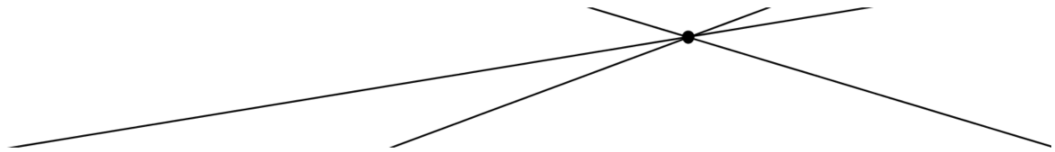
Folleto de Concurrencia y Colinealidad

Kenny J. Tinoco
kenny.tinoco10@gmail.com
Agosto 2023

Índice

1. Concurrencia

1.1. Concurrencia de Cevianas



Tres rectas son concurrentes si pasan por un punto común. Sabiendo esto, veamos el primer hecho fundamental para abordar los problemas de concurrencia.

Teorema 1.1 (Teorema de Ceva).

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB (o sus prolongaciones), respectivamente. Entonces las rectas AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

A partir de este teorema se vuelve evidente la concurrencia de las principales rectas notables[1]. De igual forma muchos otros problemas pueden ser resueltos por el teorema de Ceva, la dificultad radica en transformar las proporciones evidentes en otras que sean más fáciles de manipular para que el producto de todas sea igual a 1.

Es importante resaltar que la manipulación de razones con áreas no funciona, pues a partir de la manipulación de áreas también puede ser demostrado este teorema, y lo único que se obtendría es un avanze circular, por ello es mejor hacerlo con semejanza de triángulos, potencia de punto o trigonometría como se verá más adelante.

Definición 1.1 (Ceviana).

A toda recta que parte del vértice hacia el lado opuesto se le denomina *ceviana.*

Definición 1.2 (Triángulo ceviano).

Para todo punto P, las cevianas desde A, B y C que pasan por P y cortan a los lados opuestos en A', B' y C'. El triángulo $A'B'C'$ es el triángulo ceviano de P y sus vértices se llaman trazas cevianas de P.

[1] Ver los ejercicios del 2.1 al 2.4.

Teorema 1.2 (Ceva trigonométrico).

Las rectas AD, BE y CF son cevianas concurrentes del triángulo ABC si y sólo si

$$\frac{sen(\angle BAD)}{sen(\angle DAC)} \cdot \frac{sen(\angle CBE)}{sen(\angle EBA)} \cdot \frac{sen(\angle ACF)}{sen(\angle FCB)} = 1.$$

La manipulación trigonométrica del teorema de Ceva se vuelve muy importante a la hora de enfrentarse a problemas que pueden parecer práticamente inaccesibles, pues es más general y más aplicable que la semajanza de triángulos.

Definición 1.3 (El punto de Gergonne).

Sea ABC un triángulo, y sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA y AB, respectivamente. Entonces, AD, BE y CF son concurrentes.

Definición 1.4 (El punto de Nagel).

Sea ABC un triángulo, y sean D', E' y F' los puntos de tangencia de los excírculos respectivos a A, B y C con BC, CA y AB, respectivamente. Entonces, AD', BE' y CF' son concurrentes.

Teorema 1.3 (Teorema de Ceva sobre la circunferencia).

Sean ABC y DEF dos triángulos sobre la misma circunferencia. Entonces las rectas AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Definición 1.5 (Triángulo circunceviano).

A todo punto que no esté sobre alguno de los lados de un triángulo dado es posible asignarle un nuevo triángulo, que surge a partir de la intersección de las cevianas con el circuncírculo del triángulo.

Teorema 1.4 (Teorema de Steinbart).

Sea ABC un triángulo, D, E y F los puntos de tanagencia del incírculo con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean P, Q y R puntos sobre el incírculo de ABC. Llamemos A', B' y C' las intersecciones de EF con PD, DF con QE y DE con FR. Entonces AP, BQ y CR son concurrentes si y sólo si DP, EQ y FR son concurrentes.

Teorema 1.5 (Teorema de Jacobi).

Sea ABC un triángulo, y sean X, Y, Z tres puntos en el plano tales que $\angle YAC = \angle BAZ$, $\angle ZBA = \angle CBX$, $\angle XCB = \angle ACY$. Entonces las rectas AX, BY y CZ son concurrentes.

Definición 1.6 (Puntos isotómicos).

Dos puntos son isotómicos si estos coinciden al ser reflejados por el punto medio del segmento al que pertenecen.

Definición 1.7 (Conjugados isotómicos).

Dado un triángulo ABC se tienen tres cevianas AD, BE y CF las cuales son concurrentes en un punto P. Sean D', E' y F' las reflexiones de D, E y F sobre los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. Entonces las rectas AD', BE' y CF' son concurrentes.

Definición 1.8 (Cevianas isogonales).

Dos cevianas son isogonales del $\triangle ABC$ si ambas parte del mismo vértice del triángulo y una es la reflexión de la otra con respecto a la bisectriz interna de $\triangle ABC$.

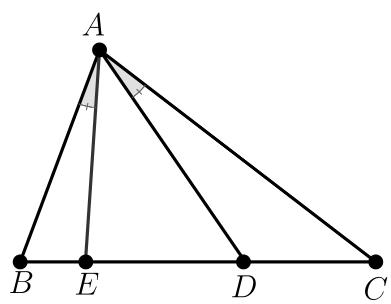
Definición 1.9 (Conjugados isogonales).

Dado un triángulo ABC se tienen tres cevianas AD, BE y CF las cuales son concurrentes en un punto P. Sean AD', BE' y CF' las reflexiones de AD, BE y CF sobre las bisectrices de $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ respectivamente. Entonces las rectas AD', BE', CF' son concurrentes.

Teorema 1.6 (Steiner).

Sean D y E dos puntos sobre el segmento BC del triángulo ABC tal que $\angle BAE = \angle DAC$. Así

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{BE}{CE} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$



Demostración. Aplicando el **Teorema 5.2** al $\triangle ABC$ con los puntos D y E, respectivamente, se obtiene:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle BAD)}{\operatorname{sen}(\angle DAC)} \quad \wedge \quad \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle BAE)}{\operatorname{sen}(\angle EAC)}$$

$$\Longrightarrow \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle BAD)}{\operatorname{sen}(\angle DAC)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle BAE)}{\operatorname{sen}(\angle EAC)}$$

Pero como $\angle BAE = \angle DAC$, entonces $\angle BAD = \angle EAC$, de donde se sigue el resultado. ■

1.2. Simedianas

Definición 1.10 (Simediana).

La simediana correspondiente al vértice A se define como la reflexión de A-mediana con respecto a la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$. En otras palabras, es la recta isogonal correspondiente a la mediana que parte del mismo vértice de referencia.

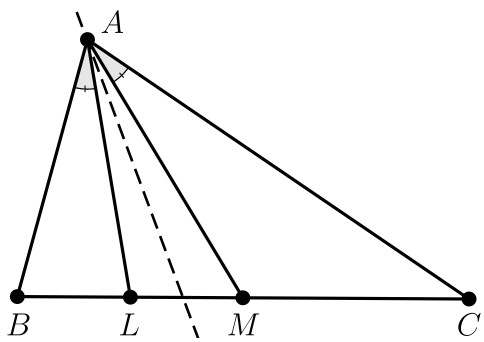


Figura 1: La recta AL es la A-simediana del triángulo ABC.

En el caso de la figura 1, la recta AL es la A-simediana del $\triangle ABC$. Es decir $\angle BAL = \angle MAC$. No hace falta decir que todo triángulo contiene tres simedianas. Por la **Definición 1.4** vista en la clase anterior, sabemos que, al concurrir las medianas en el baricentro, las simedianas comparten también un punto en común, llamado el **punto de Lemoine**.

Lema 1.1.

Sea N un punto sobre el segmento BC; entonces, N pertenece a la A-simediana si y solo si

$$\frac{BN}{NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Demostración. Es una aplicación directa del **Teorema 1.6**. ■

Lema 1.2.

Sea D el punto de intersección de las tangentes por B y C al circuncírculo del triángulo ABC. Luego, AD es una simediana de $\triangle ABC$.

Demostración. Supongamos que las prolongaciones de los lados AB y AC cortan a la paralela a BC por P en S y T, respectivamente. Es claro que $\angle PSB = \angle CBA$ y $\angle PTC = \angle BCA$. Además, $\angle PBS = \angle BCA$ y $\angle PCT = \angle CBA$ por la condición de tangencia de PB y PC.

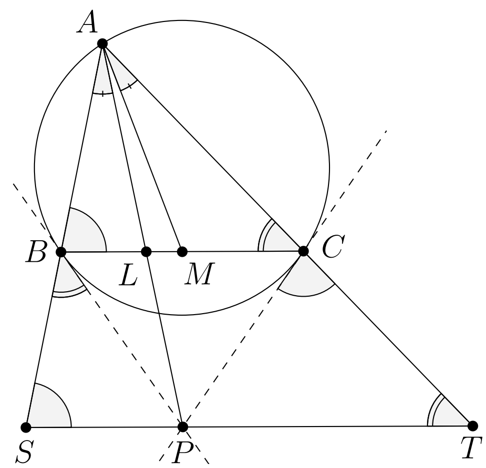


Figura 2: Una forma de construir e identificar la A-simediana.

De este modo, $\triangle BPS \sim \triangle CAB \sim \triangle TPC$, lo que a su vez implica que:

$$\frac{SP}{PB} = \frac{AB}{AC} \wedge \frac{PC}{PT} = \frac{AB}{AC} \implies \frac{SP}{PB} \cdot \frac{PC}{PT} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

$$\frac{SP}{PB} \cdot \frac{PC}{PT} = \left(\frac{AS}{AT}\right)^2 \quad (\text{Por } \triangle CAB \sim \triangle TAS)$$

$$\frac{SP}{PT} = \left(\frac{AS}{AT}\right)^2 \quad (PB = PC \text{ por tangencia})$$

luego, por el lema 1.1, AP es simediana de $\triangle SAT$ y, de paso, también de $\triangle BAC$. ■

Definición 1.11 (Recta de Lemoine).

Sea el triángulo ABC y Ω su circuncírculo, las tangentes a Ω por A, B y C se intersecan con los lados opuestos BC, AC y BA en los puntos E, F y D, respectivamente. Así, se cumple que E, F y D están sobre una misma recta, llamada la **recta de Lemoine** del triángulo ABC.

1.3. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Demostrar que todas las medianas de un triángulo concurren en un punto (Baricentro).

Ejercicio 1.2. Demostrar que todas las alturas de un triángulo concurren en un punto (Ortocentro).

Ejercicio 1.3. Demostrar que todas las bisectrices interiores de un triángulo concurren en un punto (Incentro).

Ejercicio 1.4. Demostrar que dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior de un triángulo concurren en un punto (Excentro).

Ejercicio 1.5. Sean BE, AD y CF líneas tales que dividen a un triángulo en $AE = 12$, $EC = 6$, $CD = 7$, $DB = 10$, $BF = 5$, $FA = 7$. Demostrar que BE, AD y CF son concurrentes.

Ejercicio 1.6. Sea ABC un triángulo con lados AB, BC, CA que tienen longitudes 13, 15, 14, respectivamente. Si CF, AD y BE concurren y $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{5}{8}$, encuentra el valor de BD y DC.

Ejercicio 1.7. En un triángulo ABC en el cual se traza la altura BH, la mediana AM y la ceviana CN las cuales concurren en el punto P. Si $BP = 3PH$ y $NB = 16$. Hallar AN.

Ejercicio 1.8. Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC, y si BQ y CP se cortan en O, demuestra que AO es una mediana.

Ejercicio 1.9. Sean L, M y N puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O, demostrar que

$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1.$$

Ejercicio 1.10. Sean L, M y N puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo, respectivamente. Si AL, BM y CN concurren en O, demostrar que

$$\frac{AO}{OL} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}.$$

Ejercicio 1.11. Realizar la construcción de las tres simedianas de un triángulo ABC con la ayuda del Lemma 1.2 y ubicar el punto de **Lemoine**.

Ejercicio 1.12. Realizar la construcción de la recta de **Lemoine** para un triángulo ABC.

Problema 1.1. Sea ABC un triángulo. Se toman los puntos D, E y F en las mediatrices de BC, CA y AB respectivamente. Probar que las rectas que pasan por A, B y C que son perpendiculares a EF, FD y DE, respectivamente, son concurrentes.

Problema 1.2. Sea L el punto de **Lemoine** de un triángulo ABC y M el punto en BC tal que AM contiene a L. Demostrar que

$$\frac{AL}{LM} = \frac{BA^2 + AC^2}{BC^2}.$$

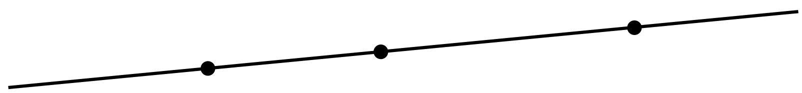
Problema 1.3. Las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle BAC$ de $\triangle ABC$, intersecan a la recta BC en E y D, respectivamente. El circuncírculo de $\triangle DEA$ interseca al circuncírculo de $\triangle ABC$ en X. Probar que AX es la A-simediana de $\triangle ABC$.

Problema 1.4. Sea AD una altura de $\triangle ABC$. Consideremos AD como diámetro de una circunferencia que corta los AB y AC en K y L, respectivamente. Las tangentes a la circunferencia en los puntos K y L se intersectan en un punto M. Demuestra que la recta AM divide BC por la mitad.

Problema 1.5. Un cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene $AD = CD$ y $\angle DAB = \angle ABC < 90°$. La recta por D y el punto medio de BC intersecta a la recta AB en un punto E. Demuestra qur $\angle BEC = \angle DAC$.

Problema 1.6. Una recta paralela a BC corta a los lados AB y AC en M y N en el $\triangle ABC$, respectivamente. Sea P el punto de corte de BN y CM. Sea Q el segundo punto de corte de los circuncírculos de MPB y NCP. Demostrar que $\angle BAQ = \angle PAC$.

2. Colinenalidad



Tres puntos son **colineales** si se encuentran sobre una misma recta. Dicho esto, presentaremos algunos enfoques que nos ayudarán a probar que tres puntos son colineales al resolver problemas de geometría.

Hay tres formas más comunes de angulear que nos permiten probar que tres puntos A, B y C son colineales.

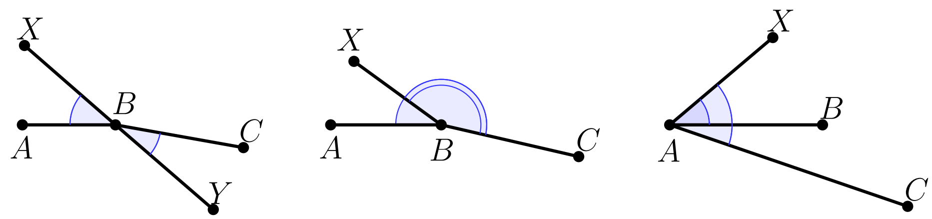


Figura 3: Tres configuraciones de colinealidad.

En la primera configuración, comenzando de izquierda a derecha, necesitaremos dos puntos adicionales que ya son colineales con nuestro punto "medio" B. Sean esos puntos X e Y. Si $\angle XBA = \angle YBC$, entonces los puntos A, B y C son colineales.

En la segunda configuración, necesitaremos un punto extra X que no esté en la supuesta recta $A - B - C$. Si $\angle ABX + \angle XBC = 180°$, entonces los puntos A, B y C son colineales.

En la tercera configuración, también necesitaremos un punto extra X que no esté en la supuesta recta $A - B - C$. Si $\angle XAB = \angle XAC$, entonces los puntos A, B y C son colineales.

2.1. Teorema de Menelao

Teorema 2.1 (Teorema de Menelao).

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (posiblemente en sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales si y sólo si

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

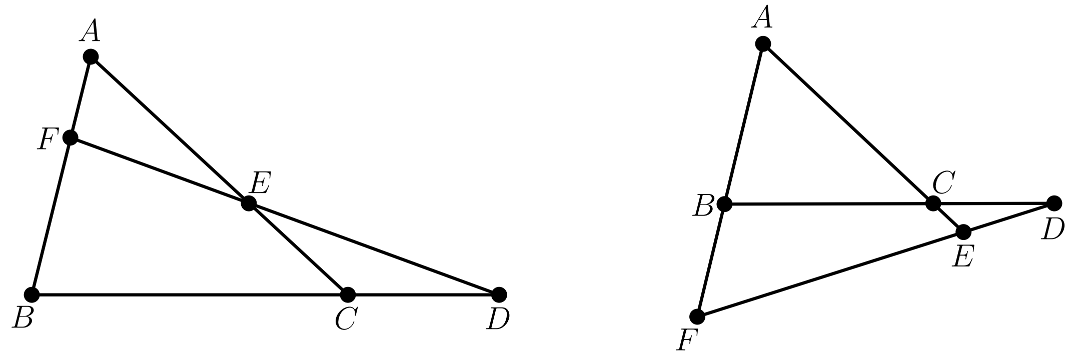


Figura 4: Configuraciones típicas del teorema de Menelao.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

Observación 1.

Una manera fácil de recordar cómo escribir esas proporciones[a] es la siguiente. Si tenemos el $\triangle XYZ$ y los puntos $M \in XY$, $N \in YZ$ y $P \in ZX$, entonces primero, vamos a escribir los lados de manera cíclica, algo como

$$\frac{X\quad}{\quad Y} \cdot \frac{Y\quad}{\quad Z} \cdot \frac{Z\quad}{\quad X}$$

y después solo tendremos que agregar el punto en el numerador y denominador en la fracción del lado correspondientes, es decir

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YN}{NZ} \cdot \frac{ZP}{PX}.$$

[a]También funciona para el teorema de **Ceva**.

Teorema 2.2 (Menelao trigonométrico).

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (posiblemente en sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales si y sólo si

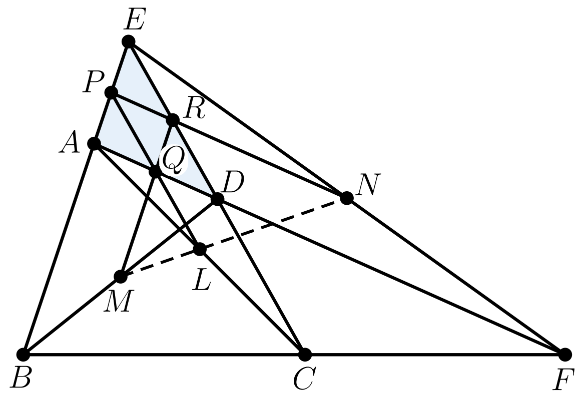
$$\frac{\operatorname{sen}(\angle BAD)}{\operatorname{sen}(\angle DAC)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle CBE)}{\operatorname{sen}(\angle EBA)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle ACF)}{\operatorname{sen}(\angle FCB)} = 1.$$

Demostración. La demostración se deja como ejercicio al lector. ■

Teorema 2.3 (Recta de Gauss).

Sean L y M los puntos medios de las diagonales AC y BD del cuadrilátero $ABCD$. Las rectas AB y CD se cortan en E, y las rectas AD y BC se cortan en F. Sea N el punto medio de EF. Entonces los puntos L, M y N colineales.

Demostración. Sean P, Q y R los puntos medios de AE, AD y DE respectivamente.



Las rectas PQ, QR y PR son **bases medias** de $\triangle ADE$, por lo tanto son las respectivas bases medias de $\triangle ACE$, $\triangle BDE$ y $\triangle AFE$, así que estas pasan por L, M y N.

Por semejanza, tenemos que

$$\frac{LQ}{LP} = \frac{CD}{CE}, \quad \frac{NP}{NR} = \frac{FA}{FD} \quad \text{y} \quad \frac{MR}{MQ} = \frac{BE}{BA}.$$

Al multiplicar y reordenar se obtiene:

$$\frac{QL}{LP} \cdot \frac{PN}{NR} \cdot \frac{RM}{MQ} = \frac{AF}{FD} \cdot \frac{DC}{CE} \cdot \frac{EB}{BA}$$

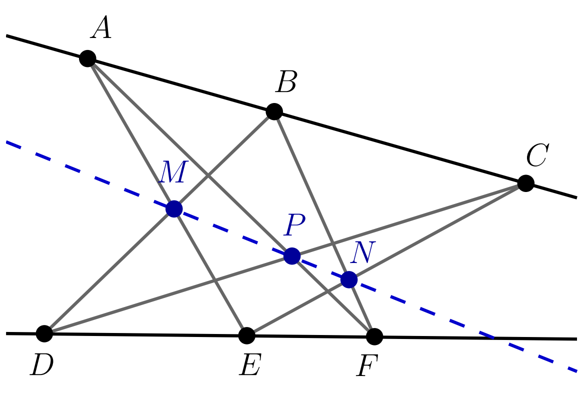
Pero este producto es igual a 1, ya que se cumple el **Teorema 2.1** para el triángulo $\triangle ADE$ con respecto a la transversal $B-C-F$. Se concluye entonces que L, M y N son colineales. ■

2.2. Teorema de Pappus

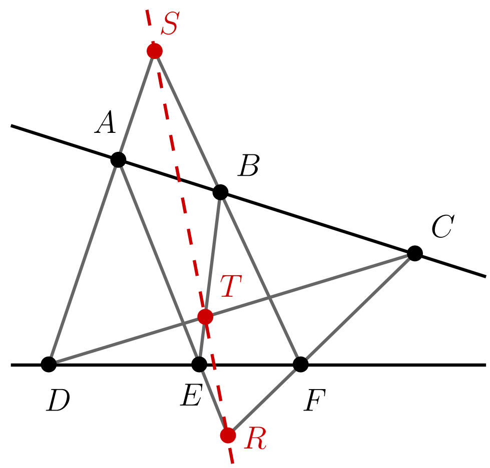
Teorema 2.4 (Teorema de Pappus).

Sean A, B y C tres puntos colineales, no necesariamente en ese orden, y D, E y F otros tres puntos colineales, no necesariamente en ese orden. Entonces, los puntos de intersección de las rectas AE, BD; AF, CD y BF, CE son colineales.

Naturalmente, existen muchas configuraciones aparte de las mostradas en la figura 5, pero estas son las más comunes.



(a) Transversal $M - P - N$.

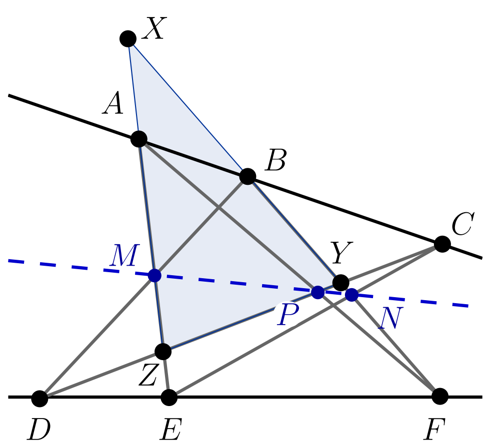


(b) Transversal $S - T - R$.

Figura 5: Teorema de Pappus.

Demostración. Sean $M = AE \cap BD$, $N = BF \cap CE$ y $P = AF \cap CD$. Divideremos la demostración en dos casos, basado en si las rectas AE y BF se intersecan o son paralelas.

Caso 1. Si estas se intersecan, sea $AE \cap BF = X$. Sea $Y = BF \cap CD$ y $Z = AE \cap CD$.



Dado que M, N y P son laterales a $\triangle XYZ$, podemos usar el **Teorema 2.1** para tratar de probar que son colineales, es decir necesitamos probar que

$$\frac{XN}{NY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZM}{MX} = 1.$$

Ahora, trataremos de encontrar cada una de estas tres proporciones por medio de la aplicación del **Teorema 2.1** con otras rectas que se cruzen con $\triangle XYZ$.

Para lograr esto, usaremos el **Teorema 2.1** tres veces en el $\triangle XYZ$ con las transversales $C - N - E$, $A - P - F$ y $D - M - B$, respectivamente, obtendremos

$$\frac{XN}{NY} \cdot \frac{YC}{CZ} \cdot \frac{ZE}{EX} = 1, \quad \frac{XF}{FY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZA}{AX} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{XB}{BY} \cdot \frac{YD}{DZ} \cdot \frac{ZM}{MX} = 1.$$

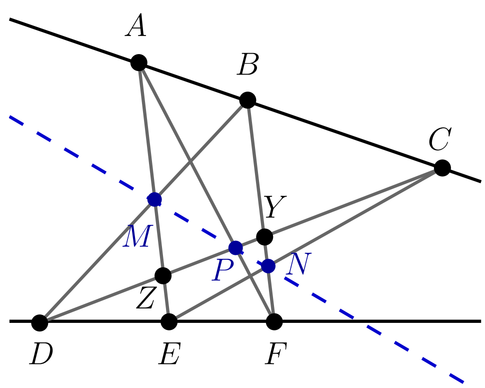
Sin embargo, vemos que al multiplicar estos resultados nada se cancela, así que necesitamos hallar otras igualdades tal que usen esos segmentos de recta.

Rápidamente, vemos que usando el **Teorema 2.1** dos veces más en $\triangle XYZ$, pero ahora con las transversales $A-B-C$ y $D-E-F$, obtenemos

$$1=\frac{XB}{BY}\cdot\frac{YC}{CZ}\cdot\frac{ZA}{AX} \quad \text{y} \quad 1=\frac{XF}{FY}\cdot\frac{YD}{DZ}\cdot\frac{ZE}{EX}.$$

Multiplicando estas 5 igualdades lado a lado, y viendo que 6 de las proporciones del lado izquierdo de la ecuación se cancelan con cada una las proporciones del lado derecho. Quedándonos con lo que queríamos demostrar.

Caso 2. Ahora, veamos que pasa si el punto X no existe, es decir $AE \parallel BF$. Observemos que el punto X aparece exactamente dos veces en cada una de las 5 igualdades de arriba, una vez en el numerador y una vez en el denominador. Trataremos de encontrar igualdades análogas tal que no usen segmentos que contengan X. En realidad podemos lograr esto, usando rectas paralelas para encontrar triángulos semejantes.



Por el criterio *(AA)*, obtenemos que $\triangle CYN \sim \triangle CZE$.

$$\therefore \quad \frac{CY}{YN}=\frac{CZ}{ZE} \quad \Longrightarrow \quad \frac{CY}{YN}\cdot\frac{ZE}{CZ}=1.$$

Así mismo, obtenemos las siguientes semejanzas $\triangle PYF \sim \triangle PZA$, $\triangle DYB \sim \triangle DZM$, $\triangle YCB \sim \triangle ZCA$ y $\triangle YDF \sim \triangle ZDE$. De donde, sacamos igualdades análogas.

Multiplicando estas igualdades, obtenemos

$$\frac{CY}{YN}\cdot\frac{ZE}{CZ}\cdot\frac{PY}{YF}\cdot\frac{ZA}{PZ}\cdot\frac{DY}{YB}\cdot\frac{ZM}{DZ}\cdot\frac{YB}{YC}\cdot\frac{ZC}{ZA}\cdot\frac{YF}{YD}\cdot\frac{ZD}{ZE}=1$$

$$\therefore \quad \frac{PY}{YN}\cdot\frac{ZM}{PZ}=1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{PY}{YN}=\frac{PZ}{ZM}$$

Como $\angle PYN=\angle PZM$, por *(LAL)* obtenemos que $\triangle PYN \sim \triangle PZM$ y por lo tanto $\angle YPN=\angle ZPM$. Ya que $Y-P-Z$ son colineales, por consiguiente $N-P-M$. ■

Observación 2.

Una manera mnemotécnica de indentificar y no olvidar los puntos colineales es la mostrada en la figura 6.

Donde la primera y segunda fila contienen a los trios de puntos que sabemos son colineales y la tercera los nuevos puntos N, P y M. Cada uno de estos es la intersección de las rectas formadas con los puntos en posición diagonal de las columnas en la que dicho punto no está.

A	B	C
D	E	F
N	P	M

Figura 6: Mnemotécnia de Pappus.

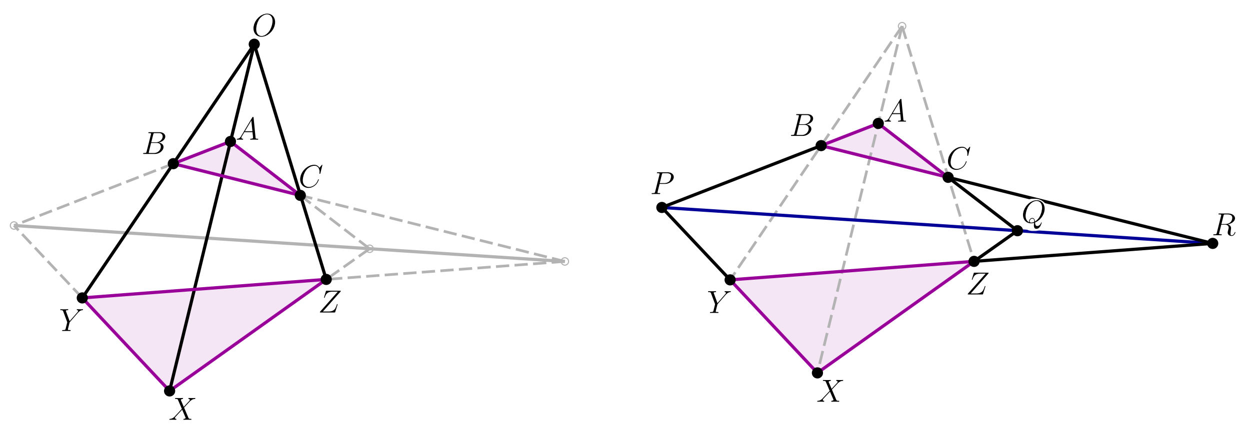
Es decir $N = \overline{BF} \cap \overline{CE}$, $P = \overline{AF} \cap \overline{CD}$ y $M = \overline{AE} \cap \overline{BD}$.

2.3. Teorema de Desargues

Consideremos dos triángulos arbitrarios $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$. Antes de establecer el resultado principal, es necesario proporcionar dos definiciones fundamentales.

Definición 2.1.

- Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en *perspectiva respecto a un **punto*** (digamos O) si las rectas AX, BY y CZ son concurrentes.
- Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en *perspectiva respecto a una **recta*** si los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes de ambos triángulos (digamos $P = AB \cap XY$, $Q = CA \cap ZX$ y $R = BC \cap YZ$) son colineales.



(a) Perspectiva con respecto a un punto.

(b) Perspectiva con respecto a una recta.

Figura 7: Perspectiva de dos triángulos.

Teorema 2.5 (Teorema de Desargues).

Dos triángulos están en perspectiva con respecto a una recta si y solo si están en perspectiva con respecto un punto.

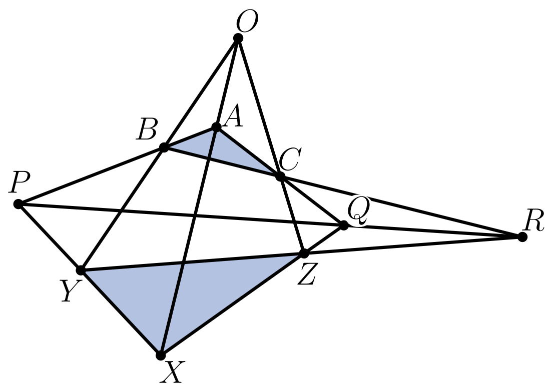
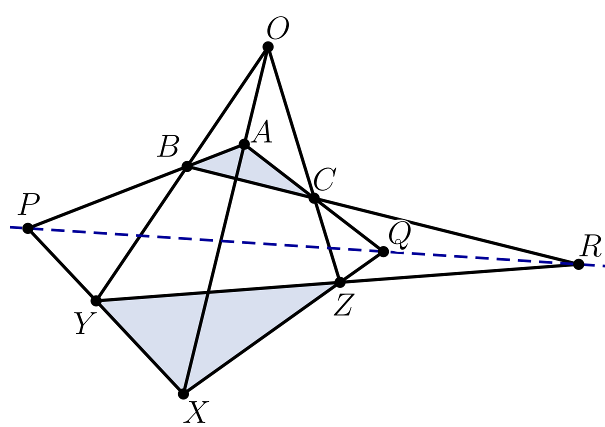


Figura 8: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva con O y la recta PR.

Claramente, al igual que el **Teorema 2.4**, el teorema de Desargues tiene muchas más configuraciones.

Demostración. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ dos triángulos en perspectiva a un punto, entonces AX, BY y CZ son concurrentes con el punto O. Sea $P = AB \cap XY$, $R = BC \cap YZ$ y $Q = CA \cap ZX$.



Aplicando el **Teorema 2.1** a los triángulos $\triangle OAB$ con la transversal $P - Y - X$, $\triangle OBC$ con la transversal $R - Z - Y$ y $\triangle OCA$ con la transversal $Q - Z - X$, obtenemos que;

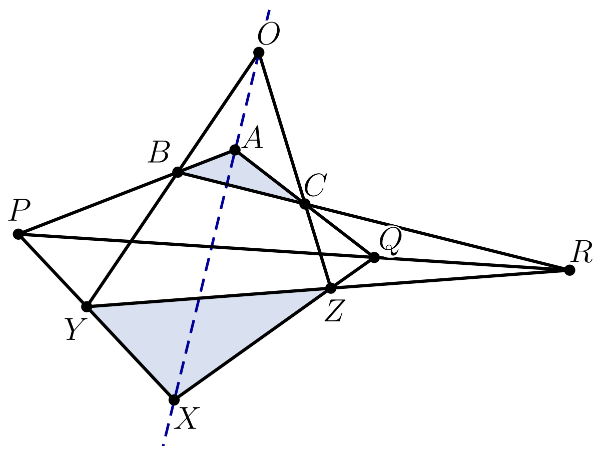
$$\frac{OX}{XA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BY}{YO} = 1, \qquad \frac{OY}{YB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CZ}{ZO} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{OZ}{ZC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AX}{XO} = 1.$$

Multiplicando estas tres igualdades, llegamos al siguiente resultado

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1,$$

que por el **Teorema 2.1** aplicado al triángulo $\triangle ABC$, significa que los puntos P, R y Q son colineales, es decir $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva con respecto a la recta PQ.

Ahora, probaremos la otra dirección. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ dos triángulos en perspectiva a un recta, entonces los puntos $P = AB \cap XY$, $Q = CA \cap ZX$ y $R = BC \cap YZ$ son colineales.



Sean $O = BY \cap CZ$. Debemos de probar que AX también pasa por O.

Observemos los triángulos $\triangle QCZ$ y $\triangle PBY$. Las rectas QP, CB y ZY con concurrentes en R, así que los triángulos están en perspectiva con respecto a ese punto.

Por la dirección del teorema de Desargues que acabamos de demostrar, se deduce que los triángulos deben de estar en perspectiva respecto a una recta.

Es decir, los puntos $QC \cap PB = A$, $CZ \cap BY = O$ y $ZQ \cap YP = X$ son colineales. Con esto, probamos que AX pasa por O, luego $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ están en perspectiva respecto al punto O. ■

2.4. Teorema de Pascal

Teorema 2.6 (Teorema de Pascal).

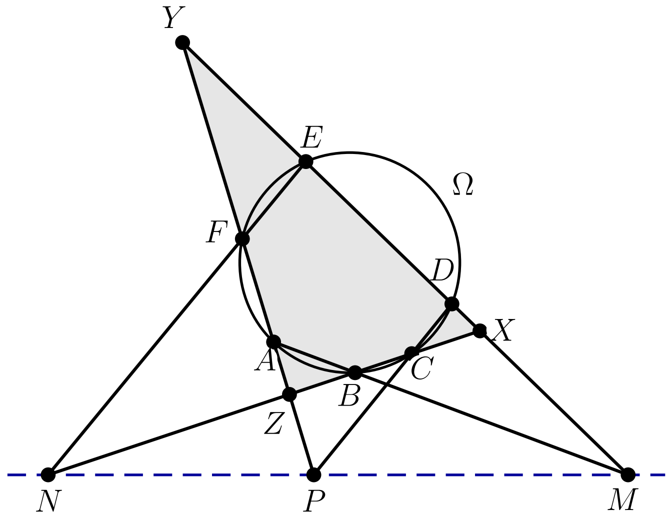
Sea $ABCDEF$ un héxagono inscrito, no necesariamente convexo, en una círcunferencia Ω. Entonces, los puntos $M = AB \cap DE$, $N = BC \cap EF$ y $P = CD \cap FA$ son colineales.

Demostración. Sean $X = BC \cap DE$, $Y = DE \cap FA$ y $Z = FA \cap BC$. Al usar el teorema de **Menelao** tres veces en $\triangle XYZ$, primero con la transversal $A - B - M$, después con la transversal $P - C - D$ y finalmente con $F - N - E$, respectivamente, obtenemos que

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YA}{AZ} \cdot \frac{ZB}{BX} = 1, \qquad \frac{XD}{DY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZC}{CX} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{XE}{EY} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{ZN}{NX} = 1.$$

Multiplicando estas tres igualdades y reordenando los miembros, obtenemos que

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZN}{NX} \cdot \frac{(YA \cdot YF) \cdot (ZB \cdot ZC) \cdot (XD \cdot XE)}{(AZ \cdot FZ) \cdot (BX \cdot CX) \cdot (DY \cdot EF)} = 1. \tag{$*$}$$



Ahora por la **Propiedad 5.1** sabemos que para los puntos X, Y y Z se cumple que

$$XD \cdot XE = XC \cdot XB \quad \wedge \quad YF \cdot YA = YE \cdot YD \quad \wedge \quad ZB \cdot ZC = ZA \cdot ZE$$

Así $(*)$ se convierte en

$$\frac{XM}{MY} \cdot \frac{YP}{PZ} \cdot \frac{ZN}{NX} = 1,$$

que por el teorema de **Menelao** significa que M, N y P son colineales. ■

Observación 3.

Una manera fácil de recordar las intersecciones es la siguiente: Tomamos dos letras consecutivas, dejamos una letra de espacio, y tomamos otras dos letras consecutivas. La intersección de las rectas formadas con eso pares puntos es el primer punto de la colinealidad. Luego nos movemos a la derecha y repetimos el proceso dos veces más.[a]

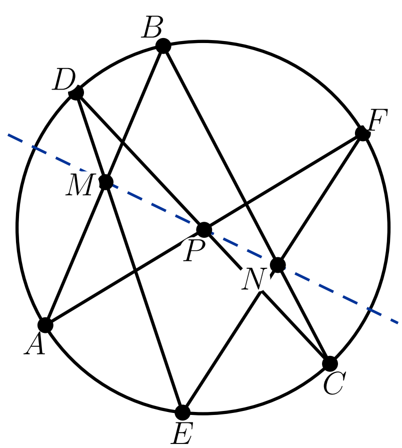


Figura 9: Teorema de Pascal.

A	E	C
D	B	F
N	P	M

Figura 10: Mnemotécnia de Pascal.

Donde $N = \overline{EF} \cap \overline{CB}$, $P = \overline{AF} \cap \overline{CD}$ y $M = \overline{AB} \cap \overline{ED}$.

[a]Otra manera de verlos es tomar vértices consecutivos módulo 3.

El **Teorema 2.6** es independiente de cómo haya sido tomado el hexágono. El mostrado en la demostración es el caso más sencillo en el cual el hexágono es convexo. Sin embargo, la colinealidad se sigue cumpliendo aunque el hexágono no sea convexo, como se puede ver en la figura 9. La demostración de este caso y de cualquier otro es análoga a la primera.

Ejemplo 2.1.

Sean D y E los puntos medios de los arcos menores $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ del circuncírculo del $\triangle ABC$, respectivamente. Sea P un punto en el arco menor BC, $Q = PD \cap AB$ y $R = PE \cap AC$. Probar que la recta QR pasa a traves de incentro I del $\triangle ABC$.

Solución. Dado que D es el punto medio del arco $\widehat{AB}$, CD es bisectriz del ángulo $\angle BCA$. Análogamentes, BE es bisectriz de $\angle ABC$. Por lo tanto, $CD \cap BE = I$.

Ahora, aplicando el **Teorema 2.6** al hexágono $CDPEBA$ tenemos que los puntos $CD \cap BE = I$, $DP \cap BA = Q$ y $PE \cap AC = R$ son colineales. ■

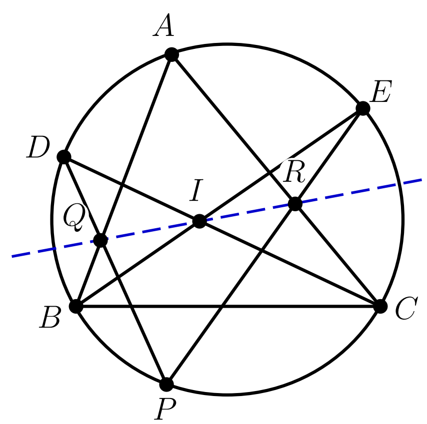


Figura 11: Ejemplo 2.1, aplicación del teorema de Pascal.

El **Teorema 2.6** puede presentar versiones degeneradas, aunque puede suceder, el caso más habitual ya no consiste en un paralelismo, sino en la transformación de un polígono de seis lados a un polígono de cinco, cuatro o tres lados.

Ejemplo 2.2.

Sea ω el circuncírculo del $\triangle ABC$. Las tangentes a ω por lo puntos A, B y C intersecan a las rectas BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. Probar que los puntos D, E y F está alineados.

Solución. Aplicando el **Teorema 2.6** al hexágono degenerado $AABBCC$. Tenemos que los puntos $AA \cap BC = D$, $AB \cap CC = F$ y $BB \cap CA = E$ son colineales. ■

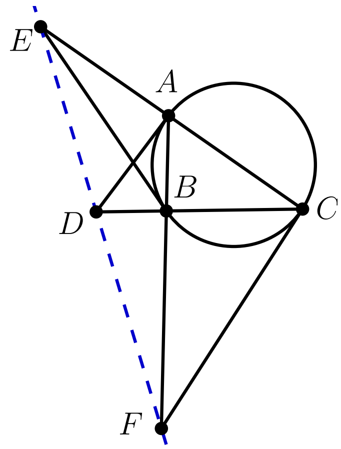


Figura 12: Ejemplo 2.2.

Existen $\frac{5!}{2} = 60$ maneras de posibles de formar un hexágono con 6 puntos distribuidos en una circunferencia, y, por el **Teorema 2.6**, a cada hexágono le corresponde una recta de Pascal. Estas 60 rectas de Pascal pasan de tres en tres por 20 puntos llamados puntos de Steiner, que su vez están de cuatro en cuatro sobre 15 rectas, llamadas rectas de Plucker.

2.5. Teorema de Brianchon

Teorema 2.7 (Teorema de Brianchon).

Sea $ABCDEF$ un hexágono circunscrito, no necesariamente convexo, a un círculo Ω. Entonces, las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

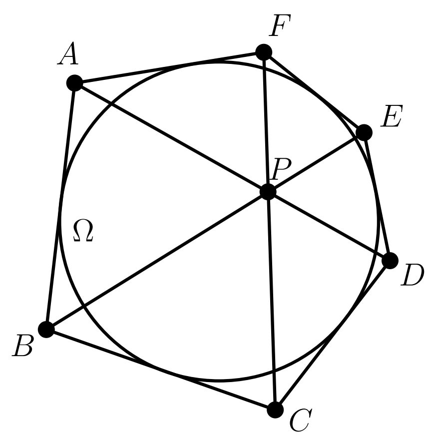


Figura 13: Teorema de Brianchon.

La demostración más sencilla del teorema de Brianchon implica utilizar polos y polares. Pues resulta que el **Teorema 2.6** y **Teorema 2.7** son *duales bajo la transformación polar*. Esto significa que, al tomar la colinealidad proporcionada por el **Teorema 2.6** y aplicarle la transformación polar con respecto al círculo de referencia, inmediatamente obtenemos la concurrencia que el **Teorema 2.7** implica. Ya que el tema de polos y polares no lo veremos en el curso, se invita al estudiante indagar la demostración de este teorema por su cuenta.

De la misma manera que con el primer teorema, el **Teorema 2.7** está sujeto a versiones degeneradas. En este caso, los vértices degenerados coinciden con los puntos de tangencia entre el polígono y el círculo inscrito. En efecto, al aplicar el **Teorema 2.7** al hexagono $ABCDEF$ con D, F y B puntos de tangencia, como se muestra en la figura 14, redescubrimos que los puntos de tangencia del incírculo de $\triangle ACE$ concurren.

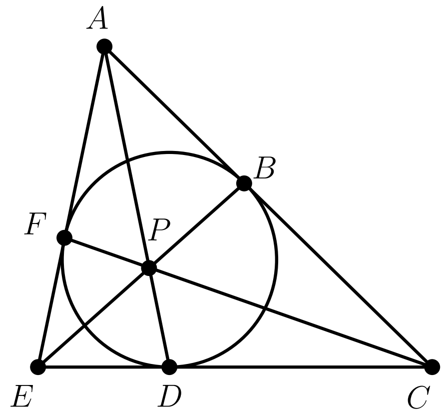


Figura 14: Un caso degenerado del teorema de Brianchon.

Observación 4.

Al igual que con el teorema anterior, existe una manera fácil de obtener el punto de concurrencia. Ordenamos los puntos en una tabla, luego tomamos los segmentos formados con los puntos consecutivos de arriba hacia abajo. La intersección de estos segmentos es el punto de concurrencia.

A	B	C
D	E	F
AD	BE	CF

Figura 15: Mnemotécnia de Brianchon.

Es decir $P = \overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF}$. Otra manera de ver esto, es tomar las rectas formadas por los puntos cuyas posiciones son las mismas en módulo 3.

2.6. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Problema 2.1. Demuestre que las tangentes a la circunferencia circunscrita a un triángulo en los vértices de este, cortan a los lados opuestos de dicho triángulo en tres puntos colineales.

Problema 2.2. Si los lados AB, BC, CD y DA de un cuadrilátero $ABCD$ son cortados por una transversal en los puntos A', B', C' y D', respectivamente. Probar que

$$\frac{AA}{A'B}\cdot\frac{BB'}{B'C}\cdot\frac{CC'}{C'D}\cdot\frac{DD'}{D'A}=1.$$

Problema 2.3. Sean AD, BE y CF tres cevianas concurrentes en un triángulo $\triangle ABC$. Se toma un punto D' en BC tal que $BD=CD'$. Las paralelas a BC por E y F cortan AD y AD' en G y H respectivamente. Prueba que C, G y H son colineales.

Problema 2.4. En un paralelogramo $ABCD$ con $\angle B<90°$, el círculo de diámetro AC corta las rectas CB y CD en E y F, respectivamente, y la tangente al círculo por A corto BD en P. Demuestre que P, F y E están alineados.

Problema 2.5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Las diagonales AC y BD se cortan en E, y los lados AB y CD se cortan en F. Sean J y K los ortocentros de $\triangle ADF$ y $\triangle BCF$ respectivamente. Demuestre que J, E y K están alineados.

Problema 2.6. Sea $ABCD$ un trapecio con AB mayor y paralelo a CD. Sean E y F puntos en AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC}$. Sean K y L puntos en EF tales que $\angle AKB=\angle DCB$ y $\angle CLD=\angle CBA$. Demuestre que $KLCB$ es cíclo.

Problema 2.7. Sea P la intersección de las diagonales AC y BD en el cuadrilátero cíclico $ABCD$. Sean E, F, G y H los pies de las perpendiculares desde P hacía AB, BC, CD y DA, respectivamente. Pruebe que las rectas EH, BD y FG son concurrentes o son paralelas.

Problema 2.8. Dado el $\triangle ABC$ con circuncentro O. Sea A_1 y B_1 los pies de las alturas trazadas desde A y B, respectivamente. Sea M y N los puntos medios de AC y BC, respectivamente. Sea el punto $X\in BB_1$ tal que $MX\perp AB$ y de manera análoga el punto $Y\in AA_1$ tal que $NY\perp AB$. Se define $P=A_1M\cap B_1N$ y $Q=XN\cap YM$. Demostrar que P, Q y O son colineales.

Problema 2.9. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y Γ su circuncírculo. Sea D un punto en el segmento BC, diferente de B y C, y sea M el punto medio de AD. La perpendicular a AB que pasa por D interseca a AB en E y Γ en F, con el punto D entre E y F. Las rectas FC y EM se intersectan en el punto X. Si $\angle DAE=\angle AFE$, demostrar que la recta AX es tangente a Γ.

Problema 2.10. Sea Γ el circuncírculo del $\triangle ABC$. Un círculo que pasa por A y C corta a los lados BC y BA en D y E, respectivamente. Las rectas AD y CE intersecan a Γ por segunda vez en G y H, respectivamente. Las tangentes a Γ por A y C intersecan a la recta DE en L y M, respectivamente. Probar que las rectas LH y MG se cortan en Γ.

Problema 2.11. Sea el triángulo $\triangle ABC$ y sean D, E y F los puntos de tangencia del excírculo en A con respecto a los lados BC, CA y AB. Sean H y G las intersecciones de excírculo con BE y CF respectivamente. Se toma un punto S en AD, sean U y V las intersecciones del excírculo con SH y SG respectivamente. Demuestre que BC, UV, GH y EF son concurrentes.

3. Homotecia

3.1. Homotecia en polígonos

Definición 3.1 (Homotecia).

La homotecia es una transformación geométrica la que, dado un punto P en el plano y un número real $k \neq 0$, traslada cada punto Q del plano a un punto Q' de modo que

- Los punto P, Q y Q' son colineaes, y
- $\dfrac{Q'P}{QP} = k$.

El punto P se llama **centro de homotecia**, k es la **razón de homotecia** y los punto Q y Q' son nombrados **elementos homólogos**.

Si k es un número real positivo, diremos que la homotecia es **directa**; en este caso, los elementos homólogos yacen a un mismo lado del centro de homotecia P; en contraste, la homotecia es **inversa** si k es negativo, en la que los elementos homólogos yacen en lados opuestos con respecto a P.

En caso de aplicar una homotecia con centro P y razón k a n puntos P_1, P_2, $\cdots$, P_n y obtener los puntos homólogos P_1', P_2', $\cdots$, P_n', se dice que los polígonos, no necesariamente convexos, $P_1P_2\cdots P_n$ y $P_1'P_2'\cdots P_n'$ son **homotéticos**. En esta situación todos los elementos correspondientes (tales como lados, diagonales, etc) también son elementos homólgos.

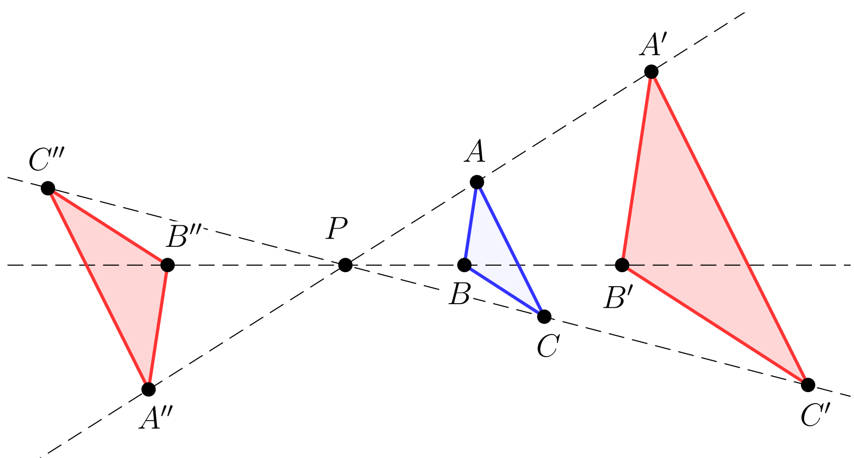


Figura 16: Una homotecia directa envía $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ y una inversa manda $\triangle ABC$ a $\triangle A''B''C''$.

Observación 5.

Para una mayor fomalidad, usaremos la siguiente notación;

$$H(O, \pm k) : P \to P'$$

La cual se lee "La homotecia directa/inversa con centro O y razón k, envía P a P'."

Utilizando la notación, para describir la figura 16, quedaría como:

$$H(P, k_1) : \triangle ABC \to \triangle A'B'C' \quad \text{y} \quad H(P, -k_2) : \triangle ABC \to \triangle A''B''C''.$$

3.1.1. Propiedades

Entre las propiedades más importantes de la homotecia tenemos:

- Los lados correspondientes de dos figuras homotéticas son paralelos.
- La razón de las áreas de dos figuras homotéticas es igual al cuadrado de la razón de homotecia.
- Los puntos notables de figuras homotéticas son siempre colineales con el centro de homotecia.
- La homotecia perserva ángulo y por ende tangencias.

3.1.2. Ejemplos

Ejemplo 3.1 (La recta de Euler).

Dado un triángulo cualquiera el circuncentro, ortocentro y baricentro son colineales.

Solución. Sea $\triangle ABC$ el triángulo, H y O su ortocentro y circuncentro; D y E pies de alturas desde A y B; L y M puntos medios de BC y AC, respectivamente.

Claramente $H(G, -2) : \triangle LMO \to \triangle ABH$, es decir los triángulos $\triangle ABH$ y $\triangle LMO$ son homotéticos, pues sus lados son paralelos y

$$k = \frac{AB}{LM} = -2.$$

Luego, AL, BM y HO son concurrentes en el baricentro G. ■

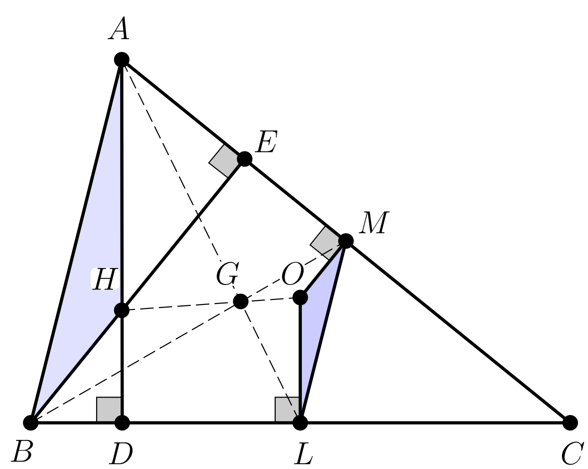


Figura 17: La Lecta de Euler.

Ejemplo 3.2 (La circunferencia de los nueve puntos).

Dado un triángulo cualquiera, los pies de las alturas, los puntos medios de los lados, y los puntos medios de los segmentos que van del vértice al ortocentro están en una misma circunferencia.

Solución.

Sea $\triangle ABC$ el triángulo, D, E y F pies de alturas, X, Y y Z intersecciones de las alturas con el circuncírculo, L, M y N puntos medios, A', B' y C puntos diametralmente opuestos, y P, Q y R puntos medios de AH, BH y CH, respectivamente. El centro de esta circunferencia se ubica sobre la recta que va del ortocentro al circuncentro.

Recordemos que D, E y F son puntos medios de HX, HY y HX, respectivamente. Y también que L, M y N son puntos medios de HA', HB' y HC', respectivamente.

De este modo el eneágono $AC'ZBXA'CB'Y$ es homotético a $PNFQDLRME$ con razón $1/2$ y centro H, y como el primero es cíclico, el segundo también debe serlo.

Pero como el centro de homotecia es H y la razón $\frac{1}{2}$, el centro del círculo de los nueve puntos debe ser el punto medio de OH. ■

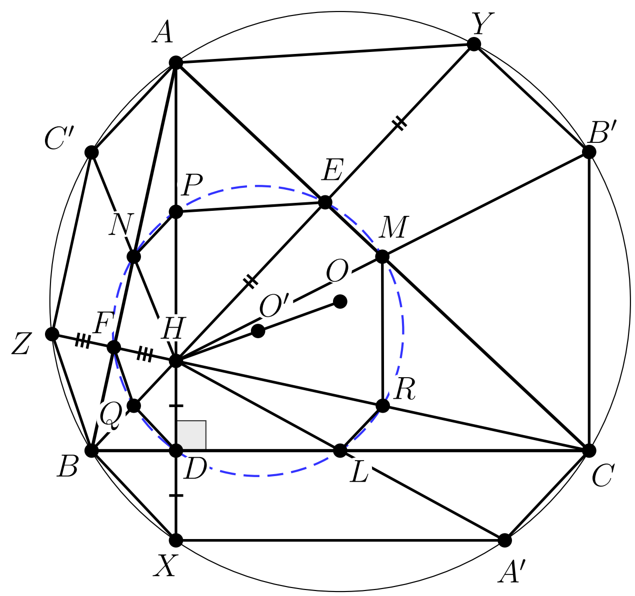


Figura 18: Circunferencia de los nueve puntos.

3.2. Homotecia en circunferencias

Dadas dos circunferencias de radios finitos y no concéntricas, siempre existen dos homotecias que transforman una circunferencia en la otra.

Definición 3.2 (Exsimilicentro e insimilicentro).

Sean dos circunferencias Ω_1 y Ω_2 con centros O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente. Consideremos los puntos P y Q tales que

$$H\left(P, \frac{r_1}{r_2}\right) : \Omega_1 \to \Omega_2 \quad \text{y} \quad H\left(Q, -\frac{r_1}{r_2}\right) : \Omega_1 \to \Omega_2.$$

Entonces P y Q son el **exsimilicentro** e **insimilicentro** de Ω_1 y Ω_2, respectivamente. Además, son puntos únicos.

¿Cómo construir el exsimilicentro y el insimilicentro? Un método general es el siguiente: Trazamos dos diámetros AB y CD en Ω_1 y Ω_2, respectivamente, tales que $AB||CD$. Luego, $P = AD \cap BD$ y $Q = AD \cap BD$.

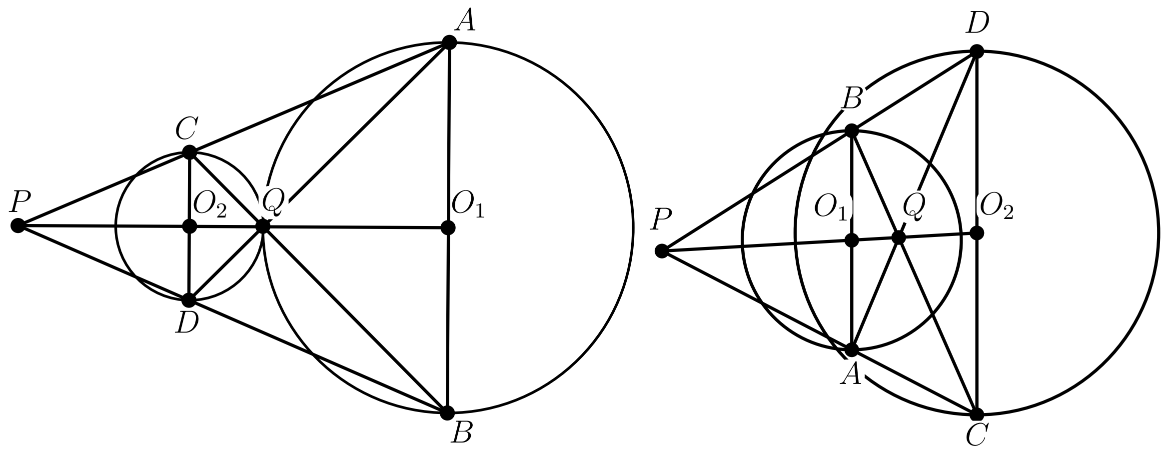


Figura 19: Trazado general del exsimilicentro e insimilicentro de dos circunferencias.

Una situación particular y muy frecuente en competiciones matemáticas sucede cuando Ω_1 y Ω_2 están en "posición general", es decir, no son cocéntricas, sus radios poseen distinta longitud positiva y no poseen puntos comunes. En este contexto, podemos obtener el exsimilicentro P como el punto común de las tangentes externas de Ω_1 y Ω_2, mientras tanto, Q sería el punto de intersección de las tangentes internas de Ω_1 y Ω_2, de aquí los prefijos ex- e in-, como se muestra en la figura 20.

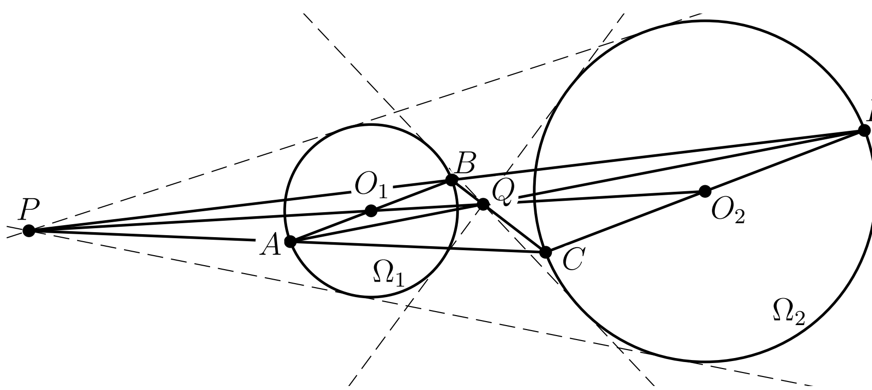


Figura 20: El exsimilicentro P e insimilicentro Q de Ω_1 y Ω_2.

Teorema 3.1 (Monge).

Sean Ω_1, Ω_2 y Ω_3 tres circunferencias. Los exsimilicentros P_1 de Ω_1 y Ω_2; P_2 de Ω_2 y Ω_3, y P_3 de Ω_3 y Ω_1 son colineales.

Demostración. Sea O_1 el circuncentro de Ω_1 y r_1 el radio. Se definen de manera análoga O_2, O_3, r_2 y r_3.

Por el teorema de Menelao aplicado al $\triangle O_1O_2O_3$, es suficiente probar que

$$\frac{O_3P_3}{P_3O_1} \cdot \frac{O_1P_1}{P_1O_2} \cdot \frac{O_2P_2}{P_2O_3} = 1,$$

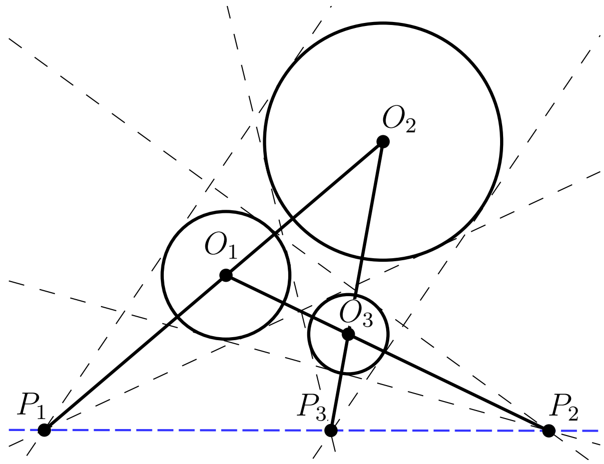


Figura 21: Teorema de Monge.

pero por defininción, tenemos que

$$\frac{O_3P_3}{P_3O_1} \cdot \frac{O_1P_1}{P_1O_2} \cdot \frac{O_2P_2}{P_2O_3} = \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} = 1$$

la conclusión es inmedianta. ■

Teorema 3.2 (Monge D'Alembert).

Sean Ω_1, Ω_2 y Ω_3 tres circunferencias. El exsimilicentro de Ω_1 y Ω_2, el insimilicentro de Ω_2 y Ω_3, y el insimilicentro de Ω_3 y Ω_1 son colineales.

Demostración. Similar a la prueba del **Teorema 3.1**. Esta demostración se deja como ejercicio al lector. ■

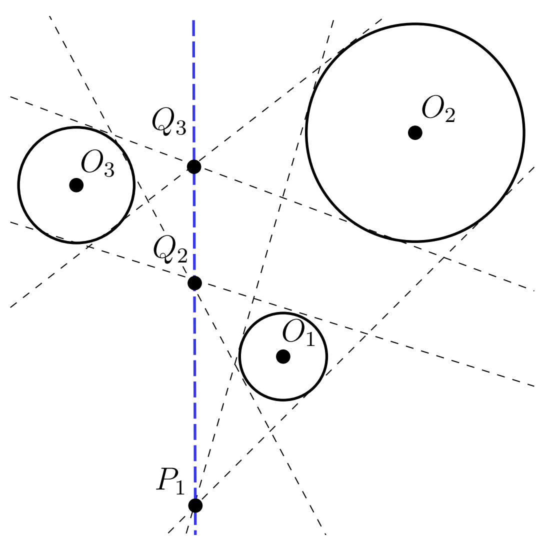


Figura 22: Teorema de Monge D'Alembert.

3.2.1. Estrategias

La homotecia en circunferencias resulta útil cuando:

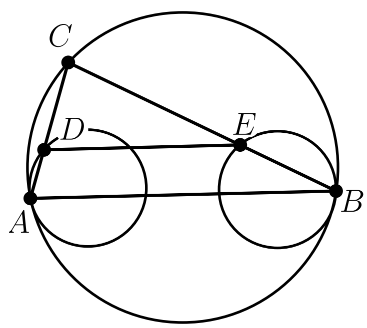
- Hay tangentes comunes.
- Hay circunferencias tangentes, interna o externamente.
- Hay cuerdas paralelas.

3.2.2. Ejemplos

Ejemplo 3.3.

Dos circunferencias iguales C_1 y C_2 son tangentes internamente a un circunferencia C_3 en dos puntos A y B, respectivamente. Sea C un punto en C_3. Si D y E son las intersecciones de AC y BC con C_1 y C_2, respectivamente, pruebe que $AB||DE$.

Solución. Rápidamente nos damos cuenta de $H(A,k) : C_1 \to C_3$ y $H(B,k) : C_2 \to C_3$.



En la homotecia se tiene que $D \to C$ y $E \to C$, y cómo los radios son iguales la razón de homotecia es la misma, en este caso k, entonces

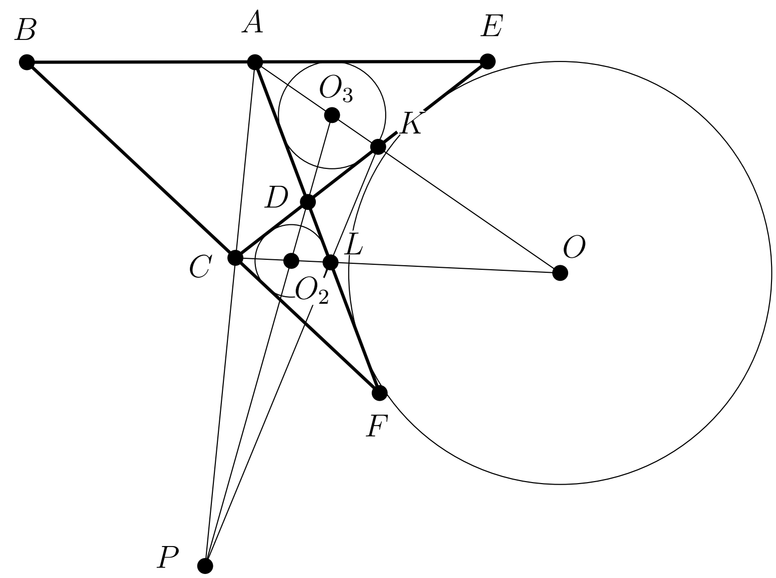
$$\frac{AD}{AC} = \frac{BE}{BC} = k \quad \Longrightarrow \quad AB||DE. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 3.4.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo ex-inscrible[a] tal que D es el más cercano a la circunferencia exinscrita. Sean E y F las intersecciones de AB con CD y BC con AD, respectivamente, y sean K y L las intersecciones de las bisectrices de $\angle DAE$ con DE y de $\angle DCF$ con DF, respectivamente. Demostrar que AC, KL y la bisectriz del ángulo $\angle ADE$ concurren.

[a] Existe una circunferencia tangente externamente a AB, BC, CD y DA.

Solución. Sea Γ la circunferencia ex-inscrita a $ABCD$, y sean Γ_1 y Γ_2 los incírculos de ADE y CDF, respectivamente. Llamemos O, O_1 y O_2 a los centros de Γ, Γ_1 y Γ_2 respectivamente.



Como DE es la tangente común interna a Γ y Γ_1, y además AO es bisectriz, entonces K es el centro de homotecia interno de Γ y Γ_1. De manera análoga L es el centro de similitud interno entre Γ y Γ_2. Pero A y C son los centro de homotecia externa de Γ con Γ_1 y Γ con Γ_2, respectivamente, entonces por el **Teorema 3.2** AC y KL deben cortarse en el centro de homotecia externo de Γ_1 y Γ_2, y así la recta O_1O_2, que es la bisectriz de $\angle ADE$, debe pasar por dicho punto. ■

3.3. Agregados culturales y preguntas

- La palabra **homotecia** deriva del griego *homo* = semejante, y del *tithénai* = colocar, disponer.
- El triángulo medial es el que se forma con los puntos medios de los lados de un triángulo dado.
- La composición de dos homotecias se logra aplicando una homotecia con un centro dado, y a esa transformación se le aplica otra homotecia con otro centro dado. El resultado vendría siendo algo como una homotecia de la homotecia inicial.
- Existe una transformación llamada **semejanza espiral** o **rotohomotecia**. La cual es una composición de una homotecia y una rotación respecto a un centro dado. Esta transformación es muy útil en la resolución de problemas de mayor dificultad.

3.4. Ejercicios y Problemas

Sección de ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 3.1. Da un triángulo $\triangle ABC$ y punto O fuera de él, construye con regla y compas un triángulo $\triangle XYZ$ tal que $H(O,2) : \triangle ABC \to \triangle XYZ$.

Problema 3.1. Dado el triángulo $\triangle ABC$ y su circuncírculo Ω, demostrar que el triángulo medial $A'B'C'$ es homotético al triángulo $\triangle ABC$. Encontrar el centro de homotecia y la razón de homotecia.

Problema 3.2. Demostar que si dos circunferencias son tangentes internamente en un punto A y si una secante común interseca a las circunferencias en B', B, C y C', entonces $\angle B'AC = \angle BAC'$.

Problema 3.3. El $\triangle ABC$ tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AC, MK es el diámetro. La recta BK corta AC en el punto N. Demostrar que $AM = NC$

Problema 3.4. El incírculo de $\triangle ABC$ tiene centro I y toca a BC en E. AD es una altura de $\triangle ABC$, M es el punto medio AD. Sea I_A el A-excentro de $\triangle ABC$. Demostrar que M, E e I_A con colienales.

Problema 3.5. Sea Ω y Γ dos círculos tangentes en D, de forma que Γ yace en el interior de Ω. Se traza una cuerda de AB en Ω de modo que AB es tangente a Γ en C. Probar que DC bisecta al arco $\widehat{AB}$ que no contiene a AD.

4. Problemas

Problema 4.1 (**Capítulo 6** [**Agu19**], **problema 7**). Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro I. Sea Γ un círculo centrado en I con radio mayor al inradio. Sean X_1 la intersección de Γ con AB más cercana a B; X_2 y X_3 las intersecciones de Γ con BC donde X_2 es más cercana a B; y X_4 la intersección de Γ con CA más cercana a C. Sea K la intersección de X_1X_2 con X_3X_4. Probar que AK biseca X_2X_3.

Problema 4.2 (**Capítulo 6** [**Agu19**], **problema 4**). Sea $\triangle ABC$ un triángulo con circuncentro O y baricentro G. Sean A', B', C' las reflexiones de los puntos medios de BC, CA, AB con respecto a O, respectivamente. Probar que AA', BB', CC' y GO con concurrente.

Problema 4.3 (**Capítulo 6** [**Agu19**], **problema 2**). Un triángulo isósceles $\triangle ABC$ tiene base AB y altura CD con $BC = CA$. Sean P un punto sobre CD, E la intersección de la recta AP con BC y F la intersección de la recta BP con CA. Suponga que los incírculos del triángulo $\triangle ABP$ y del cuadrilátero $PECF$ son congruentes. Demuestre que los incírculos de $\triangle ADP$ y $\triangle BCP$ son también congruentes.

Problema 4.4 (**Capítulo 13** [**Bac22**], **ejemplo 13.3**). Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las rectas tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM interseca de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA interseca de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB interseca de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE interseca a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F). Muetra que las rectas AF, BP y CE concurren.

Problema 4.5 (**Capítulo 16** [**AKP16**], **ejemplo 16.2**). Sea Ω el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$ y sea ω_a la circunferencia tangente al segmento CA, segmento AB y Ω. Se definen ω_b y ω_c de manera análoga. Sea A', B', C' los puntos de toque de $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ con Ω, respectivamente. Probar que AA', BB', CC' concurren en la recta OI donde O e I son el cincuncentro y el incentro de $\triangle ABC$, respectivamente.

Problema 4.6 (**Capítulo 14** [**AKP16**], **ejemplo 14.2**). Sea $ABCD$ un trapezoide con $AB > CD$ y $AB||CD$. Sean los puntos K, L sobre los segmentos AB, CD, respectivamente, tal que $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Suponga que existen los puntos P, Q en la recta KL que satisfacen $\angle APB = \angle BCD$ y $\angle CQD = \angle ABC$. Probar que los puntos P, Q, B, C con concíclicos.

Problema 4.7 (**Capítulo 9** [**AKP16**], **ejemplo 9.8**). Sea el triángulo $\triangle ABC$ con $AC = BC$, sea P un punto dentro del triángulo tal que $\angle PAB = \angle PBC$. Si M es el punto medio de AB, entonce probar que $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

##

Problema 4.8 (**Capítulo 7** [**AKP16**], **ejemplo 7.4**). Sea el triángulo $\triangle ABC$ y sea P un punto en el interior del triángulo pedal $\triangle DEF$. Suponga que las rectas DE y DF son perpendiculares. Probar que si Q es el conjugado isogonal de P con respecto al triángulo $\triangle ABC$, entonces Q es el ortocentro del triángulo $\triangle AEF$.

Problema 4.9 (**Capítulo 7** [**AKP16**], **ejemplo 7.3**). Sea P un punto en el plano del triángulo $\triangle ABC$ y sea Q su conjugado isogonal respecto a $\triangle ABC$. Probar que

$$\frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} + \frac{BP \cdot BQ}{BA \cdot BC} + \frac{CP \cdot CQ}{CA \cdot CB} = 1.$$

Problema 4.10 (**Capítulo 5** [**AKP16**], **ejemplo 5.6**). Sea el triángulo $\triangle ABC$, y sean los puntos B_1, C_1 sobre los lados CA y AB respectivamente. Sea Γ el incírculo del $\triangle ABC$ y sean E y F los puntos de tangencias de Γ con los mismos lados CA y AB, respectivamente. Además, se dibujan las tangentes desde B_1 y C_1 a $\triangle ABC$ y se toma los puntos de tangecias Z y Y, respectivamente. Probar que las rectas B_1C_1, EF y YZ son concurrentes.

Problema 4.11 (**Capítulo 4** [**AKP16**], **ejemplo 4.8**). Sea P un punto en el plano del triángulo $\triangle ABC$, y sea l una recta que pasa por P. Sean A', B', C' puntos donde la reflexión de las rectas PA, PB, PC con rescpecto a l intersecan a BC, AC, AB, respectivamente. Probar que A', B', C' son colineales.

Problema 4.12 (**Capítulo 4** [**AKP16**], **ejemplo 4.7**). Sea el triángulo $\triangle ABC$ con incentro I. Sean D, E, F puntos de tangecias de su circuncírculo con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar que los circuncírculos de los triángulos $\triangle AID$, $\triangle BIE$ y $\triangle CIF$ tiene dos puntos en común.

Problema 4.13 (**Capítulo 4** [**AKP16**], **ejemplo 4.5**). Sea $\triangle ABC$ y sea P un punto en el interior del triángulo. Las rectas AP, BP y CP intersecan a los lados, BC, CA y AB en los puntos A', B' y C', respectivamente. Probar que $\frac{PA}{PA'} = \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C}$.

Problema 4.14 (**Capítulo 8** [**PS70**], **problema 8.11**). Probar que la recta que pasa por el baricentro, G, de $\triangle ABC$, corta los lados AB y AC en los puntos M y N, respectivamente, tal que $AM \cdot NC + AN \cdot MB = AM \cdot AN$.

Problema 4.15 (**Capítulo 7** [**Agu19**], **problema 9**). Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Las diagonales AC y BD se cortan en E, y los lados AB y CD se cortan en F. Sean J y K los ortocentros de $\triangle ADF$ y $\triangle BCF$, respectivamente. Demostrar que J, E y K están alineados.

Problema 4.16 (**Capítulo 7** [**Agu19**], **problema 6**). Sea el triángulo acutángulo, y sea D un punto en BC. La circunferencia de diámetro AD corta a BC, AB y AC en H, M y N, respectivamente. Demostrar que AD es bisectriz del $\angle BAC$ si y solo si AH, BN y CM son concurrentes.

Problema 4.17 (**Capítulo 7** [**Agu19**], **problema 5**). Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes externamente. Las rectas tangentes desde O_1 hacia C_2 la tocan en A y B; mienstras que las rectas tangentes desde O_2 hacia C_1 la tocan en C y D, respectivamente. Sean $E = O_1A \cap O_2C$ y $F = O_1B \cap O_2D$. Demostrar que EF, O_1O_2, AD y BC concurren.

Problema 4.18 (**Capítulo 5** [**AKP16**], **ejemplo 5.4**). Sea $BCXY$ un rectángulo construido fuera del triángulo $\triangle ABC$. Sea D pie de altura desde A hacía BC y sean U y V los puntos de intersección de DY con AB y DX con AC, respectivamente. Probar que $UV||BC$.

Problema 4.19 (**Capítulo 5** [**AKP16**], **ejemplo 5.3**). El punto D está sobre el lado AB del triángulo $\triangle ABC$. Sea ω_1 y Ω_1, ω_2 y Ω_2 los incírculos y los excírculos (tangentes al segmento AB) de los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$, respectivamente. Probar que las tangentes externas comunes a ω_1 y ω_2, Ω_1 y Ω_2 se intersecan en AB.

Problema 4.20 (Capítulo 5 [AKP16], ejemplo 5.2). Sea el triángulo $\triangle ABC$ con $AB < AC$, el punto H denota el ortocentro. Los puntos A_1 y B_1 son pies de alturas desde A y B, respectivamente. El punto D es la reflexión de C respecto al punto A_1. Si $E = AC \cap DH$, $F = DH \cap A_1B_1$ y $G = AF \cap BH$, probar que las rectas CH, EG y AD concurren.

Problema 4.21 (Capítulo 4 [AKP16], ejemplo 4.1). Sea el triángulo $\triangle ABC$ y P un punto en su interior. Sea A_1, B_1 y C_1 las intersecciones de AP, BP y CP con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Considerando a X, Y y Z como la intersecciones de BC con B_1C_1, CA con C_1A_1 y AB con A_1B_1, respectivamente. Probar que X, Y y Z son colineales.

Problema 4.22 (Capítulo 3 [AKP16], teorema 3.3). Dado el cuadrilátero convexo $ABCD$ con P la intersección de sus diagonales, entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(\angle PAD)}{\operatorname{sen}(\angle PAB)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle PBA)}{\operatorname{sen}(\angle PBC)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle PCB)}{\operatorname{sen}(\angle PCD)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle PDC)}{\operatorname{sen}(\angle PDA)} = 1.$$

Problema 4.23 (Capítulo 3 [AKP16], ejemplo 3.10). Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera y D, E y F puntos cualesquiera sobre las rectas BC, CA y AB tal que las rectas AD, BE y CF concurren. La paralela a AB por E interseca a la recta DF en el punto Q, la paralela a AB por D interseca a EF en T. Probar que la rectas CF, DE y QT son concurrentes.

Problema 4.24. Sea $ABCD$ un cuadrado y sea X un punto en lado BC. Sea Y un punto en la recta CD tal que $BX = YD$ y D se encuentra entre C y Y. Demuestra que el punto medio de XY se encuetra sobre la diagonal BD.

Problema 4.25 (Ceva's Theorem [TKT12], problema 4). Los puntos P, Q y R están sobre los lados AB, BC y CA del triángulo acutángulo $\triangle ABC$, respectivamente. Si $\angle BAQ = \angle CAQ$, $QP \perp AB$, $QR \perp AC$ y CP y BR se intersecan en S probar que $AS \perp BC$.

Problema 4.26 (Capítulo 3 [AKP16], ejemplo 3.4). Sea el triángulo $\triangle ABC$ tal que una circunferencia que pasa por A y B interseca los segmentos AC y BC en D y E, respectivamente. Las rectas AB y DE se intersecan en F, mientras que las rectas BD y CF se intersecan en M. Probar que $MF = MC$ si y solo si $MB \cdot MD = MC^2$.

Problema 4.27 (Ceva's Theorem [TKT12], problema 5). Los lados opuestos de un hexágono son paralelos. Probar que las rectas que pasan por los puntos medio de los lados concurren.

Problema 4.28 (Capítulo 3 [AKP16], ejemplo 3.8). Sea D el pie de altura desde A en el triángulo $\triangle ABC$ y M, N puntos en los lados CA y AB talque las rectas BM y CN se intersecan en AD. Probar que AD es bisectriz del ángulo $\angle MDN$.

5. Conocimiento previo

Teorema 5.1 (Ley de los Senos).

Sea el triángulo ABC con circunradio R. Entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\angle A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\angle B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\angle C)} = 2R.$$

Pista: Considerar las antípodas de los vértices en el circuncírculo de $\triangle ABC$, notar ciertas igualdades de ángulos por cuadriláteros cíclicos y luego utilizar la defínción del seno para el triángulo rectángulo.

Teorema 5.2 (Teorema de bisectriz generalizada).

Dado el triángulo ABC, sea el punto X en BC. Entonces se cumple que

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle BAX)}{\operatorname{sen}(\angle XAC)}.$$

Pista: Utilizar el **Teorema 5.1** y la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{Si } \alpha + \beta = 180^\circ, \text{ entonces } \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta).$$

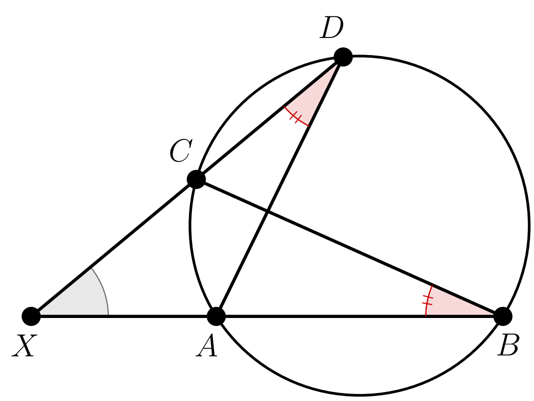
Propiedad 5.1 (Potencia de un punto exterior)**.** Sean AD y CD dos rectas que se intersecan en X tales que $X - A - B$ y $X - C - D$. Entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si

$$\overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XC} \cdot \overline{XD}.$$

Demostración. Rápidamente nos damos cuenta de que $\angle CXB = \angle AXD \quad (*)$.

Entonces $ABCD$ es cíclico

$$\iff \angle ABC = \angle ADC$$
$$\iff \angle XBC = \angle ADX$$
$$\overset{(*)}{\iff} \triangle XBC \sim \triangle XDA \quad \overset{(*)}{\iff} \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{XD}}{\overline{XA}}$$
$$\iff \overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XC} \cdot \overline{XD}. \qquad \blacksquare$$



Referencias

[Agu19] Eduardo Aguilar. *Estrategias sintéticas en Geometría Euclídea.* Editorial, 2019.

[AKP16] Titu Andreescu, Sam Korsky, and Cosmin Pohoata. *Lemmas in olympiad geometry.* XYZ Press, 2016.

[Bac22] Jafet Baca. *Apuntes de Geometría Euclidiana para Competiciones Matemáticas.* Independent publication, 2022.

[Cas20] Rufo Casco. Una guía de Luis Gonzales, un reto de vida. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, 2020.

[Loz17] Stefan Lozanovski. *A beautiful journey through Olympiad Geometry.* Independent publication, 2017.

[PS70] Alfred Posamentier and Charles Salkind. *Challenging Problems in Geometry.* Dover, 1970.

[TKT12] Jordan Tabov, Emil Kolev, and Peter Taylor. *Methods of Problem Solving Book 3.* ATM, 2012.