Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Folleto de Concurrencia y Colinealidad

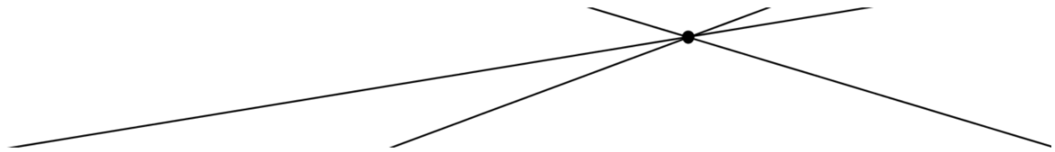
Kenny J. Tinoco
kenny.tinoco10@gmail.com
Junio 2023

Índice

1. Concurrencia **2**
1.1. Concurrencia de Cevianas 2
1.2. Ejercicios y Problemas 4
2. Colinenalidad **6**
3. Teoremas de Colinealidad **7**
4. Homotecia **8**
5. **9**
6. **10**

1. Concurrencia

1.1. Concurrencia de Cevianas



Tres rectas son concurrentes si pasan por un punto común. Sabiendo esto, veamos el primer hecho fundamental para abordar los problemas de concurrencia.

Teorema 1.1 (Teorema de Ceva).

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB (o sus prolongaciones), respectivamente. Entonces las rectas AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

A partir de este teorema se vuelve evidente la concurrencia de las principales rectas notables[1]. De igual forma muchos otros problemas pueden ser resueltos por el teorema de Ceva, la dificultad radica en transformar las proporciones evidentes en otras que sean más fáciles de manipular para que el producto de todas sea igual a 1.

Es importante resaltar que la manipulación de razones con áreas no funciona, pues a partir de la manipulación de áreas también puede ser demostrado este teorema, y lo único que se obtendría es un avanze circular, por ello es mejor hacerlo con semejanza de triángulos, potencia de punto o trigonometría como se verá más adelante.

Definición 1.1.

A toda recta que parte del vértice hacia el lado opuesto se le denomina *ceviana.*

Definición 1.2 (Triángulo ceviano).

Para todo punto P, las cevianas desde A, B y C que pasan por P y cortan a los lados opuestos en A', B' y C'. El triángulo $A'B'C'$ es el triángulo ceviano de P y sus vértices se llaman trazas cevianas de P.

[1] Ver los ejercicios del 2.1 al 2.4.

Teorema 1.2 (Ceva trigonométrico).

Las rectas AD, BE y CF son cevianas concurrentes del triángulo ABC si y sólo si

$$\frac{sen(\angle BAD)}{sen(\angle DAC)} \cdot \frac{sen(\angle CBE)}{sen(\angle EBA)} \cdot \frac{sen(\angle ACF)}{sen(\angle FCB)} = 1.$$

La manipulación trigonométrica del teorema de Ceva se vuelve muy importante a la hora de enfrentarse a problemas que pueden parecer práticamente inaccesibles, pues es más general y más aplicable que la semajanza de triángulos.

Definición 1.3 (El punto de Gergonne).

Sea ABC un triángulo, y sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA y AB, respectivamente. Entonces, AD, BE y CF son concurrentes.

Definición 1.4 (El punto de Nagel).

Sea ABC un triángulo, y sean D', E' y F' los puntos de tangencia de los excírculos respectivos a A, B y C con BC, CA y AB, respectivamente. Entonces, AD', BE' y CF' son concurrentes.

Teorema 1.3 (Teorema de Ceva sobre la circunferencia).

Sean ABC y DEF dos triángulos sobre la misma circunferencia. Entonces las rectas AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Definición 1.5 (Triángulo circunceviano).

A todo punto que no esté sobre alguno de los lados de un triángulo dado es posible asignarle un nuevo triángulo, que surge a partir de la intersección de las cevianas con el circuncírculo del triángulo.

Teorema 1.4 (Teorema de Steinbart).

Sea ABC un triángulo, D, E y F los puntos de tanagencia del incírculo con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean P, Q y R puntos sobre el incírculo de ABC. Llamemos A', B' y C' las intersecciones de EF con PD, DF con QE y DE con FR. Entonces AP, BQ y CR son concurrentes si y sólo si DP, EQ y FR son concurrentes.

Teorema 1.5 (Teorema de Jacobi).

Sea ABC un triángulo, y sean X, Y, Z tres puntos en el plano tales que $\angle YAC = \angle BAZ$, $\angle ZBA = \angle CBX$, $\angle XCB = \angle ACY$. Entonces las rectas AX, BY y CZ son concurrentes.

Definición 1.6 (Puntos isotómicos).

Dos puntos son isotómicos si estos coinciden al ser reflejados por el punto medio del segmento al que pertenecen.

Definición 1.7 (Conjugados isotómicos).

Dado un triángulo ABC se tienen tres cevianas AD, BE y CF las cuales son concurrentes en un punto P. Sean D', E' y F' las reflexiones de D, E y F sobre los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. Entonces las rectas AD', BE' y CF' son concurrentes.

Definición 1.8 (Cevianas isogonales).

Dos cevianas son isogonales del $\triangle ABC$ si ambas parte del mismo vértice del triángulo y una es la reflexión de la otra con respecto a la bisectriz interna de $\triangle ABC$.

Definición 1.9 (Conjugados isogonales).

Dado un triángulo ABC se tienen tres cevianas AD, BE y CF las cuales son concurrentes en un punto P. Sean AD', BE' y CF' las reflexiones de AD, BE y CF sobre las bisectrices de $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ respectivamente. Entonces las rectas AD', BE', CF' son concurrentes.

1.2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Demostrar que todas las medianas de un triángulo concurren en un punto (Baricentro).

Ejercicio 1.2. Demostrar que todas las alturas de un triángulo concurren en un punto (Ortocentro).

Ejercicio 1.3. Demostrar que todas las bisectrices interiores de un triángulo concurren en un punto (Incentro).

Ejercicio 1.4. Demostrar que dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior de un triángulo concurren en un punto (Excentro).

Ejercicio 1.5. Sean BE, AD y CF líneas tales que dividen a un triángulo en $AE = 12$, $EC = 6$, $CD = 7$, $DB = 10$, $BF = 5$, $FA = 7$. Demostrar que BE, AD y CF son concurrentes.

Ejercicio 1.6. Sea ABC un triángulo con lados AB, BC, CA que tienen longitudes 13, 15, 14, respectivamente. Si CF, AD y BE concurren y $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{5}{8}$, encuentra el valor de BD y DC.

Ejercicio 1.7. En un triángulo ABC en el cual se traza la altura BH, la mediana AM y la ceviana CN las cuales concurren en el punto P. Si $BP = 3PH$ y $NB = 16$. Hallar AN.

Ejercicio 1.8. Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC, y si BQ y CP se cortan en O, demuestra que AO es una mediana.

Ejercicio 1.9. Sean L, M y N puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O, demostrar que

$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1.$$

Ejercicio 1.10. Sean L, M y N puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O, demostrar que

$$\frac{AO}{OL} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}.$$

Problema 1.1. Sea ABC un triángulo. Se toman los puntos D, E y F en las mediatrices de BC, CA y AB respectivamente. Probar que las rectas que pasan por A, B y C que son perpendiculares a EF, FD y DE, respectivamente, son concurrentes.

2. Colinenalidad

3. Teoremas de Colinealidad

4. Homotecia

5.

6.

Referencias

[Agu19] Eduardo Aguilar. *Estrategias sintéticas en Geometría Euclídea.* Editorial, 2019.

[Bac22] Jafet Baca. *Apuntes de Geometría Euclidiana para Competiciones Matemáticas.* Independent publication, 2022.