Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Colinealidad y Concurrencia
Clase #1

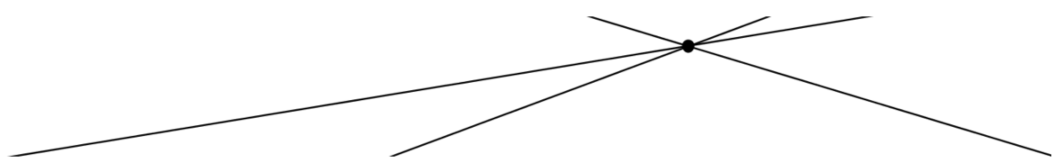
Encuentro: 15
Curso: Colinealidad y Concurrencia
Fecha: 8 de junio de 2023

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Unidad I: Concurrencias
Contenido: Concurrencias de Cevianas I

En esta primera clase del curso conoceremos una de las herramientas principales para abordar problemas de concurrencias y colinealidad, el **Teorema de Ceva**. Para ello veremos algunas definiciones y demostraciones de los teoremas, así como ejercicios y problemas.

1. Desarrollo



Tres rectas son concurrentes si pasan por un punto común. Sabiendo esto, veamos el primer hecho fundamental para abordar los problemas de concurrencia.

Teorema 1.1 (Teorema de Ceva).

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB (o sus prolongaciones), respectivamente. Entonces las rectas AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

A partir de este teorema se vuelve evidente la concurrencia de las principales rectas notables[1]. De igual forma muchos otros problemas pueden ser resueltos por el teorema de Ceva, la dificultad radica en transformar las proporciones evidentes en otras que sean más fáciles de manipular para que el producto de todas sea igual a 1.

Es importante resaltar que la manipulación de razones con áreas no funciona, pues a partir de la manipulación de áreas también puede ser demostrado este teorema, y lo único que se obtendría es un avanze circular, por ello es mejor hacerlo con semejanza de triángulos, potencia de punto o trigonometría como se verá más adelante.

[1] Ver los ejercicios del 2.1 al 2.4.

Definición 1.1. A toda recta que parte del vértice hacia el lado opuesto se le denomina *ceviana.*

Definición 1.2 (Triángulo ceviano). Para todo punto P, las cevianas desde A, B y C que pasan por P y cortan a los lados opuestos en A', B' y C'. El triángulo $A'B'C'$ es el triángulo ceviano de P y sus vértices se llaman trazas cevianas de P.

Teorema 1.2 (Ceva trigonométrico).

Las rectas AD, BE y CF son cevianas concurrentes del triángulo ABC si y sólo si

$$\frac{sen(\angle BAD)}{sen(\angle DAC)} \cdot \frac{sen(\angle CBE)}{sen(\angle EBA)} \cdot \frac{sen(\angle ACF)}{sen(\angle FCB)} = 1.$$

La manipulación trigonométrica del teorema de Ceva se vuelve muy importante a la hora de enfrentarse a problemas que pueden parecer práticamente inaccesibles, pues es más general y más aplicable que la semajanza de triángulos.

Definición 1.3 (El punto de Gergonne). Sea ABC un triángulo, y sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA y AB, respectivamente. Entonces, AD, BE y CF son concurrentes.

Definición 1.4 (El punto de Nagel). Sea ABC un triángulo, y sean D', E' y F' los puntos de tangencia de los excírculos respectivos a A, B y C con BC, CA y AB, respectivamente. Entonces, AD', BE' y CF' son concurrentes.

2. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 2.1. Demostrar que todas las medianas de un triángulo concurren en un punto (Baricentro).

Ejercicio 2.2. Demostrar que todas las alturas de un triángulo concurren en un punto (Ortocentro).

Ejercicio 2.3. Demostrar que todas las bisectrices interiores de un triángulo concurren en un punto (Incentro).

Ejercicio 2.4. Demostrar que dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior de un triángulo concurren en un punto (Excentro).

Ejercicio 2.5. Sean BE, AD y CF líneas tales que dividen a un triángulo en $AE = 12$, $EC = 6$, $CD = 7$, $DB = 10$, $BF = 5$, $FA = 7$. Demostrar que BE, AD y CF son concurrentes.

Ejercicio 2.6. Sea ABC un triángulo con lados AB, BC, CA que tienen longitudes 13, 15, 14, respectivamente. Si CF, AD y BE concurren y $\frac{AF}{FB} = \frac{2}{5}$ y $\frac{CE}{EA} = \frac{5}{8}$, encuentra el valor de BD y DC.

Ejercicio 2.7. Sean ABC y DEF dos triángulos sobre la misma circunferencia. Probar que las rectas AD, BE y CF son concurrentes si y solo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

3. Problemas propuestos

Recordar que los problemas de esta sección son los asignados como **tarea**. Es el deber del estudiante resolverlos y entregarlos de manera clara y ordenada el próximo encuentro (de ser necesario, también se pueden entregar borradores).

Problema 3.1. En el ΔABC, sea M el punto medio del lado AB. Sea P un punto arbitrario en el segmento CM ($P \neq C$, $P \neq M$). Sea $AP \cap BC = D$ y $BP \cap AC = E$. Probar que $ED \parallel AB$.

Problema 3.2. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, y sea D un punto en el lado AC. Denotemos por E la reflexión de A en la recta BD, y por F la intersección de CE con la perpendicular a BC por D. Probar que AF, DE y BC son concurrentes.

4. Extra

Problema 4.1. Sea ABC un triángulo con incentro I. Sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean D', E' y F' los diametralmente opuestos a D, E y F, respectivamente, y sean L, M y N los puntos medios de EF, DF, DE respectivamente. Sean A', B' y C' las intersecciones de $D'L$, $E'M$ y $F'N$ con el incírculo. Demuestre que AA', BB' y CC' con concurrentes.

Referencias

[Agu19] Eduardo Aguilar. *Estrategias sintéticas en Geometría Euclídea.* Editorial, 2019.

[Bac22] Jafet Baca. *Apuntes de Geometría Euclidiana para Competiciones Matemáticas.* Independent publication, 2022.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002 *(Claro)*
Correo: joseandanduarte@gmail.com