Formulario de Geometría Analítica

1. Unidad I. Categorización de los Fundamentos de la Geometría

En la Geometría Moderna se asumen como términos primitivos o indefinidos, es decir como punto de partida, los conceptos de **Punto, Recta** y **Plano**.

Cada uno de estos términos son una idea, una noción o una abstración de lo que son. Nunca nadie ha "visto" un punto, una recta o un plano en su vida, porque estos solo existe en la mente.

Un **punto** decimos que es una posición en el espacio, sin *dimensiones*, ni largo, ni ancho, ni alto. No puede dibujarse, pero si representarse como la marca mas pequeña que podamos hacer en un papel.

Una **recta** decimos que es un conjunto infinito de puntos, tampoco puede dibujarse, y la representamos como una raya con flechas en las puntas.

Un **plano** decimos que es conjunto infinito de puntos, que representamos como un área.

Notación.

- Los puntos se representan con letras mayúsculas: $A, B, \ldots, P, Q, \ldots$ etc.
- Las rectas se representan con letras minúsculas con una flecha encima: $\overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{r}, \ldots$.
- Los planos se representan usando letras griegas (o bien por 3 puntos **no colineales**): α, β, π, σ, $\cdots$.

Axionmas y definiciones

- **Axioma 1.** Todas las rectas y plano son conjuntos de puntos.
- **Definición 1.** El conjunto de todos los puntos se llama Espacio.
- **Axioma 2.** Dos puntos determinan una recta.
- **Definición 2.** Un conjunto puntos son **colineales** si están sobre la misma recta.
- **Definición 3.** Un conjunto puntos son **coplanares** si ellos están sobre el mismo plano.
- **Axioma 3.**
  1. Tres puntos cualesquiera son coplanares.
  2. Tres puntos cualesquiera no colineales determinan un plano.
- **Axioma 4.**
  1. Cada recta contiene al menos dos puntos.
  2. Cada plano contiene al menos tres puntos no colineales.

3. El espacio contiene al menos cuatro puntos no coplanares.

- **Axioma 5.** El plano que contiene a dos puntos, tambien contiene a la recta formada con estos.
- **Axioma 6.** Dos planos se cortan en una recta.

Teoremas básicos

1. Dos rectas se cortan en un punto.
2. Una recta que corta a un plano que no la contiene, entonces corta al plano en un punto.
3. Un punto y una recta determinan un plano, si la recta no contiene al punto.
4. Dos rectas que se cortan están contenidas en un único plano.

Definición: Una recta númerica es un sistema donde a cada punto le corresponde un número real único.

Definición: La diferencia entre el número asociado a dos puntos (digamos P y Q) se conoce como distancia. Se representa como PQ.

Definición: Un **segmento** es un trozo de recta determinado por dos puntos (digamos A y B) en la recta, se representa por $\overline{AB}$. La distancia entre los puntos es la medida del segmento.

Definición: Dos segmentos con la misma medida son llamados **congruente.** Se representa por el simobolo $\equiv$, ejemplo $\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$ se lee AB congruente a PQ.

Definición: Un punto separa a una recta $\overleftrightarrow{AB}$ es tres parte, el punto y dos **semirectas**.

Definición: Dado una recta y un plano que la contiene. La recta *parte* al plano en dos **semiplanos**.

Definición: Un **ángulo** es la unión de dos rectas no colineales que se cortan en un punto.

1. Un ángulo **recto** es un ángulo cuya medida es 90°.
2. Un ángulo con medida menor que 90° se llama **agudo**.
3. Un ángulo con medida mayor que 90° se llama **obtuso**.

Definición: Si dos ángulos suman 180° entonces los ángulos son **suplementarios**.

Definición: Si dos ángulos suman 90° entonces los ángulos son **complementarios**.

Definición: Dos rectas son **secantes** si estas se cortan.

Definición: Dos rectas son **paralelas** si estas nunca se cortan. Se denota por el simbolo $||$ ($\overline{AB}||\overline{MN}$ se lee AB paralela a MN)

Teoremas sobre paralelismo

Sin dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces se cumplen los siguientes Teorema

1. Los ángulos correspondientes son congruentes.
2. Los ángulos alternos internos son congruentes.
3. Los ángulos alternos externos son congruentes.
4. Los ángulos internos a un mismo lado de la secante son congruentes.
5. Los ángulos externos a un mismo lado de la secante son congruentes.

Para más claridad ver siguiente figura.

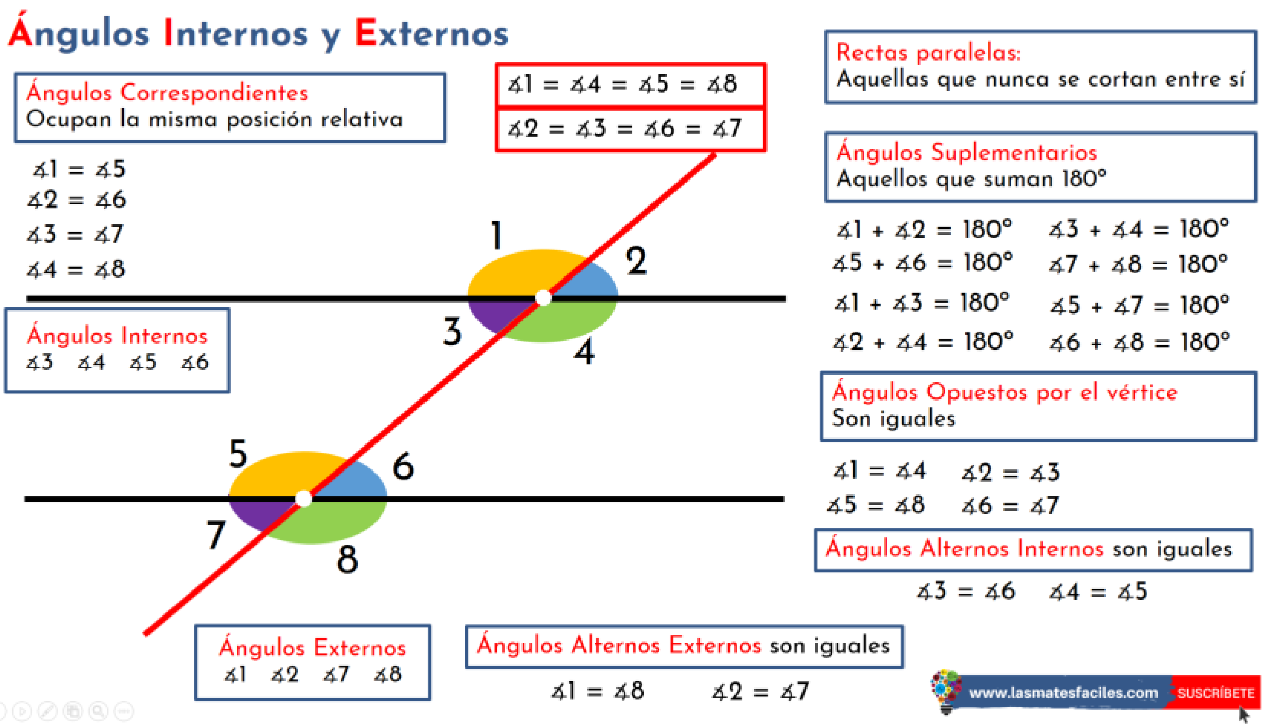


Figura 1: Teoremas sobre paralelismo.

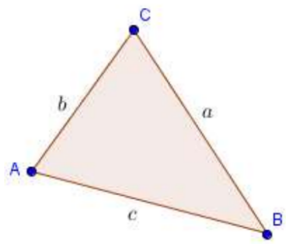
2. Unidad II. Calculo de área de Triángulos y Cuadriláteros

Definición: Un **triángulo** es la unión de tres puntos (digamos A, B, C) no colineales.

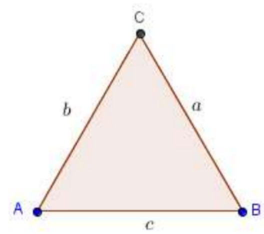
1. Dichos puntos se llaman **vértices** del triángulo.
2. Los segmentos formados con dichos puntos, AB, BC, AC se llaman **lados** del triángulo.
3. Todo triángulo determina tres ángulos $\angle A, \angle B, \angle C$, llamados ángulos internos del triángulo. La suma de los ángulos siempre suman $180°$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.
4. La suma de los lados de un triángulo se llama **perímetro** del triángulo.

Clasificación de triángulos

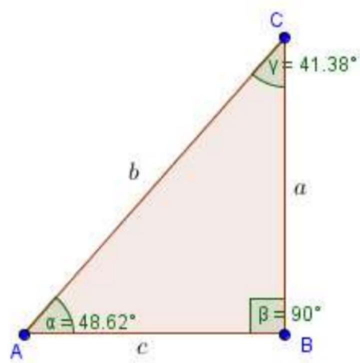
1. **Triángulo isósceles** es un triángulo con dos lados iguales y angulos correspondientes iguales ($a = c$ y $\angle A = \angle C$).



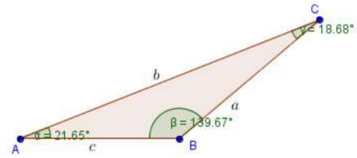
2. **Triángulo equilátero** es un triángulo que tiene sus tres lados congurentes y sus tres angulos congruentes ($a = b = c$ y $\angle A = \angle B = \angle C$).



3. **Triángulo rectángulo** es un triángulo que tiene un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y al los otros dos lados se les llama **catetos**. (AC es la hipotenusa y AB, BC son los catetos)

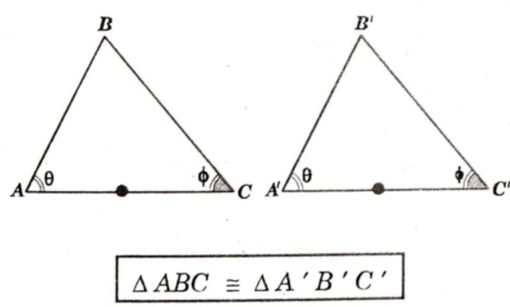


4. **Triángulo acutángulo** es un triángulo que tiene sus tres ángulos agudos y se **obtusángulo** si tiene un ángulo obtuso. (Ejemplo de acutangulo los primeros dos triángulos, ejemplode obtusangulo el siguinte triangulo)

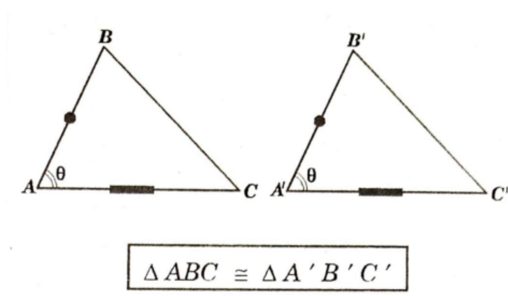


Congruencia de triángulos

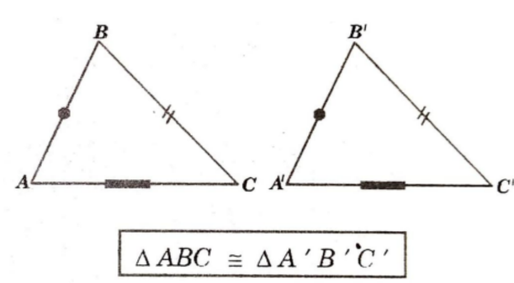
1. **ALA (Ángulo - Lado - Ángulo)** Dos triángulos son congruentes si tiene congruentes un lado y los ángulos adyacentes a él.



2. **LAL (Lado - Ángulo - Lado)** Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.



3. **LLL (Lado - Lado - Lado)** Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes sus tres lados congruentes respectivamente.



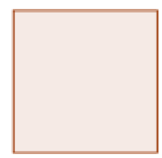
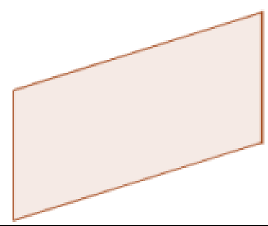
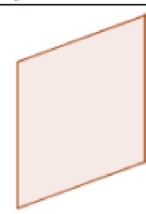
Cuadriláteros

Definición. Un cuadrilátero es una figura cerrada de cuatro lados que se cortan unicamente en sus extremos.

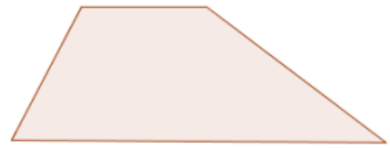
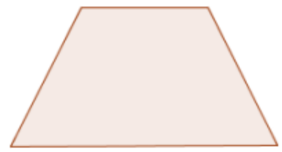
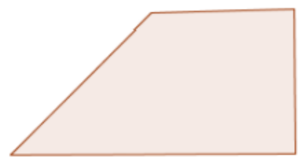
Clasificación de los cuadriláteros Una forma de clasificar los cuadriláteros es a partir del paralelismo de sus lados:

Formulario de Geometría Analítica

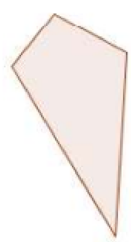
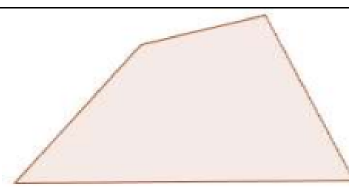
1. **Paralelogramos:** son los cuadriláteros que tienen los dos pares de lados opuestos paralelos.

Paralelogramo	Características	
Rectángulo	Tiene sus cuatro ángulos rectos	
Cuadrado	Tiene sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados iguales.	
Romboide	Paralelogramo que tiene sus ángulos oblicuos.	
Rombo	Paralelogramo que tiene sus ángulos oblicuos y los cuatro lados iguales.	

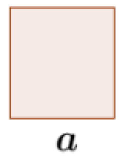
2. **Trapecios:** son los cuadriláteros con una pareja de lados paralelos.

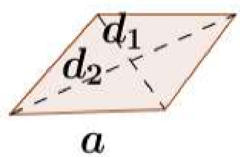
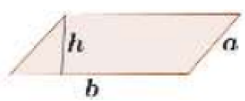
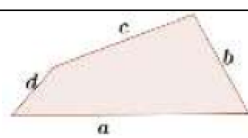
Trapecio	**Característica**	
Escaleno	Tiene los lados no paralelos desiguales.	
Isósceles	Tiene los lados no paralelos de igual longitud, formando con las bases ángulos adyacentes iguales.	
Rectángulo	Tiene un lado perpendicular a las bases, formando un ángulo recto con cada base.	

3. **Trapezoides:** son los cuadriláteros que tienen no lados paralelos.

Trapezoides	Característica	
Simétricos	Son los que tienen dos pares de lados consecutivos iguales pero el primer par de lados consecutivos iguales es diferente del segundo	
Asimétricos	Son aquellos que no ofrecen ninguna de las características de un trapezoide simétrico. Ángulos y lados desiguales	

Perimetros y áreas

Cuadrilátero	**Dibujo**	**Perímetro** P	**Área** A
Cuadrado		$P = 4a$	$A = a^2$
Rectángulo		$P = 2a + 2b$	$A = a \cdot b$

Rombo		$P = 4a$	$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
Romboide		$P = 2a + 2b$	$A = b \cdot h$
Trapecio		$P =$ $b_1 + b_2 + c + d$	$A = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$
Trapezoide		$P = a + b + c + d$	A =suma de las áreas de los triángulos

3. Unidad III. Aplicaciones de la Geometría Analítica Vectorial

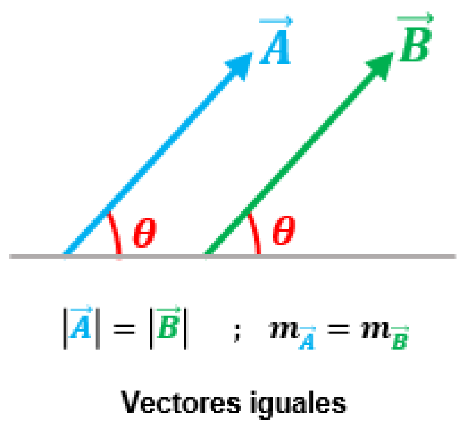
Definiciones: Los vectores son magnitudes matematicas la cuales necesitan tres elementos para definirlas; magnitud, dirección y sentido.

Un vector se presentea graficamente mediante una flecha o segmento de dirigido. Su magnitud se representa por el tamaño del segmento dirigido a una escala determinada y su dirección y sentido dado por la posición respecto a algún sistema de coordenada.

Simbolicamente puede representarse usando dos letras mayusculas (o bien una) con una flechita encima.

Ejemplo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$,etc, la primera letra representa el punto inicial y la segunda el punto terminal.

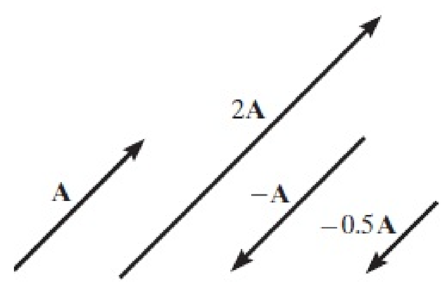
Vectores iguales. Dos vectores libres (aquellos que su punto inicial no está fijo) que tienen la misma magnitud y dirección se dice que son iguales sin que importe su posición en el espacio.



El negativo u opuesto de un vector $\overrightarrow{AB}$ es el vector que tiene igual magnitud que $\overrightarrow{AB}$, pero con sentido opuesto, se simboliza por $-\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{BA}$.

Producto por un escalar o multiplo de un vector

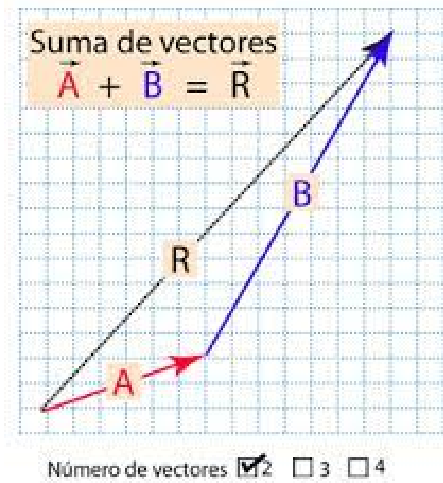
El producto del escalar k por el vector $\overrightarrow{A}$, es el vector que tiene magnitud k veces la de $\overrightarrow{A}$ y cuya dirección depende del signo algebraico de k.



Suma de vectores

Método del triángulo

La suma o resultante de dos vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ es un vector $\overrightarrow{C}$ formado al colocar el punto inicial de $\overrightarrow{B}$ en el punto terminal de $\overrightarrow{A}$ y luego unir el punto inicial de $\overrightarrow{A}$ con el terminal de $\overrightarrow{B}$



Método del polígono

Es una generalización del método del triángulo usado para sumar más de dos vectores. En el punto final del primer vector, se traza el segundo vector; en el extremo de este se traza el tercer vector y así sucesivamente. En cada caso la magnitud de cada vector está dada por la longitud de la flecha a una escala determinada. La suma o resultante es el vector que va desde el punto inicial del primero al extremo final del último, es decir el que cierra el polígono, partiendo el punto inicial.