  tiene  $AD = CD$  y  $\angle DAB = \angle ABC < 90^\circ$ . La recta por  $D$  y el punto medio de  $BC$  intersecta a la recta  $AB$  en un punto  $E$ . Demuestra que  $\angle BEC = \angle DAC$ .

**Problema 1.6.** Una recta paralela a  $BC$  corta a los lados  $AB$  y  $AC$  en  $M$  y  $N$  en el  $\triangle ABC$ , respectivamente. Sea  $P$  el punto de corte de  $BN$  y  $CM$ . Sea  $Q$  el segundo punto de corte de los circuncírculos de  $MPB$  y  $NCP$ . Demostrar que  $\angle BAQ = \angle PAC$ .



## 2. Colinealidad



Tres puntos son **colineales** si se encuentran sobre una misma recta. Dicho esto, presentaremos algunos enfoques que nos ayudarán a probar que tres puntos son colineales al resolver problemas de geometría.

Hay tres formas más comunes de angular que nos permiten probar que tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son colineales.

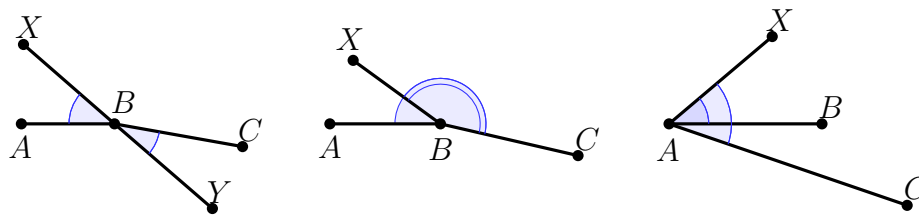


Figura 3: Tres configuraciones de colinealidad.

En la primera configuración, comenzando de izquierda a derecha, necesitaremos dos puntos adicionales que ya son colineales con nuestro punto “medio”  $B$ . Sean esos puntos  $X$  e  $Y$ . Si  $\angle XBA = \angle YBC$ , entonces los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son colineales.

En la segunda configuración, necesitaremos un punto extra  $X$  que no esté en la supuesta recta  $A - B - C$ . Si  $\angle ABX + \angle XBC = 180^\circ$ , entonces los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son colineales.

En la tercera configuración, también necesitaremos un punto extra  $X$  que no esté en la supuesta recta  $A - B - C$ . Si  $\angle XAB = \angle XAC$ , entonces los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son colineales.

### 2.1. Teorema de Menelao

#### Teorema 2.1 (Teorema de Menelao).

Dado un triángulo  $ABC$ , sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  puntos sobre los lados (posiblemente en sus prolongaciones)  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Entonces los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$  son colineales si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

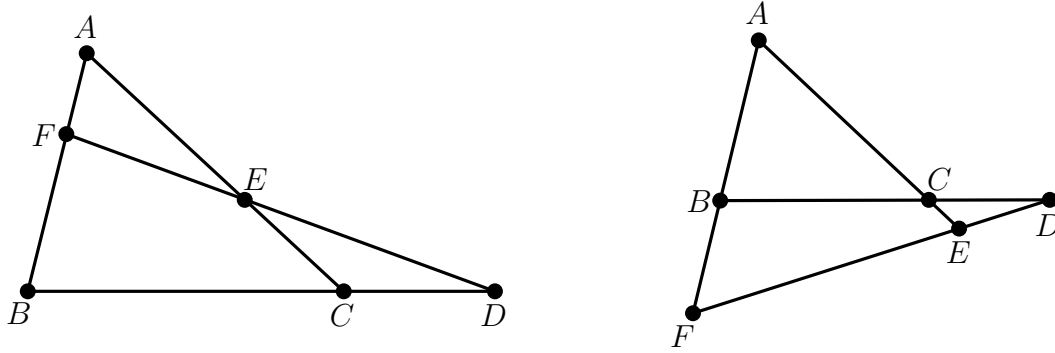


Figura 4: Configuraciones típicas del teorema de Menelao.

**Demostración.** La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

### Observación 1.

Una manera fácil de recordar cómo escribir esas proporciones<sup>a</sup> es la siguiente. Si tenemos el  $\triangle XYZ$  y los puntos  $M \in XY$ ,  $N \in YZ$  y  $P \in ZX$ , entonces primero, vamos a escribir los lados de manera cíclica, algo como

$$\frac{X}{Y} \cdot \frac{Y}{Z} \cdot \frac{Z}{X}$$

y después solo tendremos que agregar el punto en el numerador y denominador en la fracción del lado correspondientes, es decir

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YN}{NZ} \cdot \frac{ZP}{PX}.$$

<sup>a</sup>También funciona para el teorema de Ceva.

### Teorema 2.2 (Menelao trigonométrico).

Dado un triángulo  $ABC$ , sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  puntos sobre los lados (posiblemente en sus prolongaciones)  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Entonces los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$  son colineales si y sólo si

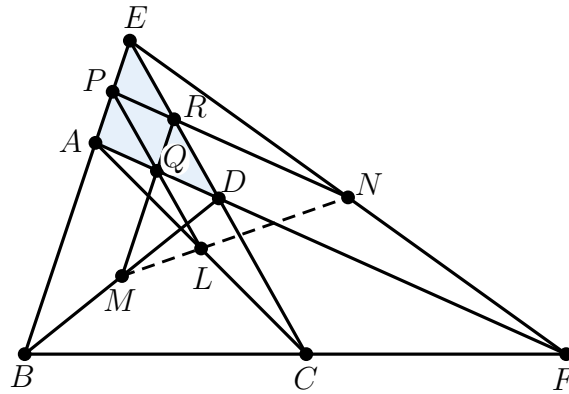
$$\frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle DAC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBE)}{\sin(\angle EBA)} \cdot \frac{\sin(\angle ACF)}{\sin(\angle FCB)} = 1.$$

**Demostración.** La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

### Teorema 2.3 (Recta de Gauss).

Sean  $L$  y  $M$  los puntos medios de las diagonales  $AC$  y  $BD$  del cuadrilátero  $ABCD$ . Las rectas  $AB$  y  $CD$  se cortan en  $E$ , y las rectas  $AD$  y  $BC$  se cortan en  $F$ . Sea  $N$  el punto medio de  $EF$ . Entonces los puntos  $L$ ,  $M$  y  $N$  colineales.

**Demostración.** Sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  los puntos medios de  $AE$ ,  $AD$  y  $DE$  respectivamente.



Las rectas  $PQ$ ,  $QR$  y  $PR$  son **bases medias** de  $\triangle ADE$ , por lo tanto son las respectivas bases medias de  $\triangle ACE$ ,  $\triangle BDE$  y  $\triangle AFE$ , así que estas pasan por  $L$ ,  $M$  y  $N$ .

Por semejanza, tenemos que

$$\frac{LQ}{LP} = \frac{CD}{CE}, \quad \frac{NP}{NR} = \frac{FA}{FD} \quad \text{y} \quad \frac{MR}{MQ} = \frac{BE}{BA}.$$

Al multiplicar y reordenar se obtiene:

$$\frac{QL}{LP} \cdot \frac{PN}{NR} \cdot \frac{RM}{MQ} = \frac{AF}{FD} \cdot \frac{DC}{CE} \cdot \frac{EB}{BA}$$

Pero este producto es igual a 1, ya que se cumple el **Teorema 2.1** para el triángulo  $\triangle ADE$  con respecto a la transversal  $B-C-F$ . Se concluye entonces que  $L$ ,  $M$  y  $N$  son colineales. ■

## 2.2. Teorema de Pappus

### Teorema 2.4 (Teorema de Pappus).

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres puntos colineales, no necesariamente en ese orden, y  $D$ ,  $E$  y  $F$  otros tres puntos colineales, no necesariamente en ese orden. Entonces, los puntos de intersección de las rectas  $AE$ ,  $BD$ ;  $AF$ ,  $CD$  y  $BF$ ,  $CE$  son colineales.

Naturalmente, existen muchas configuraciones aparte de las mostradas en la figura 5, pero estas son las más comunes.

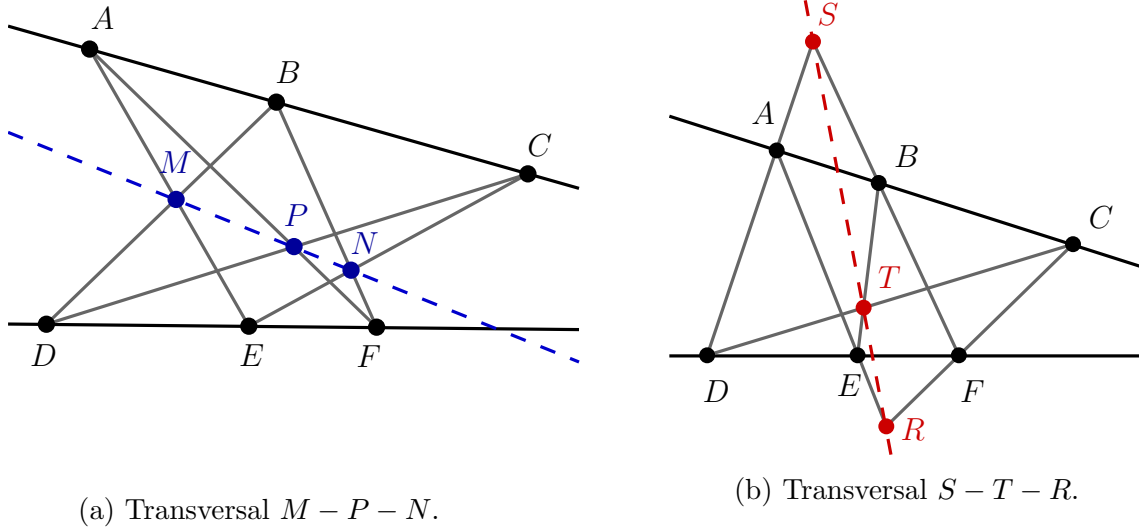
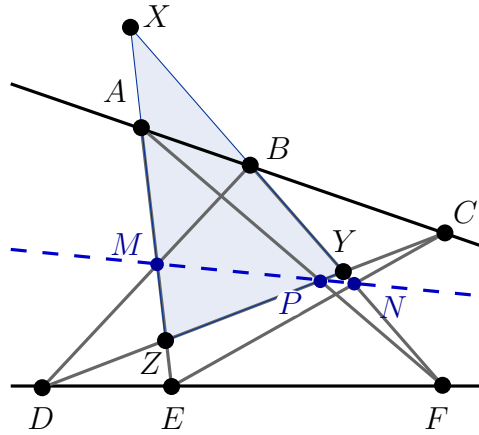


Figura 5: Teorema de Pappus.

**Demostración.** Sean  $M = AE \cap BD$ ,  $N = BF \cap CE$  y  $P = AF \cap CD$ . Dividiremos la demostración en dos casos, basado en si las rectas  $AE$  y  $BF$  se intersectan o son paralelas.

**Caso 1.** Si estas se intersectan, sea  $AE \cap BF = X$ . Sea  $Y = BF \cap CD$  y  $Z = AE \cap CD$ .



Dado que  $M$ ,  $N$  y  $P$  son laterales a  $\triangle XYZ$ , podemos usar el **Teorema 2.1** para tratar de probar que son colineales, es decir necesitamos probar que

$$\frac{XN}{NY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZM}{MX} = 1.$$

Ahora, trataremos de encontrar cada una de estas tres proporciones por medio de la aplicación del **Teorema 2.1** con otras rectas que se cruzan con  $\triangle XYZ$ .

Para lograr esto, usaremos el **Teorema 2.1** tres veces en el  $\triangle XYZ$  con las transversales  $C - N - E$ ,  $A - P - F$  y  $D - M - B$ , respectivamente, obtendremos

$$\frac{XN}{NY} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{ZE}{EX} = 1, \quad \frac{XF}{FY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZA}{AX} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{XB}{BY} \cdot \frac{YD}{DZ} \cdot \frac{ZM}{MX} = 1.$$

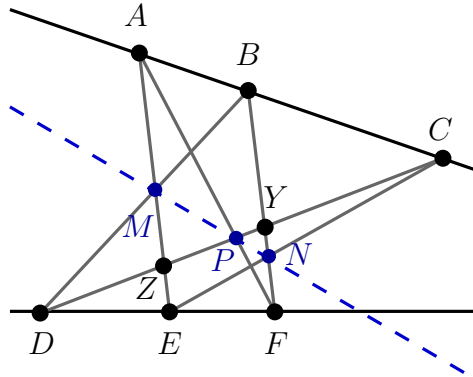
Sin embargo, vemos que al multiplicar estos resultados nada se cancela, así que necesitamos hallar otras igualdades tal que usen esos segmentos de recta.

Rápidamente, vemos que usando el **Teorema 2.1** dos veces más en  $\triangle XYZ$ , pero ahora con las transversales  $A - B - C$  y  $D - E - F$ , obtenemos

$$1 = \frac{XB}{BY} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{ZA}{AX} \quad \text{y} \quad 1 = \frac{XF}{FY} \cdot \frac{YD}{DZ} \cdot \frac{ZE}{EX}.$$

Multiplicando estas 5 igualdades lado a lado, y viendo que 6 de las proporciones del lado izquierdo de la ecuación se cancelan con cada una las proporciones del lado derecho. Quedándonos con lo que queríamos demostrar.

**Caso 2.** Ahora, veamos que pasa si el punto  $X$  no existe, es decir  $AE \parallel BF$ . Observemos que el punto  $X$  aparece exactamente dos veces en cada una de las 5 igualdades de arriba, una vez en el numerador y una vez en el denominador. Trataremos de encontrar igualdades análogas tal que no usen segmentos que contengan  $X$ . En realidad podemos lograr esto, usando rectas paralelas para encontrar triángulos semejantes.



Por el criterio (AA), obtenemos que  $\triangle CYN \sim \triangle CZE$ .

$$\therefore \frac{CY}{YN} = \frac{CZ}{ZE} \implies \frac{CY}{YN} \cdot \frac{ZE}{CZ} = 1.$$

Así mismo, obtenemos las siguientes semejanzas  $\triangle PYF \sim \triangle PZA$ ,  $\triangle DYB \sim \triangle DZM$ ,  $\triangle YCB \sim \triangle ZCA$  y  $\triangle YDF \sim \triangle ZDE$ . De donde, sacamos igualdades análogas.

Multiplicando estas igualdades, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{CY}{YN} \cdot \frac{ZE}{CZ} \cdot \frac{PY}{YF} \cdot \frac{ZA}{PZ} \cdot \frac{DY}{YB} \cdot \frac{ZM}{DZ} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} \cdot \frac{YF}{YD} \cdot \frac{ZD}{ZE} &= 1 \\ \therefore \frac{PY}{YN} \cdot \frac{ZM}{PZ} &= 1 \implies \frac{PY}{YN} = \frac{PZ}{ZM} \end{aligned}$$

Como  $\angle PYN = \angle PZM$ , por (LAL) obtenemos que  $\triangle PYN \sim \triangle PZM$  y por lo tanto  $\angle YPN = \angle ZPM$ . Ya que  $Y - P - Z$  son colineales, por consiguiente  $N - P - M$ . ■

**Observación 2.**

Una manera mnemotécnica de indentificar y no olvidar los puntos colineales es la mostrada en la figura 6.

Donde la primera y segunda fila contienen a los trios de puntos que sabemos son colineales y la tercera los nuevos puntos  $N$ ,  $P$  y  $M$ . Cada uno de estos es la intersección de las rectas formadas con los puntos en posición diagonal de las columnas en la que dicho punto no está.

A	B	C
D	E	F
N	P	M

Figura 6: Mnemotécnica de Pappus.

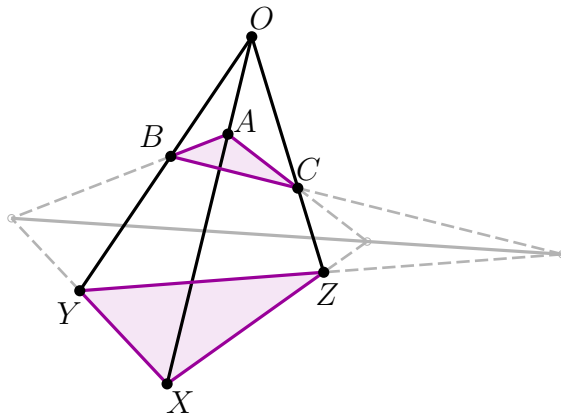
Es decir  $N = \overline{BF} \cap \overline{CE}$ ,  $P = \overline{AF} \cap \overline{CD}$  y  $M = \overline{AE} \cap \overline{BD}$ .

### 2.3. Teorema de Desargues

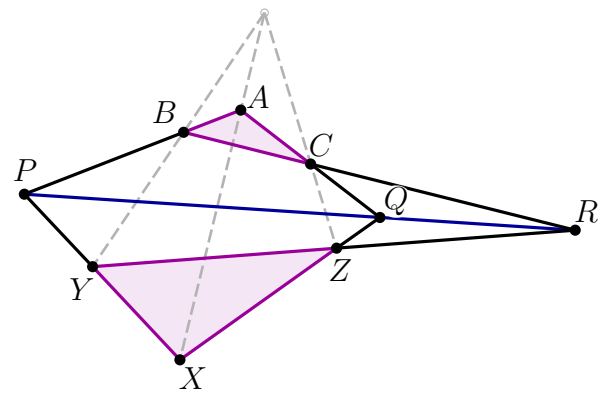
Consideremos dos triángulos arbitrarios  $\triangle ABC$  y  $\triangle XYZ$ . Antes de establecer el resultado principal, es necesario proporcionar dos definiciones fundamentales.

**Definición 2.1.**

- Dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle XYZ$  están en *perspectiva respecto a un punto* (digamos  $O$ ) si las rectas  $AX$ ,  $BY$  y  $CZ$  son concurrentes.
- Dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle XYZ$  están en *perspectiva respecto a una recta* si los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes de ambos triángulos (digamos  $P = AB \cap XY$ ,  $Q = CA \cap ZX$  y  $R = BC \cap YZ$ ) son colineales.



(a) Perspectiva con respecto a un punto.



(b) Perspectiva con respecto a una recta.

Figura 7: Perspectiva de dos triángulos.

**Teorema 2.5 (Teorema de Desargues).**

Dos triángulos están en perspectiva con respecto a una recta si y solo si están en perspectiva con respecto un punto.

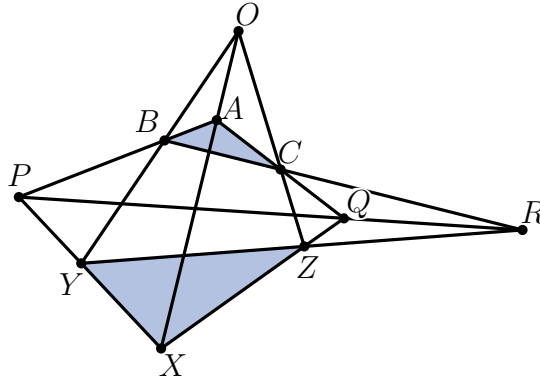
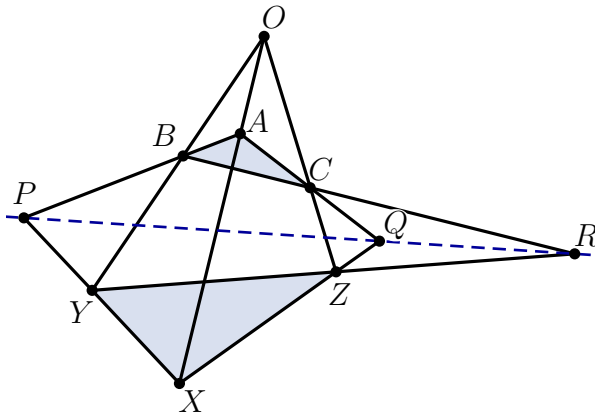


Figura 8: Los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle XYZ$  están en perspectiva con  $O$  y la recta  $PR$ .

Claramente, al igual que el **Teorema 2.4**, el teorema de Desargues tiene muchas más configuraciones.

**Demostración.** Sean  $\triangle ABC$  y  $\triangle XYZ$  dos triángulos en perspectiva a un punto, entonces  $AX$ ,  $BY$  y  $CZ$  son concurrentes con el punto  $O$ . Sea  $P = AB \cap XY$ ,  $R = BC \cap YZ$  y  $Q = CA \cap ZX$ .



Aplicando el **Teorema 2.1** a los triángulos  $\triangle OAB$  con la transversal  $P - Y - X$ ,  $\triangle OBC$  con la transversal  $R - Z - Y$  y  $\triangle OCA$  con la transversal  $Q - Z - X$ , obtenemos que;

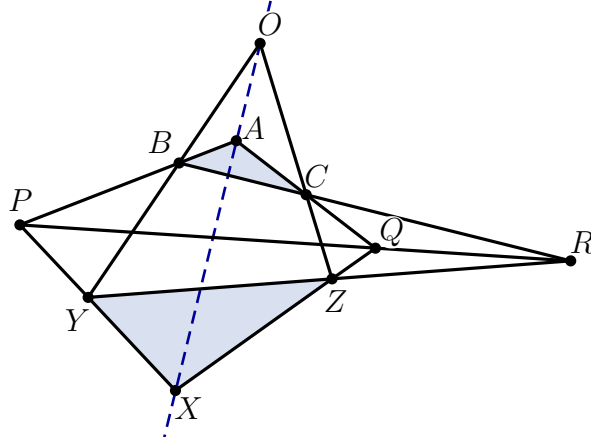
$$\frac{OX}{XA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BY}{YO} = 1, \quad \frac{OY}{YB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CZ}{ZO} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{OZ}{ZC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AX}{XO} = 1.$$

Multiplicando estas tres igualdades, llegamos al siguiente resultado

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1,$$

que por el **Teorema 2.1** aplicado al triángulo  $\triangle ABC$ , significa que los puntos  $P$ ,  $R$  y  $Q$  son colineales, es decir  $\triangle ABC$  y  $\triangle XYZ$  están en perspectiva con respecto a la recta  $PQ$ .

Ahora, probaremos la otra dirección. Sean  $\triangle ABC$  y  $\triangle XYZ$  dos triángulos en perspectiva a una recta, entonces los puntos  $P = AB \cap XY$ ,  $Q = CA \cap ZX$  y  $R = BC \cap YZ$  son colineales.



Sean  $O = BY \cap CZ$ . Debemos de probar que  $AX$  también pasa por  $O$ .

Observemos los triángulos  $\triangle Q CZ$  y  $\triangle P B Y$ . Las rectas  $QP$ ,  $CB$  y  $ZY$  son concurrentes en  $R$ , así que los triángulos están en perspectiva con respecto a ese punto.

Por la dirección del teorema de Desargues que acabamos de demostrar, se deduce que los triángulos deben de estar en perspectiva respecto a una recta.

Es decir, los puntos  $QC \cap PB = A$ ,  $CZ \cap BY = O$  y  $ZQ \cap YP = X$  son colineales. Con esto, probamos que  $AX$  pasa por  $O$ , luego  $\triangle ABC$  y  $\triangle XYZ$  están en perspectiva respecto al punto  $O$ . ■

## 2.4. Teorema de Pascal

### Teorema 2.6 (Teorema de Pascal).

Sea  $ABCDEF$  un hexágono inscrito, no necesariamente convexo, en una circunferencia  $\Omega$ . Entonces, los puntos  $M = AB \cap DE$ ,  $N = BC \cap EF$  y  $P = CD \cap FA$  son colineales.

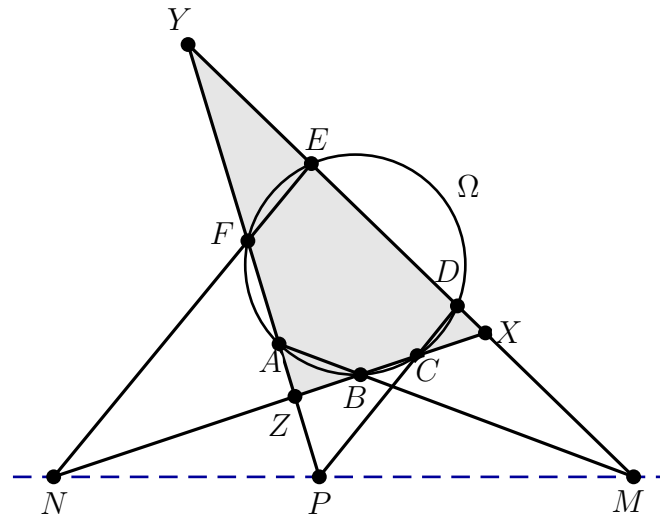
**Demostración.** Sean  $X = BC \cap DE$ ,  $Y = DE \cap FA$  y  $Z = FA \cap BC$ . Al usar el teorema de **Menelao** tres veces en  $\triangle XYZ$ , primero con la transversal  $A - B - M$ , después con la transversal  $P - C - D$  y finalmente con  $F - N - E$ , respectivamente, obtenemos que

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YA}{AZ} \cdot \frac{ZB}{BX} = 1, \quad \frac{XD}{DY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZC}{CX} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{XE}{EY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{ZN}{NX} = 1.$$

Multiplicando estas tres igualdades y reordenando los miembros, obtenemos que

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZN}{NX} \cdot \frac{(YA \cdot YF) \cdot (ZB \cdot ZC) \cdot (XD \cdot XE)}{(AZ \cdot FZ) \cdot (BX \cdot CX) \cdot (DY \cdot EF)} = 1. \quad (*)$$





Ahora por la **Propiedad 5.1** sabemos que para los puntos  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  se cumple que

$$XD \cdot XE = XC \cdot XB \quad \wedge \quad YF \cdot YA = YE \cdot YD \quad \wedge \quad ZB \cdot ZC = ZA \cdot ZE$$

Así (\*) se convierte en

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZN}{NX} = 1,$$

que por el teorema de **Menelao** significa que  $M$ ,  $N$  y  $P$  son colineales. ■

### Observación 3.

Una manera fácil de recordar las intersecciones es la siguiente: Tomamos dos letras consecutivas, dejamos una letra de espacio, y tomamos otras dos letras consecutivas. La intersección de las rectas formadas con esos pares de puntos es el primer punto de la colinealidad. Luego nos movemos a la derecha y repetimos el proceso dos veces más.<sup>a</sup>

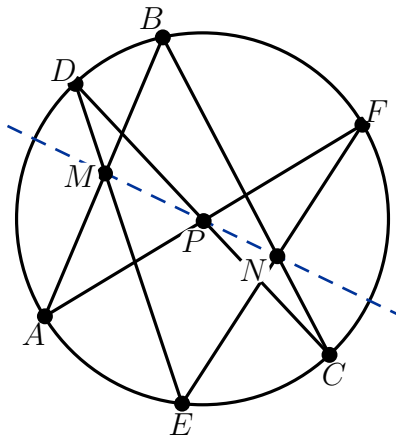


Figura 9: Teorema de Pascal.

A	E	C
D	B	F
N	P	M

Figura 10: Mnemotécnica de Pascal.

Donde  $N = \overline{EF} \cap \overline{CB}$ ,  $P = \overline{AF} \cap \overline{CD}$  y  $M = \overline{AB} \cap \overline{ED}$ .

<sup>a</sup>Otra manera de verlos es tomar vértices consecutivos módulo 3.

El **Teorema 2.6** es independiente de cómo haya sido tomado el hexágono. El mostrado en la demostración es el caso más sencillo en el cual el hexágono es convexo. Sin embargo, la colinealidad se sigue cumpliendo aunque el hexágono no sea convexo, como se puede ver en la figura 9. La demostración de este caso y de cualquier otro es análoga a la primera.

### Ejemplo 2.1.

Sean  $D$  y  $E$  los puntos medios de los arcos menores  $\widehat{AB}$  y  $\widehat{AC}$  del circuncírculo del  $\triangle ABC$ , respectivamente. Sea  $P$  un punto en el arco menor  $BC$ ,  $Q = PD \cap AB$  y  $R = PE \cap AC$ . Probar que la recta  $QR$  pasa a través de incentro  $I$  del  $\triangle ABC$ .

**Solución.** Dado que  $D$  es el punto medio del arco  $\widehat{AB}$ ,  $CD$  es bisectriz del ángulo  $\angle BCA$ . Análogamente,  $BE$  es bisectriz de  $\angle ABC$ . Por lo tanto,  $CD \cap BE = I$ .

Ahora, aplicando el **Teorema 2.6** al hexágono  $CDPEBA$  tenemos que los puntos  $CD \cap BE = I$ ,  $DP \cap BA = Q$  y  $PE \cap AC = R$  son colineales. ■

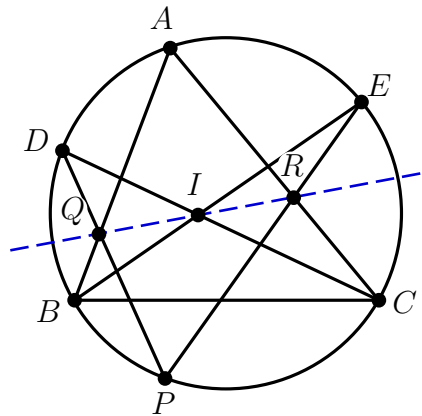


Figura 11: Ejemplo 2.1, aplicación del teorema de Pascal.

El **Teorema 2.6** puede presentar versiones degeneradas, aunque puede suceder, el caso más habitual ya no consiste en un paralelismo, sino en la transformación de un polígono de seis lados a un polígono de cinco, cuatro o tres lados.

### Ejemplo 2.2.

Sea  $\omega$  el circuncírculo del  $\triangle ABC$ . Las tangentes a  $\omega$  por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  intersecan a las rectas  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  en los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$ , respectivamente. Probar que los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$  están alineados.

**Solución.** Aplicando el **Teorema 2.6** al hexágono degenerado  $AABBCC$ . Tenemos que los puntos  $AA \cap BC = D$ ,  $AB \cap CC = F$  y  $BB \cap CA = E$  son colineales. ■

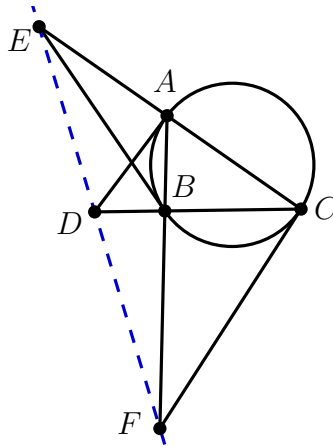


Figura 12: Ejemplo 2.2.

Existen  $\frac{5!}{2} = 60$  maneras de posibles de formar un hexágono con 6 puntos distribuidos en una circunferencia, y, por el **Teorema 2.6**, a cada hexágono le corresponde una recta de Pascal. Estas 60 rectas de Pascal pasan de tres en tres por 20 puntos llamados puntos de Steiner, que su vez están de cuatro en cuatro sobre 15 rectas, llamadas rectas de Plucker.

## 2.5. Teorema de Brianchon

### Teorema 2.7 (Teorema de Brianchon).

Sea  $ABCDEF$  un hexágono circunscrito, no necesariamente convexo, a un círculo  $\Omega$ . Entonces, las rectas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son concurrentes.

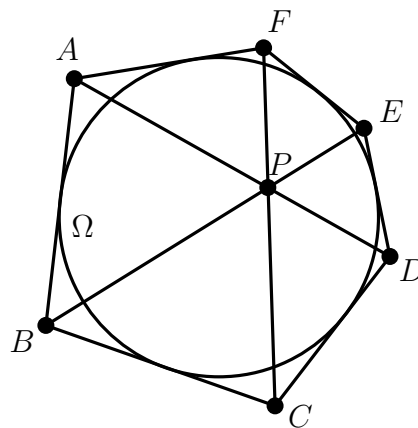


Figura 13: Teorema de Brianchon.

La demostración más sencilla del teorema de Brianchon implica utilizar polos y polares. Pues resulta que el **Teorema 2.6** y **Teorema 2.7** son *duals* bajo la *transformación polar*. Esto significa que, al tomar la colinealidad proporcionada por el **Teorema 2.6** y aplicarle la transformación polar con respecto al círculo de referencia, inmediatamente obtenemos la

concurrencia que el **Teorema 2.7** implica. Ya que el tema de polos y polares no lo veremos en el curso, se invita al estudiante indagar la demostración de este teorema por su cuenta.

De la misma manera que con el primer teorema, el **Teorema 2.7** está sujeto a versiones degeneradas. En este caso, los vértices degenerados coinciden con los puntos de tangencia entre el polígono y el círculo inscrito. En efecto, al aplicar el **Teorema 2.7** al hexágono  $ABCDEF$  con  $D, F$  y  $B$  puntos de tangencia, como se muestra en la figura 14, redescubrimos que los puntos de tangencia del incírculo de  $\triangle ACE$  concurren.

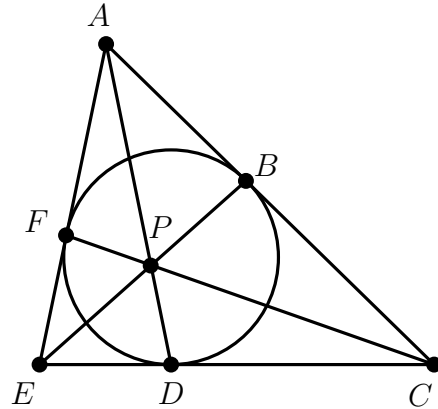


Figura 14: Un caso degenerado del teorema de Brianchon.

#### Observación 4.

Al igual que con el teorema anterior, existe una manera fácil de obtener el punto de concurrencia. Ordenamos los puntos en una tabla, luego tomamos los segmentos formados con los puntos consecutivos de arriba hacia abajo. La intersección de estos segmentos es el punto de concurrencia.

A	B	C
D	E	F
AD	BE	CF

Figura 15: Mnemotécnica de Brianchon.

Es decir  $P = \overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF}$ . Otra manera de ver esto, es tomar las rectas formadas por los puntos cuyas posiciones son las mismas en módulo 3.

## 2.6. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

**Problema 2.1.** Demuestre que las tangentes a la circunferencia circunscrita a un triángulo en los vértices de este, cortan a los lados opuestos de dicho triángulo en tres puntos colineales.

**Problema 2.2.** Si los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  de un cuadrilátero  $ABCD$  son cortados por una transversal en los puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  y  $D'$ , respectivamente. Probar que

$$\frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DD'}{D'A} = 1.$$

**Problema 2.3.** Sean  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  tres cevianas concurrentes en un triángulo  $\triangle ABC$ . Se toma un punto  $D'$  en  $BC$  tal que  $BD = CD'$ . Las paralelas a  $BC$  por  $E$  y  $F$  cortan  $AD$  y  $AD'$  en  $G$  y  $H$  respectivamente. Prueba que  $C$ ,  $G$  y  $H$  son colineales.

**Problema 2.4.** En un paralelogramo  $ABCD$  con  $\angle B < 90^\circ$ , el círculo de diámetro  $AC$  corta las rectas  $CB$  y  $CD$  en  $E$  y  $F$ , respectivamente, y la tangente al círculo por  $A$  corta  $BD$  en  $P$ . Demuestre que  $P$ ,  $F$  y  $E$  están alineados.

**Problema 2.5.** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero cíclico. Las diagonales  $AC$  y  $BD$  se cortan en  $E$ , y los lados  $AB$  y  $CD$  se cortan en  $F$ . Sean  $J$  y  $K$  los ortocentros de  $\triangle ADF$  y  $\triangle BCF$  respectivamente. Demuestre que  $J$ ,  $E$  y  $K$  están alineados.

**Problema 2.6.** Sea  $ABCD$  un trapecio con  $AB$  mayor y paralelo a  $CD$ . Sean  $E$  y  $F$  puntos en  $AB$  y  $CD$  respectivamente, tales que  $\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}$ . Sean  $K$  y  $L$  puntos en  $EF$  tales que  $\angle AKB = \angle DCB$  y  $\angle CLD = \angle CBA$ . Demuestre que  $KLCB$  es cíclico.

**Problema 2.7.** Sea  $P$  la intersección de las diagonales  $AC$  y  $BD$  en el cuadrilátero cíclico  $ABCD$ . Sean  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y  $H$  los pies de las perpendiculares desde  $P$  hacia  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ , respectivamente. Pruebe que las rectas  $EH$ ,  $BD$  y  $FG$  son concurrentes o son paralelas.

**Problema 2.8.** Dado el  $\triangle ABC$  con circuncentro  $O$ . Sea  $A_1$  y  $B_1$  los pies de las alturas trazadas desde  $A$  y  $B$ , respectivamente. Sea  $M$  y  $N$  los puntos medios de  $AC$  y  $BC$ , respectivamente. Sea el punto  $X \in BB_1$  tal que  $MX \perp AB$  y de manera análoga el punto  $Y \in AA_1$  tal que  $NY \perp AB$ . Se define  $P = A_1M \cap B_1N$  y  $Q = XN \cap YM$ . Demostrar que  $P$ ,  $Q$  y  $O$  son colineales.

**Problema 2.9.** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo acutángulo y  $\Gamma$  su circuncírculo. Sea  $D$  un punto en el segmento  $BC$ , diferente de  $B$  y  $C$ , y sea  $M$  el punto medio de  $AD$ . La perpendicular a  $AB$  que pasa por  $D$  interseca a  $AB$  en  $E$  y  $\Gamma$  en  $F$ , con el punto  $D$  entre  $E$  y  $F$ . Las rectas  $FC$  y  $EM$  se intersectan en el punto  $X$ . Si  $\angle DAE = \angle AFE$ , demostrar que la recta  $AX$  es tangente a  $\Gamma$ .

**Problema 2.10.** Sea  $\Gamma$  el circuncírculo del  $\triangle ABC$ . Un círculo que pasa por  $A$  y  $C$  corta a los lados  $BC$  y  $BA$  en  $D$  y  $E$ , respectivamente. Las rectas  $AD$  y  $CE$  intersecan a  $\Gamma$  por segunda vez en  $G$  y  $H$ , respectivamente. Las tangentes a  $\Gamma$  por  $A$  y  $C$  intersecan a la recta  $DE$  en  $L$  y  $M$ , respectivamente. Probar que las rectas  $LH$  y  $MG$  se cortan en  $\Gamma$ .

**Problema 2.11.** Sea el triángulo  $\triangle ABC$  y sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  los puntos de tangencia del excírculo en  $A$  con respecto a los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ . Sean  $H$  y  $G$  las intersecciones de excírculo con  $BE$  y  $CF$  respectivamente. Se toma un punto  $S$  en  $AD$ , sean  $U$  y  $V$  las intersecciones del excírculo con  $SH$  y  $SG$  respectivamente. Demuestre que  $BC$ ,  $UV$ ,  $GH$  y  $EF$  son concurrentes.

### 3. Homotecia

#### 3.1. Homotecia en polígonos

##### Definición 3.1 (Homotecia).

La homotecia es una transformación geométrica la que, dado un punto  $P$  en el plano y un número real  $k \neq 0$ , traslada cada punto  $Q$  del plano a un punto  $Q'$  de modo que

- Los punto  $P$ ,  $Q$  y  $Q'$  son colineaes, y
- $\frac{Q'P}{QP} = k$ .

El punto  $P$  se llama **centro de homotecia**,  $k$  es la **razón de homotecia** y los punto  $Q$  y  $Q'$  son nombrados **elementos homólogos**.

Si  $k$  es un número real positivo, diremos que la homotecia es **directa**; en este caso, los elementos homólogos yacen a un mismo lado del centro de homotecia  $P$ ; en contraste, la homotecia es **inversa** si  $k$  es negativo, en la que los elementos homólogos yacen en lados opuestos con respecto a  $P$ .

En caso de aplicar una homotecia con centro  $P$  y razón  $k$  a  $n$  puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  y obtener los puntos homólogos  $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ , se dice que los polígonos, no necesariamente convexos,  $P_1P_2 \dots P_n$  y  $P'_1P'_2 \dots P'_n$  son **homotéticos**. En esta situación todos los elementos correspondientes (tales como lados, diagonales, etc) también son elementos homólogos.

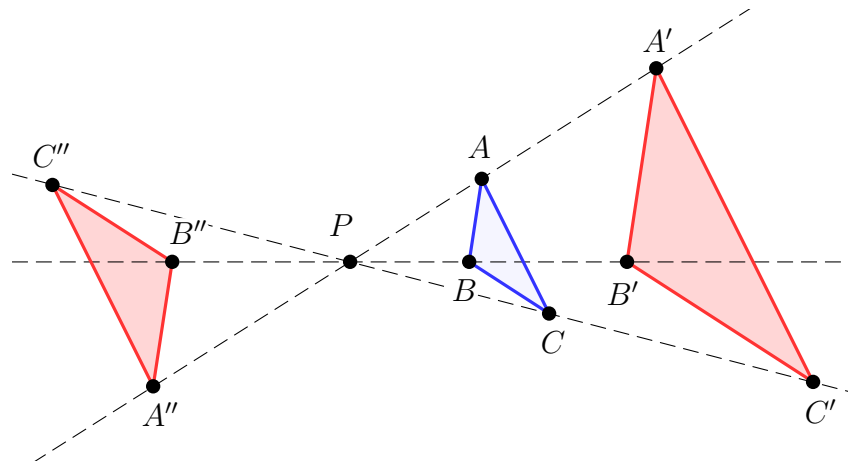


Figura 16: Una homotecia directa envía  $\triangle ABC$  a  $\triangle A'B'C'$  y una inversa manda  $\triangle ABC$  a  $\triangle A''B''C''$ .

##### Observación 5.

Para una mayor fomalidad, usaremos la siguiente notación;

$$H(O, \pm k) : P \rightarrow P'$$

La cual se lee “La homotecia directa/inversa con centro  $O$  y razón  $k$ , envía  $P$  a  $P'$ .”

Utilizando la notación, para describir la figura 16, quedaría como:

$$H(P, k_1) : \triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C' \quad \text{y} \quad H(P, -k_2) : \triangle ABC \rightarrow \triangle A''B''C''.$$

### 3.1.1. Propiedades

Entre las propiedades más importantes de la homotecia tenemos:

- Los lados correspondientes de dos figuras homotéticas son paralelos.
- La razón de las áreas de dos figuras homotéticas es igual al cuadrado de la razón de homotecia.
- Los puntos notables de figuras homotéticas son siempre colineales con el centro de homotecia.
- La homotecia perserva ángulo y por ende tangencias.

### 3.1.2. Ejemplos

#### Ejemplo 3.1 (La recta de Euler).

Dado un triángulo cualquiera el circuncentro, ortocentro y baricentro son colineales.

**Solución.** Sea  $\triangle ABC$  el triángulo,  $H$  y  $O$  su ortocentro y circuncentro;  $D$  y  $E$  pies de alturas desde  $A$  y  $B$ ;  $L$  y  $M$  puntos medios de  $BC$  y  $AC$ , respectivamente.

Claramente  $H(G, -2) : \triangle LMO \rightarrow \triangle ABH$ , es decir los triángulos  $\triangle ABH$  y  $\triangle LMO$  son homotéticos, pues sus lados son paralelos y

$$k = \frac{AB}{LM} = -2.$$

Luego,  $AL$ ,  $BM$  y  $HO$  son concurrentes en el baricentro  $G$ . ■

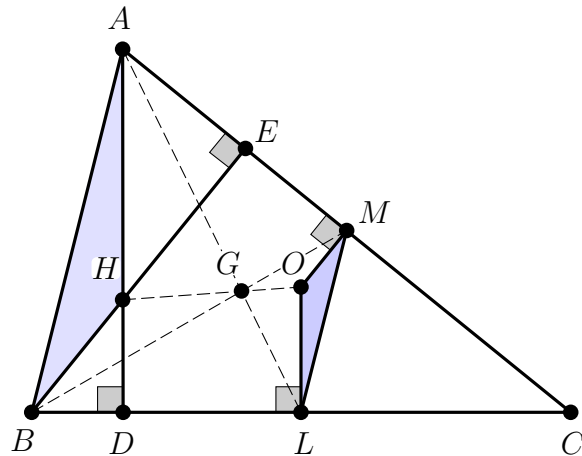


Figura 17: La Recta de Euler.

#### Ejemplo 3.2 (La circunferencia de los nueve puntos).

Dado un triángulo cualquiera, los pies de las alturas, los puntos medios de los lados, y los puntos medios de los segmentos que van del vértice al ortocentro están en una misma circunferencia.

**Solución.**

Sea  $\triangle ABC$  el triángulo,  $D$ ,  $E$  y  $F$  pies de alturas,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  intersecciones de las alturas con el circuncírculo,  $L$ ,  $M$  y  $N$  puntos medios,  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  puntos diametralmente opuestos, y  $P$ ,  $Q$  y  $R$  puntos medios de  $AH$ ,  $BH$  y  $CH$ , respectivamente. El centro de esta circunferencia se ubica sobre la recta que va del ortocentro al circuncentro.

Recordemos que  $D$ ,  $E$  y  $F$  son puntos medios de  $HX$ ,  $HY$  y  $HZ$ , respectivamente. Y también que  $L$ ,  $M$  y  $N$  son puntos medios de  $HA'$ ,  $HB'$  y  $HC'$ , respectivamente.

De este modo el eneágono  $AC'ZBXA'CB'Y$  es homotético a  $PNFQDLRME$  con razón  $1/2$  y centro  $H$ , y como el primero es cíclico, el segundo también debe serlo.

Pero como el centro de homotecia es  $H$  y la razón  $\frac{1}{2}$ , el centro del círculo de los nueve puntos debe ser el punto medio de  $OH$ . ■

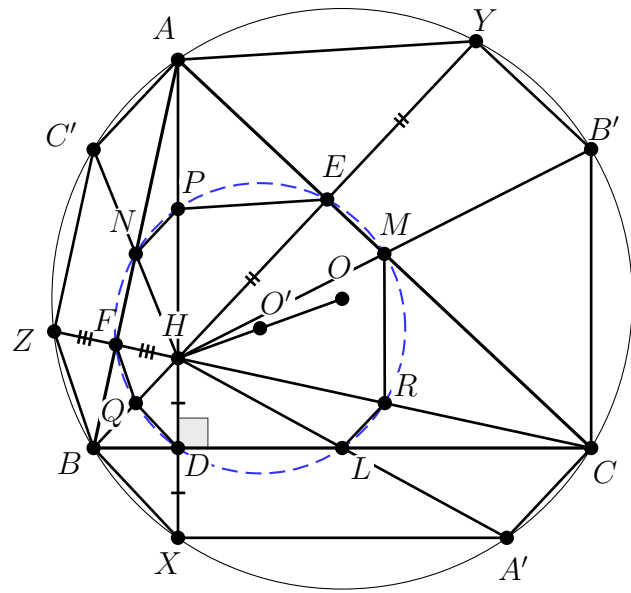


Figura 18: Circunferencia de los nueve puntos.

### 3.2. Homotecia en circunferencias

Dadas dos circunferencias de radios finitos y no concéntricas, siempre existen dos homotecias que transforman una circunferencia en la otra.

#### Definición 3.2 (Exsimilicentro e insimilicentro).

Sean dos circunferencias  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  con centros  $O_1$  y  $O_2$  y radios  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente. Consideremos los puntos  $P$  y  $Q$  tales que

$$H\left(P, \frac{r_1}{r_2}\right) : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \quad \text{y} \quad H\left(Q, -\frac{r_1}{r_2}\right) : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2.$$

Entonces  $P$  y  $Q$  son el **exsimilicentro** e **insimilicentro** de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , respectivamente. Además, son puntos únicos.

¿Cómo construir el exsimilicentro y el insimilicentro? Un método general es el siguiente: Trazamos dos diámetros  $AB$  y  $CD$  en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , respectivamente, tales que  $AB \parallel CD$ . Luego,  $P = AD \cap BC$  y  $Q = AC \cap BD$ .



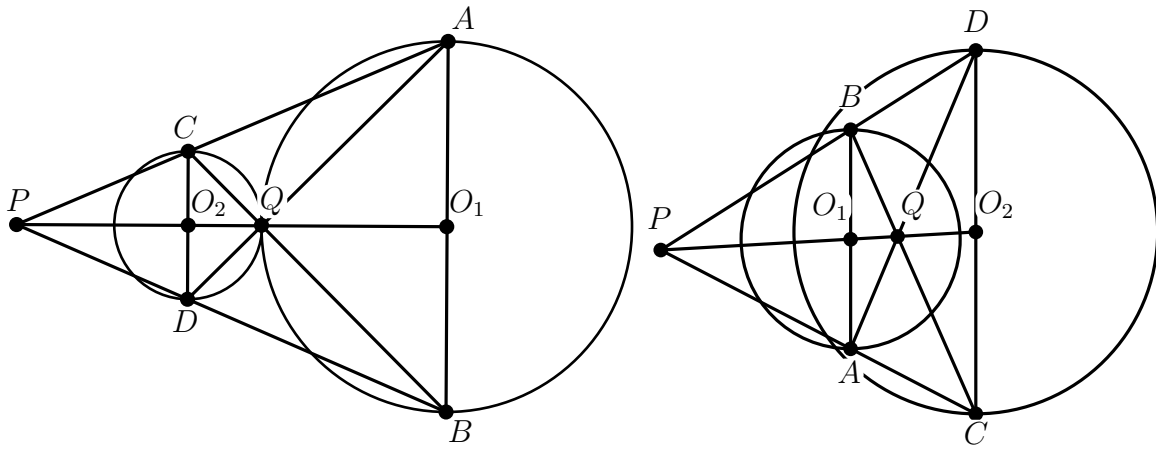


Figura 19: Trazado general del exsimilicentro e insimilicentro de dos circunferencias.

Una situación particular y muy frecuente en competencias matemáticas sucede cuando  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  están en “posición general”, es decir, no son concéntricas, sus radios poseen distinta longitud positiva y no poseen puntos comunes. En este contexto, podemos obtener el exsimilicentro  $P$  como el punto común de las tangentes externas de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , mientras tanto,  $Q$  sería el punto de intersección de las tangentes internas de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , de aquí los prefijos ex- e in-, como se muestra en la figura 20.

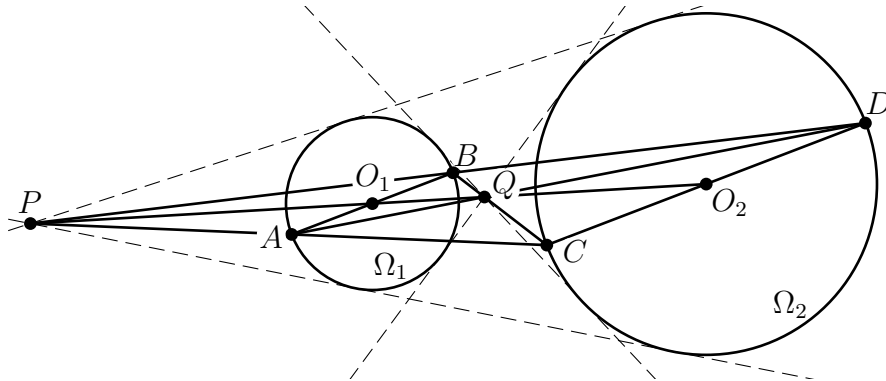


Figura 20: El exsimilicentro  $P$  e insimilicentro  $Q$  de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

### Teorema 3.1 (Monge).

Sean  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  tres circunferencias. Los exsimilicentros  $P_1$  de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ ;  $P_2$  de  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ , y  $P_3$  de  $\Omega_3$  y  $\Omega_1$  son colineales.

**Demostración.** Sea  $O_1$  el circuncentro de  $\Omega_1$  y  $r_1$  el radio. Se definen de manera análoga  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $r_2$  y  $r_3$ .

Por el teorema de Menelao aplicado al  $\triangle O_1 O_2 O_3$ , es suficiente probar que

$$\frac{O_3 P_3}{P_3 O_1} \cdot \frac{O_1 P_1}{P_1 O_2} \cdot \frac{O_2 P_2}{P_2 O_3} = 1,$$

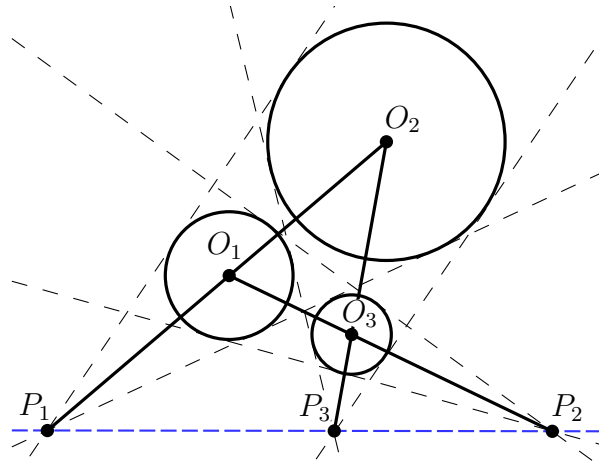


Figura 21: Teorema de Monge.

pero por definción, tenemos que

$$\frac{O_3P_3}{P_3O_1} \cdot \frac{O_1P_1}{P_1O_2} \cdot \frac{O_2P_2}{P_2O_3} = \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} = 1$$

la conclusión es inmediaanta. ■

**Teorema 3.2 (Monge D'Alembert).**

Sean  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  tres circunferencias. El exsimilicentro de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , el insimilicentro de  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ , y el insimilicentro de  $\Omega_3$  y  $\Omega_1$  son colineales.

**Demostración.** Similar a la prueba del **Teorema 3.1**. Esta demostración se deja como ejercicio al lector. ■

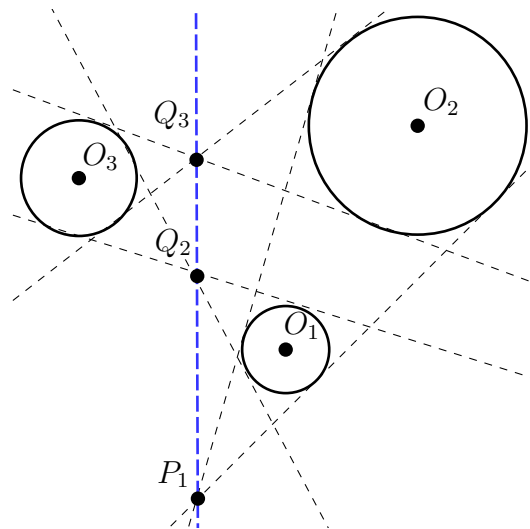


Figura 22: Teorema de Monge D'Alembert.

### 3.2.1. Estrategias

La homotecia en circunferencias resulta útil cuando:

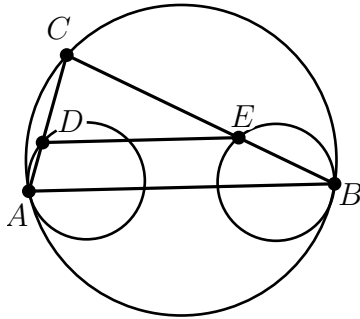
- Hay tangentes comunes.
- Hay circunferencias tangentes, interna o externamente.
- Hay cuerdas paralelas.

### 3.2.2. Ejemplos

#### Ejemplo 3.3.

Dos circunferencias iguales  $C_1$  y  $C_2$  son tangentes internamente a un circunferencia  $C_3$  en dos puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Sea  $C$  un punto en  $C_3$ . Si  $D$  y  $E$  son las intersecciones de  $AC$  y  $BC$  con  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente, pruebe que  $AB \parallel DE$ .

**Solución.** Rápidamente nos damos cuenta de  $H(A, k) : C_1 \rightarrow C_3$  y  $H(B, k) : C_2 \rightarrow C_3$ .



En la homotecia se tiene que  $D \rightarrow C$  y  $E \rightarrow C$ , y cómo los radios son iguales la razón de homotecia es la misma, en este caso  $k$ , entonces

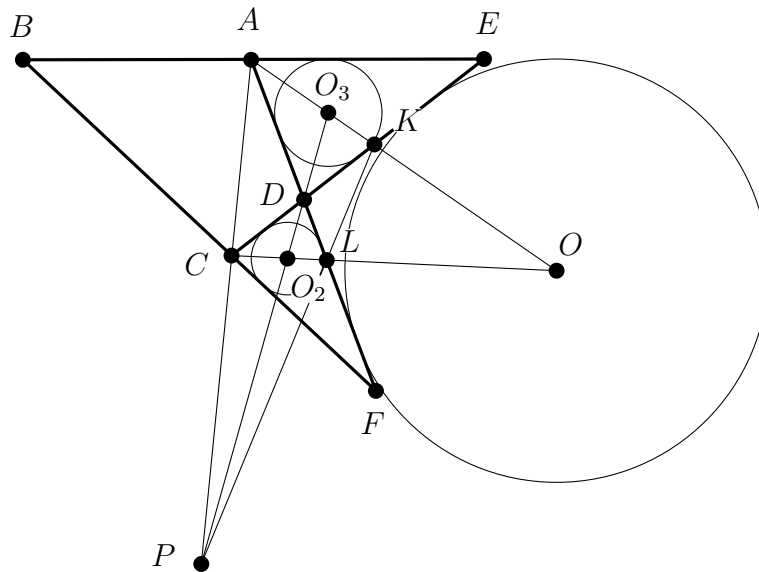
$$\frac{AD}{AC} = \frac{BE}{BC} = k \implies AB \parallel DE. \quad \blacksquare$$

#### Ejemplo 3.4.

Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo ex-inscribible<sup>a</sup> tal que  $D$  es el más cercano a la circunferencia exinscrita. Sean  $E$  y  $F$  las intersecciones de  $AB$  con  $CD$  y  $BC$  con  $AD$ , respectivamente, y sean  $K$  y  $L$  las intersecciones de las bisectrices de  $\angle DAE$  con  $DE$  y de  $\angle DCF$  con  $DF$ , respectivamente. Demostrar que  $AC$ ,  $KL$  y la bisectriz del ángulo  $\angle ADE$  concurren.

<sup>a</sup>Existe una circunferencia tangente externamente a  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ .

**Solución.** Sea  $\Gamma$  la circunferencia ex-inscrita a  $ABCD$ , y sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  los incírculos de  $ADE$  y  $CDF$ , respectivamente. Llamemos  $O$ ,  $O_1$  y  $O_2$  a los centros de  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  respectivamente.



Como  $DE$  es la tangente común interna a  $\Gamma$  y  $\Gamma_1$ , y además  $AO$  es bisectriz, entonces  $K$  es el centro de homotecia interno de  $\Gamma$  y  $\Gamma_1$ . De manera análoga  $L$  es el centro de similitud interno entre  $\Gamma$  y  $\Gamma_2$ . Pero  $A$  y  $C$  son los centro de homotecia externa de  $\Gamma$  con  $\Gamma_1$  y  $\Gamma$  con  $\Gamma_2$ , respectivamente, entonces por el **Teorema 3.2**  $AC$  y  $KL$  deben cortarse en el centro de homotecia externo de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , y así la recta  $O_1O_2$ , que es la bisectriz de  $\angle ADE$ , debe pasar por dicho punto. ■

### 3.3. Agregados culturales y preguntas

- La palabra **homotecia** deriva del griego *homo* = semejante, y del *tithénai* = colocar, disponer.
- El triángulo medial es el que se forma con los puntos medios de los lados de un triángulo dado.
- La composición de dos homotecias se logra aplicando una homotecia con un centro dado, y a esa transformación se le aplica otra homotecia con otro centro dado. El resultado vendría siendo algo como una homotecia de la homotecia inicial.
- Existe una transformación llamada **semejanza espiral** o **rotohomotecia**. La cual es una composición de una homotecia y una rotación respecto a un centro dado. Esta transformación es muy útil en la resolución de problemas de mayor dificultad.

### 3.4. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

**Ejercicio 3.1.** Da un triángulo  $\triangle ABC$  y punto  $O$  fuera de él, construye con regla y compas un triángulo  $\triangle XYZ$  tal que  $H(O, 2) : \triangle ABC \rightarrow \triangle XYZ$ .

**Problema 3.1.** Dado el triángulo  $\triangle ABC$  y su circuncírculo  $\Omega$ , demostrar que el triángulo medial  $A'B'C'$  es homotético al triángulo  $\triangle ABC$ . Encontrar el centro de homotecia y la razón de homotecia.

**Problema 3.2.** Demostrar que si dos circunferencias son tangentes internamente en un punto  $A$  y si una secante común interseca a las circunferencias en  $B'$ ,  $B$ ,  $C$  y  $C'$ , entonces  $\angle B'AC = \angle BAC'$ .

**Problema 3.3.** El  $\triangle ABC$  tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que  $M$  es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado  $AC$ ,  $MK$  es el diámetro. La recta  $BK$  corta  $AC$  en el punto  $N$ . Demostrar que  $AM = NC$

**Problema 3.4.** El incírculo de  $\triangle ABC$  tiene centro  $I$  y toca a  $BC$  en  $E$ .  $AD$  es una altura de  $\triangle ABC$ ,  $M$  es el punto medio  $AD$ . Sea  $I_A$  el A-excentro de  $\triangle ABC$ . Demostrar que  $M$ ,  $E$  e  $I_A$  son colineales.

**Problema 3.5.** Sea  $\Omega$  y  $\Gamma$  dos círculos tangentes en  $D$ , de forma que  $\Gamma$  yace en el interior de  $\Omega$ . Se traza una cuerda de  $AB$  en  $\Omega$  de modo que  $AB$  es tangente a  $\Gamma$  en  $C$ . Probar que  $DC$  bisecta al arco  $\widehat{AB}$  que no contiene a  $AD$ .

## 4. Problemas

**Problema 4.1** (Capítulo 4 [TAK16], ejemplo 4.1). Sea el triángulo  $\triangle ABC$  y  $P$  un punto en su interior. Sea  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$  las intersecciones de  $AP$ ,  $BP$  y  $CP$  con los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Considerando a  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  como las intersecciones de  $BC$  con  $B_1C_1$ ,  $CA$  con  $C_1A_1$  y  $AB$  con  $A_1B_1$ , respectivamente. Probar que  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son colineales.

**Problema 4.2** (Capítulo 3 [TAK16], teorema 3.3). Dado el cuadrilátero convexo  $ABCD$  con  $P$  la intersección de sus diagonales, entonces

$$\frac{\sin(\angle PAD)}{\sin(\angle PAB)} \cdot \frac{\sin(\angle PBA)}{\sin(\angle PBC)} \cdot \frac{\sin(\angle PCB)}{\sin(\angle PCD)} \cdot \frac{\sin(\angle PDC)}{\sin(\angle PDA)} = 1.$$

**Problema 4.3** (Capítulo 3 [TAK16], ejemplo 3.10). Sea  $\triangle ABC$  un triángulo cualquiera y  $D$ ,  $E$  y  $F$  puntos cualesquiera sobre las rectas  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  tal que las rectas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  concurren. La paralela a  $AB$  por  $E$  interseca a la recta  $DF$  en el punto  $Q$ , la paralela a  $AB$  por  $D$  interseca a  $EF$  en  $T$ . Probar que las rectas  $CF$ ,  $DE$  y  $QT$  son concurrentes.

**Problema 4.4.** Sea  $ABCD$  un cuadrado y sea  $X$  un punto en lado  $BC$ . Sea  $Y$  un punto en la recta  $CD$  tal que  $BX = YD$  y  $D$  se encuentra entre  $C$  y  $Y$ . Demuestra que el punto medio de  $XY$  se encuentra sobre la diagonal  $BD$ .

**Problema 4.5** (Ceva's Theorem [TKT12], problema 4). Los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  están sobre los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$  del triángulo acutángulo  $\triangle ABC$ , respectivamente. Si  $\angle BAQ = \angle CAQ$ ,  $QP \perp AB$ ,  $QR \perp AC$  y  $CP$  y  $BR$  se intersecan en  $S$  probar que  $AS \perp BC$ .

**Problema 4.6.** Sea el triángulo  $\triangle ABC$  tal que una circunferencia que pasa por  $A$  y  $B$  interseca los segmentos  $AC$  y  $BC$  en  $D$  y  $E$ , respectivamente. Las rectas  $AB$  y  $DE$  se intersecan en  $F$ , mientras que las rectas  $BD$  y  $CE$  se intersecan en  $M$ . Probar que  $MF = MC$  si y solo si  $MB \cdot MD = MC^2$ .

**Problema 4.7** (Ceva's Theorem [TKT12], problema 5). Los lados opuestos de un hexágono son paralelos. Probar que las rectas que pasan por los puntos medio de los lados concurren.

**Problema 4.8** (Capítulo 3 [TAK16], ejemplo 3.8). Sea  $D$  el pie de altura desde  $A$  en el triángulo  $\triangle ABC$  y  $M$ ,  $N$  puntos en los lados  $CA$  y  $AB$  talque las rectas  $BM$  y  $CN$  se intersecan en  $AD$ . Probar que  $AD$  es bisectriz del ángulo  $\angle MDN$ .

## 5. Conocimiento previo

### Teorema 5.1 (Ley de los Senos).

Sea el triángulo  $ABC$  con circunradio  $R$ . Entonces

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R.$$

**Pista:** Considerar las antípodas de los vértices en el circuncírculo de  $\triangle ABC$ , notar ciertas igualdades de ángulos por cuadriláteros cíclicos y luego utilizar la definición del seno para el triángulo rectángulo.

### Teorema 5.2 (Teorema de bisectriz generalizada).

Dado el triángulo  $ABC$ , sea el punto  $X$  en  $BC$ . Entonces se cumple que

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\angle BAX)}{\sin(\angle XAC)}.$$

**Pista:** Utilizar el **Teorema 5.1** y la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{Si } \alpha + \beta = 180^\circ, \text{ entonces } \sin(\alpha) = \sin(\beta).$$

**Propiedad 5.1** (Potencia de un punto exterior). Sean  $AD$  y  $CD$  dos rectas que se intersecan en  $X$  tales que  $X - A - B$  y  $X - C - D$ . Entonces el cuadrilátero  $ABCD$  es cíclico si y solo si

$$\overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XC} \cdot \overline{XD}.$$

**Demostración.** Rápidamente nos damos cuenta de que  $\angle CXB = \angle AXD$  (\*).

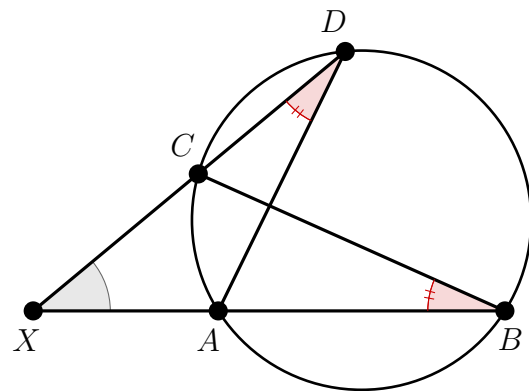
Entonces  $ABCD$  es cíclico

$$\iff \angle ABC = \angle ADC$$

$$\iff \angle XBC = \angle ADX$$

$$\stackrel{(*)}{\iff} \triangle XBC \sim \triangle XDA \stackrel{(*)}{\iff} \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{XD}}{\overline{XA}}$$

$$\iff \overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XC} \cdot \overline{XD}. \quad \blacksquare$$



## Referencias

- [Agu19] Eduardo Aguilar. *Estrategias sintéticas en Geometría Euclídea*. Editorial, 2019.
- [Bac22] Jafet Baca. *Apuntes de Geometría Euclidiana para Competiciones Matemáticas*. Independent publication, 2022.
- [Cas20] Rufo Casco. Una guía de Luis Gonzales, un reto de vida. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, 2020.
- [Loz17] Stefan Lozanovski. *A beautiful journey through Olympiad Geometry*. Independent publication, 2017.
- [TAK16] Cosmin Pohoata Titu Andreescu and Sam Korsky. *Lemmas in olympiad geometry*. XYZ Press, 2016.
- [TKT12] Jordan Tabov, Emil Kolev, and Peter Taylor. *Methods of Problem Solving Book 3*. ATM, 2012.