Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Ecuaciones Diofánticas
Clase #5

Encuentro: 20
Curso: Ecuaciones Diofánticas
Fecha: 7 de septiembre de 2024

Nivel: 5
Semestre: II
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Gema Tapia

Contenido: Inducción matemática y Descenso a infinito de Fermat

El Principio de Inducción Matemática es una poderosa y elegante herramienta para probar dependencias en enteros. En esta clase veremos la definición y analogías de este principio, así como ejemplos y problemas.

1. Desarrollo

1.1. Inducción matemática

Inducción matemática es una técnica utilizada para probar declaraciones o proposiciones. La idea es similar a la de hacer caer varias piezas de dominó. Si cada pieza está

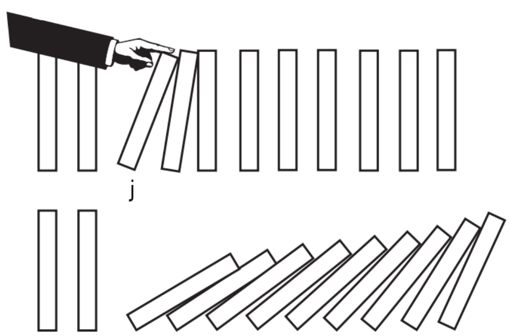

Figura 1: Fichas de dominó cayendo.

lo suficientemente cerca de la anterior y hacemos caer la primera, entonces todas las piezas eventualmente van a caer. Cuando queremos demostrar que una proposición se cumple sobre números naturales, la idea es la misma. Dicho de otro modo, la inducción nos permite demostrar una propiedad en **infinitos números** con **pasos finitos**.

Principio 1.1 (Inducción simple)**.** Sea el entero j y $S(n)$ una proposición sobre el entero n con $n \geq j$,

i) si $S(j)$ es cierto, y

ii) para cada entero $k \geq j$, $S(k) \implies S(k+1)$,

entonces $S(n)$ es cierta para todo $n \geq j$.

Asi por ejemplo, si tenemos $j = 1$ y una proposición $S(n)$ cumple las dos condiciones anteriores, entonces $S(n)$ se cumple (es cierta) para todo natural n.

Principio 1.2 (Inducción fuerte)**.** Sea el entero j y $S(n)$ una proposición sobre el entero n con $n \geq j$,

i) si $S(j)$ es cierto para todo $j \geq i$, y

ii) para cada entero $k \geq j$, $S(j), S(j+1), \ldots, S(k-1), S(k) \implies S(k+1)$,

entonces $S(n)$ es cierta para todo $n \geq j$.

1.2. Descenso infinito de Fermat

Sigamos con otro principio, uno bastante intuitivo.

Principio 1.3 (Buen orden)**.** Para todo subconjunto no vacío de los naturales, este debe tener un elemento mínimo.

De igual manera, es fácil pensar que un subconjunto no vacío de los números naturales debe tener un elemento máximo, por consiguiente, cualquier subconjunto no vacío debe tener un elemento mínimo y máximo. Al trata de problemas en específicos, a menudo utilizamos estas nociones del principio de Buen orden, lo cual podemos formalizar con el siguiente axioma.

Axioma 1.1 (Axioma del Orden)**.** Si M es un conjunto de n números reales distintos, entonces podemos escribirlo como $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

El descenso infinito proviene de resolver ecuaciones diofánticas indeterminadas, el matemático Pierre de Fermat (1601-1665) utilizó este método hace unos 400 años cuando demostró que no existe una solución entera positiva para[1] $x^4 + y^4 = z^4$.

Principio 1.4 (Descenso infinito de Fermat)**.** Sea el entero no negativo k y $S(n)$ una proposición sobre n,

i) si $S(k)$ no es cierto, y

ii) para un $m > k$ con $S(m)$ cierto, implica un $m > r > k$ con $S(r)$ cierto,

entonces $S(n)$ no es cierto para toda $n \geq k$.

Podemos ver el DIF metafóricamente con una escalera con las siguientes propiedades; si un escalón más alto no se puede alcanzar sin primero alcanzar un escalón más bajo, y no existe un escalón más bajo en la escalera, entonces es imposible alcanzar algún escalón.

Veamos dos variantes o casos concretos de este principio, útiles en el estudio de las ecuaciones diofánticas.

[1] Se recomienda al lector buscar la solución de Fermat, para enrriquecer su lectura.

i) No existe una secuencia $n_1 > n_2 > n_3 > \dots$ estrictamente decreciente de enteros no negativos.

ii) Si se tiene la secuencia $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots$ de enteros no negativos, entonces existe un $k \geq 1$ tal que $n_k = n_{k+1} = n_{k+2} = \cdots$.

Cabe destacar que los principios de Inducción matemática, Buen orden y Descenso infinito son de hecho equivalentes en el conjunto de los enteros no negativos ($\mathbb{Z}^{\geq 0}$). Con lo cual, si tomamos uno es posible demostrar con este los dos restantes[2].

Ejemplo 1.1. Probar que la ecuación $x^2 + y^2 = 3z^2$ no tiene soluciones (x, y, z) en enteros positivos cuando $z \neq 0$.

Solución. Supongamos que hay al menos una solución (x_1, y_1, z_1) con $z_1 > 0$, es claro que en módulo 3 llegamos a $x_1^2 + y_1^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Como los cuadrados perfectos solo dejan resto 0 o 1 en módulo tres, necesariamente $x_1^2 \equiv y_1^2 \equiv 0 \pmod{3}$, por lo cual $x_1 = 3x_2$, $y_1 = 3y_2$ con $x_1 > x_2$ y $y_1 > y_2$.
Al reemplazar en la ecuación $9x_2^2 + 9y_2^2 = 3z_1^2 \iff 3(x_2^2 + y_2^2) = z_1^2 \iff 3 \mid z_1^2 \iff 3 \mid z_1$. Si tomamos $z_1 = 3z_2$ con $z_1 > z_2$, entonces

$$x_2^2 + y_2^2 = 3z_2^2.$$

Es decir, hemos encontrado una ecuación idéntica a la original con solución (x_2, y_2, z_2). Al analizar esta solución, obtendríamos una nueva solución (x_3, y_3, z_3), de la misma manera, aplicando este proceso obtendríamos soluciones (x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5), (x_6, y_6, z_6) y así sucesivamente. Sin embargo, esto implica que

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots, \qquad y_1 > y_2 > y_3 > \cdots, \qquad z_1 > z_2 > z_3 > \cdots$$

Lo cual no es posible, luego la ecuación original no tiene soluciones. ■

1.3. Ejercicios y problemas

Ejercicios y problemas para el autoestudio.

Ejercicio 1. Hallar las soluciones enteras no negativas (x, y, z) tal que $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Problema 1.1. Hallar todos los enteros $a, b \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ tales que $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$.

Ejercicio 2. Probar que no existen números racionales x, y, z que satisfacen

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0.$$

Problema 1.2. Encuentre todas las soluciones enteras de la ecuación $a^2 - 2b^2 = 0$.

Problema 1.3. Encuentre todas las soluciones (x, y, z) enteras de las siguiente ecuación $2005x^3 = y^3 + 25z^3$.

[2]Se recomienda al lector investigar cómo son esas demostraciones

Problema 1.4. Resolver en los enteros no negativos la ecuación $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Problema 1.5. Muestre que no hay enteros positivos x, y, z tales que $x^2 + 10y^2 = z^2$.

Problema 1.6. Encuentre todas las tripletas (x, y, z) de soluciones enteras positivas a la ecuación $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0$.

Problema 1.7. Encuentre todos los enteros x, y, z tales que $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 0$.

Problema 1.8. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación $x^2 + y^2 = z^n$ tiene soluciones enteras.

Problema 1.9. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 7^n$ tiene soluciones enteras.

Problema 1.10. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, la ecuación $(x^2 + y^2)(u^2 + v^2 + w^2) = 2009^n$ tiene soluciones enteras.

Problema 1.11. Resuelva la ecuación con enteros positivos distintos

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2002}^2 = 1335\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2002}\right).$$

2. Problemas propuestos

Se asigna como **tarea** los problemas de esta sección, el estudiante debe entregar sus soluciones en la siguiente sesión de clase, en caso de no resolverlos se pueden entregar borradores. Recordar realizar un trabajo claro, ordenado y limpio.

3. Extra

Problemas para **puntos extras en la nota final** del curso. Los problemas extras se califican de manera distinta a los problemas propuestos.

Referencias

[Gun10] David Gunderson. *Handbook of Mathematical Induction. Theory and Applications.* CRS Press, 2010.

[Som85] I. Sominski. *Método de Inducción Matemática.* Editorial MIR, 1985.

[Tin22a] Kenny Tinoco. V Nivel. Ecuaciones diofánticas. Clase 7. Método de Inducción matemática. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua,* Octubre 2022.

[Tin22b] Kenny Tinoco. V Nivel. Ecuaciones diofánticas. Clase 9. Método de Descenso infinito de Fermat. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento. Nicaragua,* Octubre 2022.

En caso de consultas

Instructor: Kenny J. Tinoco
Teléfono: +505 7836 3102 *(Tigo)*
Correo: kenny.tinoco10@gmail.com

Instructor: Gema Tapia
Teléfono: +505 8825 1565 *(Claro)*
Correo: gematapia97@gmail.com

4. Plan de clase

4.1. ¿Qué?

Mostrar el uso de los principios de Inducción Matemática y Descenso al infinito de Fermat (DIF). Dando a conocer en qué consiste el DIF y su utilizad en las ecuaciones diofánticas insolubles. Dar un repaso del principio de Inducción y mostra cómo este implica otros principios como el DIF y el buen orden, asi como su equivalencia.

Si n_0 es el menor entero positivo para el cual $P(n_0)$ es cierto, entonces $P(n)$ es falso para todo $n < n_0$.

4.2. ¿Cómo?

4.3. Comentarios

Preguntas claves: ¿me entendieron? ¿me salté algún tema? ¿se dio tiempo suficiente para pensar los problemas? ¿participaron? ¿problemas muy fáciles o muy difíciles, demasiados o muy pocos? ¿mis explicaciones/ejemplos fueron suficientes o buenos?