

Lista de problemas para el curso de polinomios

1. Clase 06

Problema 1.1 ([BLW22]. Example 4.4. Page 7). Sea P un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ y $P(3) = 2016$. Si n es el menor valor positivo posible de $P(2016)$, encontrar el resto cuando n es dividido por 2016.

2. Clase 07

Clase práctica #2

Problema 2.1. Para que la división de $6x^4 - 11x^2 + ax + b$ entre $3x^2 - 3x - 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Problema 2.2. Calcular la suma de coeficientes del resto que deja $x^{333} - 9$ entre $x^2 - 729$.

Problema 2.3 ([RC08]. Problem 8.25. Page 253¹). Sea r una raíz de $x^2 - x + 7$. Hallar el valor de $r^3 + 6r + \pi$.

Problema 2.4 ([RC08]. Problem 8.27. Page 254.). Sean a , b y c las raíces reales de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. Probar que $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$.

Problema 2.5 ([Iha]. Exercise 13. Page 12). Sean r_1 , r_2 y r_3 raíces distintas del polinomio $y^3 - 22y^2 + 80y - 67$. De tal manera que existen números reales α , β y θ tal que

$$\frac{1}{y^3 - 22y^2 + 80y - 67} = \frac{\alpha}{y - r_1} + \frac{\beta}{y - r_2} + \frac{\theta}{y - r_3}$$

$\forall y \notin \{r_1, r_2, r_3\}$. ¿Cuál es valor de $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta}$?

Problema 2.6 ([NF21]. Exercise 3.14. Page 12). La ecuación $2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1$ tiene tres raíces reales. Dado que su suma es $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $\text{mcd}(m, n) = 1$. Calcular $m + n$.

Problema 2.7. Si $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio tal que $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ y $P(3) = 30$, determine el valor de

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10}.$$

Problema 2.8 ([Eng97]. Problem 34. Page 256). Sea $F(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Probar que si existen cuatro enteros diferentes a , b , c y d tal que $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$, entonces no existe un entero k tal que $F(k) = 8$.

Problema 2.9 ([NF21]. Exercise 3.15. Page 12). Sea el polinomio $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$. Para enteros $n \geq 0$, definimos $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$. ¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{20}(x)$?

¹El el archivo pdf es la página 273.

3. Clase 08

Problema 3.1 ([Lee11]. Problem 6. Page 5). Considera el polinomio $P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$ y $Q(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$. Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 las raíces de Q , encontrar $P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(z_4)$.

Problema 3.2 ([Eng97]. Problem 15. Page 255). Sea $N(x) = (1 - x + x^2 - \dots + x^{100})(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})$. Probar que después de multiplicar y reducir términos solo quedan potencias pares de x .

Problema 3.3 ([BLW22]. Problem 6.2. Page 12). Sea $R(x) = 15x - 2016$. Si $R^5(x) = R(x)$, encontrar la suma de todos los posibles valores de x .

Problema 3.4 ([Iha]. Exercise 14. Page 12). Sean r y s raíces reales distintas de $P(x) = x^3 + ax + b$. También, sean $r + 4$ y $s - 3$ raíces de $Q(x) = x^3 + ax + b + 240$. Encontrar la suma de todos los posibles valores de $|b|$.

Problema 3.5 ([Lee11]. Problem 4. Page 5). Sean a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 cinco números reales tales que satisfacen la siguiente ecuación

$$\frac{a_1}{k^2 + 1} + \frac{a_2}{k^2 + 2} + \frac{a_3}{k^2 + 3} + \frac{a_4}{k^2 + 4} + \frac{a_5}{k^2 + 5} = \frac{1}{k^2}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Encontrar $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$.

4. Clase 11

Problema 4.1. Si a, b, c y d son las raíces de la ecuación $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$, calcular el valor de

$$\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^6} + \frac{1}{d^6}.$$

5. Corto #3

Problema 5.1. Para que la división de $x^5 + ax + b$ entre $x^2 + x + 1$ sea exacta, encuentre los valores de a y b apropiados.

Problema 5.2. Calcular el producto² de coeficientes del resto que deja $x^{2023} + 8$ entre $x^2 - 4$.

Problema 5.3. Sean los polinomios $2023x^2 + ax + 3202$ y $3202x^2 + ax + 2023$ tal que tienen una raíz en común. Hallar el valor de a .

Problema 5.4 ([NF21]. Example 3.13. Page 12). Sean a, b y c las raíces de $x^3 + 3x^2 + 4x - 11$ y sean $a + b, b + c$ y $c + a$ las raíces de $x^3 + rx^2 + sx + t$. Hallar t .

²Dejar el resultado lo más compacto posible.

Problema 5.5 ([Iha]. Page 9). Sea el polinomio $f(x) = x^3 + 3x - 1$ con raíces a , b y c . Calcular

$$\frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{b^3 + c^3} + \frac{1}{c^3 + a^3}.$$

6. Examen final

Problema 6.1. Si a y b son raíces distintas del polinomio $x^2 + 1012x + 1011$, entonces

$$\frac{1}{a^2 + 1011a + 1011} + \frac{1}{b^2 + 1011b + 1011} = \frac{m}{n},$$

donde m y n son primos relativos. Calcular $m + n$.

Problema 6.2. Dado el polinomio $P(x)$ para el cual se cumple que

$$x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9)P(x)$$

Calcular la suma de coeficientes de P .

Problema 6.3. Sea r_1 , r_2 y r_3 las tres raíces de polinomio cúbico P . También, que

$$\frac{P(2) + P(-2)}{P(0)} = 52$$

La expresión $\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}$ puede ser escrita como $\frac{m}{n}$ para m y n coprimos. Encontrar $m \times n$.

Referencias

- [BLW22] Adithay B., Brian L., and William W. Polynomials. *AoPS*, 2022.
- [Eng97] Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1997.
- [Iha] Ihatemath123. Vieta's formulas.
- [Lee11] Holden Lee. Lecture 8. Polynomials, part 1. *OMC*, 2011.
- [NF21] Naman12 and Freeman66. Polynomials in the AIME. *AoPS*, 2021.
- [RC08] Richard Rusczyk and Mathew Crawford. *Intermediate Algebra*. AoPS, 2008.

7. Competencia. Día 2

Problema 7.1. Hallar $P(3)$, si

$$P\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x^{2001} - 2x^{2000} + 2023.$$

Problema 7.2. Si $x + \frac{1}{x} = 3$ y

$$E = \left[x^x + \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \right] \left[x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x} \right)^x \right]$$

¿Cuál es el valor de E ?

Problema 7.3. Si $f(x+1) = x^2 + 2x - 3$ y $f(g(y)) = y^4 + 15$, hallar $g(3)$.

Problema 7.4. Sabiendo que

$$(2x+3)^{-z} = \frac{1}{3},$$

determinar el valor de $(4x^2 + 12x + 9)^z$.

Problema 7.5. Indicar un factor después de factorizar $x^3 - y^3 + x^2 + xy + y^2$

Problema 7.6. Sabiendo que

$$\begin{aligned} \triangle x &= x + 4 \\ \overrightarrow{\boxed{x+3}} &= x - 1 \\ \overrightarrow{\triangle x} &= x + 8 \end{aligned}$$

Hallar el valor de

$$E = \overrightarrow{\overrightarrow{\boxed{\triangle 5}}}.$$

Problema 7.7. El resto de la siguiente división es 5

$$\frac{6x^4 + x^3 - 2x^2 + px + 3}{2x - 1}$$

¿Cuánto es $p + 2$?

Problema 7.8. Simplifique

$$S = \left(\sqrt{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{b}} \right) \cdot \left(\sqrt{a^2 - b} \right) + b.$$

Problema 7.9. Si $\boxed{x} = (x-1)^2 + a$. Hallar el valor de E si

$$E = \frac{\boxed{x} - \boxed{x+2}}{x}.$$

Problema 7.10. Si sabemos que se cumple

$$m \# n = m + 2n \text{ y } a \Delta b = \sqrt{\frac{a \# b}{a - b}} \text{ con } a \neq b.$$

$$\text{Hallar } E = \frac{8\Delta 4}{2\Delta 1}.$$

Problema 7.11. Al simplificar la expresión

$$\frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4) - 4}{2(x-1)(x^2 + x + 1) + 10}$$

¿Cuál es el resultado?

Problema 7.12. Hallar el valor de

$$E = \frac{(12345)^2 - (12343)^2}{10^4 + 2344}.$$

Problema 7.13. Si sabemos que

$$\begin{aligned} a &= 1012 + \sqrt{2023} \\ b &= 1011 - \sqrt{2023} \end{aligned}$$

Determine el valor de la siguiente expresión

$$\sqrt[3]{(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a+b)}.$$

Problema 7.14. Si $F(x) = \frac{4x+8}{7}$. Calcule el valor de $\sqrt{F(5) - 4}$.

Problema 7.15. Del siguiente arreglo numérico, hallar la suma de los términos de la fila F_{20} .

$$\begin{array}{cccccc} F_1 : & 1 & & & & \\ F_2 : & 3 & 5 & & & \\ F_3 : & 7 & 9 & 11 & & \\ F_4 : & 13 & 15 & 17 & 19 & \\ F_5 : & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\ & & & & & \vdots \end{array}$$

Problema 7.16. Sabiendo que

$$m^{\#} = \frac{(m^2 + 1 + 2m)^2}{(m - 1)^2 + 4m}; m \neq -1$$

Hallar el valor de

$$A = \left[\frac{5^{\#} - 3^{\#} + 1^{\#}}{6^{\#} - 4^{\#}} + 2^{\#} \right]^{\#}.$$

Problema 7.17. Al resolver la ecuación

$$2x - \left(2x - \frac{3x - 1}{8} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{x + 2}{6} \right) - \frac{1}{4}$$

indique el valor de $19x$.

Problema 7.18. Hallar el valor de n en la siguiente ecuación, si $x = 6$

$$\frac{\frac{2x + n}{5} + 3}{\frac{2}{2}} + 5 = x.$$

Problema 7.19. ¿Cuál es la suma de los factores de $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3$?

Problema 7.20. Si 1 es solución del polinomio lineal $(a - 2)x^2 - 4abx + b^2 - 1$, cuál es el valor de $b - \frac{1}{b}$.

Problema 7.21. Si $P(x) = 2x^2 + x - 4$. ¿Cuánto es $\frac{P(0) + P(2)}{P(-1) + P(-2)}$?

Problema 7.22. Si $\boxed{a - 2} = a^2$. ¿Cuánto es $\boxed{3} + \boxed{\boxed{1}}$?