

Ecuaciones Diofánticas Clase #1

Encuentro: 16

Curso: Ecuaciones Diofánticas

Fecha: 3 de agosto de 2024

Nivel: 5

Semestre: II

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

Instructor Aux: Gema Tapia

Contenido: Introducción a las Ecuaciones Diofánticas

La resolución de ecuaciones es un tema que se presenta en secundaria desde los primeros niveles. Paralelamente se van estudiando los diferentes conjuntos numéricos a saber: el conjunto de números Naturales (\mathbb{N}), el conjunto de números enteros (\mathbb{Z}), el conjunto de números racionales (\mathbb{Q}) y el conjunto de número Reales (\mathbb{R}).

Además, se repasan conceptos elementales de teoría de números como son: máximo común divisor, mínimo común múltiplo, números primos, etc. En este curso estudiaremos los métodos de resolución de un tipo especial de ecuaciones: las **Ecuaciones Diofánticas**.

1. Desarrollo

Definición 1.1 (Ecuaciones Diofánticas).

Se llama **ecuación diofántica** o **ecuación diofantina** a cualquier ecuación polinomial con coeficientes enteros cuya solución se restringe únicamente a aquellos valores enteros que la satisfacen.

Es decir, una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0, \quad \text{con } 1 \leq i \leq n, a_i \in \mathbb{Z}.$$

donde la n -upla de números enteros (r_1, r_2, \dots, r_n) hace la igualdad. Es claro que una ecuación diofántica puede tener una o más n -upla que hagan la igualdad.

Definición 1.2.

A una n -upla, con n entero, que satisface una ecuación diofántica, se le llama **solución** de la ecuación. Una ecuación diofántica con una o más soluciones se llama ecuación **soluble**, así también, una ecuación diofántica sin soluciones se llama ecuación **insoluble** o **irresoluble**.

Una ecuación diofántica se dice que tiene una familia de soluciones cuando un conjunto de estas, o todas sus soluciones, puede ser expresada en función de un o más parámetros enteros. Como por ejemplo, la ecuación $x^2 + 2y^2 = z^2$ vemos tiene soluciones $(-2, 0, 2)$, $(-1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$, \dots , las cuales podemos expresar como

$$\begin{cases} x = r^2 - 2 \\ y = 2r \\ z = r^2 + 2 \end{cases}$$

donde r es un número entero sin ninguna restricción, lo cual hace que la ecuación diofántica tenga infinita soluciones de esta forma.

1.1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Hallar la cantidad de parejas de enteros positivos x_1, x_2 tales que $x_1 \cdot x_2 = 25 \cdot 15^3$.

Ejercicio 1.2. Probar que la ecuación $x^2 + 2y^2 = z^2$ tiene como solución a $x = a^2 - 2b^2$, $y = 2ab$ y $z = a^2 + 2b^2$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 1.3. Probar que la ecuación $x^3 = 2y^3$ no tiene soluciones enteras.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco

Teléfono: +505 7836 3102 (*Tigo*)

Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Gema Tapia

Teléfono: +505 8825 1565 (*Claro*)

Correo: gematapia97@gmail.com