Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Colinealidad y Concurrencia
Clase #2

Encuentro: 16 **Nivel:** 5
Curso: Colinealidad y Concurrencia **Semestre:** II
Fecha: 15 de junio de 2023 **Instructor:** Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Unidad I: Concurrencias
Contenido: Concurrencias de Cevianas

En esta segunda clase del curso, seguiremos viendo los teoremas, definiciones y resultados clásicos sobre la concurrencia de cevianas. Veremos la demostraciones de teoremas, ejemplos, ejercicios y problemas propuestos.

1. Desarrollo

Teorema 1.1 (**Teorema de Ceva sobre la circunferencia**)**.** Sean ABC y DEF dos triángulos sobre la misma circunferencia. Entonces las rectas AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Definición 1.1 (**Triángulo circunceviano**)**.** A todo punto que no esté sobre alguno de los lados de un triángulo dado es posible asignarle un nuevo triángulo, que surge a partir de la intersección de las cevianas con el circuncírculo del triángulo.

Teorema 1.2 (**Teorema de Steinbart**)**.** Sea ABC un triángulo, D, E y F los puntos de tanagencia del incírculo con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean P, Q y R puntos sobre el incírculo de ABC. Llamemos A', B' y C' las intersecciones de EF con PD, DF con QE y DE con FR. Entonces AP, BQ y CR son concurrentes si y sólo si DP, EQ y FR son concurrentes.

Teorema 1.3 (**Teorema de Jacobi**)**.** Sea ABC un triángulo, y sean X, Y, Z tres puntos en el plano tales que $\angle YAC = \angle BAZ$, $\angle YAC = \angle BAZ$, $\angle YAC = \angle BAZ$. Entonces las rectas AX, BY y CZ son concurrentes.

Definición 1.2 (**Puntos isotómicos**)**.** Dos puntos son isotómicos si estos coinciden al ser reflejados por el punto medio del segmento al que pertenecen.

Definición 1.3 (**Conjugados isotómicos**)**.** Dado un triángulo ABC se tienen tres cevianas AD, BE y CF las cuales son concurrentes en un punto P. Sean D', E' y F' las reflexiones de D, E y F sobre los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. Entonces las rectas AD', BE' y CF' son concurrentes.

Definición 1.4 (Conjugados isogonales). Dado un triángulo ABC se tienen tres cevianas AD, BE y CF las cuales son concurrentes en un punto P. Sean AD', BE' y CF' las reflexiones de AD, BE y CF sobre las bisectrices de $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ respectivamente. Entonces las rectas AD', BE', CF' son concurrentes.

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 2.1. En un triángulo ABC en el cual se traza la altura BH, la mediana AM y la ceviana CN las cuales concurren en el punto P. Si $BP = 3PH$ y $NB = 16$. Hallar AN.

Ejercicio 2.2. Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC, y si BQ y CP se cortan en O, demuestra que AO es una mediana.

Ejercicio 2.3. Sean L, M y N puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O, demostrar que

$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1.$$

Ejercicio 2.4. Sean L, M y N puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O, demostrar que

$$\frac{AO}{OL} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}.$$

Problema 2.1. Sea ABC un triángulo. Se toman los puntos D, E y F en las mediatrices de BC, CA y AB respectivamente. Probar que las rectas que pasan por A, B y C que son perpendiculares a EF, FD y DE, respectivamente, son concurrentes.

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 3.1. Sean ABC un triángulo, y sean ΔBXC, ΔCYA y ΔAZB 3 triángulos isósceles semejantes en los que los lados no congruentes pertenecen al triángulo ABC. Demuestre que las rectas AX, BY y CZ son concurrentes.

Problema 3.2. Sea ABC un triángulo, y sean A', B' y C' tres puntos en el plano tales que $\angle B'AC = \angle BAC'$, $\angle C'BA = \angle CBA'$ y $\angle A'BC = \angle ABC'$. Sean X, Y y Z los pies de las perpendiculares desde A', B' y C' hacia BC, CA y AB, respectivamente. Pruebe que las rectas AX, BY y CZ son concurrentes.

4. Extra

Problema 4.1. En un triángulo acutángulo ABC con $AB \neq AC$, sea V la intersección de la bisectriz del ángulo A con BC, y sea D el pie de la perpendicular desde A hasta BC. Si E y F son la intersecciones del circuncírculo de AVD con CA y AB, respectivamente, probar que las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Referencias

[Agu19] Eduardo Aguilar. *Estrategias sintéticas en Geometría Euclídea.* Editorial, 2019.

[Bac22] Jafet Baca. *Apuntes de Geometría Euclidiana para Competiciones Matemáticas.* Jafet Baca, 2022.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com