Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Colinealidad y Concurrencia
Clase #4

Encuentro: 18
Curso: Colinealidad y Concurrencia
Fecha: 12 de agosto de 2023

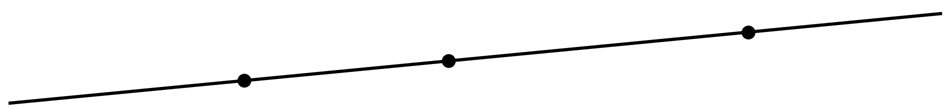
Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Unidad II: Colinealidad
Contenido: Colinealidad I

En esta cuarta sesión de clase entraremos en la segunda unidad del curso, colinealidad. Conoceremos el teorema homologo al teorema de Ceva en concurrencia, el teorema de Menelao, fundamental en el tema de colinealidad. Así como otros teoremas famosos de gran utilidad e importancia en en la resolución de problemas.

1. Desarrollo

1.1. Colinealidad



Tres puntos son **colineales** si se encuentran sobre una misma línea. Dicho esto, presentaremos algunos enfoques que nos ayudarán a probar que tres puntos son colineales al resolver problemas de geometría.

Hay tres formas más comunes de angulear que nos permiten probar que tres puntos A, B y C son colineales.

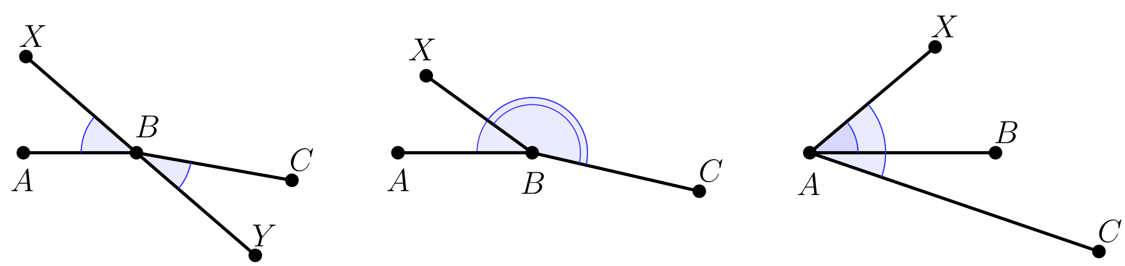


Figura 1: Tres configuraciones de colinealidad.

En la primera configuración[1], necesitaremos dos puntos adicionales que ya son colineales con nuestro punto "medio" B. Sean esos puntos X e Y. Si $\angle XBA = \angle YBC$, entonces los puntos A, B y C son colineales.

En la segunda configuración, necesitaremos un punto extra X que no esté en la supuesta línea $A - B - C$. Si $\angle ABX + \angle XBC = 180°$, entonces los puntos A, B y C son colineales.

En la tercera configuración, también necesitaremos un punto extra X que no esté en la supuesta línea $A - B - C$. Si $\angle XAB = \angle XAC$, entonces los puntos A, B y C son colineales.

1.2. Teorema de Menelao

Teorema 1.1 (Teorema de Menelao).

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (posiblemente en sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1.$$

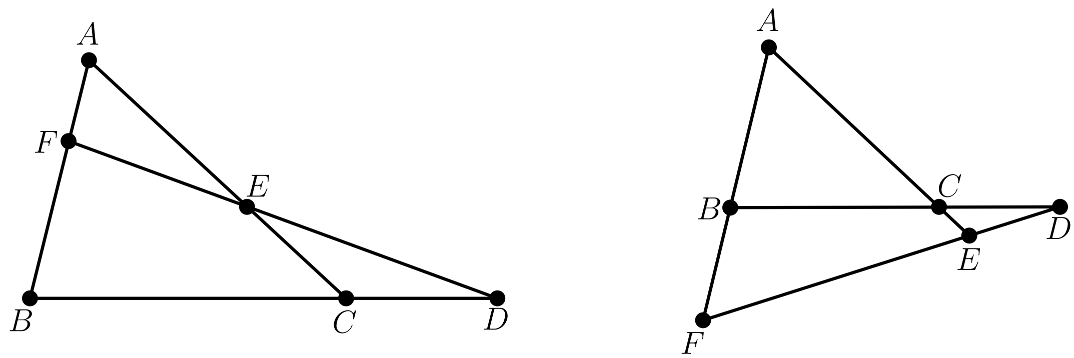


Figura 2: Configuraciones típicas del teorema de Menelao.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

Observación 1.

Una manera fácil de recordar cómo escribir esas proporciones[a] es la siguiente. Si tenemos el $\triangle XYZ$ y los puntos $M \in XY$, $N \in YZ$ y $P \in ZX$, entonces primero, vamos a escribir los lados de manera cíclica, algo como

$$\frac{X\quad}{\quad Y} \cdot \frac{Y\quad}{\quad Z} \cdot \frac{Z\quad}{\quad X}$$

y después solo tendremos que agregar el punto en el numerador y denominador en la

[1] Comenzando de izquierda a derecha.

fracción del lado correspondientes, es decir

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YN}{NZ} \cdot \frac{ZP}{PX}.$$

[a]También funciona para el teorema de **Ceva**.

Teorema 1.2 (Menelao trigonométrico).

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (posiblemente en sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales si y sólo si

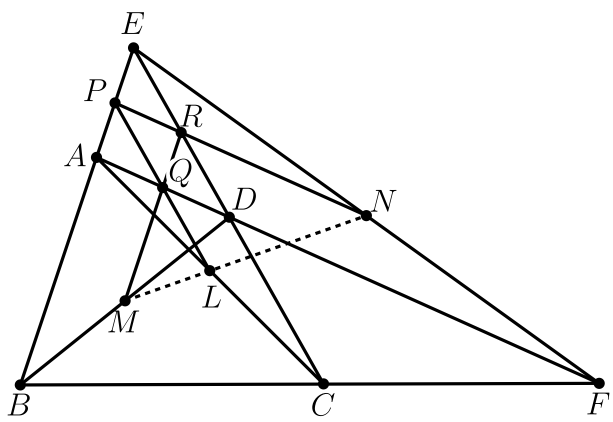
$$\frac{\operatorname{sen}(\angle BAD)}{\operatorname{sen}(\angle DAC)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle CBE)}{\operatorname{sen}(\angle EBA)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle ACF)}{\operatorname{sen}(\angle FCB)} = -1.$$

Demostración. La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

Teorema 1.3 (Recta de Gauss).

Sean L y M los puntos medios de las diagonales AC y BD del cuadrilátero $ABCD$. Las rectas AB y CD se cortan en E, y las rectas AD y BC se cortan en F. Sea N el punto medio de EF. Entonces los puntos L, M y N colineales.

Demostración. Sean P, Q y R los puntos medios de AE, AD y DE respectivamente. Las rectas PQ, QR y PR son bases medias de ADE, por lo tanto son las respectivas bases medias de ACE, BDE y AFE, así que estas pasan por L,M y N.



Por semejanza, tenemos que

$$\frac{LQ}{LP} = \frac{CD}{DE}, \quad \frac{NP}{NR} = \frac{FA}{FD} \quad \text{y} \quad \frac{MR}{MQ} = \frac{BE}{BA}.$$

Al multiplicar se obtiene

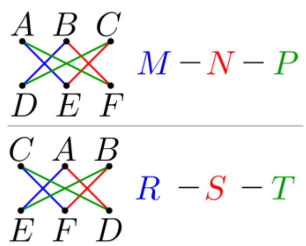
$$\frac{LQ}{LP} \cdot \frac{NP}{NR} \cdot \frac{MR}{MQ} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{FA}{FD} \cdot \frac{BE}{BA}$$

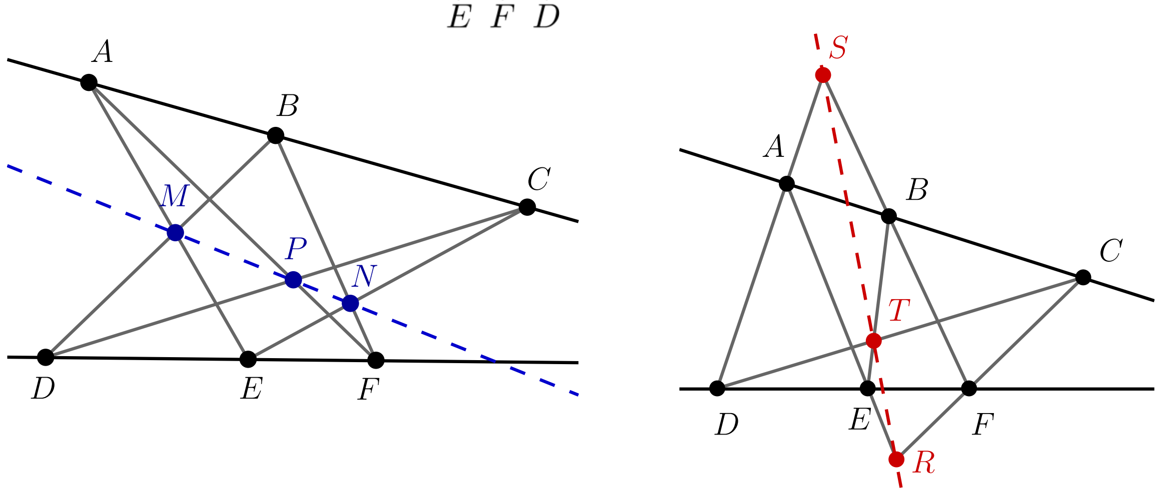
Pero este producto es igual a 1, ya que cumple el teorema de Menelao para el triángulo ADE con respecto a la transversal $B-C-F$. Se concluye entonces que L, M y N con colineales. ■

1.3. Teorema de Pappus

Teorema 1.4 (Teorema de Pappus).

Sean A, B y C tres puntos colineales (no necesariamente en ese orden) y D, E y F otros tres puntos colineales (no necesariamente en ese orden). Entonces, los puntos de intersección de las rectas AE, BD; AF, CD y BF, CE son colineales.



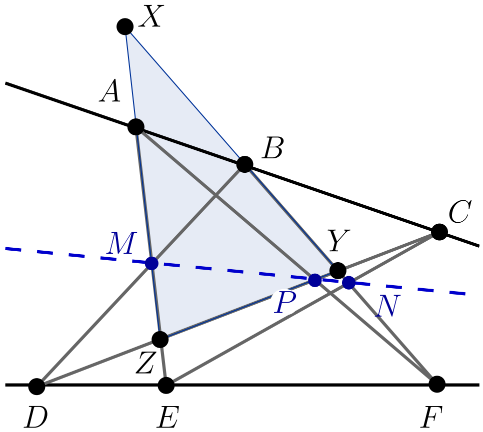


(a) Transversal $M - P - N$.

(b) Transversal $S - T - R$.

Demostración. Sean $M = AE \cap BD$, $N = BF \cap CE$ y $P = AF \cap CD$. Divideremos la demostración en dos casos, basado en si las rectas AE y BF se intersecan o son paralelas.

Caso 1. Si estas se interseca, sea $AE \cap BF = X$. Sea $Y = BF \cap CD$ y $Z = AE \cap CD$.



Dado que M, N y P se encuentran al margen de $\triangle XYZ$, podemos usar el **Teorema 1.2** para tratar de probar que son colineales, es decir necesitamos probar que

$$\frac{XN}{NY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZM}{MX} = 1.$$

Ahora, trataremos de encontrar cada una de estas tres proporciones por medio de la aplicación del **Teorema 1.2** con otras rectas que se cruzen con $\triangle XYZ$.

Para lograr esto, usaremos el **Teorema 1.2** tres veces en el $\triangle XYZ$ con las transversales $C-E-N$, $P-A-F$ y $D-M-B$, respectivamente, obtendremos

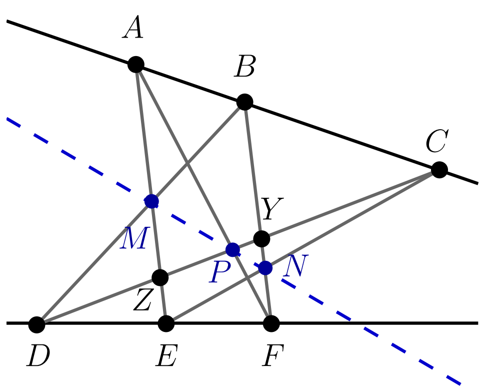
$$\frac{XN}{NY}\cdot\frac{YC}{CZ}\cdot\frac{ZE}{EX}=1,\quad \frac{XF}{FY}\cdot\frac{YP}{PZ}\cdot\frac{ZA}{AX}=1 \quad \text{y} \quad \frac{XB}{BY}\cdot\frac{YD}{DZ}\cdot\frac{ZM}{MX}=1.$$

Sin embargo, vemos que nada se cancela, así que necesitamos hallar otras igualdades que tal que usen esos segmentos de recta. Rápidamente, vemos que usando el **Teorema 1.2** dos veces más en $\triangle XYZ$, pero ahora con las transversales $C-A-B$ y $D-E-F$, obtenemos

$$1=\frac{XB}{BY}\cdot\frac{YC}{CZ}\cdot\frac{ZA}{AX} \quad \text{y} \quad 1=\frac{XF}{FY}\cdot\frac{YD}{DZ}\cdot\frac{ZE}{EX}.$$

Multiplicando estas 5 igualdades lado a lado, y viendo que 6 de las fraciones del lado izquierdo de la ecuación se cancela con cada una las fracciones del lado derecho. Quedandonos con lo que queríamos demostrar.

Caso 2. Ahora, veamos que pasa si el punto X no existe, es decir $AE \parallel BF$. Observemos que el punto X aparece exactamente dos veces en cada una de las 5 equaciones arriba, una vez en el numerador y una vez en el denominador. Trataremos de encontrar ecuaciones análogas tal que no usen segmentos que contengan X. En realidad podemos lograr esto, usando rectas paralelas para encontrar triángulos semejantes.



Por el criterio (AAA), obtenemos que $\triangle CYN \sim \triangle CZE$.

$$\therefore \quad \frac{CY}{YN}=\frac{CZ}{ZE} \quad \Rightarrow \quad \frac{CY}{YN}\cdot\frac{ZE}{CZ}=1.$$

Análogamente, obtenemos que $\triangle PYF \sim \triangle PZA$, $\triangle DYB \sim \triangle DZM$, $\triangle YCB \sim \triangle ZCA$ y $\triangle YDF \sim \triangle ZDE$.

Multiplicando estas ecuaciones análogas, obtenemos

$$\frac{CY}{YN}\cdot\frac{ZE}{CZ}\cdot\frac{PY}{YF}\cdot\frac{ZA}{PZ}\cdot\frac{DY}{YB}\cdot\frac{ZM}{DZ}\cdot\frac{YB}{YC}\cdot\frac{ZC}{ZA}\cdot\frac{YF}{YD}\cdot\frac{ZD}{ZE}=1$$

$$\therefore \quad \frac{PY}{YN}\cdot\frac{ZM}{PZ}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{PY}{YN}=\frac{PZ}{ZM}$$

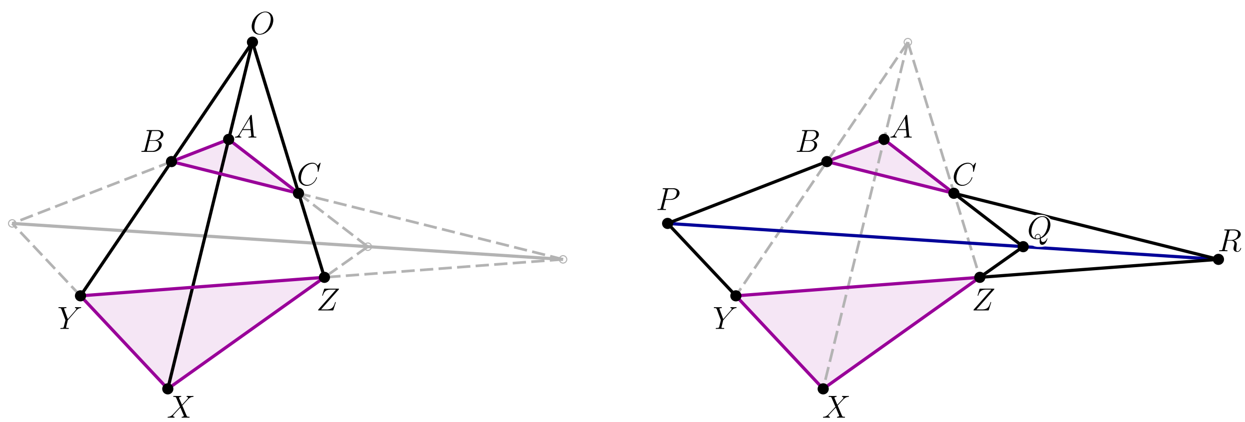
Como $\angle PYN=\angle PZM$, por (LAL) obtenemos que $\triangle PYN \sim \triangle PZM$ y por lo tanto $\angle YPN=\angle ZPM$. Ya que $Y-P-Z$ son colineales, por consiguiente $N-P-M$. ■

1.4. Teorema de Desargues

Consideremos dos triángulos arbitrario $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$. Antes de establecer el resultado principal, es necesario proporcionar dos definiciones fundamentales.

Definición 1.1.

- Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en *perspectiva respecto a un* ***punto*** (digamos O) si las rectas AX, BY y CZ son concurrentes.
- Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en *perspectiva respecto a una* ***recta*** si los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes de ambos triángulos (digamos $P = AB \cap XY$, $Q = CA \cap ZX$ y $R = BC \cap YZ$) son colineales.



(a) Perspectiva con respecto a un punto. (b) Perspectiva con respecto a una recta.

Figura 4: Perspectiva de dos triángulos.

Teorema 1.5 (Teorema de Desargues).

Dos triángulos están en perspectiva con respecto a una recta si y solo si están en perspectiva con respecto un punto.

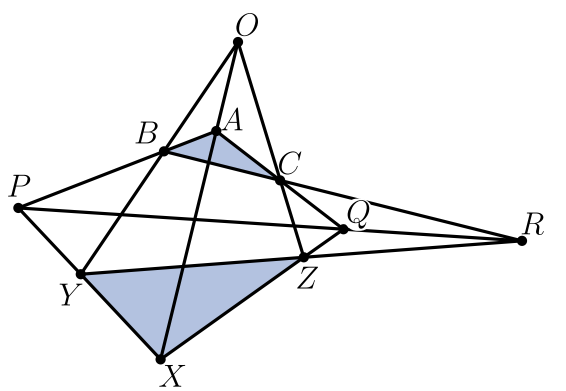
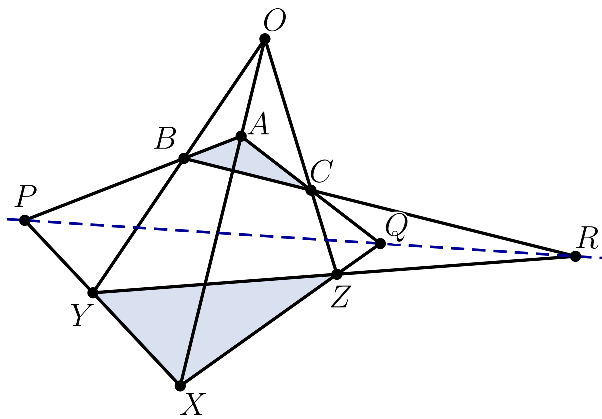


Figura 5: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva con O y la recta PR.

Demostración. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ dos triángulos en perspectiva a un punto, entonces AX, BY y CZ son concurrentes con el punto O. Sea $P = AB \cap XY$, $R = BC \cap YZ$ y $Q = CA \cap ZX$.



Aplicando el **Teorema 1.2** a los triángulos $\triangle OAB$ con la transversal $P-Y-X$, $\triangle OBC$ con la transversal $R-Z-Y$ y $\triangle OCA$ con la transversal $Q-Z-X$, obtenemos que;

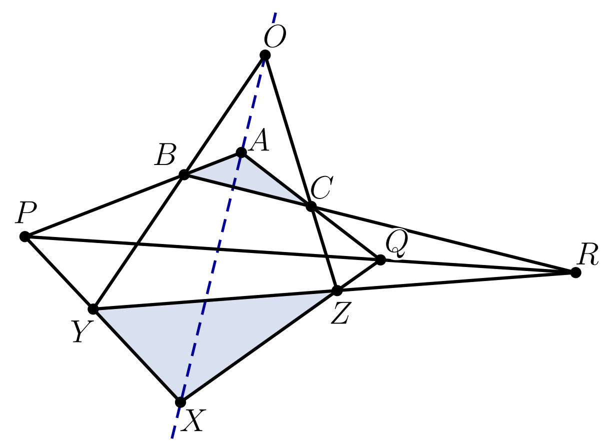
$$\frac{OX}{XA}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BY}{YO}=1,$$
$$\frac{OY}{YB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CZ}{ZO}=1 \quad \text{y}$$
$$\frac{OZ}{ZC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AX}{XO}=1.$$

Multiplicando estas tres ecuaciones, llegamos al siguiente resultado

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1,$$

que por el **Teorema 1.2** aplicado al triángulo $\triangle ABC$, significa que los puntos P, R y Q son colineales, es decir $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva con respecto a la recta.

Ahora, probaremos la otra dirección. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ dos triángulos en perspectiva a un recta, entonces los puntos $P = AB\cap XY$, $Q = CA\cap ZX$ y $R = BC\cap YZ$ son colineales.



Sean $O = BY \cap CZ$. Debemos de probar que AX también pasa por O.

Observemos los triángulos $\triangle QCZ$ y $\triangle PBY$. Las rectas QP, CB y ZY con concurrentes en R, así que los triángulos están en perspectiva con respecto a ese punto.

Por la dirección del teorema de Desargues que acabamos de demostrar, se deduce que los triángulos deben de estar en perspectiva respecto a una recta.

Es decir, los puntos $QC\cap PB = A$, $CZ\cap BY = O$ y $ZQ\cap YP = X$ son colineales. Con esto, probamos que AX pasa por O, luego $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva respecto a un punto. ■

Observación 2.

El teorema de Desargues puede servir para transformar una colinealidad en una concurrencia más fácil de trabajar por Ceva, o viceversa, transformando una concurrencia en una colinealidad más fácil de trabajar por Menelao.

Problema 2.6. Sea $ABCD$ un trapecio con AB mayor y paralelo a CD. Sean E y F puntos en AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}$. Sean K y L puntos en EF tales que $\angle AKB = \angle DCB$ y $\angle CLD = \angle CBA$. Demuestre que $KLCB$ es cíclo.

Problema 2.7. Sea P la intersección de las diagonales AC y BD en el cuadrilátero cíclico $ABCD$. Sean E, F, G y H los pies de las perpendiculares desde P hacía AB, BC, CD y DA, respectivamente. Pruebe que las rectas EH, BD y FG son concurrentes o son paralelas.

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Ejercicio 3.1. Realizar la demostración del teorema de **Menealao** tanto en su forma normal como trigonométrica.

Problema 3.1. Sea ABC un triángulo, y sean A_1, B_1 y C_1 los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA y AB, respectivamente. Sea A_2 el simétrico de A_1 con respecto a B_1C_1, y se definen B_2 y C_2 de manera análoga. Sea A_3 la intersección de AA_2 con BC, B_3 la intersección de BB_2 con AC y C_3 la intersección de CC_2 con AB. Demuestre que A_3, B_3 y C_3 con colineales.

4. Extra

Problema 4.1 (Olimpiada Matemática de Macedonia, 2016). Sea K el punto medio del segmento AB. Sea C un punto fuera de la recta AB. Sea N la intersección de AC con la recta que pasa a traves de B y el punto medio del segmento CK. Sea U la intersección de AB y la recta que pasa a traves de C y L, el cual es punto medio de BN. Probar que la razón de las áreas de $\triangle CNL$ y $\triangle BUL$ no dependen de la elección del punto C.

Referencias

[Agu19] Eduardo Aguilar. *Estrategias sintéticas en Geometría Euclídea*. Editorial, 2019.

[Bac22] Jafet Baca. *Apuntes de Geometría Euclidiana para Competiciones Matemáticas*. Independent publication, 2022.

[Loz17] Stefan Lozanovski. *A beautiful journey through Olympiad Geometry*. Independent publication, 2017.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com