Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios
Clase #1

Encuentro: 1
Curso: Polinomios
Fecha: 18 de marzo de 2023

Nivel: 5
Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
D. auxiliar: José Adán Duarte

Contenido: Polinomios cuadráticos y cúbicos

En esta primera sesión nos toca acometer las primeras nociones sobre los polinomios. Veremos definiciones, propiedades, caracteristicas particulares y curiosidades sobre estas expresiones, con el fin de cimentar las bases que son necesarias para el resto del presente curso.

1. Desarrollo

1.1. Definiciones

Definición: Un ***polinomio*** en x es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero mayor o igual que cero y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números que pueden ser enteros, racionales, reales o complejos y son llamados los ***coeficientes*** de $P(x)$. Si $a_n \neq 0$, se dice que $P(x)$ es de *grado* n y se denota por $\deg(P) = n$; en este caso a_n es llamado ***coeficiente principal***.

En particular, los polinomios de grado 1, 2 y 3 son llamados *líneal, cuadrático y cúbico*, respectivamente, y son estos el caso de estudio de esta primera sesión.

Líneal: $P(x) = a_1 x + a_0$
Cuadrático: $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
Cúbico: $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Veremos a continuación algunas caracteristicas resaltables sobre los polinomios.

Término principal: El término (monomio) que contiene la mayor potencia es conocido *término principal* y su coeficiente como *coeficiente principal*.

Valor numérico: Resultado que se obtiene al evaluar el polinomio en una constante c, es decir $P(c)$. Además, cuando el valor de c es 0 o 1, el valor numérico es igual al ***término independiente*** y a la suma de todos los coeficientes, respectivamente. Siendo el término independiente aquel monomio que no tiene variable.

Polinomio mónico: Polinomio cuyo término principal tiene como coeficiente a 1.

Polinomio completo: Polinomio que tiene todos sus términos. Desde el término con exponente n hasta el término con exponente 0.

Polinomio iguales: Diremos que dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son iguales si y solo si $\deg(P) = \deg(Q) = n$ y $a_i = b_i$, con $0 \leq i \leq n$. Donde a_i, b_i son los coeficientes de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente.

Polinomio recíproco: Un polinomio $P(x)$ es recíproco si cumple que $a_i = a_{n-i}$, con $0 \leq i \leq n$, donde $\deg(P) = n$.

Polinomio de varias variables: Un polinomio que dependen de más de una variable es llamado multivariante o multivariable, y es denotado por $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Polinomio ordenado: Un polinomio es ordenado cuando los exponente de la variable de referencia, guardan cierto orden, ya sea ascendente o descendente.

Polinomio homogéneo: Un polinomio multivariable es homogéneo si todos usus términos tienen el mismo grado absoluto.

1.2. Operaciones con polinomios

Sean dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de grado 3,

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$Q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

se definen:

Suma: $P(x) + Q(x) = (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

Resta: $P(x) - Q(x) = (a_3 - b_3)x^3 + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$

Multiplicación: $P(x)\times Q(x) = P(x)Q(x) = a_3b_3x^6 + (a_2b_3 + a_3b_2)x^5 + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)x^4 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_0b_0$

Composición: $(P\circ Q)(x) = P(Q(x)) = a_3Q(x)^3 + a_2Q(x)^2 + a_1Q(x) + a_0$. Se lee P compuesto de Q y consiste en remplazar la variable x por Q en P.

En general si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios no nulos, entonces se verifica que

$$\deg(P \pm Q) \leq máx\{\deg(P), \deg(Q)\}$$
$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

La composición de polinomios es asociativa, es decir, $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$, mas no conmutativa, salvo casos especiales, así que generalmente supondremos que $P \circ Q \neq Q \circ P$.

Una pequeña aclaración: $P(x)^n \neq P^n(x)$. Denotaremos como $P(x)^n$ al polinomio elevado a la n-ésima potencia y a $P^n(x)$ como la composición n-ésima de $P(x)$ con si mismo, es decir $P(P(P \ldots P(P(x)) \ldots))$ n veces.

1.3. Ejercicios y problemas

Ejercicio 1.1. Sean $P(x) = 5x^2 - 33x + 59$ y $Q(x) = 3 - 2x$. Determine

a. $P(x) + Q(x)$

b. $Q(x) - P(x)$

c. $P(x) + Q((x+1)^2)$

d. $P(1-x) + Q(x-1)$

e. $(P \circ Q)(x)$

f. $Q(P(x))$

g. $P(Q(3x-4))$

h. $Q^3(x) + P(x)^2$

Problema 1.1. Sea $P(x)$ un polinomio mónico de grado 3. Halle la suma de coeficientes del término cuadrático y lineal, siendo su término independiente igual a 5. Además, $P(x+1) = P(x) + nx + 2$.

Problema 1.2. Hallar un polinomio cuadrático cuyo coeficiente de x y término independiente son iguales y se cumple que $P(1) = 7$ y $P(2) = 18$.

Problema 1.3. Dado que

$$\begin{gathered} Q(x) = 2x + 3 \\ Q(F(x) + G(x)) = 4x + 3 \\ Q(F(x) \times G(x)) = 5 \end{gathered}$$

Calcular $F(G(F(G(\ldots F(G(1))\ldots))))$.

2. Problemas propuestos

Problema 2.1. Si $P(x^2 - 2x + 1) = x^2 - 3$ determine $P((x-2)^2)$.

Problema 2.2. Sea $P(x) = x^2$, encontrar $Q(x)$ si $(P \circ Q)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

Problema 2.3. Sea $Q(x) = \frac{1}{5}x - 2$ y $P(x) = Q^4(x)$, probar que $P(1560) = 0$.

3. Extra

Problema 3.1. Determine los polinomios P para los que se cumple $16P(x^2) = P(2x)^2$.

Problema 3.2. Encontrar todos los polinomios P que cumplen $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$ para todo x.

Problema 3.3. Sea $P(n+1) = x \cdot P(n) + 1$, para n entero y $n \geq 0$. Además $P(0) = 1$. Exprese $(x-1) \cdot P(x)$ como un polinomio en x con coeficientes enteros. Luego, calcule $P(2023)$.

Referencias

[Bar89] Edward Barbeau. *Polynomials.* Springer, 1989.

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra.* UNAM, 2014.

[CL22] Axel Canales and Ricardo Largaespada. Clase 1. Polinomios cuadráticos y cúbicos. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Marzo 2022.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Docente: José A. Duarte
Teléfono: +505 8420 4002
Correo: joseandanduarte@gmail.com