Entrenamiento 2023
Lista de problemas

Kenny J. Tinoco

ASJT - Nicaragua

1. OMCC y PAGMO

Problema 1.1. El entero positivo n verifica

$$\frac{1}{1\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)+\sqrt{n+1}}=\frac{2022}{2023}$$

Hallar la suma de digitos de n.

Problema 1.2. Sean reales a, b, $c>0$, tales que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Demostrar que se cumple

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 3.$$

Problema 1.3. Si $x+y+z=1$, con $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ Probar que

$$xy+yz+2zx\leq\frac{1}{2}.$$

Problema 1.4. Si $a^4+b^4+c^4+d^4=16$, con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ Probar que

$$a^5+b^5+c^5+d^5\leq 32.$$

Problema 1.5. Para $a,b,c\in\mathbb{R}$ con $a^2+b^2+c^2=3$. Probar que

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geq\frac{3}{2}.$$

Problema 1.6. Para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$, con $y\neq -z$, $z\neq -x$ y $x\neq -y$. Probar que

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}\geq 0.$$

Problema 1.7. Sea $a_0=1$ y $a_n=\prod_{i=0}^{n-1}a_i+1, n\geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}-1}=1.$$

Problema 1.8. Definimos la secuencia $\{x_i\}_{i\geq 1}$ por $x_1 = \dfrac{1}{1012}$ y para $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n^2}{1 + x_n + x_n^2}$$

Hallar el valor de

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{1011}+1} + \frac{1}{x_{1012}}.$$

Problema 1.9. Sean los reales positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tales que $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$. Probar que

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \geq \frac{2^n-1}{2^n}.$$

Problema 1.10. Sea $n \geq 2$ un entero positivo y $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reales positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Probar que la siguiente desigualdad se cumple

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Problema 1.11. Definamos la siguiente secuencia como

$$B_1 = B_2 = 1$$
$$B_n = 2B_{n-2} + B_{n-1}, \quad n \geq 3.$$

Probar que para n impar

$$\sum_{i=1}^{n-1} B_i = B_n - 1.$$

Problema 1.12. Sea x, y, $z \in \mathbb{R}^+$, tal que $xyz = 1$, probar que la siguiente desigualdad se cumple

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2} \geq 2.$$

Problema 1.13. Sea $a_0 = a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_1^2}{a_0} + \frac{a_2^2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}, n \geq 1.$$

Hallar a_n en función de n.

Problema 1.14. Sea $P(x)$ un polinomio no nulo tal que $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$ para todo real x, y $P(2)^2 = P(3)$. Hallar $m+n$, si $P\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{m}{n}$ donde m y n son primos relativos.

Problema 1.15. En un tablero cuadriculado $n \times n$ se escriben números dentro de cada casilla mediante el siguiente proceso:

- Se seleccionan números reales $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ todos distintos entre sí.
- En la casilla de la fila i columna j se escribe el número $a_i + b_j$.

Suponiendo que los n productos de los números en cada fila del tablero son iguales entre sí, demostrar que los n productos de los números en cada columna también son iguales entre sí.

2. IMO y OIM

Problema 2.1. Hallar todos los posibles números reales que satisfacen[1]

$$x \cdot \lfloor x \rfloor + 2022 = \lfloor x^2 \rfloor$$

Problema 2.2. Demuestre que para todo $n \geq 4$ existen enteros positivos distintos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ para los cuales se cumple que

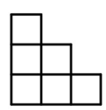
$$\frac{20}{21} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Problema 2.3. Decimos que un conjunto S, posiblemente infinito, de enteros positivos distintos es bueno si para cualesquieras par de elementos $m, n \in S$, con $m \neq n$, se tiene que la diferencia $|m - n|$ divide a m y n, simultáneamente.

a. Demuestra que un conjunto bueno no puede tener una cantidad infinita de elementos.

b. Demuestra que para todo entero positivo $N \geq 2$, existe un conjunto bueno con N elementos.

Problema 2.4. En un tablero de $n \times n$, el conjunto de todas las casillas que están ubicadas en la diagonal principal del tablero o debajo de ella, es llamado *n-escalera*. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra una *3-escalera*:



¿De cuántas formas se puede dividir una *99-escalera* en algunos rectángulos, que tengan sus lados sobre líneas de la cuadrícula, de tal forma que todos los rectángulos tengas áreas distintas?

Problema 2.5. Encontrar todas las funciones inyectivas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tales que satisfacen $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ y

$$f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

Problema 2.6. Sea $n > 2$, un entero y $P(x)$ un polinomio de coeficientes reales tal que para un real k

$$\frac{P(2) - P(1)}{1} = \frac{P(4) - P(2)}{2} = \frac{P(8) - P(4)}{4} = \cdots = \frac{P(2^n) - P(2^{n-1})}{2^{n-1}} = k$$

$$\frac{P(2^{n+1}) - P(2^n)}{2^n} \neq k$$

Hallar el valor mínimo del grado de P y todos los posibles polinomios P con grado mínimo.

[1] $\lfloor x \rfloor$ representa la parte entera de x.

Problema 2.7. Sean a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, tal que $a+b+c=0$. Demostrar que

$$\sqrt[n]{ab+bc+ca} \geq a\sqrt[n]{\frac{b+c}{2}} + b\sqrt[n]{\frac{c+a}{2}} + c\sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}.$$

Problema 2.8. Sea

$$\frac{r}{s} = 0.k_1k_2k_3\cdots$$

la expansión decimal de un número racional. Probar que a lo más dos de los números

$$\sigma_1 = 10\left(\frac{r}{s}\right) - k_1, \quad \sigma_1 = 10^2\left(\frac{r}{s}\right) - (10k_1 + k_2),$$
$$\sigma_1 = 10^3\left(\frac{r}{s}\right) - (10^2k_1 + 10k_2 + k_3), \quad \cdots$$

son iguales.

Referencias

[Her20] Josué Hernández. Sumas telescópicas II. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Agosto 2020.

[San22] Marcos Sanchez. Hoja de trabajo #1. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Enero 2022.