Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Ecuaciones Diofánticas
Clase #2

Encuentro: 17
Curso: Ecuaciones Diofánticas
Fecha: 17 de agosto de 2024

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Gema Tapia

Contenido: Métodos de resolución de Ecuaciones Diofánticas

En esta clase seguiremos abordando los métodos básicos para resolver ecuaciones diofánticas. Una de las estrategias de resolución es utilizar las desigualdades. La idea principal es reducir la cantidad de casos mediante el uso de las inecuaciones.

1. Desarrollo

Antes de iniciar el estudio de este método, recordemos algunas propiedades de las desigualdades numéricas. Los axiomas elementales sobre desigualdades son los siguientes

1. Dado un número real x, se tiene que $x > 0$, $x = 0$ o $x < 0$.
2. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$ y $ab > 0$.
3. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

Todas las demás desigualdades se derivan de estos axiomas. Como por ejemplo

1. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.
2. Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
3. Si $|a| > 1$, entonces $a^2 > a$.

Cuando se tiene una desigualdad de una variable, los pasos comunes son perecidos a los de resolver una ecuación líneal. Como por ejemplo,

1. Remover denominadores.
2. Remover paréntesis y corchetes.
3. Mover términos para combinarlos.
4. Mover términos semejantes.
5. Normalizar coeficientes.

Ejemplo 1.1. Dado que $2(x-2)-3(4x-1) = 9(1-x)$ y $y < x+9$, comparar las cantidades $\dfrac{y}{\pi}$ y $\dfrac{10}{31}y$.

Solución. Resolviendo la ecuación líneal obtenemos que $x = -10$, por lo que $y < -10+9$ es decir $y < -1$. Es fácil ver que, $\dfrac{1}{\pi} < \dfrac{10}{31}$, así que al multiplicar por el número negativo y la respuesta es clara. ■

Ahora, vemos los siguientes teoremas.

Teorema 1.1.

Si x es un número real, entonces $x^2 \geq 0$. La igualdad se da si y solo si $x = 0$.

Teorema 1.2 (Desigualdad Media Aritmética - Geometríca).

Dado n números reales positivos x_1, x_2, …, x_n se tiene que

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Donde la igualdad se da cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 1.3 (Desigualdad Cauchy-Schwartz).

Dado los reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se tiene que

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

Donde la igualdad se da si $b_i = k a_i$ para todo $a_i \neq 0$ con $i = 1, 2, \ldots, n$

Finalmente, se proponen unos ejercicios para prácticar estas técnicas.

1.1. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1.1. Sabiendo que $ac < 0$, argumentar cuántas de las siguiente desiguadades pueden ser verdaderas.

$$\frac{a}{c} < 0, \quad ac^2 < 0, \quad a^2 c < 0, \quad c^3 a < 0, \quad ca^3 < 0.$$

Ejercicio 1.2. Hay cuatro afirmaciones como se indica a continuación:

(i) Cuando $0 < x < 1$, entonces $\dfrac{1}{1+x} < 1 - x + x^2$;

(ii) Cuando $0 < x < 1$, entonces $\dfrac{1}{1+x} > 1 - x + x^2$;

(iii) Cuando $-1 < x < 0$, entonces $\dfrac{1}{1+x} < 1 - x + x^2$;

(iv) Cuando $-1 < x < 0$, entonces $\dfrac{1}{1+x} > 1 - x + x^2$.

Dar como respuesta las afirmaciones correctas.

Ejercicio 1.3. Dado los números reales a, b. Si $a = \dfrac{x+3}{4}$, $b = \dfrac{2x+1}{3}$ y $b < \dfrac{7}{3} < 2a$, hallar el rango de valores para x.

Ejercicio 1.4. Dado que $a < b < c < 0$ ordenar de manera descendiente los números $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$ y $\frac{c}{a+b}$.

Ejercicio 1.5. Probar que para reales no negativos x, y, z se cumple que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Ejercicio 1.6. Sean a, b, c reales no negativos, probar que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Ejercicio 1.7. Sean $a, b, c > 0$ probar que

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Ejercicio 1.8. Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$. Probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$

Ejercicio 1.9. Hallar todas las duplas positivas (x, y) tal que $x^3 - y^3 = xy + 61$.

Ejercicio 1.10. Resolver la siguiente ecuación en los enteros positivos x, y, z

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}.$$

Ejercicio 1.11. Hallar todas las soluciones enteras (x, y) de $x^3 + y^3 = (x+y)^2$.

Ejercicio 1.12. Determinar todos los números enteros positivos (x, y, z) que sean solución de

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2.$$

Ejercicio 1.13. Hallar todas las soluciones en enteros de la ecuación

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + \cdots + (x+7)^2 = y^3.$$

Ejercicio 1.14. Determinar todos los números enteros positivos (x, y, z) que sean solución de

$$xy + yz + zx - xyz = 2$$

Ejercicio 1.15. Halle todas las soluciones (w, x, y, z) de enteros positivos tales que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1) = w^2$$

Ejercicio 1.16. Determinar todos los números enteros positivos (x, y, z) que sean solución de

$$(x+y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$$

Ejercicio 1.17. Determine todas las parejas de enteros (x, y) tales que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 1.1. Encuentra todos los pares de números positivos (a, b) tales que ab^2+b+7 divide a $a^2b + a + b$.

2. Problemas propuestos

Los problemas de esta sección es la **tarea**. El estudiante tiene el deber de entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase (también se pueden entregar borradores). Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

Ejercicio 2.1. Si a, b, c son positivos y se sabe que

$$\frac{c}{a+b} < \frac{a}{b+c} < \frac{b}{a+c},$$

escribir los números a, b, c en orden descendiente.

Ejercicio 2.2. Resolver la siguiente ecuación en enteros positivos

$$3(xy + yz + zx) = 4xyz.$$

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Problema 3.1. Resolver en enteros distintos la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 3(x + y + z + w).$$

Referencias

[BDMS98] Hugo Barrantes, Pedro Díaz, Manuel Murillo, and Alberto Soto. *Introducción a la Teoría de Números*. Universidad Estatal a Distancia. Costa Rica, 1998.

[Lar21] Ricardo Largaespada. Ecuaciones diofánticas. Clase 3. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua*, Octubre 2021.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Gema Tapia
Teléfono: +505 8825 1565 *(Claro)*
Correo: gematapia97@gmail.com