CAPITULO 1

TEORIA DE CONJUNTOS

Introducción.

En el desarrollo de este capítulo vamos a definir ciertos conceptos principales de la teoría de conjuntos, los cuales son primordiales para la comprensión de este tema.

La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas, y cuya dedicación de este capítulo, es gracias al matemático, Ferdinand Ludwing Philipp Cantor, quien es considerado el padre de la Teoría de Conjuntos, debido a ello, es que, en el año 1874, salió su primer trabajo revolucionario, con respecto a la teoría de conjuntos.

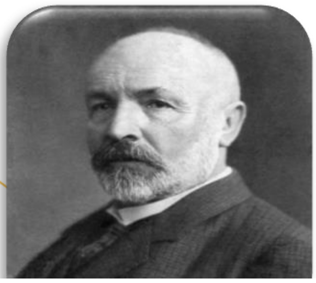


Ilustración 1:Ferdinand Philipp Cantor – Matemático

En conclusión, el objetivo de este capítulo es utilizar un lenguaje simbólico a partir de un lenguaje común, con la finalidad de efectuar las distintas operaciones entre los conjuntos, y de esta manera ayudar a la comprensión del tema.

Contenido.

- Teoría de conjuntos.
- Conjuntos objetivos.
- Definición de conjuntos.
- Descripción de un conjunto.
- Cardinalidad de un conjunto.
- Conjuntos relevantes y su clasificación.
- Cuantificadores.
- Subconjunto.
- Conjunto potencia.
- Igualdad entre conjuntos.
- Conjuntos disjuntos e intersecantes.
- Operaciones entre conjuntos.
- Propiedades de las operaciones entre conjuntos.
- Cardinalidad de conjuntos por diagramas de venn.

1. Teoría de conjuntos.

1.Definición.

- Conjuntos se refiere a agrupar personas, animales, plantas, cosas o simplemente elementos que existen en el universo, para poder analizar relaciones que puedan existir entre ellos.

Ilustración 2: Ferdinand Cantor

Dado otros conceptos, referentes a la teoria de conjuntos, Ivorra indica que "Un conjunto es una rama más de la lógica matemática que estudia propiedades y relaciones de los conjuntos. Los conjuntos y sus operaciones más relevantes, son una herramienta importante en la formulación de teorías matemática." (Ivorra & Carlos, 2010)

1.1. Conjuntos objetivos.

1.Definición.

- Su objetivo es simplemente la representación de varios elementos de manera gráfica y entendible.

Como indica Espinosa,"Comprender las relaciones que hay dentro de un conjunto, ya que es la selección de elementos que cumplen alguna característica en común, determinada previamente." (Espinosa D. J., (2009))

Por otro lado los autores Ivorra y Carlos, dan a Entender que un conjunto es un "muchos" que puede ser pensado como uno. (Ivorra & Carlos, 2010)

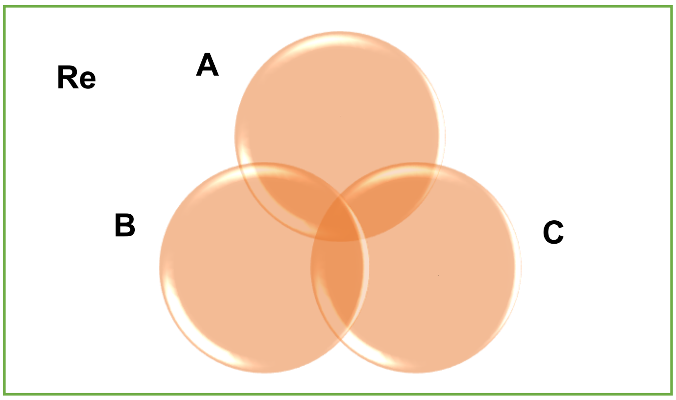


Ilustración 3: Representación de 2 conjuntos interceptados.

1.2. Conjuntos.

1.Definición.

- Un conjunto es una agrupación de elementos. Un elemento pertenece al conjunto si este se encuentra incluido dentro de él. Un conjunto puede ser infinito, finito, vacío o unitario, todo dependiendo de los elementos que se encuentren dentro de él y se lo representa con una letra mayúscula "A,B,C...", seguido por llaves {...}. Ejemplo de un conjunto de vocales: $A = \{a, e, i, o, u\}$

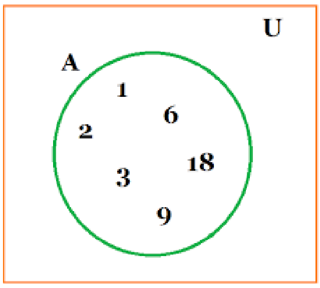


Ilustración 4: Conjunto de números

Se han escrito muchos conceptos relacionados con conjuntos, es asi que Culquichicón, aporta con su conocimiento indicando que: “Conjunto se define como la presencia o ausencia de elementos con características semejantes dentro de un contexto real o imaginario" (Culquichicón, 2010)

(Espinosa D. J., 2009) indica que: “Un conjunto es una recopilación de elementos específicos de manera que se puede aseverar si un elemento dado pertenece o no a la agrupación. La representaciónes por letras mayúsculas. Cuando un elemento x pertenece a un conjunto b se enuncia: x ∈ b, en caso de que no pertenezca se denota: x ∉ a.”

1.3. Descripción de un conjunto.

1.Definición.

- Los conjuntos se definen habitualmente usando llaves “{… }” y estos pueden ser descritos de distintas formas como se las mencionará a continuación. Se pueden describir por: extensión o tabulación, comprensión y por diagrama de venn.

1.3.1. Descripción de un conjunto por extensión o tabulación.

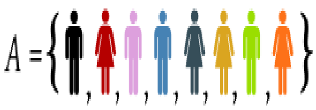


Ilustración 5: Conjunto de un grupo de personas.

Definición.

- Se conoce como descripción por extensión al describir los elementos de un conjunto uno a uno. Si un conjunto llega a tener varios elementos se puede hacer uso de los puntos suspensivos. Un ejemplo claro pueden ser el conjunto de los números pares. $A = \{2,4,6,8, \dots\}$

"Un conjunto se determina por extensión cuando se mencionan uno por uno todos sus elementos o cuando, si son números, se mencionan los primeros de ellos (y se coloca puntos suspensivos)." (Culquichicón, 2010)

1.3.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
  Sea A el conjunto de partes que conforman una computadora.

  1. Descripción.
     El conjunto A está conformado por partes de una computadora: mouse, teclado, monitor, CPU, Impresora

  2. Notación matemática.

  $A = \{Mouse, Teclado, Monitor, CPU, Impresora\}$

Ilustración 6:Hardware de un computador – (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2***.
  Sea B el conjunto de ingenierías que hay en la facultad "CISC" de la Universidad Guayaquil.

  1. Descripción.
     El conjunto B está conformado por carreras que hay en la facultad "CISC": Ingeniería en sistemas, ingeniería en networking

Ilustración 7: Ingeniería – (Ejemplo 2)

  2. Notación matemática.

  $B = \{Ingenier\acute{I}a\ en\ Sistemas\ Computacionales, Ingenier\acute{I}a\ en\ Networking\}$

- ***Ejemplo 3***.
  Sea C el conjunto de lenguajes de programación.

  1. Descripción.
  El conjunto C está conformado por lenguajes de programación: Python, C#, C, …

2. Notación matemática.

$$C = \{Python, C, C\#, \dots\}$$

Ilustración 8: Lenguaje de programación Python – (Ejemplo 3)

- ***Ejemplo 4:***

Definamos B como el conjunto conformado por los colores del arco iris.

$$B = \{verde, zual, rojo, naranja, viloleta\}$$

Ilustración 9: Arco iris (Ejemplo 4)

- ***Ejemplo 5:***

Se realizó una encuesta a un determinado número de estudiantes universitarios, para saber su opinión referente al error más común que se realiza durante un sismo, de acuerdo a los resultados obtenidos, alunos indicaron que corren, gritan o se esconden. Represente estas tres alternativas en un conjunto.

$$A = \{correr, gritar, esconderse\}$$

1.3.2. Descripción de un conjunto por compresión.

Definición.

- Se conoce como descripción por comprensión al mencionar simplemente una sola característica que tengan todos los elementos deseados en común.. Un ejemplo claro pueden ser el conjunto de los números pares. $A = \{x/x\ es\ número\ par\}$

1.3.2.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea A el conjunto de nombre de ingenieros que hay en la facultad “CISC” de la Universidad Guayaquil.

1. Descripción.
   Sea A el conjunto de los elementos de x tales que x es estudiante de la facultad CISC

2. Notación matemática.

$A = \{x/x\ es\ estudiante\ de\ \ ingeniería\}$

Ilustración 10: Ingeniero – (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Sea B el conjunto de nombre de carreras que hay en la facultad “CISC” de la Universidad Guayaquil.

1. Descripción.
   Sea B el conjunto de los elementos de x tales que x es carrera de la facultad CISC

2. Notación matemática.

$B = \{x/x\ es\ Carreras\ de\ la\ Facultad\ de\ Ciencias\ MatemÁticas\ y\ Fisica\}$

Ilustración 11: Carreras de la facultad de matemáticas – (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Sea C el conjunto de nombres de lenguajes de programación.

1. Descripción.
   Sea C el conjunto de los elementos de x tales que x es lenguaje de programación.

2. Notación matemática.
$C = \{x/x\ es\ un\ lenguaje\ de\ programación\}$

Ilustración 12: Programación – (Ejemplo 3)

➢ ***Ejemplo 4:***

El conjunto A está compuesto por todos los números naturales mayores que 5.

1. Descripción.
   Sea A el conjunto de los elementos de x tales que x son los números naturales mayores que 5.

2. Notación matemática.

$$\mathrm{A} = \{x/x \in \mathbb{N}/\ x > 5\}$$

➢ ***Ejemplo 5:***

El conjunto B está compuesto por todas las vocales.

1. Descripción.
Sea A el conjunto de los elementos de x tales que x son todas las vocales.

2. Notación matemática.

$$\mathrm{B} = \{\ x/x\ \text{ es una vocal}\ \}$$

1.3.3. Descripción de un conjunto por diagrama de Venn.

Definición.

- Un diagrama de Venn sirve para poder representar gráficamente la agrupación de elementos que tienen alguna característica en común y hacer sencilla su interpretación. Se lo representa con una letra mayúscula seguido por un círculo en el cual en su interior se encuentran los elementos del conjunto.

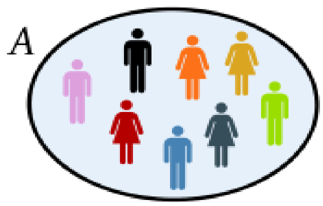


Ilustración 13: Diagrama de venn de un conjunto de personas

"Los diagramas de Venn son bosquejos utilizados en la teoría de conjuntos. Estos diagramas muestran conjuntos de elementos a través de líneas cerradas. La línea cerrada externa abarca todos los elementos bajo consideración del conjunto universal." (Zalta & Nodelman, 2013)

"Un diagrama de Euler Venn tiene el fin de representar clases de elementos, que tienen algo en común." (Rodriguez, 2010)

1.3.3.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***

Sea A el conjunto de partes que conforman una computadora.

1. Descripción
   El conjunto A está conformado por partes de una computadora: mouse, teclado, monitor, CPU, Impresora

2. Notación matemática.
   $A = \{Mouse, Teclado, Monitor, CPU, Impresora\}$

3. Gráfica.

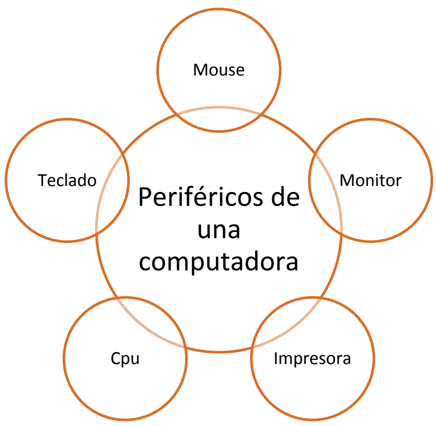


Ilustración 14: Periféricos de una computadora – (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2***.

Sea B el conjunto de nombres de lenguajes de programación.

1. Descripción.
   El conjunto C está conformado por nombres de lenguajes de programación: Python, C#, C, …

2. Notación matemática.
$$B = \{x/x \ es \ lenguajes \ de \ programación \}$$

3. Gráfica.

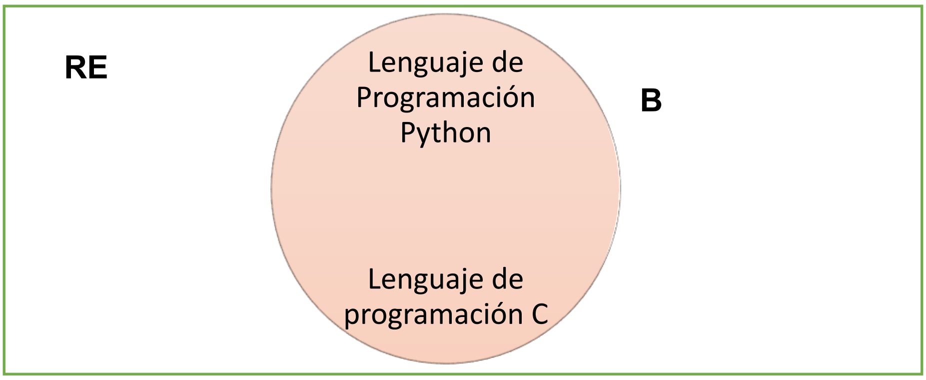


Ilustración 15: Diagrama de Venn de lenguajes de programación – (Ejemplo 2).

- ***Ejemplo 3***.

Sea C el conjunto de materias de tercer semestre de la carrera de ingeniería en sistemas.

1. Descripción.
   El conjunto C está conformado por nombres de materias que se ven en el tercer semestre de la carrera de ingeniería en sistemas: Programación III, matemáticas III, Probabilidad, contabilidad.

2. Notación matemática.

$C = \{x/x \ es \ materia \ de \ 3er \ semestre \ de \ ingeniería \ en \ sistemas\}$

Ilustración 16: Materias de ingeniería en sistemas – (Ejemplo 3)

- ***Ejemplo 4.***

Sean los conjuntos A y B formados por los colores.

1. Descripción.
   Representar los siguientes conjuntos:
   A= {verde, azul, café} y B= {morado, azul, amarillo}.

2. Notación matemática.

$A = \{x/x\ es\ un\ color\ \}$ y $B = \{x/x\ es\ un\ color\ \}$

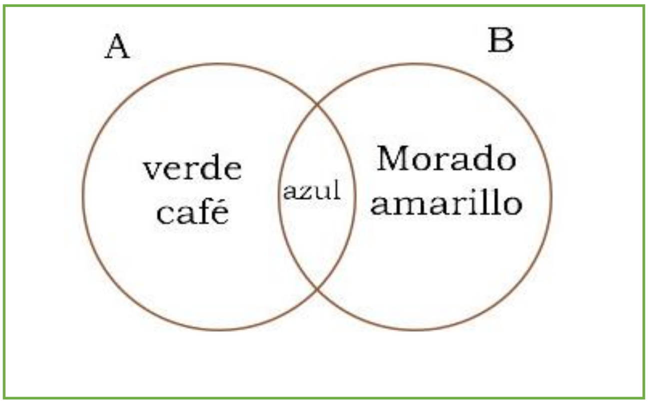


Ilustración16: colores

- ***Ejemplo 5.***

- Descripción.
  Representar los siguientes conjuntos:
  C= {1, 3, 4, 5, 7, 9}, D= {4, 6, 8, 9}.

- Notación matemática.
  $C = \{x/x\ es\ un\ numero\}, D = \{x/x\ es\ un\ numero\},$

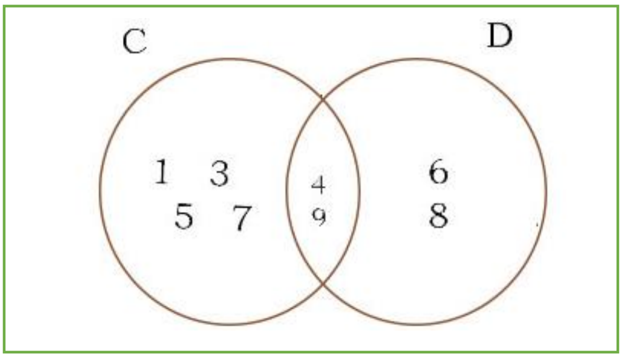


Ilustración 17: números

➢ ***Ejemplo 6.***

1. Descripción.

   Representar los siguientes conjuntos:
   E= {a, c}, F= {c, d, f}, G= {c, f, g}.

2. Notación matemática.

$E = \{x/x\ es\ una\ letra\}$, $F = \{x/x\ es\ una\ letra\}$,
$G = \{x/x\ es\ una\ letra\}$

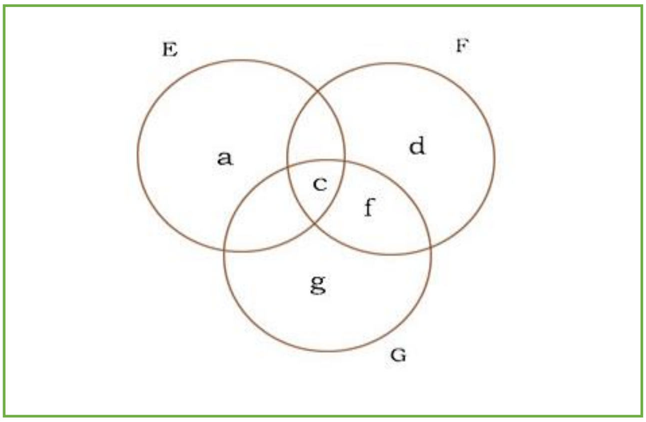


Ilustración 18 Letras

1.4. Cardinalidad de un conjunto.

Definición.

- La cardinalidad de un conjunto es la que indica el número o la cantidad de elementos que tiene el conjunto. Su símbolo esta denotado por $N(A)$.

Es muy interesante como Córdova y Fernández definen el concepto de cardinalidad de un conjunto en donde indican que: “Se denomina número cardinal a la entidad abstracta que simboliza todos los conjuntos que son coordinables entre sí y los distingue los no coordinables: uno, dos, tres, etc. Por lo tanto, decir que dos conjuntos son coordinables es lo mismo que decir que tienen el mismo número de elementos.” (Córdoba & Fernández, 2017)

“Es la cantidad de elementos de un conjunto a. Se denota por el símbolo $N(A)$.” (Espol, 2008)

1.4.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

1. Descripción por comprensión de un conjunto de materias que hay en un paralelo
$A = \{x/x \ Materia \ Del \ Paralelo \ MA \ 3 - 2\}$

2. Definición del conjunto por tabulación.

$$A = \{Matemáticas \ III, Probabilidad \ Y \ Estadísticas, Programación \ III\}$$

3. Gráfica mediante diagrama de Venn.

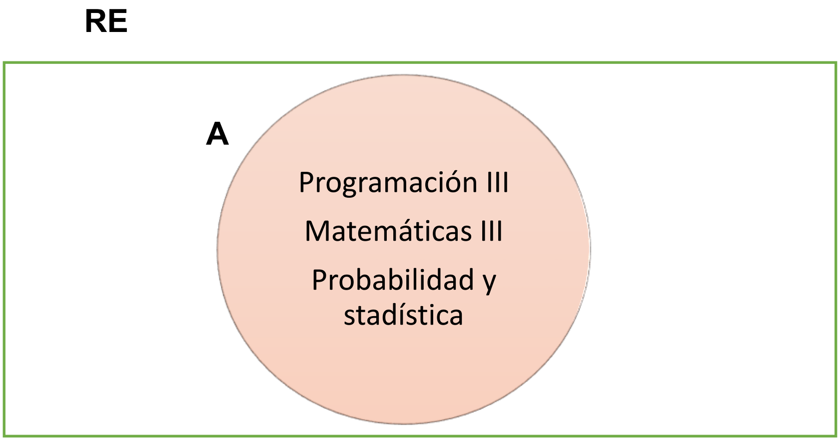


Ilustración 19: Diagrama de Venn de materias - (Eejemplo 1)

4. Calculo de la cardinalidad y su interpretación.
$N(A) = 3$, porque los conjuntos definidos están conformados por 3 elementos

- ***Ejemplo 2.***

Sea B el conjunto de 3 carreras de la Universidad de Guayaquil que ven programación en primer semestre.

1. Descripción por extensión.

$B = \{Ing. En\ Sistemas, Ing. En\ Networking, Ing. En\ TeleinformÁtica\ \}$

2. Grafica mediante un diagrama de Venn.

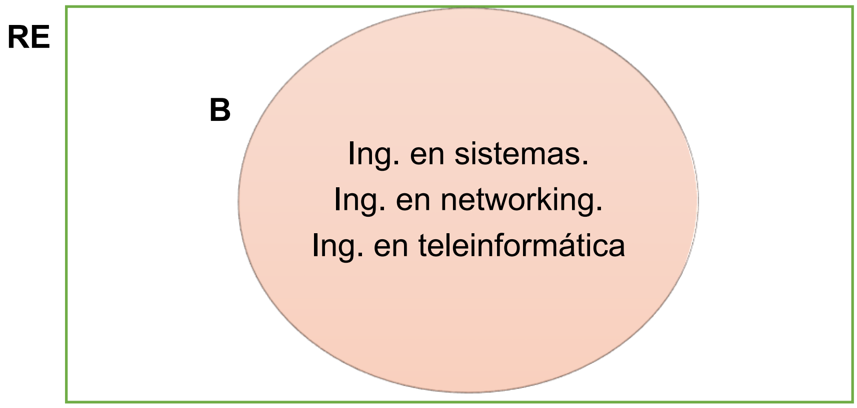


Ilustración 20: Diagrama de Venn de carreras universitarias

3. Calculo de la cardinalidad y su interpretación.
   $N(B) = 3$, porque el conjunto B esta conformado por 3 elementos.

- ***Ejemplo 3.***
  Defina un conjunto por los 3 métodos de descripción vistos anteriormente, le conjunto debe contener al menos 4 lenguajes de programación conocidos. Posterior a ello calcule su cardinalidad.

1. Descripción del conjunto.

   Por comprensión.
   $C = \{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\ conocido\}$

   Por tabulación.
   $C = \{Python, C++, C, PHP\}$

   Por diagrama de Venn.

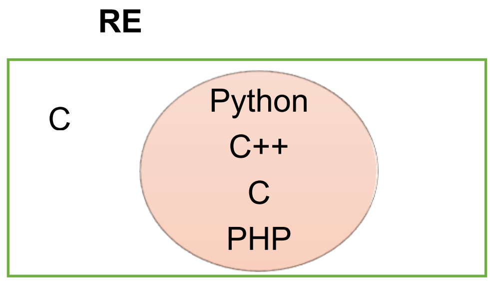


Ilustración 21: Diagrama de Venn de lenguajes de programación

2. Calculo de la cardinalidad de los conjuntos e interpretación.
   $N(C) = 4$, porque los conjuntos están conformados por 4 elementos los cuales son lenguajes de programación reconocidos.

- ***Ejemplo 4.***

Descripción por comprensión de un conjunto de materias que hay en un paralelo

$A = \{x/x\ sean\ numeros\ \}$

Definición del conjunto por tabulación.

$$A = \{1, 2, 3\ , 5, 7\}$$

Gráfica mediante diagrama de Venn.

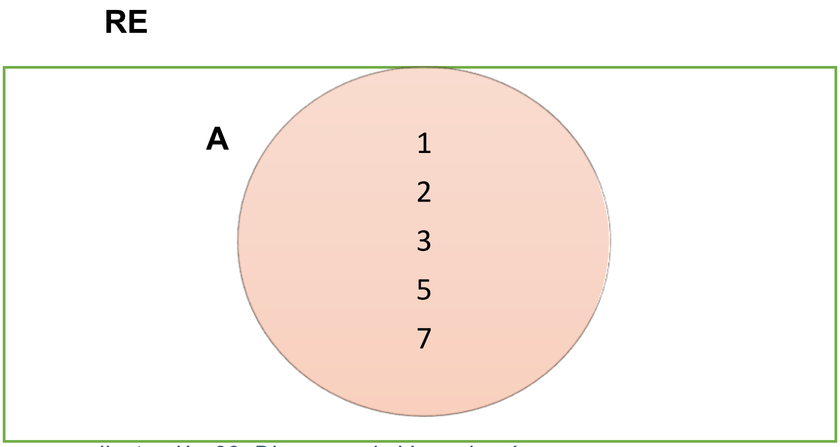


Ilustración 22: Diagrama de Venn de números

Calculo de la cardinalidad y su interpretación.

$N(A) = 5$, porque los conjuntos definidos están conformados por 5 elementos

- ***Ejemplo 5.***

Descripción por comprensión de un conjunto de materias que hay en un paralelo
$D = \{x/x \ sean \ letras\ \}$

Definición del conjunto por tabulación
$D = \{a, c, f, g, h, j, k, s\}$

Gráfica mediante diagrama de Venn.

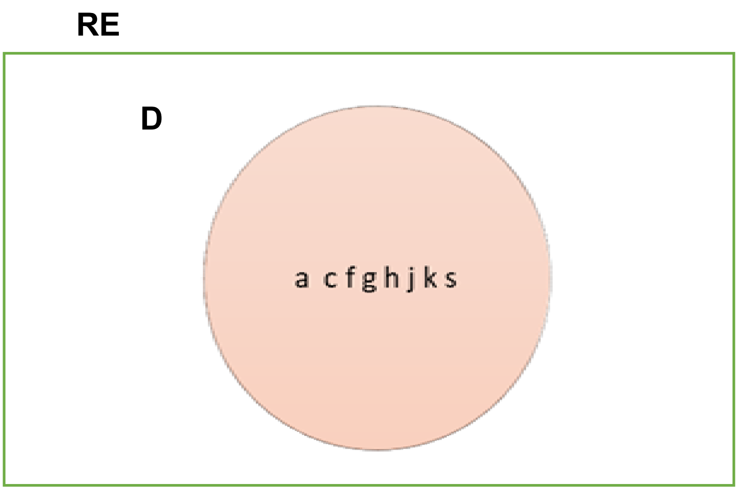


Ilustración 23: Diagrama de Venn de letras

Calculo de la cardinalidad y su interpretación.

$N(D) = 8$, porque los conjuntos definidos están conformados por 8 elementos

1.5. Conjuntos relevantes y su clasificación.

Los conjuntos se clasifican de acuerdo a la cantidad de elementos que poseen. Es por ello que se clasifican en los siguientes tipos de conjuntos:

1.5.1. Conjunto vacío.

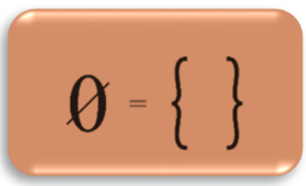


Ilustración 24: Conjunto vacío

Definición.

- Un conjunto se denomina vacío cuando no tiene elementos. El símbolo que lo representa es ∅ y su cardinalidad, al no tener elementos, es de 0 .

"Conjunto vacío es el que no tiene elementos y esta denotado por ∅ ó por llaves { }." (Pérez & Caludia., 2013)

"Un conjunto A es vacío si no tiene elementos. El símbolo que lo representa es $\emptyset$." (Córdoba & Fernández, 2017)

1.5.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

1. Definición del conjunto.
$A = \{x/x \ es\ un\ número\ de\ estudiantes\ de\ paralelo\ ISI - MA - 1 - 2\ menor\ que\ 1\ y\ mayor\ que\ 50\}$

2. Interpretación.

Es vacío ya que dicho paralelo está conformado por 41 estudiantes.

Ilustración 25: Grupo de estudiantes - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

$$A = \{x/x \ es\ personas\ vivas\ que\ sean\ mayores\ a\ 300\ años\}$$

1. Descripción del conjunto.
$A = \{\phi\}$

2. Interpretación
Es un conjunto vacío, ya que, en la historia actual no hay personas que vivan más de 110 años.

Ilustración 26: Ancianos - (Ejemplo 2)

- **Ejemplo 3.**

Sea el conjunto: $A = \{x/x\ 2 = 5, x\ es\ un\ número\ natural\ y\ es\ par\}$. Grafique sus elementos en un diagrama de ven.

Solución:

1. Desarrollo del problema
$(2)2 = 4$
$(4)2 = 8$

2. Gráfica.

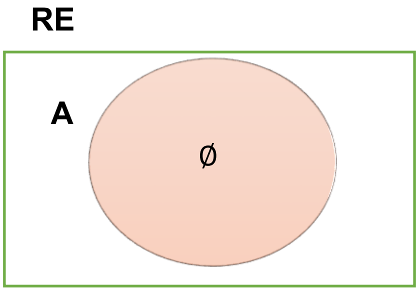


Ilustración 27. Diagrama de Venn del ejercicio planteado

3. Interpretación.
Es un conjunto vacío porque no hay un número natural y par que al multiplicarlo por 2 de igual a 5.

1.5.2. Conjunto unitario.

1.Definición.

- Un conjunto se denomina unitario cuando tiene solo un elemento. Su cardinalidad es: $N(A) = 1$.

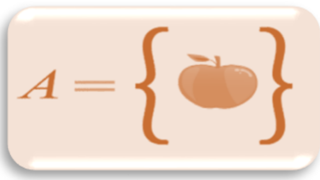


Ilustración 28: Conjunto unitario

"Conjunto Unitario nos indica que tiene un solo único elemento." (Córdoba & Fernández, 2017)

"Conjunto unitario o singular, es aquel que tiene un solo elemento." (Pérez & Caludia., 2013)

1.5.2.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Grafique mediante diagrama de Venn el siguiente conjunto:
$A = \{x/x\ es\ facultades\ donde\ hay\ la\ carrera\ de\ ing.en\ sistemas\ de\ la$
$U.Guayaquil\}$

Solución:

1. Interpretación

En la universidad de Guayaquil solo hay una facultad donde se enseña la carrera de ingeniería en sistemas por lo que la $N(A) = 1$.

$A = \{Facultad\ de\ matemáticas\ y\ física\}$

2. Gráfica.

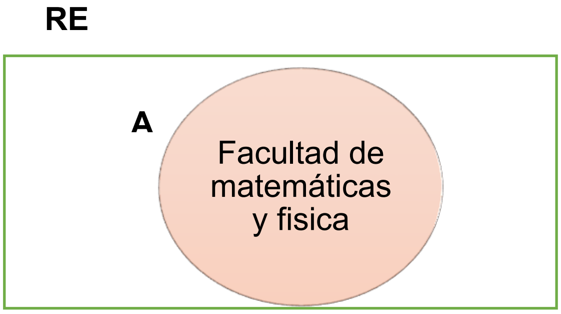


Ilustración 29: Diagrama de Venn

- ***Ejemplo 2.***

Sea el conjunto $B = \{x/x\ es\ satélite\ natural\ del\ planeta\ tierra\}$

Solución:

1. Definición del problema

$B = \{luna\}$

2. Gráfica

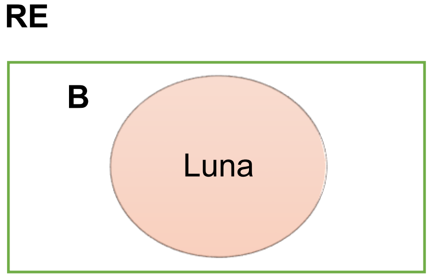


Ilustración 30:Diagrama de Venn del problema

➢ ***Ejemplo 3.***

Sea el conjunto $C = \{x/x\ es\ un\ número\ natural\ \ mayor\ que\ 0\ y\ menor\ que\ 2\ \}$
Solución:

1. Análisis del problema
   $2 > x > 0$
   $x = 1$

2. Gráfica.

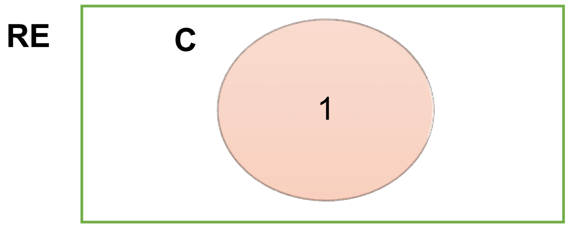


Ilustración 31: Diagrama de Venn del problema

3. Interpretación.
   El único número natural mayor que 0 y menor que 2 es el 1 por lo que conjunto es unitario.

➢ ***Ejemplo 4.***

Sea el conjunto $D = \{x/x\ es\ la\ estrella\ que\ calienta\ la\ tierra\}$

Solución:

Definición del problema
$B = \{El\ Sol\}$

Gráfica

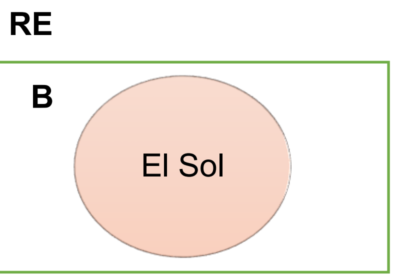


Ilustración 32: Diagrama de Venn del problema

Interpretación.
Es la única estrella que calienta al planeta Tierra.

- ***Ejemplo 5.***

Sea el conjunto $D = \{x/x\ es\ elpresidete\ de\ l\ Ecuador\}$

Solución:

Definición del problema
$B = \{Lenin\ Moreno\}$

Gráfica

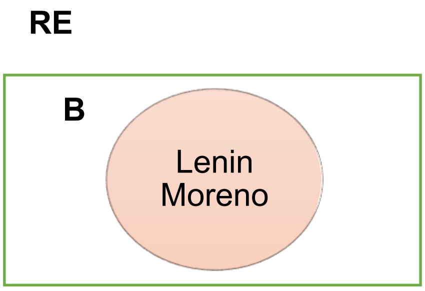


Ilustración 33: Diagrama de Venn del problema

Interpretación.
Lenin Moreno es el actual presidente del Ecuador.

1.5.3. Conjunto finito.

$A = \{a,e,i,o,u\}$

$Z = \{x|x\ es\ una\ palabra\}$

Ilustración 34: Conjunto finito de vocales

Definición.

- Son los que tienen un número de elementos conocidos y estos por ende se pueden contabilizar. Por ejemplo, sea el conjunto $A = \{x/x\ es\ vocal\}$ el cual es un conjunto finito con una cardilanidad $N(A) = 5$.

"Conjunto finito es el que tiene una cantidad finita de elementos." (Ivorra & Carlos, 2010)

"Conjunto finito es aquel que tiene una cantidad limitada de elementos, es decir el proceso de contar sus elementos concluye en algún instante" (Córdoba & Fernández, 2017)

1.5.3.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***

Describa por tabulación el conjunto de las letras que tiene “Universidad Guayaquil”

Solución:
Descripción por tabulación.

$$L = \{u, e, a, i\}$$

Grafica.

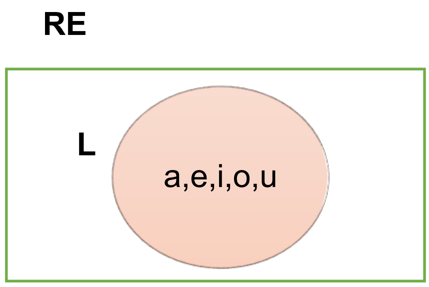


Ilustración 35: Diagrama de Venn del conjunto L

Calculo de la cardinalidad.

$$N(L) = 4$$

Interpretación.
Es un conjunto finito ya que se pueden contabilizar los elementos del conjunto

➢ Ejemplo 2.
➢

Sea el conjunto:

$$Y = \{\frac{x}{x} es\ el\ Decano\ de\ la\ facultad\ de\ Fisica\ yMatematicas\ \}$$

Determine si es un conjunto finito a través de su cardinalidad.

Solución:

Descripción por tabulación.

$$Y = \{Ing. Angela\ Torres\}$$

Grafica.

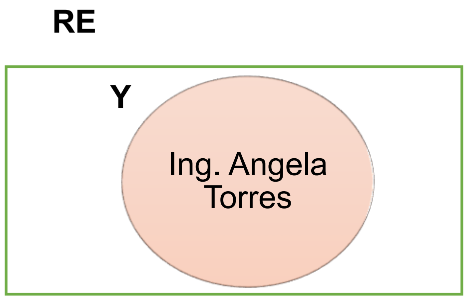


Ilustración 36: Diagrama de Venn del conjunto Y - (Ejemplo 2)

Calculo de la cardinalidad.

$$N(Y) = 1$$

- ***Ejemplo 3.***

Sea el conjunto:
$O \ = \{x/x \ es \ océanos \ del \ planeta \ tierra\}$

Determine si es un conjunto finito a través de su cardinalidad.

Solución:
Descripción por tabulación.

$$O = \{pacífico, atlántico, índico, antártico, ártico\}$$

Grafica.

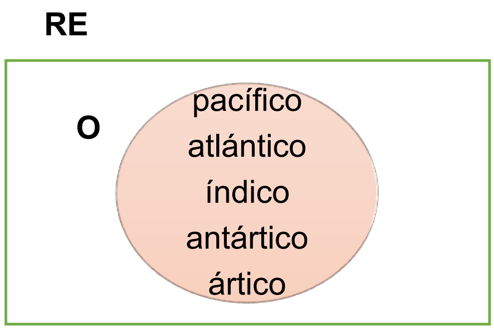


Ilustración 37: Diagrama de Venn del conjunto O - (Ejemplo 3)

Calculo de la cardinalidad.

$$N(O) = 5$$

➢ ***Ejemplo 4.***

Sea el conjunto:

$O \ = \{x/x \ son \ los \ dedos \ de \ la \ mano\}$

Determine si es un conjunto finito a través de su cardinalidad.

Solución:

Descripción por tabulación.

$$O = \{meñique, indice, medio, anular, pulgar\}$$

Grafica.

Ilustración 38: Diagrama de Venn del conjunto O - (Ejemplo 4)

Calculo de la cardinalidad.

$$N(O) = 5$$

➢ ***Ejemplo 5.***

Sea el conjunto: $O \ = \{x/x \ ruedas \ de \ un \ automovil\}$

Determine si es un conjunto finito a través de su cardinalidad.

Solución:

Descripción por tabulación.

$$O = \{4 \ ruedas\}$$

Grafica.

Ilustración 39: Diagrama de Venn del conjunto O - (Ejemplo 5)

Calculo de la cardinalidad.

$$N(O) = 4$$

1.5.4. Conjunto infinito.

1.Definición.

- Un conjunto se denomina infinito cuando posee una cantidad ilimitada de elementos y por ende es difícil de contabilizar. Por ejemplo, sea el conjunto B={x/x es constelaciones del universo}, el cual es un conjunto infinito ya que es imposible saber el número exacto de constelaciones que hay en el universo.

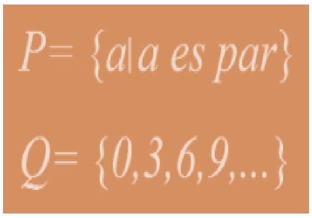


Ilustración 40: Conjunto infinito

Otros autores dan su punto de vista conceptual respecto a conjunto infinito, es así que en el libro de matemáticas de la Escuela superior politécnica ESPOL, lo define como: "Conjunto infinito es aquel que no posee una cantidad que sea finita de elementos." (Espol, 2008)

Por otra parte, los autores Pérez y Caludia dan su propia definición, e indican que: "Son aquellos conjuntos que tienen un número ilimitado de elementos." (Pérez & Caludia., 2013)

1.5.4.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea: $D = \{x/x \text{ es numero de ingenieros graduados en la } U.\text{Guayaquil}\}$

Ilustración 41: Ingenieros - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Sea: $E = \{x/x\ es\ número\ de\ granos\ de\ arena\ de\ Villamil\ playas\}$

Ilustración 42: Arena - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Sea: $F = \{x/x\ es\ constelaciones\ del\ universo\}$

Ilustración 43: Constelaciones - (Ejemplo 3)

- ***Ejemplo 4.***

Sea: $E = \{x/x\ es\ número\ de\ gotas\ de\ lluvia\ en\ una\ tormenta\}$

Ilustración 44: Goas de lluvia - (Ejemplo 4)

- ***Ejemplo 5.***

Sea: $E = \{x/x\ la\ cantidad\ de\ numeros\ reales\}$

Ilustración 45: Números reales - (Ejemplo 5)

1.5.5. Conjunto universo.

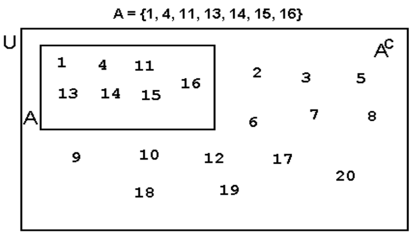


Ilustración 46: Conjunto universo

Definición.

- Es un conjunto para el estudio o análisis de alguna situación particular dada, que contiene a todos los conjuntos considerados. Se le denota generalmente por la letra U.

"Es el conjunto de todos los elementos considerados en un problema o situación dada." (Pérez & Caludia., 2013)

"Conjunto universo o referencial es el que contiene a todos los elementos que se consideren en un problema, o situación, sin contener lo que no interesa al problema. El símbolo que representa al conjunto universo es $U\ o\ Re$."

1.5.5.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***

Sea el conjunto $A = \{sen(x), cosc(x), tan(x)\}$. Determine su conjunto universo.

Solución.

1. Definición.

$U = \{identidades\ trigonométricas\}$

2. Grafica.

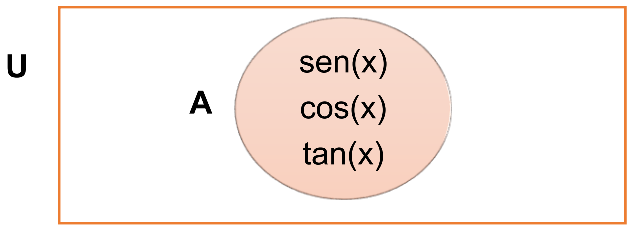


Ilustración 47: Representación del conjunto universo

➢ ***Ejemplo 2.***

Sean los conjuntos $A = \{a, e, i\}$ y $B = \{b, c, d\}$. Determine su conjunto universo.

Solución.

1. Definición.

   Su conjunto universo es:

$$U = \{Letras\ del\ abecedario\}$$

2. Grafica.

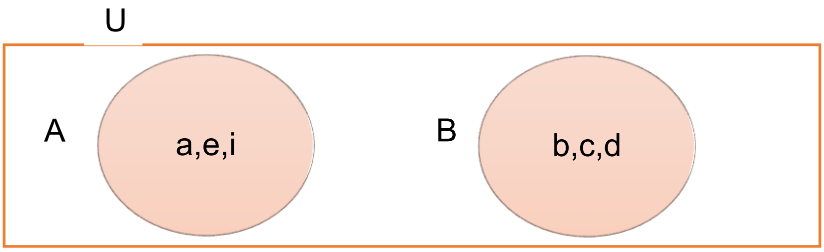


Ilustración 48: Representación del conjunto universo de los conjuntos A y B

- ***Ejemplo 3.***

Sean los conjuntos:
$E\ =\ \{\,niños\,\}$
$F\ =\ \{\,niñas\,\}$

1. Definición.
   Su conjunto universo es:

$$U\ =\ \{seres\ humanos\}$$

2. Gráfica.

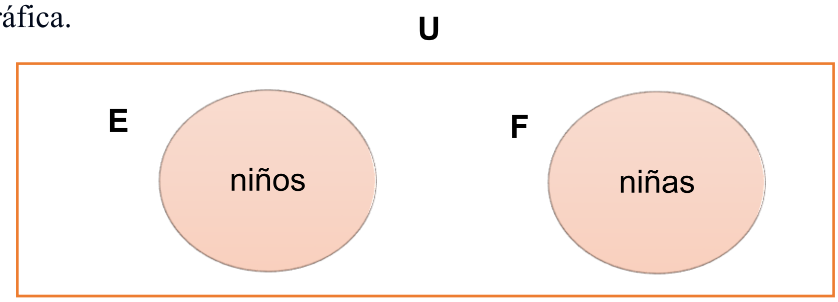


Ilustración 49: Conjunto universo de los conjuntos E y F

- ***Ejemplo 4.***

Sean los conjuntos $A = \{mamiferos, aves\}$ y $B = \{reptiles, peces\}$. Determine su conjunto universo.

Solución.

1. Definición.
   Su conjunto universo es:

$$U = \{animales\}$$

2. Grafica.

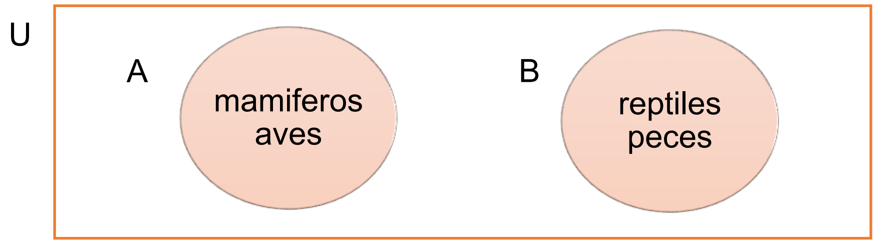


Ilustración 50. Representación del conjunto universo de los animales

- ***Ejemplo 5.***

Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{11, 13, 17, 19\}$.
Determine su conjunto universo.

Solución.

1. Definición.
   Su conjunto universo es:

$$U = \{numeros\ primos\}$$

2. Grafica.

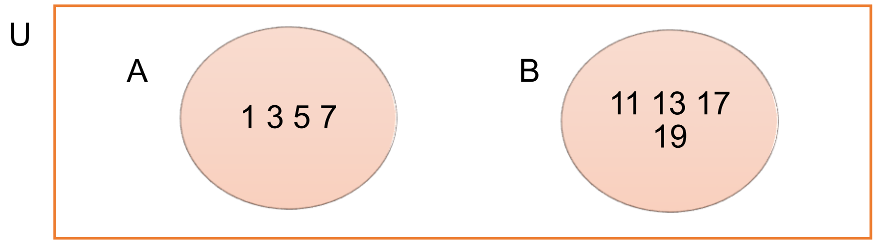


Ilustración 51. Representación del conjunto universo de los números primos

1.6. Cuantificadores.

Son tipos de expresiones con las cuales podemos indicar cuantos elementos, pertenecientes a un determinado conjunto, cumplen con ciertas propiedades ya sean pertenencia, equivalencia, entre otras.

1.6.1. Cuantificador universal.

1.Definición.

- El cuantificador universal forma parte de un lenguaje formal que tiene expresiones como: “para todo”, “todo”, “cada”, “para cada”, que indican si un elemento cumple con ciertas leyes. Su símbolo es (∀).

Ilustración 52: Cuantificador universal

“El cuantificador universal se utiliza para afirmar que todos los elementos de un conjunto cumplen con una determinada propiedad.” (mendoza, 2014)

“Indica que algo es cierto para todos los individuos. Sea a una expresión y sea x una variable. Si deseamos indicar que a, es verdadero para todos valores posibles de x, escribiremos $(\forall x)$.” (Takeyas, 2013)

1.6.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea A el conjunto del nombre de los estudiantes que estudian en la Universidad Guayaquil.

Sea $A = \left\{\frac{x}{x}\ alumno\ pertenece\ a\ la\ universidad\ de\ Guayaquil\right\}$

1. Descripción.
   Sea A el conjunto de los elementos de x tales que x es estudiante de la universidad Guayaquil.

2. Notación matemática.
   $\forall x{:}\ A = \ Para\ todo\ x, x\ es\ estudiante\ de\ la\ Universidad\ de\ Guayaquil$

Ilustración 53: Universidad - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Sea P el conjunto de nombres de lenguajes de programación.
Sea $P = \{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\}$

1. Descripción.
   Sea P el conjunto de los elementos de x tales que x es lenguaje de programación.

2. Notación matemática.

$\forall\ x: P\ =\ \text{“}Para\ todo\ x, x\ es\ lenguaje\ de\ programación\text{"}$

Ilustración 54. Programación - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Sea B el conjunto de nombres de materias que se ven en la carrera de ingeniería en teleinformática.

Sea *B(x)= {x/x es materia de 1er semestre de la carrera de ingeniería en teleinformática}*

1. Descripción.
   Sea B el conjunto de los elementos de x tales que x es materia de 1er semestre de la carrera de ingeniería en teleinformática.

2. Notación matemática.

∀x: B(x) = “Para todo x, x es carrera de primer semestre de ingeniería en teleinformática”

Ilustración 55: teleinformática - (Ejemplo 3)

➤ ***Ejemplo 4.***

Sea P el conjunto de nombres de lenguajes de programación.
Sea $P = \{x/x\ es\ vehiculo\ marca\ nissan\}$

1.Descripción.
Sea P el conjunto de los elementos de x tales que x es un vehículo marca Nissan.

2.Notación matemática.

$\forall\ x: P\ =\ \text{“}Para\ todo\ x, x\ es\ un\ vehiculo\ marca\ nissan\text{"}$

Ilustración 56: Vehículo marca Nissan - (Ejemplo 4)

➤ ***Ejemplo 5.***

Sea R el conjunto de nombres de lenguajes de programación.
Sea $R = \{x/x\ es\ telefono\ samsung\}$

1.Descripción.

Sea R el conjunto de los elementos de x tales que x es un teléfono Samsung.

2.Notación matemática.

$\forall\ x: R\ =\ \text{“}Para\ todo\ x, x\ es\ un\ telefono\ samsung\text{"}$

Ilustración 57: teléfono Samsung - (Ejemplo 5)

1.6.2. Cuantificador existencial.

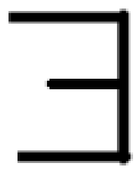


Ilustración 58. Cuantificador existencial

Definición.

- El cuantificador existencial forma parte de un lenguaje formal que tiene expresiones como: "existe", "algún", "algunos", "por lo menos uno", "basta que uno", que indican si un elemento cumple con ciertas leyes. Su símbolo es $\exists x$.

"Se utiliza para indicar que existen uno o más elementos en el conjunto a que cumple o cumplen con una condición determinada." (Sequera, 2014)

"El cuantificador existencial se usa para indicar que hay uno o más elementos en el conjunto que cumplen una determinada propiedad". (mendoza, 2014)

1.6.2.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sean: A el conjunto de nombre de estudiante que estudia la carrera de ingeniería en teleinformática.

B el conjunto de estudiantes mayores de 18 años.

$A = \{x/x\ estudia\ la\ carrera\ de\ ingeniería\ en\ teleinformática\}$
$B = \{x/x\ es\ mayor\ de\ 18\ años\}$

1. Descripción.
   Sea A, el conjunto de los elementos de x tales que x es estudiante de la carrera de ingeniería en sistemas
   Sea B, el conjunto de los elementos de x tales que x es estudiante mayor de 18 años.

2. Notación matemática.
   $\exists x: A(x)\ \Lambda\ B(x)$

Existen estudiantes de la de la carrera de ingeniería en teleinformática que son mayores de 18 años.

Ilustración 59: teleinformática - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Sean: A el conjunto de nombres de lenguajes de programación.
B el conjunto de lenguajes complejos.

$A = \{x/x \ es \ lenguaje \ de \ programación\}$

$B = \{x/x \ es \ un \ lenguaje \ complejo\}$

1. Descripción.
   Sea A, el conjunto de los elementos de x tales que x es lenguaje de programación.
   Sea B, el conjunto de los elementos de x tales que x es complejo.

2. Notación matemática.

$\exists x{:}\, A(x) \wedge B(x)$

Existen lenguajes de programación que son complejos.

Ilustración 60. Lenguaje de programacion - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Sean: D el conjunto de nombres de personas que estudian en la carrera de ingeniería en sistemas y E el conjunto de personas que estudian Python.

D(x)= {x/x estudia en la carrera de ingeniería en sistemas}
E(x)= {x/x estudia el lenguaje de programación Python}

1. Descripción.
   Sea D, el conjunto de los elementos de x tales que x es estudiante de la carrera de ingeniería en sistemas.
   Sea E, el conjunto de los elementos de x tales que x estudia el lenguaje de programación Python.

Ilustración 61: Ingeniería en sistemas (Ejemplo 3)

2. Notación matemática.

∃x: D(x) Λ E(x)

Existen estudiantes de la carrera de ingeniería en sistemas que estudian Python

- ***Ejemplo 4.***

Sean: D el conjunto de vehículos que consumen gasolina y E el conjunto de vehículos que transportan animales.

D(x)= {x/x vehículos que consumen gasolina}
E(x)= {x/x el conjunto de vehículos que transportan animales}

1. Descripción.
   Sea D, el conjunto de los elementos de x tales que x es vehículo que consumen gasolina.
   Sea E, el conjunto de los elementos de x tales que x es vehículo que transporta animales.

2. Notación matemática.

∃x: D(x) Λ E(x)

Existen vehículos que consumen gasolina y transportan animales.

Ilustración 62: Ejemplo 4

1.7. Subconjuntos.

1.Definición.

- Decimos que un conjunto A está incluido o es subconjunto de un segundo conjunto B, cuando todos los elementos del primero constituyen el segundo conjunto y se lo denota de la siguiente manera $A \subset B$.

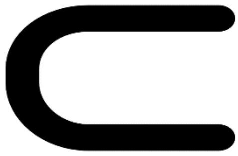


Ilustración 63: Símbolo de subconjunto.

3. "Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos conjuntos cualesquiera, puede pasar que todos y cada uno de los elementos de uno correspondan al otro. Si es el caso, decimos que a es subconjunto de $\boldsymbol{B}$. Eso se denota en los conjuntos con el símbolo $\subset$. Así, tenemos que $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$. (Ciudad universitaria, 2013)

"El conjunto a es subconjunto de B si los elementos de A estan incluidos en el conjunto B. Si a es subconjunto de B , pero b no es subconjunto de A, se asume que A es subconjunto propio de B." (Espol, 2008)

1.7.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***

1. Definición.
   Sean los conjuntos A y B:
   $A = \{18,19,20,21,22,23,24\}$
   $B = \{22,23,24\}$

2. Notación matemática.

$$B \subset A$$

3. Gráfica.

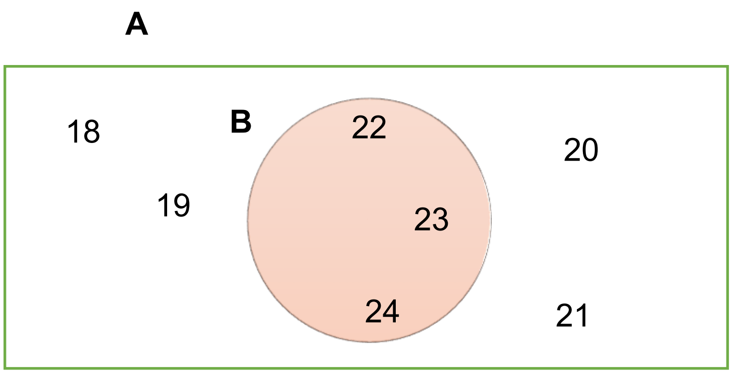


Ilustración 64: Representación de subconjunto - (Ejemplo 1)

4. Interpretación.
   B es subconjunto de A porque los elementos de B están incluidos en A.

➢ ***Ejemplo 2.***

1. Definición.
   Sean los conjuntos C y D:

$C = \{x/x \ es \ ingeniería \ de \ la \ universidad \ de \ guayaquil\}$

$D = \{ing. En \ sistemas \ de \ información, ing. En \ sistemas, ing. Civil\}$

2. Notación matemática.

$C = \{ing. civil, ing. en \ comercio, ing. en \ sistemas, ing. química, ing. en \ sistemas \ de \ información\}$

$D = \{ing. En \ sistemas \ de \ información, ing. En \ sistemas, ing. Civil\}$

$$D \subset C$$

3. Gráfica.

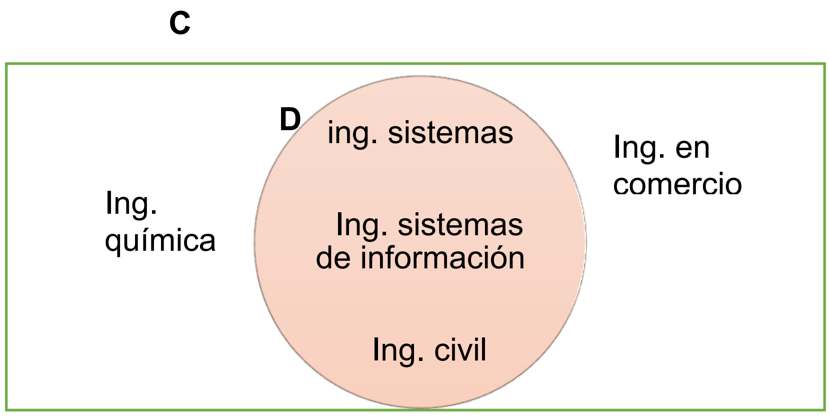


Ilustración 65: Representación de subconjunto - (Ejemplo 2)

4. Interpretación.

D es subconjunto de C porque los elementos de D estan incluidos en C.

➢ ***Ejemplo 3.***

1. Definición.
   Sean los conjuntos E y F:

$E = \{x/x \text{ es lenguaje de programación}\}$

$F = \{c, c++, python\}$

2. Notación matemática.

   $E = \{c, c++, python, c\#, Java, PHP\}$

   $F = \{c, c++, python\}$

$$F \subset E$$

3. Grafica.

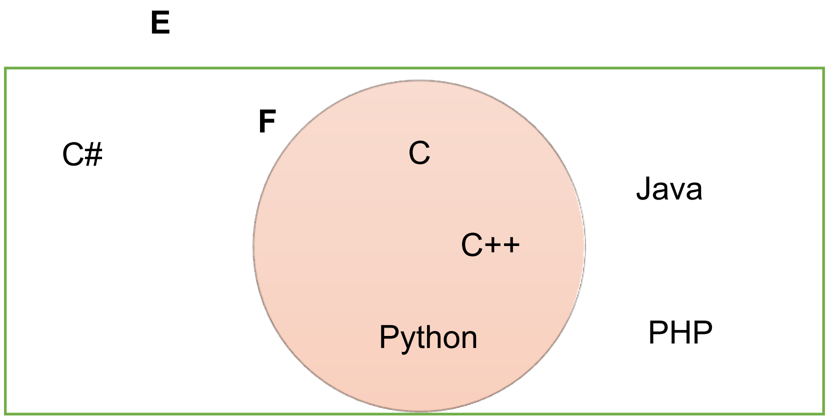


Ilustración 66: Representación de subconjunto - (Ejemplo 3)

4. Interpretación.
   F es subconjunto de E porque los elementos de F se encuentran incluidos en E.

$$E = \{x/x \text{ es lenguaje de programación}\}$$
$$F = \{c, c++, C\#\}$$

Descripción:

F ⊂ E, F es subconjunto de e porque los elementos de F se encuentran incluidos en E.

1.8. Conjunto potencia.

Ilustración 67: Conjunto potencia.

1.Definición.

- Sea A un conjunto definido previamente, el conjunto potencia perteneciente a A es el que esta conformado por todos los subconjuntos del conjunto A. El conjunto potencia se representa por $P(A)$ y su cardinalidad se denota por $N(P(A))$ esto es igual a $2^{N(A)}$.

"El conjunto potencia de un conjunto definido es otro conjunto formado por los subconjuntos del conjunto dado previamente." (Jech, 2013)

"Dado un conjunto A, su conjunto potencia es el formado por todos los subconjuntos posibles de A. Su símbolo es $P(A)$". (Espol, 2008).

1.8.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea $A = \{ing. En\ sistemas, ing. En\ networking, ing. En\ teleinformática\}$, calcule su conjunto potencia.

1. Determinamos la cardinalidad del conjunto A
   $N(A) = 3$

2. Aplicamos la fórmula para determinar el conjunto potencia.

$$2^{N(A)}$$
$$2^3 = 8$$

3. Definimos el conjunto $P(A)$ por tabulación.

$$P(A) = \left\{ \begin{matrix} \emptyset, \{ Ing. En\ sistemas\}, \\ \{Ing. En\ networking\}, \{Ing. En\ teleinformática\ \}, \\ \{ Ing. En\ sistemas, ing. En\ networking\}, \\ \{ Ing. En\ sistemas, Ing. En\ teleinformática\ \}, \\ \{Ing. En\ networking, Ing. En\ teleinformática\ \}, A \end{matrix} \right\}$$

Ilustración 68: Red de computadoras - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Sea el conjunto $B = \{ Laptop, Tablet, Iphone\}$. Determine sus subconjuntos y calcule su conjunto potencia.

1. Determinamos la cardinalidad del conjunto B
   $N(B) = 3$

2. Aplicamos la fórmula para determinar el conjunto potencia.
   $2^{N(B)}$
   $2^3 = 8$

3. Definimos el conjunto $P(B)$ por tabulación.

$$P(B) = \left\{ \begin{matrix} \emptyset, \{Laptop\}, \{tablet\}, \{Iphone\}, \\ \{Laptop, Tablet\}, \{Laptop, Iphone\}, \{Tablet, Iphone\}, \\ B \end{matrix} \right\}$$

Ilustración 69: Aparatos tecnológicos - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Determine un nuevo conjunto D que contenga los elementos de $C \subset B$ y posteriormente calcule el conjunto potencia de D.
Sean los conjuntos:

$B = \{x/x \ es \ par \ y \ x < 7\}$
$C = \{2,4\}$

1. Definimos conjuntos.
   $C \subset B = D$
   $B = \{2,4,6\}$
   $C = \{2,4\}$
   $D = \{2,4\}$

2. Grafica.

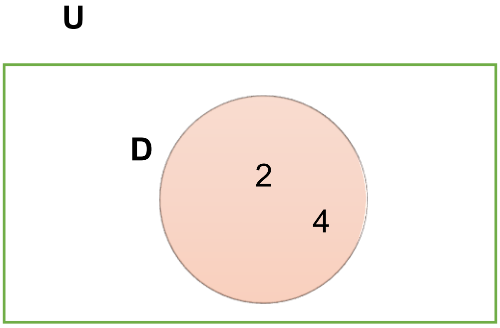


Ilustración 70: Representación de subconjunto - (Ejemplo 3)

3. Calculamos las cardinalidades de los conjuntos.
   $N\,(B) = 3$
   $N(D) = 2$

4. Solución del problema
   $2^2 = 4$

$$P(D) = \{\ \emptyset\{2\}, \{4\}, \{2,4\}\}$$

1.9. Igualdad entre conjuntos.

1.Definición.

- Sean A y B dos conjuntos definidos, estos son iguales si y solo si A es subconjunto de B y B es subconjunto de A, en otras palabras, que los dos conjuntos se contienen por igual. $A = B$

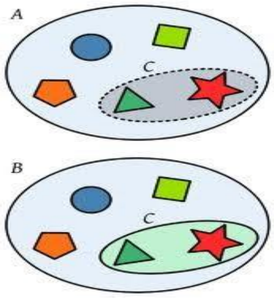


Ilustración 71: Conjuntos iguales

"Dos conjuntos son iguales sólo si tienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden en que estos estén dispuestos." (Ciudad universitaria, 2013)

"A y B son iguales si tienen los mismos elementos, es decir, que ambos conjuntos se contienen mutuamente." (Espol, 2008)

1.9.1. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**

Determine si el siguiente enunciado es falso o verdadero y justifique. Sean los siguientes conjuntos A, B, C.

$$A = \{quimica, matemática, física\}$$
$$B = \{matemática, física, química\}$$
$$C = \{fisica, matemática, química\}$$

¿Si $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$?

Si, porque A contiene los mismos elementos de B; Y B contiene los mismos elementos de C por ende los elementos de A estan incluidos en C.

Ilustración 72: (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Verifique si los dos conjuntos a continuación son iguales

$A = \{x/\ x^2 = 16\}$ $\qquad$ $B = \{x/\ (x+4)(x-4) = 0\}$

Solución:

1. Resolvemos los conjuntos.

$A = \{-4, 4\}$

$B = \{4, -4\}$

2. Grafica.

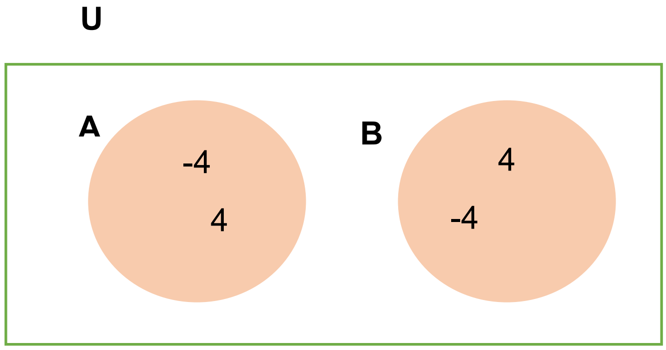


Ilustración 73: Diagramas de venn - (Ejemplo 2)

3. Interpretación de resultados.

Si, $A = B$ porque los elementos que están en A se encuentran en B

➢ ***Ejemplo 3.***

Determine si D es igual al conjunto E

$D = \{x/x\ es\ una\ carrera\ de\ Facultad\ de\ Ingeniería\ Industrial\}$

$E = \{Ing.industrial, ing.en\ teleinformáticas,$
$lic.en\ sistemas\ de\ información\}$

1. Gráfica.

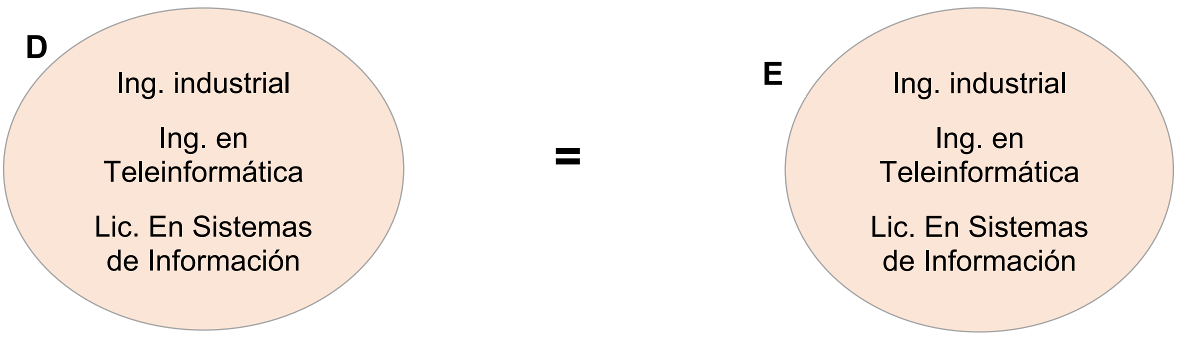


Ilustración 74: Diagramas de venn - (Ejemplo 3)

2. Interpretación.

$D = E$, ya que el conjunto E contiene todos los elementos del conjunto D.

1.10. Conjuntos disjuntos e Intersecantes.

1.Definición.

- Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, los podemos denominar disjuntos si no tienen ningun elemento común y los denominaremos intersecantes si estos tienen al menos un elemento en común.

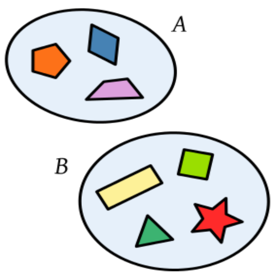


Ilustración 76: Conjuntos disjuntos

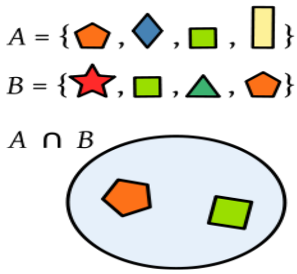


Ilustración 75: Conjuntos intersecantes.

“Se denominan conjuntos disjuntos cuando no tienen ningún elemento en común. Se denominan conjuntos intersecantes cuando tienen al menos un elemento en común.” (Ciudad universitaria, 2013)

“Dos conjuntos cualesquiera son disjuntos si no tienen elementos en común. Dos conjuntos son intersecantes si y solo si tienen al menos un elemento común” (Espol, 2008)

1.10.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1***.

Sean los conjuntos:

$A = \{libro, cuaderno, libreta\}$
$B = \{lapiz, pluma, bolígrafo\}$
Determine sin son conjuntos disjuntos o intersecantes.

U

1. Gráfica.

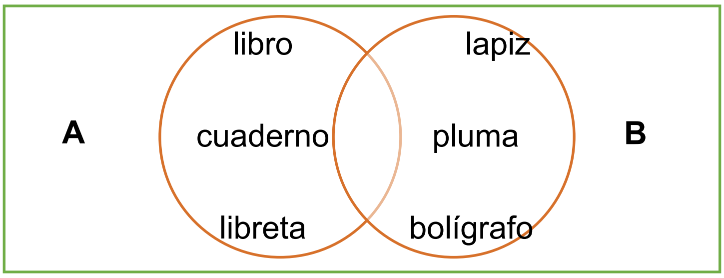


Ilustración 77: Conjunto universo del ejemplo #1

2. Notación matemática.

$$A \cap B = \emptyset$$

3. Interpretación.

Son disjuntos ya que no tienen ni un solo elemento en común.

- **Ejemplo 2**

Determine si D y E sin conjuntos disjuntos o intersecantes.

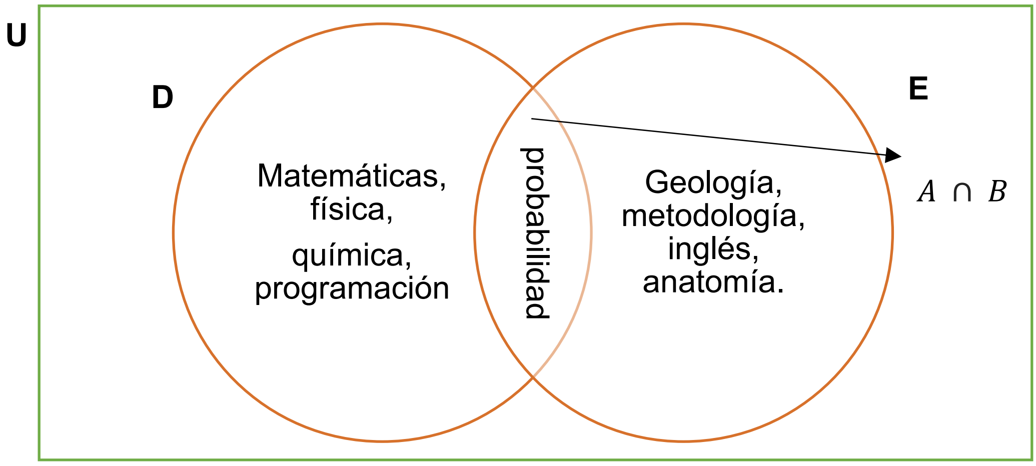


Ilustración 78: Conjunto universo del ejemplo #2

Solución:

$$A \cap B = \{probabilidad\}$$

Son conjuntos intersecantes porque tienen un elemento en común.

- ***Ejemplo 3.***

Sea $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}\ y\ \ B = \{x/x\ es\ número\ primo\}$, determinar si son intersecantes o disjuntos

1. Definimos los conjuntos A y B mediante diagramas de Venn.

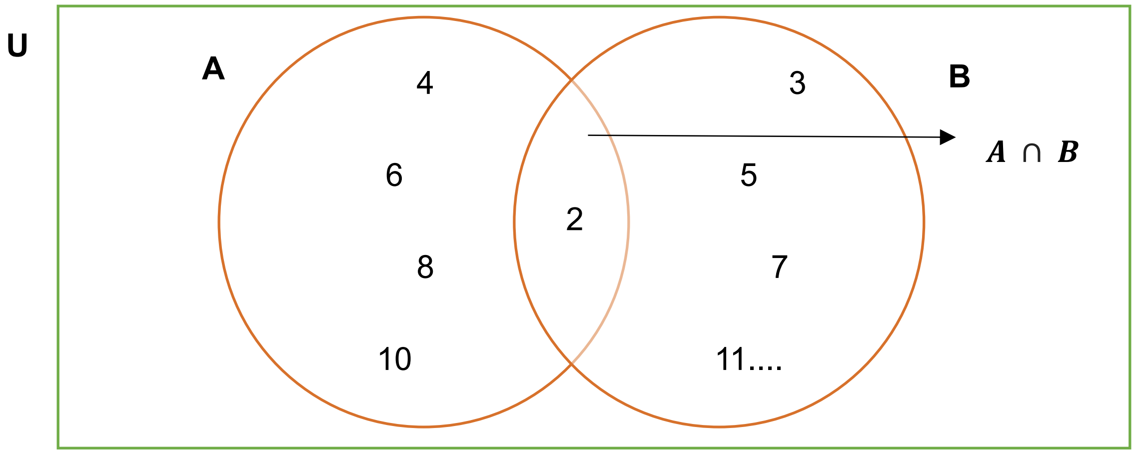


Ilustración 79: Conjunto universo del ejemplo #3

2. Notación matemática.

$$A \cap B = \{2\}$$

3. Interpretación.
   Son conjuntos intersecantes, ya que hay al menos un elemento que los relaciona.

1.11. Operaciones entre conjuntos.

Los conjuntos son una colección ordenada o desordenada de elementos, estos se los puede combinar de varias maneras distintas y por lo tanto se pueden realizar distintas operaciones diferentes las cuales se mencionarán a continuación.

1.11.1. Unión.

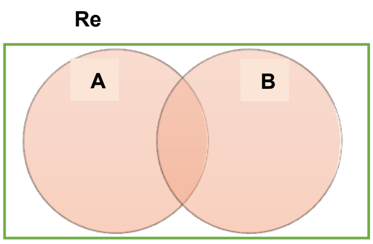


Ilustración 80: Unión de conjuntos (Las regiones pintadas representan la unión)

1.Definición.

- La unión entre dos o más conjuntos es un nuevo conjunto conformado por la agrupación de todos los objetos o elementos de los conjuntos que intervienen. El símbolo es la letra: ∪ . $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$

"Esta operación indica la unión de los elementos de dos o más conjuntos, a partir de esto conforman un nuevo conjunto, en el cual los elementos de dicho nuevo conjunto pertenecen a los elementos de los conjuntos originales. Cuando un elemento se repite, forma parte del conjunto unión solo una vez." (Rosen, 2011)

“Es una operación entre dos o más conjuntos, mediante la cual se forma un nuevo conjunto que tiene todos los elementos que pertenecían a uno de los originales. Su símbolo se denota por: ∪.” (Ciudad universitaria, 2013)

1.11.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sean los conjuntos: $A = \{Amigos\ de\ la\ facultad\}$ $B = \{Amigos\ del\ trabajo\}$ Defina AUB.

$$AUB = \{Amigos\ de\ la\ universidad\ y\ amigos\ del\ trabajo\}$$

Ilustración 81: Amigos - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

Si $A = \{c\#,\ C\}\ y\ \ B = \{Python, C\#,\ C++\}$, entonces AUB =?.

Solución:

$$A\ U\ B = \{C\#, C, Python, C++\}$$

Ilustración 82: Programación - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Sea $C\ U\ P = \left\{\begin{matrix} Estudiantes\ que\ saben\ programar\ en\ C, \\ Estudiantes\ que\ saben\ programar\ en\ Python \end{matrix}\right\}$, defina los conjuntos por separado y grafíquelos en un diagrama de Venn.

1. Definición de conjuntos.

$$C = \{Estudiantes\ que\ saben\ programar\ en\ C\}$$
$$P = \{Estudiantes\ que\ saben\ programar\ en\ Python\}$$

2. Gráfica.

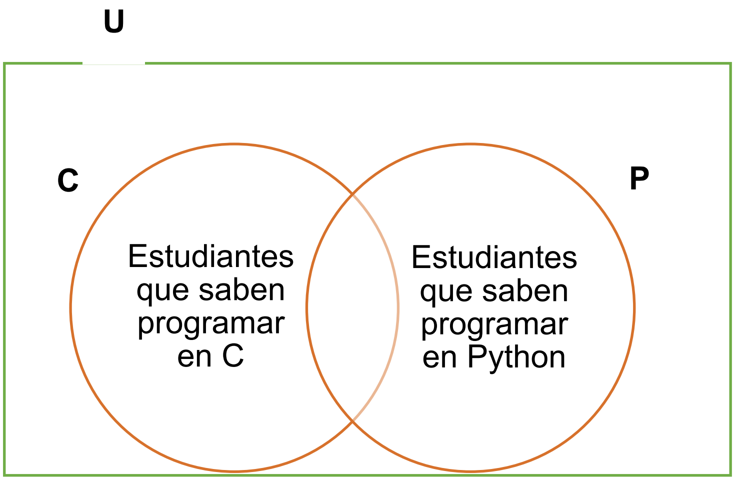


Ilustración 83: Diagrama de Venn ejemplo #3

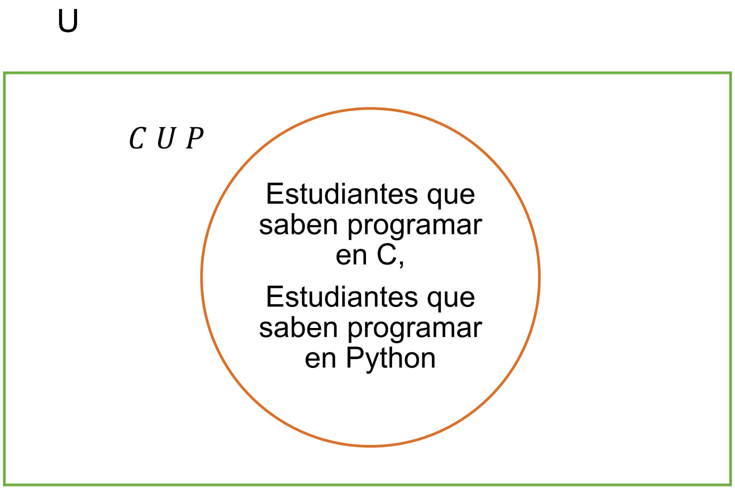


Ilustración 84: Unión de conjuntos - Ejemplo #3

1.11.2. Intersección.

1.Definición.

- La intersección entre dos conjuntos, sean estos A y B, es el conjunto formado por todos los objetos o elementos que pertenecen a los conjuntos A y B a la vez.
  $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \; y \; x \in B\}$

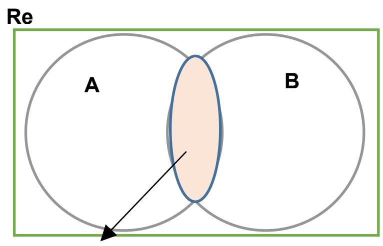


Ilustración 85: Intersección de conjuntos (Las zonas pintadas representan la intersección)

"Su símbolo es: ∩. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, la intersección de ambos ($A \cap B$) es un nuevo conjunto c el cual esta formado por los elementos que están en a y que están en B." (Rosen, 2011)

"Es una operación entre dos o más conjuntos, mediante el cual se forma un nuevo conjunto que tiene los elementos que pertenecían a la vez a todos los conjuntos originales. Se símbolo se denota por:∩." (Ciudad universitaria, 2013)

1.11.2.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sean los conjuntos: $A = \{x/x\ es\ número\ par\}$ y $B = \{2,5,7,8,9\}$, describa por tabulación $A \cap B$.

1. Definición de conjuntos.

$A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 \ldots\}$
$B = \{2,5,7,8,9\}$

2. Solución.

$A \cap B = \{2,8\}$

3. Cálculos matemáticos.

$N(A)$: *La cardinalidad de A es imposible de calcular ya que es un conjunto infinito.*
$N(B) = 5$
$N(A \cap B) = 2$

4. Gráfica.

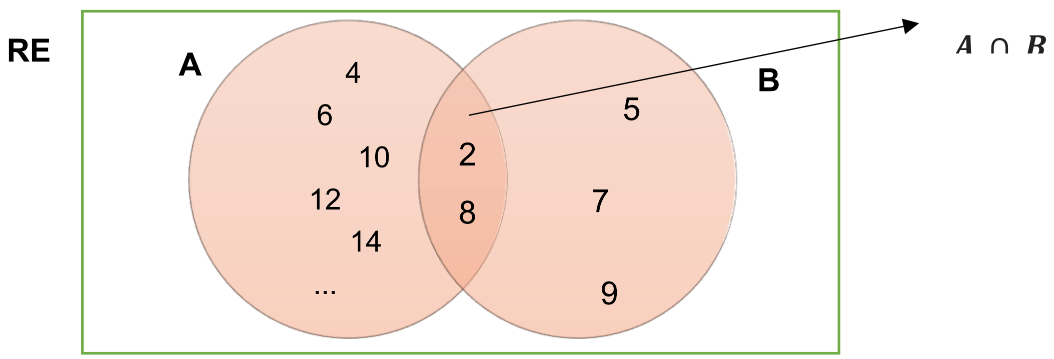


Ilustración 86: Intersección de conjuntos (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.

La intersección A y B estará formada por todos los elementos que estén a la vez en los dos conjuntos.

➢ ***Ejemplo 2***.

Sean:
$A = \{x/x \ es \ lenguaje \ de \ programación\}$
$B = \{Python, C\#, Word, excel\}$
$C = \{Python, C\#, teclado, monitor\}$

Defina $A \cap B \cap C$.

1. Definición de conjuntos.
   $A = \{C, C++, C\#, Python, Java, PHP \ldots\}$
   $B = \{Python, C\#, Word, excel\}$
   $C = \{Python, C\#, teclado, monitor\}$

2. Solución del problema.
$$A \cap B \cap C = \{Python, C\#\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(A)$: $La \ cardinalidad \ de \ A \ es \ imposible \ de \ calcular \ ya \ que \ es \ un \ conjunto \ con \ elementos \ indefinidos.$
   $N(B) = 4$
   $N(C) = 4$
$$N(A \cap B \cap C) = 2$$

4. Gráfica.

RE

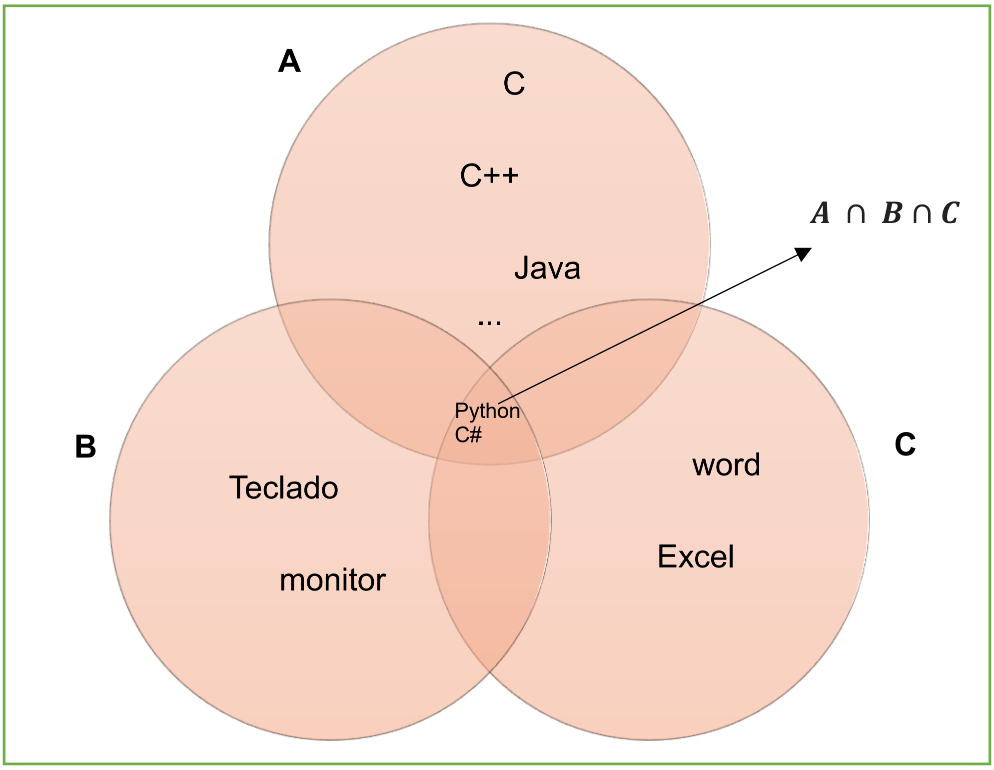


Ilustración 87: Intersección de conjuntos (Ejemplo 2)

5. Interpretación de resultado.
   La intersección A, B y C estará formada por todos los elementos que estén a la vez en los tres conjuntos

➢ ***Ejemplo 3.***

Sea $C = \{Matemáticas, probabilidad, contabilidad, programación\}$,
$D = \{x/x\ es\ ciencia\ exacta\}$. Grafique su intersección.

1. Definición de conjuntos.

$C = \{Matemáticas, probabilidad, contabilidad, programación\}$,
$D = \{Matemática\}$

2. Solución del problema.

$$C \cap D = \{matemáticas\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(C) = 4$
   $N(D) = 1$
   $N(C \cap D) = 1$

4. Gráfica.

U

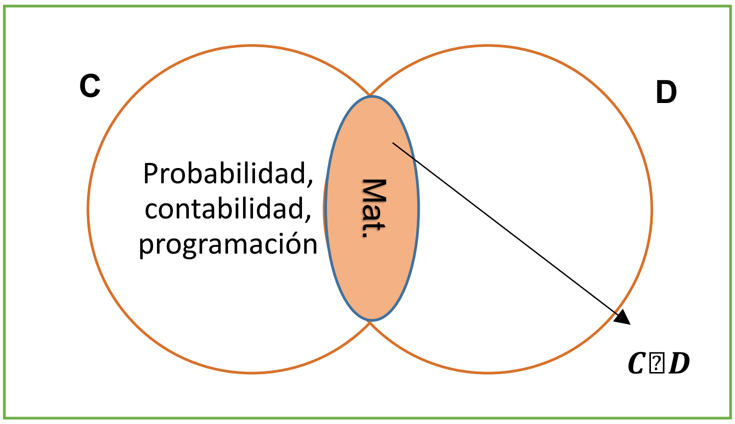


Ilustración 88: Diagrama de Venn (Intersección) - Ejemplo #3

5. Interpretación de resultado.
   La intersección C y D estará formada por todos los elementos que estén a la vez en los dos conjuntos.

1.11.3. Complemento.

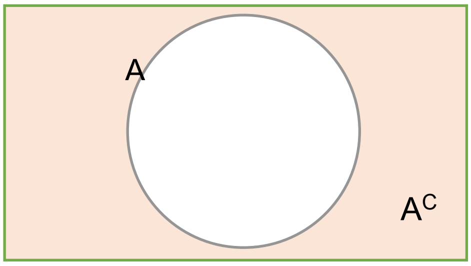


Ilustración 89: Complemento de un conjunto (La región pintada representa A^C)

Definición.

- El complemento de un conjunto A cualquiera es un nuevo conjunto formado por los elementos que corresponden al conjunto universal, pero no al conjunto A. Se símboliza de la siguiente manera: A^C.
  $A = \{x \in U / x \notin A\}$

"Su símbolo es: $\boldsymbol{A^C}$. Sea ∪ el conjunto universo o referencial $\boldsymbol{Re}$, en donde se hallan todos los elementos o objetos posibles, entonces el complemento de A con respecto a ∪ se obtiene restando a ∪ todos los elementos del conjunto A. $\boldsymbol{A^C}$ =∪ $-A$" (Rosen, 2011)

"Es una operación entre el conjunto universo y de un solo conjunto, mediante el cual se forma un nuevo conjunto que tiene todos los elementos que pertenecen al conjunto universo, pero no al original." (Ciudad universitaria, 2013)

1.11.3.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sea el conjunto universo $U = \{x/x\ es\ número\ par\}$ y $B = \{2,5,7,8,9\}$, describa por tabulaciónB^c.

1. Definición de conjuntos.

$U = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 \ldots\}$
$B = \{2,8\}$

2. Solución del problema.

$$B^c = \{4,6,10,12,14,16...\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(U) = Es\ un\ conjunto\ infinito\ por\ lo\ que\ no\ es\ posible\ calcular\ su\ cardinalidad$
   $N(B) = 2$
   $N(B^c) = Es\ un\ conjunto\ infinito\ por\ lo\ que\ no\ es\ posible\ calcular\ su\ cardinalidad$

4. Gráfica.

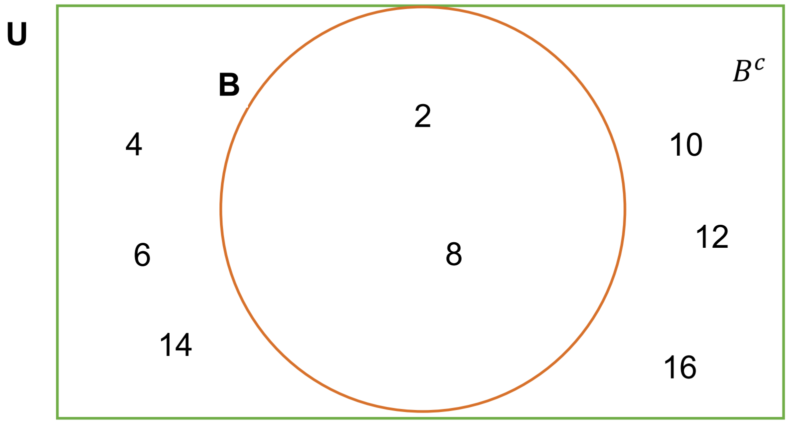


Ilustración 90: Diagrama de Venn del complemento del conjunto B - (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.
   El complemento de B estará formado por todos los elementos que estén a fuera de él, es decir, en el conjunto universo.

- ***Ejemplo 2.***

Sean:
El conjunto universo $U = \{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\}$
$D = \{Python, C\#\}$
Defina D^C

1. Definición de conjuntos.
   $U = \{C, C++, C\#, Python, Java, PHP, Rubi\ ...\}$
   $D = \{Python, C\#\}$

2. Solución del problema.
   $$D^C = \{C, C++, python, java, php, rubi\ ...\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(U) = Es\ un\ conjunto\ infinito\ por\ lo\ que\ no\ es\ posible\ calcular\ su\ cardinalidad$
   $N(D) = 2$
   $N(B^c) = Es\ un\ conjunto\ infinito\ por\ lo\ que\ no\ es\ posible\ calcular\ su\ cardinalidad$

4. Gráfica.

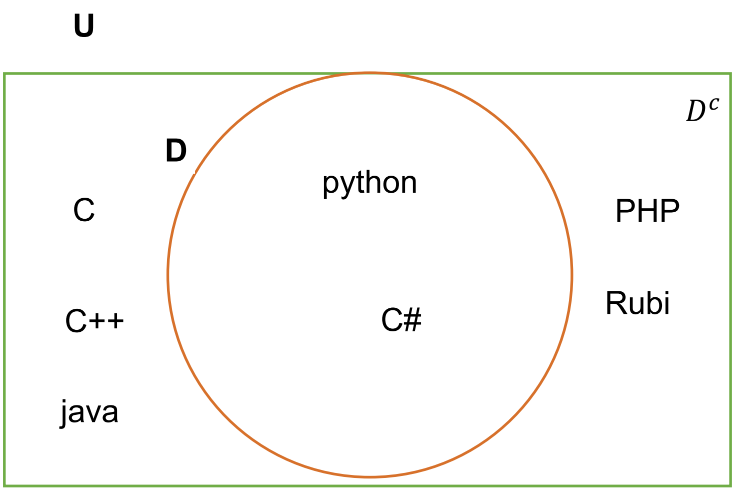


Ilustración 91: Diagrama de Venn del complemento del conjunto D - (Ejemplo 2)

5. Interpretación de resultado.
   El complemento de D estará formado por todos los elementos que estén afuera de él.

➢ ***Ejemplo 3.***
Sea $U = \{Matemáticas, probabilidad, contabilidad, programación\}$, $F = \{x/x\ es\ ciencia\ exacta\}$. Grafique el complementario de F.

1. Definición de conjuntos.
$C = \{Matemáticas, probabilidad, contabilidad, programación\}$,
$F = \{Matemática\}$

2. Solución del problema.
   $$F^C = \{probabilidad, programación, contabilidad\}$$

3. Cálculos matemáticos.

$N(U) = 4$
$N(F) = 1$
$N(F^c) = 3$

4. Gráfica.

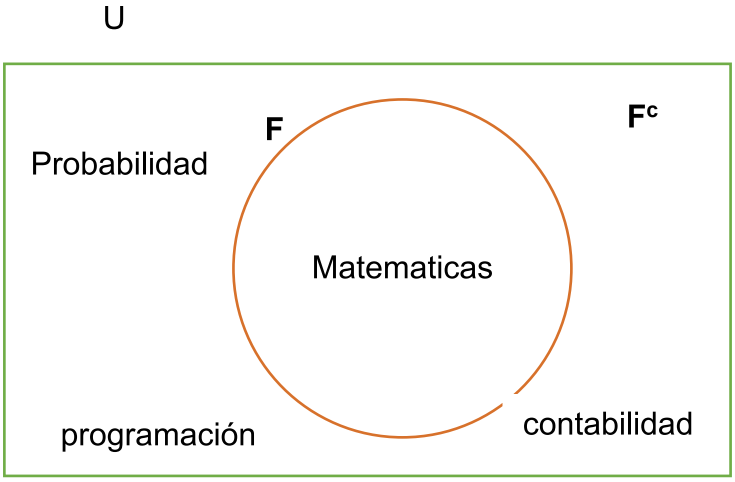


Ilustración 92: Diagrama de Venn - Ejemplo 3

5. Interpretación de resultado.

El complemento de F estará formado por todos los elementos que estén afuera de él, es decir, en todo el conjunto universo menos F.

1.11.4. Diferencia.

Definición.

- El conjunto diferencia es aquel que está formado solamente por los elementos que forman parte de A pero no de B. Se simboliza de la siguiente manera:$(A - B)$.
$A - B\{x/x \in A \wedge x \notin B\}$

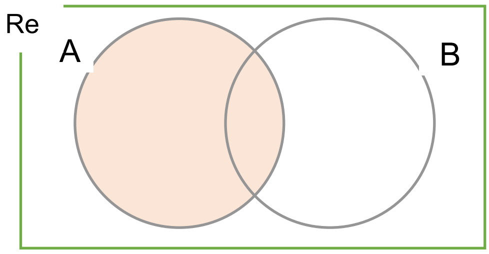


Ilustración 93: Diferencia de conjuntos (A-B)

“Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, la diferencia consiste en restar de A todo elemento que esté en B, se puede representar tambien con el símbolo de resta $A - B$, es decir, es un nuevo conjunto que tiene a los elementos que están en A, pero no en B.” (Rosen, 2011)

“Es una operación entre dos conjuntos cualesquiera, mediante la cual se forma un nuevo conjunto que tiene todos los elementos que pertenecen al primero, pero no al segundo conjunto. Se denota mediante el símbolo –.” (Ciudad universitaria, 2013)

1.11.4.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1***.

Sea $A = \{x/x \ es \ número \ par\}$ y $B = \{2,4,5,7,8,9\}$, describa por tabulación $A - B$.

1. Definición de conjuntos.

$A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 \ldots\}$
$B = \{2,4,5,7,8,9\}$

2. Solución del problema.

$$A - B = \{6,10,12,14,16,18,20 \ldots\}$$

3. Cálculos matemáticos.
$N(A) = Es \ imposible \ calcularla \ ya \ que \ es \ un \ conjunto \ infinito$
$N(B) = 6$
$N(B^c) = Es \ imposible \ calcularla \ ya \ que \ es \ un \ conjunto \ infinito$
$N(A - B) = Es \ imposible \ calcularla \ ya \ que \ es \ un \ conjunto \ infinito$

4. Gráfica.

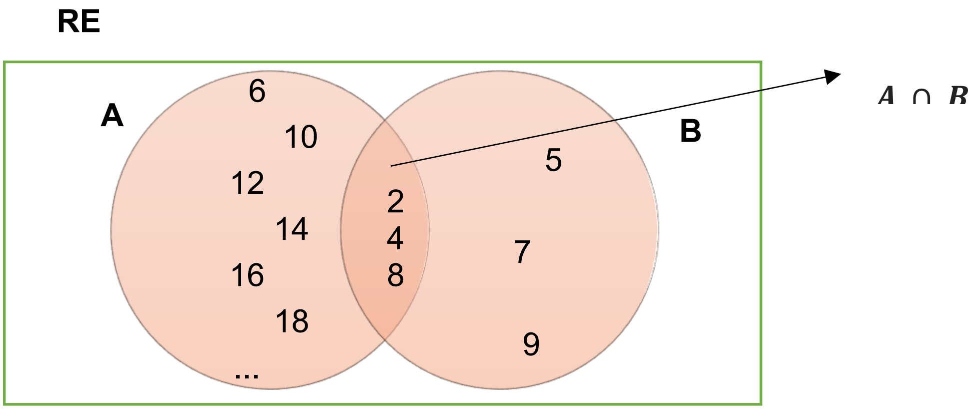


Ilustración 94: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B - (Ejemplo 1)

RE

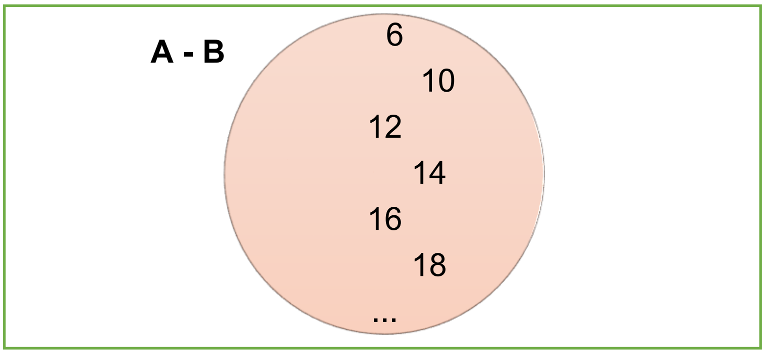


Ilustración 95: Diagrama de Venn del conjunto A-B - (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.
   La diferencia de los conjuntos $A - B$ estará formada por todos los elementos que estén en A y no en B.

- Ejemplo 2.

  Sean:
  $A = \{x/x \; es \; lenguaje \; de \; programación\}$
  $B = \{Python, C\#, Word, excel\}$
  Defina $A - B$.

1. Definición de conjuntos
   $A = \{C, C++, C\#, Python, Java, PHP \ldots\}$
   $B = \{Python, C\#, Word, excel\}$

2. Solución del problema.

$$A - B = \{C, C++, Java, PHP \ldots\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(A) = Es \; imposible \; calcularla \; ya \; que \; es \; un \; conjunto \; indefinido$
   $N(B) = 4$
   $N(B^c) = Es \; imposible \; calcularla \; ya \; que \; es \; un \; conjunto \; indefinido$
   $N(A - B) = Es \; imposible \; calcularla \; ya \; que \; es \; un \; conjunto \; infinito$

4. Gráfica.

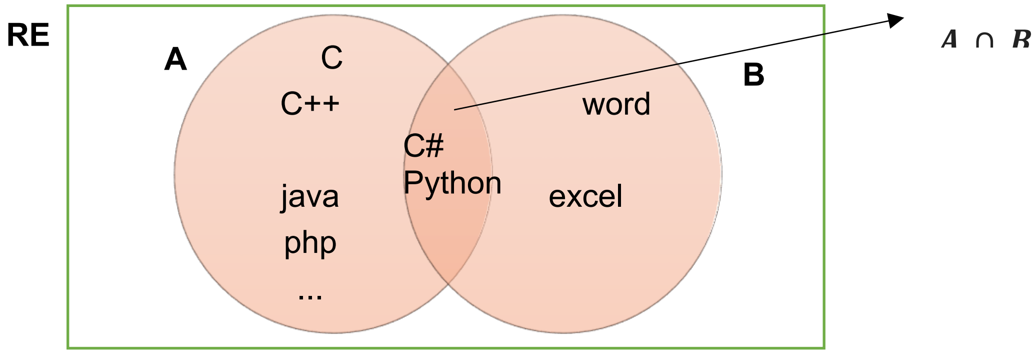


Ilustración 96: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B - (Ejemplo 1)

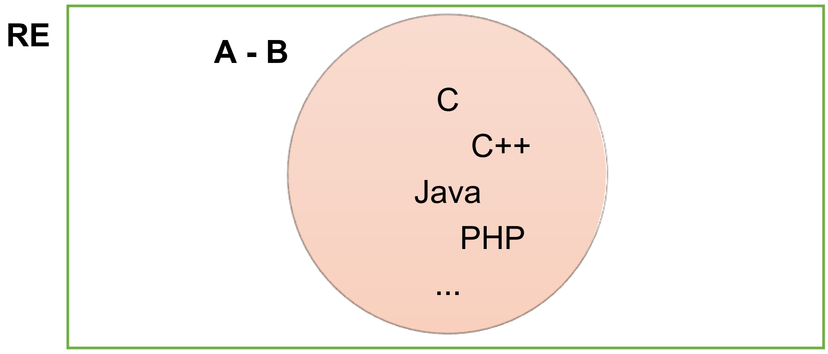


Ilustración 97: Diagrama de Venn del conjunto A-B - (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.

   La diferencia de $A - B$ estará formada por todos los elementos que solo estén en A.

- ***Ejemplo 3.***

Grafique $B - A$
Sean:

$$A = \{x/x \; es \; un \; número \; mayor \; que \; 0\}$$
$$B = \{x/x \; es \; numero \; menor \; que \; 3\}$$

1. Definición de conjuntos.
   $A = \{1, 2,3,4,5,6,7,8,9,10 \ldots\}$
   $B = \{-1,0,1,2\}$

2. Solución del problema.

$$B - A = \{-1,0\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(A) = Es \; imposible \; calcularla \; ya \; que \; es \; un \; conjunto \; indefinido.$
   $N(B) = 4$
   $N(B^c) = Es \; imposible \; calcularla \; ya \; que \; es \; un \; conjunto \; indefinido.$
   $N(B - A) = 2$

4. Grafico.

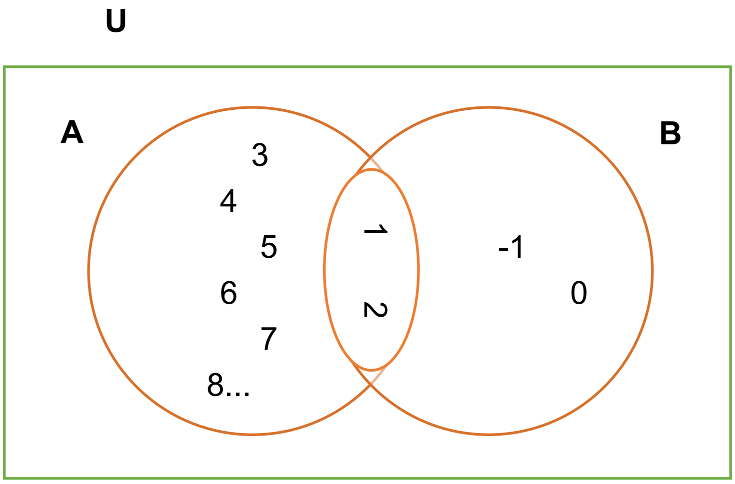


Ilustración 98: Diagrama de Venn - Ejemplo 3

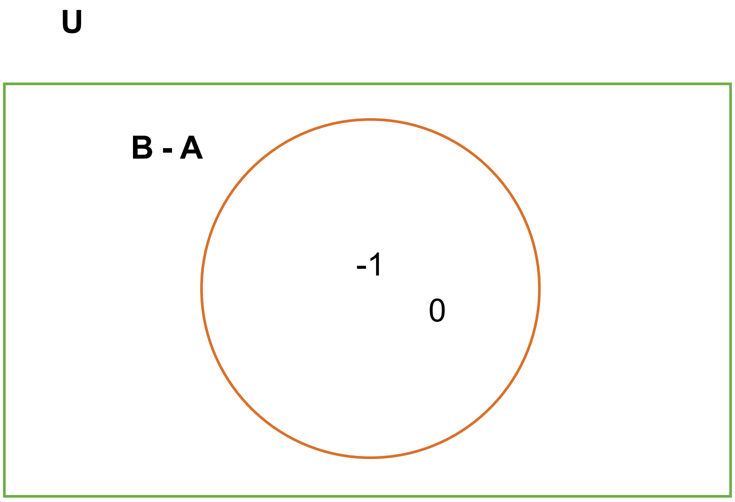


Ilustración 99: Diagrama de Venn - Ejemplo 3

5. Interpretación de resultado.
   La diferencia de $A - B$ estará formada por todos los elementos que solo estén en A.

1.11.5. Diferencia simétrica.

Definición.

- La diferencia simétrica de dos conjuntos $A\ y\ B$ cualesquiera es un nuevo conjunto formado por todos los elementos que corresponden a $A\ o\ B$ pero no a ambos conjuntos. Se simboliza de la siguiente manera: $A\,\Delta\,B$.

"Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, la diferencia simétrica entre dichos conjuntos es un nuevo conjunto que tiene los elementos que se hallan en A o bien en B, pero no en ambos a la vez." (Rosen, 2011)

"La diferencia simétrica entre los conjuntos $A\ y\ B$ es un conjunto nuevo que se crea por elementos que pertenecen al conjunto A o B pero no a ambos." (Espol, 2008)

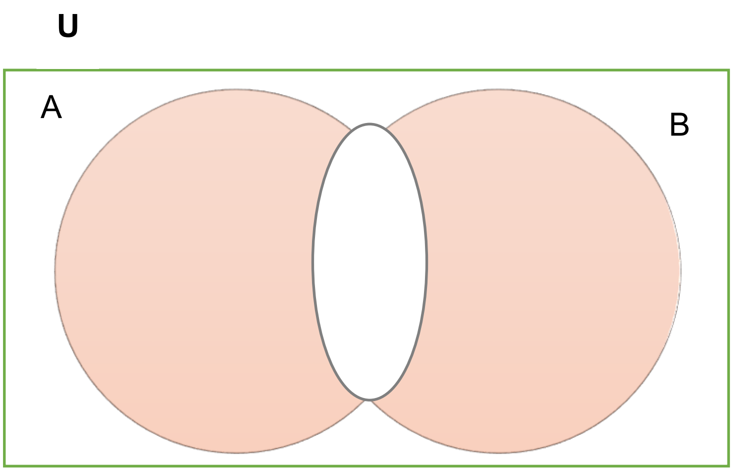


Ilustración 100: Diferencia simétrica A Δ B – Las zonas pintadas de naranja representan la diferencia simétrica

1.11.5.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Sean:
$A\ = \{x/x\ es\ lenguaje\ de\ programación\}$
$B\ = \{Python, C\#, Word, excel\}$
Defina $A\,\Delta\,B$.

1. Definición de conjuntos.
   $A\ = \{C, C++, C\#, Python, Java, PHP\}$
   $B\ = \{Python, C\#, Word, excel\}$

2. Solución del problema.

$$A \, \Delta \, B = \{C, C++, Java, PHP, word, excel\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(A) = 6$
   $N(A^c)$=4
   $N(B) = 4$
   $N(B^c) = 6$
   $N(B - A) = 2$
   $N(A - B) = 4$
   $N(A\Delta B) = 6$

4. Grafico.

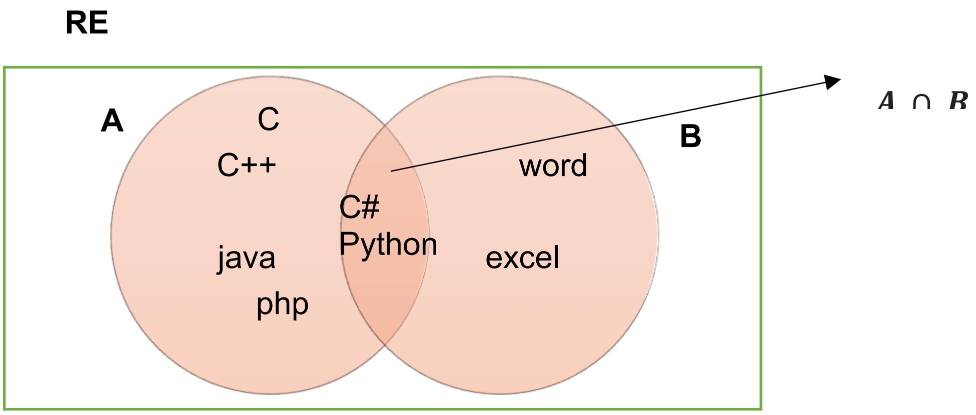


Ilustración 101: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B - (Ejemplo 1)

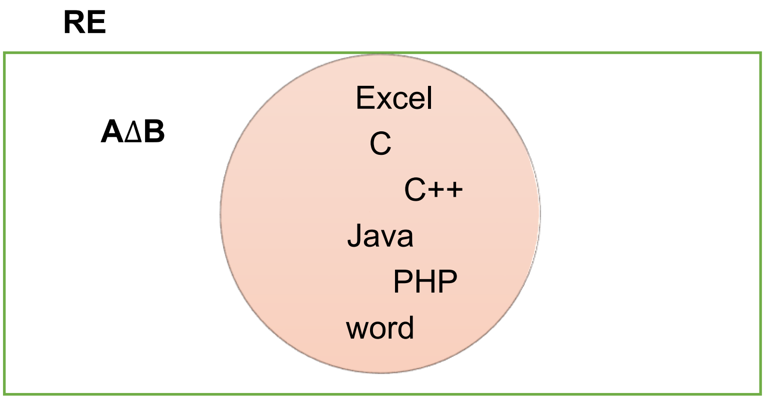


Ilustración 102: Diagrama de Venn del conjunto AΔB - (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.
   La diferencia de $A \, \Delta \, B$ estará formada por todos los elementos que estén en A y que estén en B, pero no en ambos, ósea, en su intercepción.

- ***Ejemplo 2.***

Dado un conjunto D, conformado por nombres de estudiantes que piensan que Python es más sencillo que C:
$D = \{Kelvin, Pedro, Martha, Karla, Melissa\}$
y un conjunto E constituido por nombres de estudiantes que piensan que C y Python son sencillos:
$E = \{Melissa, Pedro, Martha, Karla, Max, Linger\}$
Calcule de Diferencia Simétrica de $D - E$:

1. Definición de conjuntos.
   $D = \{Kelvin, Pedro, Martha, Karla, Melissa\}$
   $E = \{Melissa, Pedro, Martha, Karla, Max, Linger\}$

2. Solución del problema.
$$D \, \Delta \, E = \{\, Max, Kelvin, Linger\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(D) = 5$
   $N(D^c)$=
   $N(E) = 6$
   $N(E^c) =$
   $N(D - E) =$
   $N(E - D) =$
   $N(D\Delta E) = 3$

4. Grafico.

RE

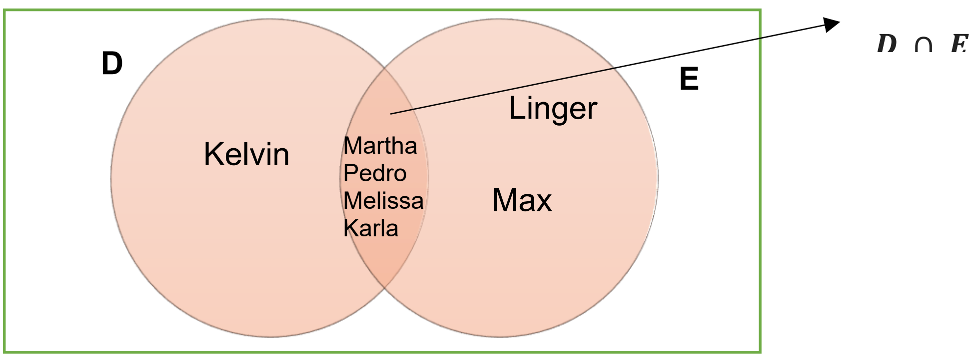


Ilustración 103: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B - (Ejemplo 1)

RE

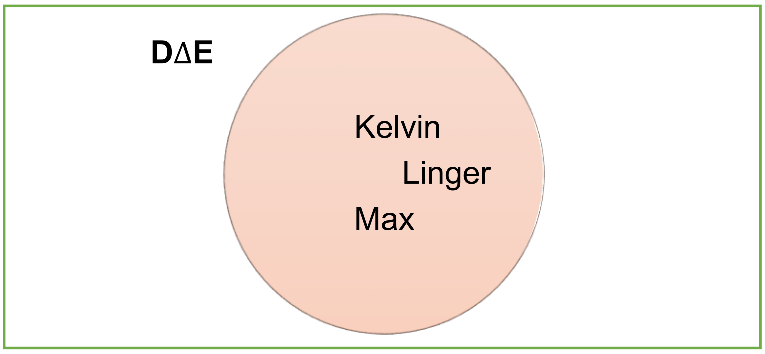


Ilustración 104: Diagrama de Venn del conjunto D∆E - (Ejemplo 1)

5. Interpretación de resultado.
   La diferencia de $D\ \Delta\ E$ estará formada por todos los elementos que estén en A y que estén en B, pero no en ambos.

➢ ***Ejemplo 3.***

Sean:

$$A\ =\ \{x/x\ es\ un\ número\ mayor\ que\ 0\}$$
$$B\ =\ \{x/x\ es\ numero\ menor\ que\ 4\}$$

Grafique $B\ \Delta\ A$.

1. Definición de conjuntos.
   $A\ =\ \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\ldots\}$
   $B\ =\ \{-1,0,1,2,3\}$

2. Solución del problema.
   $$B\ \Delta\ A = \{-1,0,4,5,6,7,8,9,10\ldots\}$$

3. Cálculos matemáticos.
   $N(A) = Es\ imposible\ calcular\ la\ cardinalidad\ ya\ que\ es\ un\ conjunto\ indefinido.$
   $N(B) = 5$
   $N(B^c) = Es\ imposible\ calcular\ la\ cardinalidad\ ya\ que\ es\ un\ conjunto\ indefinido.$
   $N(A-B) = Es\ imposible\ calcular\ la\ cardinalidad\ ya\ que\ es\ un\ conjunto\ indefinido.$
   $N(B-A) = 2$
   $$N(B\Delta A) = Es\ un\ conjunto\ indefinido.$$

4. Grafico.

RE

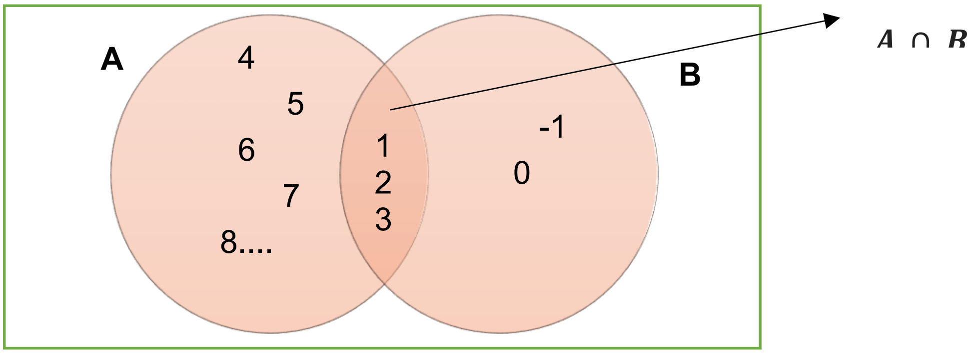


Ilustración 105: Diagrama de Venn de los conjuntos A y B - (Ejemplo 3)

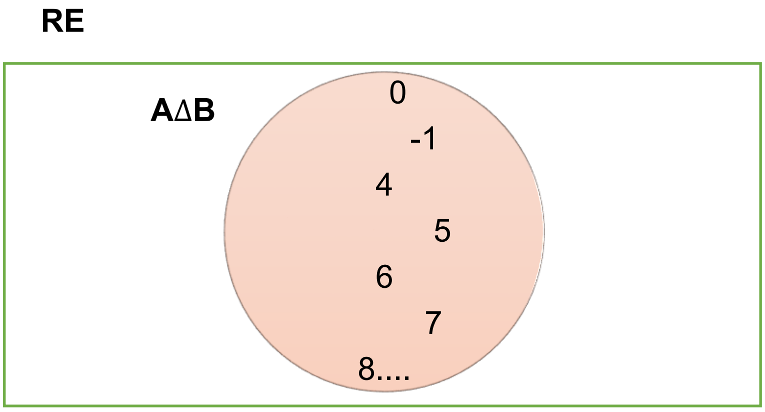


Ilustración 106: Diagrama de Venn del conjunto AΔB - (Ejemplo 3)

5. Interpretación de resultado.
   La diferencia de $B \Delta A$ estará formada por todos los elementos que estén en B y en A.

1.12. Propiedades de las operaciones entre conjuntos.

Nombre de las propiedades	Unión	Intersección
Idempotencia	A ∪ A = A	A ∩ A = A
Asociativa	A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C	A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C
Conmutativa	A ∪ B = B ∪ A	A ∩ B = B ∩ A
Identidad	A ∪ φ = A	A ∩ Re = A
Absorción	A U Re = Re	A ∩ φ = φ

Tabla 1: Propiedades fundamentales de las operaciones entre conjuntos.

Nombre de las propiedades	Propiedades	
Complementación	$\Phi^C = U$	$U^C = \varphi$
Involutiva	$(A^C)^C = A$	
Distributivas	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
De Morgan	$(A \cup B)\ c = A^c \cap B^c$	
	$(A \cap B)\ c = A^c \cup B^c$	
De la diferencia	$A - B = A \cap B^c$	
	$A - U = \varphi$	
	$A - \varphi = A$	
	$U - A = A^C$	
	$\varphi - A = \varphi$	
Inclusión	$A \subseteq A$	
	$\varphi \subseteq A$	
	$A \subseteq U$	
	$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$	
	$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$	
Reglas de conteo	$\lvert A \cup B \cup C\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert + \lvert C\rvert - \lvert A \cap B\rvert - \lvert B \cap C\rvert - \lvert C \cap A\rvert + \lvert A \cap B \cap C\rvert$	
	$\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$	
	$\lvert A \cup B\rvert = \lvert A - B\rvert + \lvert A \cap B\rvert + \lvert B - A\rvert$	
	$\lvert A\rvert = \lvert A - B\rvert + \lvert B \cap A\rvert$	

Tabla 2: Otras propiedades de las operaciones entre conjuntos

1.13. Cardinalidad de conjuntos por diagramas de Venn.

Es posible determinar la cardinalidad de cualquier conjunto de elementos o objetos los cuales sean contables mediante operaciones de cardinalidad.

1.13.1. Ejercicios.

- **Ejemplo 1.**

Determine el porcentaje de alumnos que practican los siguientes lenguajes de programación C y Python, si al entrevistar a 1000 estudiantes se obtuvieron los siguientes resultados.

500 estudiantes practican C
600 estudiantes practican Python
150 no practican C ni Python

$N(Re) = 1000$

$N(C) = 500$

$N(P) = 600$

$N[\,Re - (CUP)] = 150$

Calculando la cardinalidad de la unión entre estos dos conjuntos se obtiene:
$N(C\ U\ P) = N(C) + N(P) - N(C \cap P)$

$N(C\ U\ P) = 1000 - 150 = 850$

Calculando la cardinalidad de la intersección entre estos dos conjuntos se obtiene:

$$N(C\ U\ P) = N(C) + N(P) - N(C \cap P)$$

Despejando tenemos:
$N(C \cap P) = N(C) + N(P) - N(C\ U\ P)$

$$N(C \cap P) = 600 + 500 - 850 = 250$$

Ilustrándolo en un diagrama de Euler-Venn

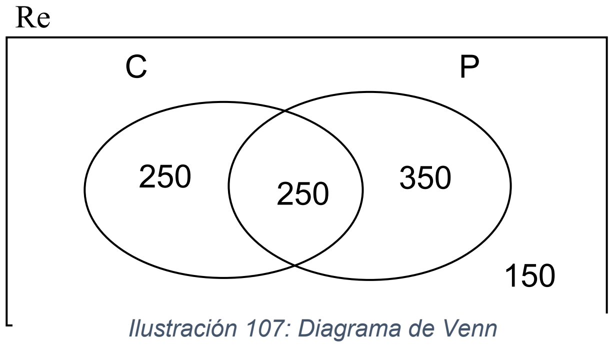


Ilustración 107: Diagrama de Venn

- **Ejemplo 2.**

En el curso 3-2 de la carrera de ingeniería en sistemas, de la universidad de Guayaquil, hay 45 alumnos, a 20 alumnos les gusta Calculo III, a 30 alumnos les gusta probabilidad y estadística y a 10 les gustan ambas asignaturas. Determine $(C \cup P)^C$

1. Definición de conjuntos.
   Sean los conjuntos:
   $U = \{x/x\ estudiantes\ del\ curso\ 3-2\ de\ la\ carrera\ de\ ing.\ en\ sistemas\}$
   $C = \{x/x\ le\ gusta\ calculo\ III\}$
   $P = \{x/x\ le\ gusta\ probabilidad\ y\ estadística\}$

2. Definiciones matemáticas.

$N(C) = 20$
$N(P) = 30$

$N(C \cap P) = 10$
$N(C - P) = 10$
$N(P - C) = 20$

3. Solución
   Sabiendo que: $|\, A \cup B \,| \;=\; |\, A \,| \;+\; |\, B \,| - |\, A \cap B \,|$

   Entonces:

$$N(C \cup P) = 20 + 30 - 10 = 40$$

$$N(C \cup P)^C = 5$$

4. Gráfica.

Re

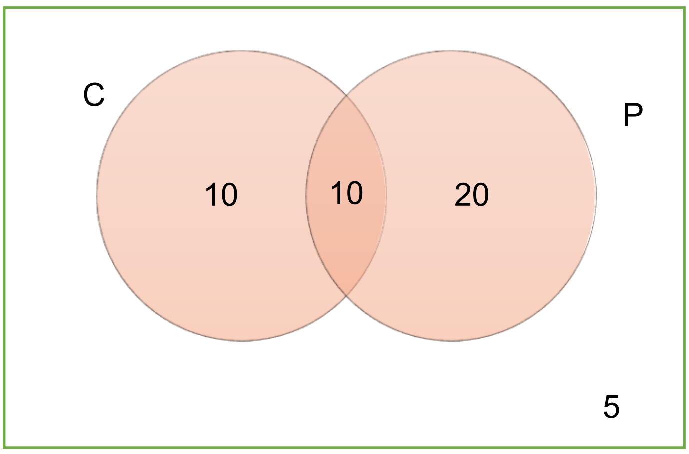


Ilustración 108: Diagrama de Venn (Ejemplo 2)

- **Ejemplo 3.**

En la facultad de ingeniería industrial se realizó una encuesta a 200 personas para saber que lenguaje de programación preferían para aprender al inicio, se obtuvo:
50 prefieren C; 65 prefieren C#; 77 prefieren Python; 100 prefieren C o C#; 105 prefieren C# O Python; 110 prefieren C o Python; 10 personas prefieren C y Python, pero no C#.
Determine la cardinalidad de $(C \cap C\# \cap P)$

Re

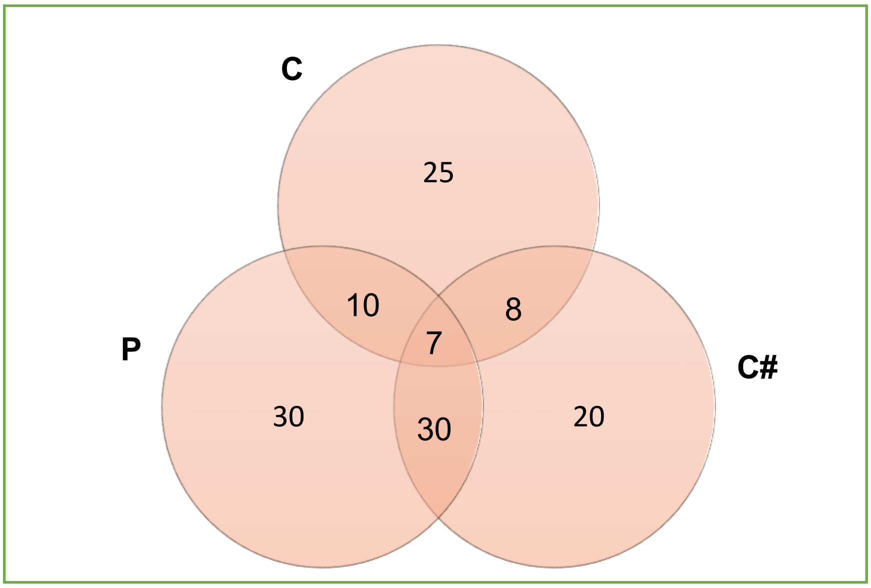


Ilustración 109: Diagrama de Venn (Ejemplo 3)

1. Definiciones matemáticas.

$$N(C \cup P) = N(C) + N(P) - N(C \cap P)$$
$$110 = 50 + 77 - N(C \cap P)$$
$$N(C \cap P) = 50 + 77 - 110$$
$$N(C \cap P) = 17$$

$$N(C\# \cup P) = N(C\#) + N(P) - N(C\# \cap P)$$
$$105 = 65 + 77 - N(C\# \cap P)$$
$$N(C\# \cap P) = 65 + 77 - 105$$
$$N(C\# \cap P) = 37$$

$$N(C \cup C\#) = N(C) + N(C\#) - N(C \cap C\#)$$
$$100 = 50 + 65 - N(C\# \cap P)$$
$$N(C \cap C\#) = 50 + 65 - 100$$
$$N(C \cap C\#) = 15$$

2. Solución

$$N(C \cap C\# \cap P) = 7$$

1.14. Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: Dado los siguientes conjuntos:

$A = \{*\}$
$B = \{x/x \text{ } es \text{ } par, impar \text{ } y \text{ } primo \text{ } a \text{ } la \text{ } vez\}$
$C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$D = \{x/x\ es\ número\ de\ granos\ de\ arena\ de\ la\ playa\}$
Determine qué clase de conjuntos relevantes son.

Ejercicio 2: Sea el conjunto universo $Re = \{2,6,7,10,11,12,14,15,16,17,18,20\}$ y el conjunto $a = \{x/x\ es\ número\ par\}$ formado por elementos del conjunto referencial. Determine A^C.

Ejercicio 3: Justificar que el conjunto
$B = \{\ ing.En\ sistemas, ing.En\ teleinformática, ing.Civil, ing.Networking\}$ no es subconjunto de $C = \{x/x\ es\ rama\ de\ la\ medicina\}$.

Ejercicio 4: Define por extensión cada uno de los siguientes conjuntos:
a) {x / x es un número entero que verifica 4 < x < 8}
b) {x / x es entero positivo múltiplo de 7}
c) {x ∈ ℝ/(3x+2) (x+3) =0}

Ejercicio 5: En el conjunto formado por todos los números naturales menores que 100, decir Cuántos números hay que no son múltiplos ni 3 ni de 4.

Ejercicio 6: Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos, unitarios, finitos o infinitos
d) A = {x / x es día de la semana}
e) G = {1, 3, 5, 7, 9, ...}
f) I= {x / x es un satélite}
g) H= {x / x 10,20,30,40,50,60,70,80,90}

Ejercicio 7: Se hizo una encuesta a 200 desarrolladores acerca del lenguaje de programación donde preferían hacer sus proyectos y se obtuvo los siguientes resultados:
170 programaban en C
90 programaban en PHP
100 programaban en Python
20 programaban en c y PHP
18 programaban en PHP y Python
70 preferían programar en c y Python, pero no en PHP.

Determine el número de personas que no prefieren estos lenguajes.

Ejercicio 8: Se preguntó a 50 alumnos de la carrera de ingeniería en teleinformática de la universidad de Guayaquil sobre el tiempo que tarda en entender una nueva clase de programación c, obteniendo los siguientes resultados: 20 estudiantes tardan de 1 a 2 días, 12 tardan de 2 a 4 días y 5 a 6 días, 10 no tardan nada en entender una nueva clase.

Con estos datos averiguar:
- El número de alumnos que tarda en entender una nueva clase de 5 a 6 días.
- El número de alumnos que solo tardan de 5 a 6 días.

- El número de alumnos que tardan de 1 a 2 días, de 2 a 3 días, y de 5 a 6 días en entender nueva clase.

Ejercicio 9: Determinar la diferencia en los siguientes conjuntos:

Sean:

S = {a, b, c, d}

T = {f, b, d, g}

A = {1, 2, 3, 4,5,6}

B = {4, 5, 8, 10,12}

Ejercicio 10: Se dice que 420 personas ven los canales D, E o F ,120 ven el canal D, 220 ven el canal E Y 110 no ven el canal F, los que ven por lo menos 2 canales son 130 ¿cuántos ven los tres canales?

Ejercicio 11: Dados los siguientes conjuntos, represente mediante un Diagrama de Venn la solución a cada operación de conjuntos e indique qué elementos forman la solución.

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}

A = {4, 8, 11,14}

B = {4, 8, 12, 16, 20}

C = {1, 2, 3, 10, 12, 15}

D = {1, 4, 6, 7, 17}

a) $A \cup B$
b) $B \cup C$
c) $E' \cap D$
d) $A \cup C$
e) $(A \cap D)'$

Ejercicio 12: Se pregunta a 11 estudiantes de la carrera de licenciatura en sistemas de información de la universidad de Guayaquil acerca de sus preferencias en reemplazar el lenguaje de programación c con el lenguaje de programación Python. Se obtuvieron los siguientes resultados: 7 si prefirieron el reemplazo de lenguaje de programación c por el lenguaje Python, el número de estudiantes que prefirieron el reemplazo de los lenguajes fue igual al número de estudiantes que no prefirió ninguno de las dos opciones, 3 estudiantes manifestaron que no prefieren el reemplazo del lenguaje c por el lenguaje Python. Se desea saber

- ¿Cuántos estudiantes si prefieren el reemplazo del lenguaje c por el lenguaje Python?
- ¿Cuántos estudiantes prefieren continuar con el lenguaje de programación c?
- ¿Cuántos estudiantes manifestaron que les era indistintos el reemplazo de ambos lenguajes de programación?

Ejercicio 13: Se preguntó a un grupo de 10 de la facultad de ingeniería industrial mencionando cuál de dos bloques se le hizo más fácil y sencillo de analizar: bloque 1 y bloque 2.

BLOQUE 1

```
n = int(input("Ingrese un numero positivo: "))
```

BLOQUE 2

```
int n;
printf("Ingrese un numero positivo: ");
scanf("%d,&n");
```

Y se obtuvieron los siguientes resultados: todos eligieron que prefieren uno de los bloques, 3 estudiantes manifiestan que prefieren el bloque 1 pero no el bloque 2, 6 estudiantes dijeron que no prefieren el bloque 2. Se desea saber:

- ¿Cuántos de los encuestados eligieron el bloque 2?
- ¿Cuántos de los encuestados eligieron el bloque 1?
- ¿Cuántos de los encuestados eligieron los dos bloques?

Ejercicio 14: Se hizo una encuesta entre mil estudiantes de la universidad de Guayaquil para determinar cuál es la operación que realiza todo el bloque 1 y 2. 400 respondieron que calcula la factorial de un número, 300 respondieron solo validan que se cumpla una condición. De las cantidades anteriormente mencionadas, 275 corresponde al número de estudiantes que realiza ambas operaciones para llegar al mismo resultado en los dos bloques de código.

- ¿Cuántos alumnos encuestados decidieron que la operación que realiza es de calcular factorial de un número?
- ¿Cuántos alumnos entrevistados eligieron la operación sólo validan que se cumpla una condición?
- ¿Cuántos alumnos encuestados no eligen ninguna de las operaciones?

Ejercicio 15: En una encuesta que se realiza a la universidad de Guayaquil 100 estudiantes obtienen los siguientes puntajes estimados durante los primeros meses de estudio de programación en c, de los cuales 65 obtuvieron el puntaje de 2 a 3 puntos, 25 estudiantes obtuvieron de 4 a 5 puntos y de 2 a 3 puntos, y 15 estudiantes obtuvieron de 0 a 1 punto.

- ¿Qué estudiantes obtuvieron ninguno de los dos puntajes mencionados?

Ejercicio 16: De un total de 60 alumnos de primer semestre de la carrera de ingeniería en teleinformática de la facultad de ingeniería industrial de la universidad de Guayaquil, 15 determinan que la operación es crea una función que retorna la suma de dos números, 11 determinan que la operación es crea una función que retorna la suma de dos números y declara e inicializa valores de una variable, 12 repite mientras se cumple la condición n<0, 8 determinan que la operación es crea una función que retorna la suma de dos números y repite mientras se cumple la condición n<0, 10 determinan que declara e inicializa valores de una variable, 5 determina que declara e inicializa valores de una variable y repite mientras se cumple la condición n<0, y 3 indica que realiza las 3 operaciones.

Determina:

- ¿Cuántos no escogen ninguna de las opciones?
- ¿Cuántos indican que la operación se repite mientras se cumple la condición n<0?
- ¿Cuántos indican que no es la operación que declara e inicializa valores de una variable y repite mientras se cumple la condición n<0?
- ¿Cuántos indican que la operación es crear una función que retorna la suma de dos números?

Ejercicio 17: Se preguntó a unos cuantos estudiantes de la universidad de Guayaquil sobre la metodología de enseñanza de la materia de programación es la correcta. Y se obtuvieron los siguientes resultados: 48 están parcialmente de acuerdo, 40 le es indiferente, 34 están parcialmente en desacuerdo, 25 están parcialmente de acuerdo y le es indiferente, 14 le es indiferente y están parcialmente en desacuerdo, 23 están parcialmente de acuerdo y parcialmente en desacuerdo y 3 de los estudiantes eligieron las 3 opciones. Se pide:

- Ilustrar el problema con un diagrama de venn el número de estudiantes encuestados.
- ¿Cuántos de los estudiantes eligieron sólo una de las 3 opciones (parcialmente de acuerdo, indiferente, y parcialmente en desacuerdo)?

Ejercicio 18: Se llevó a cabo una investigación a mil estudiantes de la universidad de Guayaquil en la facultad de ingeniería industrial determinar si el estudiante se percató que los bloques de código número 1 están programado en lenguaje Python, 300 si se percataron del lenguaje utilizado. De las cantidades anteriormente mencionadas, 275 estudiantes no se percataron del lenguaje usado en los bloques número 1.

- ¿Cuántos estudiantes encuestados si se percatan que los bloques de código número 1 están programado en lenguaje c?
- ¿Cuántos estudiantes encuestados no se percatan que los bloques de código número 1 están programado en lenguaje c?
- ¿Cuántos estudiantes encuestados no escogen ninguna de las opciones?

Ejercicio 19: Se realiza una encuesta a 11 estudiantes de la carrera de ingeniería en teleinformática de la universidad de Guayaquil sobre los dos resultados de código se le hizo más fácil y sencillo de analizar y llegar al resultado:

Bloque 1

```
Def fact_1 (n):
    Total = 1
    While n > 1:
        total *= n
        n-= 1
    return total
```

Bloque 2

```
Int fact_1 (n) {
    Int total;
    while (n >1) {
        total*= n;
            n-=1; }
return total;}
```

El número de estudiantes que prefirieron uno solo de los bloques de código fueron 7, el número de los estudiantes que prefirieron ambos bloques fue igual al número de estudiantes que no eligieron ninguno de los dos bloques, el número de los estudiantes que no prefirieron el bloque 1 y prefirieron el bloque 2 fueron 3. Se desea saber:

- ¿Cuántos estudiantes prefieren el bloque de código número 1?
- ¿Cuántos estudiantes prefieren solamente el bloque de código número 2?
- ¿Cuántos estudiantes prefieren ambos bloques de código?

Bibliografía

Ciudad universitaria, D. (2013). Comparacion entre conjuntos. En Apuntes para la asignatura matemáticas básica (pág. 18).

Córdoba, & Fernández, F. V. (2017). Teoría de conjuntos. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Culquichicón, S. E. (2010). Conjuntos.

Espinosa, D. J. (2009). dgenp.

Espol, I. (2008). Lógica y conjuntos. En Fundamentos de matemáticas (pág. 40).

Ivorra, & Carlos. (2010). Lógica y teoría de conjunto.

Jech, T. (2013). Filters, Ultrafilters and Boolean Algebras. En Set Theory. Springer Monographs in Mathematics.

Jiménez, J. A. (2010). Curso práctico de teoría de conjuntos.

mendoza, E. b. (2014). Teoría de conjuntos.

Pérez, G., & Caludia. (2013). Teoría de Conjuntos.

Rodriguez, R. J. (2010). Probayes. México.

Rosen, K. H. (2011). Operaciones entre conjuntos. En Matemáticas Discretas y sus Aplicaciones.

Takeyas, I. B. (2013). itnuevolaredo.

Zalta, E. N., & Nodelman, U. (2013). Diagrams. New York.

CAPITULO 2

TÉCNICAS DE CONTEO

Introducción

Ilustración 110: Técnicas de conteo

Muchas veces en nuestra vida diaria se presentan situaciones en las que hay cálculos difíciles de realizar a simple vista o mentalmente y pues es necesario acudir a computadoras o máquinas para que hagan ese trabajo por nosotros.

Por lo general, siempre nos vamos a encontrar con algún tipo de problema, los cuales se nos pueden presentar en distintos campos como medicina, ingeniería, industrias, ciencias, etcétera. Los problemas representativos en estas áreas predican la predicción de lo que sucederá en circunstancias donde se incluye elementos conocidos (o mesurables) y aleatorios. En este capítulo hablaremos sobre las técnicas de conteo, las cuales nos son de mucha utilidad en nuestra vida diaria.

Contenido.

- Técnicas de conteo.
- Principio aditivo.
- Regla multiplicativa.
- Resolución por diagrama de árbol.
- Factorial de un número.
- Combinaciones.
- Permutaciones.

2. Técnicas de conteo.

Ilustración 111:Técnicas de

1.Definición.

- Las técnicas de conteo sirven para hacer sencilla la enumeración de posibles resultados de un determinado evento complejo de cuantificar.

"Las técnicas de conteo son usadas para enumerar los eventos con un gran número de posibles resultados que serían tediosos listar y cuantificar." (Ramirez, 2012)

"Las técnicas de conteo son aquellas herramientas usadas para facilitar la enumeración de eventos difíciles de contar." (Reynoso, 2015)

2.1. Principio aditivo.

1.Definición.

- Sea A, una suceso que cuentan con m, n y w formas distintas, de ser realizado y teniendo en cuenta que los eventos no pueden realizarse juntos, entonces el suceso A se realizará de $(m + n + w\ )$ formas distinas.

Ilustración 112: Principio aditivo

"Al realizarse una actividad que tiene varias alternativas para ejecutarse, donde la primera de esas alternativas puede ser realizada de M maneras, la segunda de N maneras y la última puede ser realizada de W maneras, entonces las opciones se calculan: $PA = [m + n + w \ldots]\ maneras.$ " (Sanchez, 2016)

"Conjeturemos que un evento A se puede realizar de m maneras distintas y otro evento B de n maneras distintas, de tal manera que ambos eventos no se den juntos, entonces el evento A o B se realizara de $(A + B)$ maneras distintas." (Instituto de ciencias matemáticas, 2006)

2.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1***

  En la facultad de Carrera de ingeniería en sistemas se imparten 3 cursos distintos de programación, 3 cursos distintos de matemáticas y 3 cursos distintos de estadística. ¿De cuántas maneras un estudiante puede escoger uno de los cursos?

Ilustración 113: Estudiante pensando - (Ejemplo 1)

$$3 + 3 + 3 = 9 \text{ maneras.}$$

- ***Ejemplo 2.***
  Un medicamento se vende en 2 locales de Perú y en 3 locales de Ecuador. Si se puede obtener estos medicamentos en Ecuador y Perú. ¿De cuántas maneras se puede comprar la medicina?

  Por el principio aditivo: $2 + 3 = 5$ maneras.

Ilustración 114: Medicamentos - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***
  En una universidad se enseñan 2 lenguajes de programación sencillos, 3 complejos y 2 intermedios. ¿De cuántas maneras los estudiantes pueden adquirir conocimiento en los distintos lenguajes de programación?

Ilustración 115: Universidad - (Ejemplo 3)

Por el principio aditivo: $2 + 3 + 2 = 7$

2.2. Regla multiplicativa

Ilustración 116: Regla multiplicativa

1.Definición.

- Sean A y B dos eventos que pueden ser realizados en forma independiente de m y n maneras distintas, respectivamente, entonces ambos eventos pueden darse de $(m * n)$ maneras distintas.

"Conjeturemos que un evento X se da en m maneras, aparte de este evento, hay un segundo evento Y que puede ocurrir en n maneras. Entonces la combinación de X y Y ocurre en $(m\ x\ n)$ maneras distintas." (Lipson & Lipschutz, 2009)

"Un suceso puede realizarse en $x1$ maneras distintas y un segundo suceso puede llevarse a cabo de $x2$ maneras distintas, y así sucesivamente, entonces el número de maneras distintas en que puede realizarse el experimento es: $(x1 * x2 * \ldots)$." (Flores, 2012)

2.2.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
  Dos estudiantes de ingeniería en sistemas están en la biblioteca estudiando programación y hay 7 libros sobre el tema ¿De cuántas maneras pueden estudiar si cada uno debe estudiar en un libro diferente para concentrarse mejor?

  1. Análisis.
     El primer estudiante puede escoger cualquiera de los 7 libros y el segundo tendrá 6 para estudiar, ya que debe estudiar en uno diferente.

  2. Solución.
     El número de maneras en que pueden estudiar es de:
     $7 * 6 = 42$ maneras.

Ilustración 117: Estudiantes - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***
  En la carrera de ingeniería en teleinformática hay 4 profesores (uno en un curso distinto) que dan programación I y matemáticas I ¿De cuántas maneras puede un grupo de estudiantes ver programación y matemáticas en un curso distinto?

  1. Análisis.
     Un grupo de estudiantes pueden ver programación I con cualquiera de los 4 profesores, pero para ver matemáticas solo lo puede hacer con 3 de los restantes.

  2. Solución.
     $4 * 3 = 12$ posibles formas.

Ilustración 118: Profesores - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***
  En una estantería hay una caja con 4 libros de programación, dos de C y 2 de Python y se extraen 3 libros de uno en uno ¿Cuántas formas hay de seleccionar los libros?

  1. Análisis.
     Al extraer el primer libro puede extraerse de 4 maneras, pero al extraerse el segundo son 3 maneras ya que solo quedan esas 3 opciones, al extraer el tercero solo quedan de 2 maneras.

2. Solución.
   $4 * 3 * 2 = 24$ posibles formas.

Ilustración 119: Estantería con libros - (Ejemplo 3)

2.3. Resolución por diagrama de árbol.

1.Definición.

- Un diagrama de árbol permite la representación gráfica de todos los arreglos o posibles soluciones que se pueden formar con los elementos pertenecientes a un conjunto, el cual tiene una serie de maneras de realizarse. En la imagen podemos ver al conjunto X el cual tiene 2 posibilidades de poder ser resuelto $A1, A2$. La siguiente rama consta de eventos distintos, $B1, B2$ que se realizan después de ocurrir $A1$.

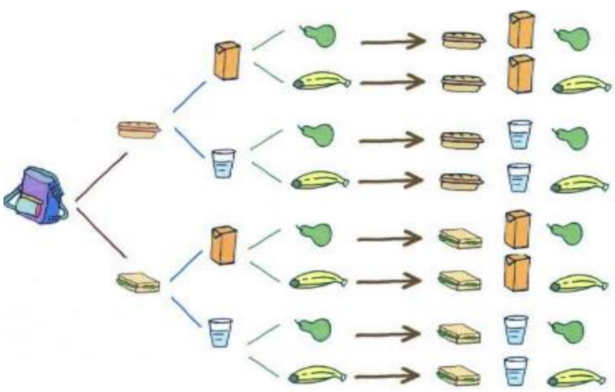


Ilustración 120: Ejemplo de diagrama de árbol

"Es la representación gráfica de un caso que consta de varios eventos, donde cada uno de los eventos tiene un número cuantificable de formas de ser darse." (Ramirez, 2012)

"El diagrama de árbol es la representación gráfica de un experimento que tiene n pasos, donde cada paso tiene un número finito de maneras de realizarse." (Reynoso, 2015)

2.3.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Un estudiante de ingeniería en sistemas diariamente estudia programación en C y en Python, al ir a una biblioteca encuentra que hay 3 libros de programación en C y 2 en

Python. Grafique mediante diagrama de árbol de cuantas maneras el estudiante puede escoger libros para estudiar

1. Análisis.
   Se sabe que el estudiante a diario estudia programación en C y Python y tiene a su disposición 3 libros de programación en C y 2 de programación en Python, pero no puede estudiar ambos a la vez.

2. Solución

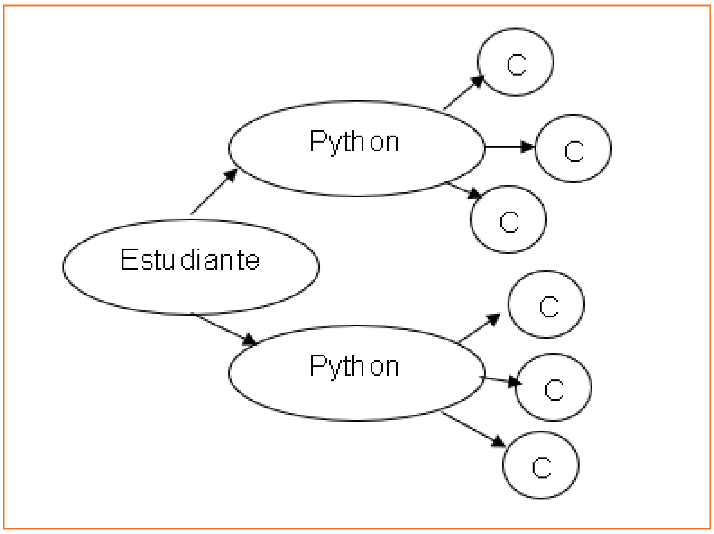
$$3\ libros\ C\ x\ 2\ libros\ Python\ =\ 6\ maneras.$$

3. Interpretación.

1er libro de Python	1er libro de C	1^{era} forma
1er libro de Python	2do libro de C	2da forma
1er libro de Python	3er libro de C	3^{era} forma
2do libro de Python	1er libro de C	4ta forma
2do libro de Python	2do libro de C	5ta forma
2do libro de Python	3er libro de C	6ta forma

4. Gráfica.


Ilustración 121: Estudiantes - (Ejemplo 1)



- ***Ejemplo 2.***
  En la facultad de ingeniería industrial de la universidad de Guayaquil hay 3 carreras: ingeniería en teleinformática, licenciatura en sistemas de información e ingeniería industrial. El número de estudiantes de la facultad se divide en: la
  primera el 30%, la segunda él %30 y la última él %40. Los hombres están repartidos de manera uniforme, siento el 70% del total de cada carrera. Cuál sería el porcentaje

de posibilidad de poder encontrar a un hombre en la carrera de ingeniería en teleinformática.

1. Análisis.
   Se sabe que en la facultad hay tres carreras y sus estudiantes se distribuyen el 30% en teleinformática, 30% Lic. En sistemas de información y el 40% en industrial, a lo cual, completan el 100%. Y que en cada facultad el 70% son hombres, por ende, el 30% son mujeres.

2. Solución.

$$0.30 * 0.70 = 0,21$$
$$0,21 * 100 = 21\% \ de\ posibilidades$$

3. Gráfica.

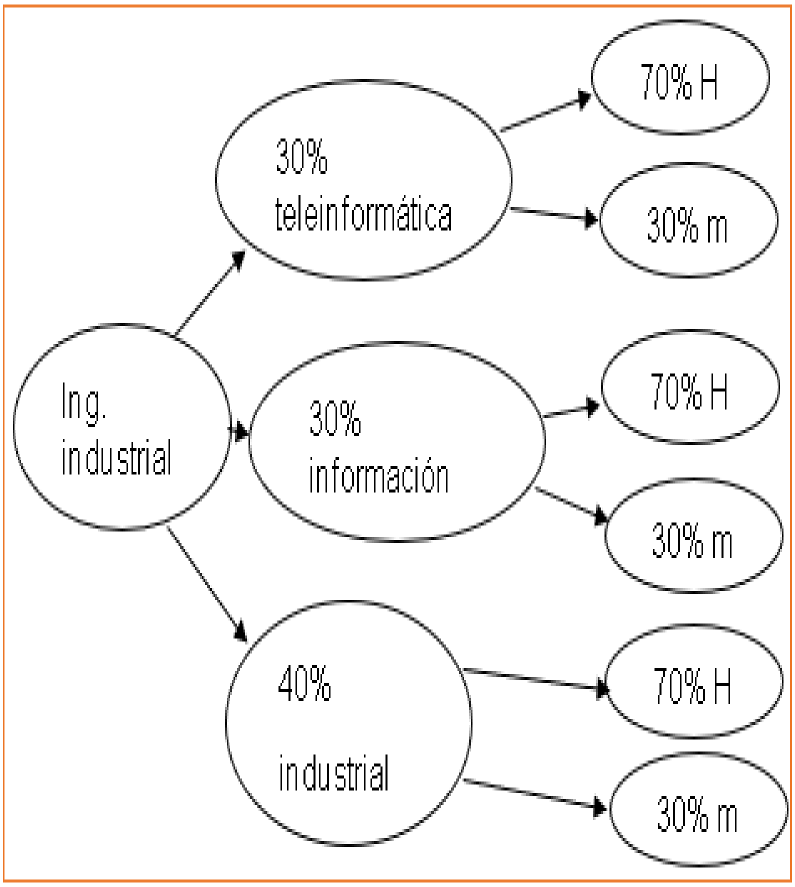


Ilustración 122: Estudiantes - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Una persona a diario para va a la oficina y tiene que ir vestido formalmente, al abrir su armario encuentra que tiene 4 camisas, 3 pantalones y 1 par de zapatos. ¿De cuántas maneras posibles la persona puede vestirse?

1. Análisis.
   Se sabe que el oficinista cuenta con 4 camisas, 3 pantalones y 1 par de zapatos, para lo cual, en un día parar ir a la oficina solo puede utilizar una prenda por clase, es decir, 1 par de zapatos, 1 camisa y 1 pantalón.

2. Solución

$$4\ camisas * \ 3\ pantalones * 1\ par\ de\ zapatos\ = \\ 12\ maneras\ de\ vestir$$

3. Interpretación del problema.

Ilustración 123: Oficinista - (Ejemplo 3)

Zapatos 1	Pantalón 1	Camisa 1	1era manera
Zapatos 1	Pantalón 1	Camisa 2	2da manera
Zapatos 1	Pantalón 1	Camisa 3	3era manera
Zapatos 1	Pantalón 1	Camisa 4	4ta manera
Zapatos 1	Pantalón 2	Camisa 1	5ta manera
Zapatos 1	Pantalón 2	Camisa 2	6ta manera
Zapatos 1	Pantalón 2	Camisa 3	7ma manera
Zapatos 1	Pantalón 2	Camisa 4	8va manera
Zapatos 1	Pantalón 3	Camisa 1	9na manera
Zapatos 1	Pantalón 3	Camisa 2	10ma manera
Zapatos 1	Pantalón 3	Camisa 3	11ava manera
Zapatos 1	Pantalón 3	Camisa 4	12ava manera

4. Gráfica.

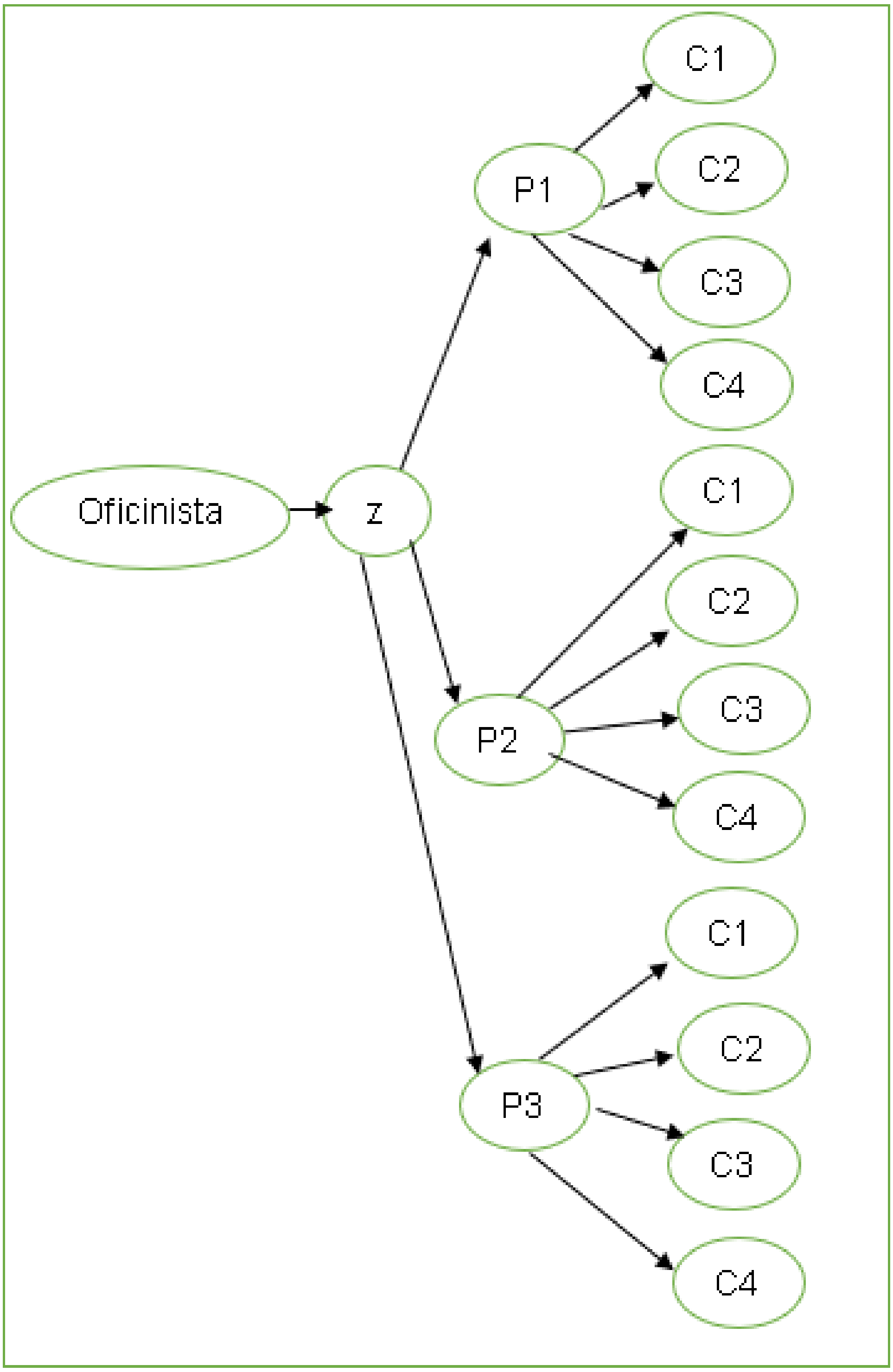


Ilustración 124: Diagrama de árbol - (Ejemplo 3)

2.4. Factorial de un número.

1.Definición.

- El factorial de un número n positivo se expresa por $n!$. Su definición matemática es:
- $n!\begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ n(n-1)! & ; n€N \end{cases}$

Ilustración 125: Representación del factorial

"Factorial es el producto de los enteros positivos desde 1 hasta n, se denota por $n!$.

$$n! = 1 \; x \; 2 \; x \; 3 \; x \ldots x \; (n-2)(n-1)n$$

De tal manera que, $1! = 1$ y $n! = n(n - l)!$. También $0! = 1$." (Lipson & Lipschutz, 2009)

Sea n un entero positivo, el factorial de dicho número se calcula: (Higgins, 2008)

$$n!\begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ n(n-1)! & ; n \geq 1 \end{cases}$$

2.4.1. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**
  Calcular el factorial de 4

$$4! = 4 \; x \; 3 \; x \; 2 \; x \; 1 = 24$$

- **Ejemplo 2.**
  Encuentre el factorial de 6

$$6! = 6 \; x \; 5 \; x \; 4 \; x \; 3 \; x \; 2 \; x \; 1 = 720$$

- **Ejemplo 3.**
  Calcule ¿Cuántos ordenamientos se puede hacer con 10 cartas?

Ilustración 126: Cartas - (Ejemplo 3)

$$10! = 10 \; x \; 9 \; x8 \; x7 \; x \; 6 \; x \; 5 \; x \; 4 \; x \; 3 \; x \; 2 \; x \; 1$$
$$= 3628800$$

2.5. Combinaciones.

1.Definición.

- Una combinación son todos los arreglos que se pueden hacer con los elementos n, de un conjunto, tomando m de ellos a la vez, donde su ordenamiento es irrelevante y teniendo en cuenta que $n \geq m$. Su notación es: $c_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

Ilustración 127: Combinaciones de dados

"La combinación de n objetos tomando r a la vez, de un conjunto X, es cualquier elección de los elementos, donde el orden no importa. Es simplemente un subconjunto de X con r elementos. Dichas combinaciones se denotan por: $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ ". (Lipson & Lipschutz, 2009)

"Una combinación es un subconjunto de los elementos de un conjunto cualquiera, sin tener importancia el orden de ellos.
El número de combinaciones, por r objetos, que pueden tomarse de un conjunto de n elementos es: $nCr = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$". (Puttaswamy, 2010)

2.5.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

  En una clase de programación de 20 alumnos se van a entregar 3 premios iguales por ser el curso que desempeña en el lenguaje de programación C. Calcule de cuantas maneras se pueden entregar los premios si una persona no puede recibir más de un premio.

  1. Análisis.

     Hay 20 posibles candidatos a los que se puede premiar sin importar el orden, pero solo hay 3 premios, y no se puede premiar más de una vez a un ganador, por lo tanto, habría que aplicar la fórmula de combinatoria sin repetición.

  2. Solución.

$$c_3^{20} = \frac{20!}{3!\,(20-3)!} = 1140$$

Ilustración 128: Medallas - (Ejemplo 1)

- **Ejemplo 2.**
  Se tiene un ánfora de 5 bolichas negras, 4 blancas y 3 plomas de dicha ánfora se extraen al azar 4 bolichas ¿De cuántas formas se pueden extraer las 4 bolichas?

  1. Análisis.
     En dicha ánfora se tiene un número determinado de bolichas de las cuales no importa el orden en que se saquen, todas son bolichas, por lo tanto, 12 se elementos y se requiere sacar 4 de ellos.

  2. Solución.

Ilustración 129: Bolichas - (Ejemplo 2)

$$c_4^{12} = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = 495$$

- ***Ejemplo 3.***
  Para cierta conferencia de programadores se seleccionan 3 expositores de un grupo de 3 expertos en C y 2 expertos en Python. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 2 expertos en C y 1 en Python?

  1. Análisis.
     En dicha conferencia se tiene un total de 5 se elementos y se requiere sacar 3 de ellos, de los cuales 2 de ellos deben ser expertos en C y 1 de ellos debe ser experto en Python. Por lo tanto, en el primer caso tendremos un total de 3 elementos y se requieren 2 de ellos y en segundo caso tendremos un total de 2 elementos y se requiere 1 de ellos.

  2. Solución.

$$\mathbf{c}_2^3 \text{ x } \mathbf{c}_1^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!}\, x\, 2 = 6$$

Ilustración 130: Conferencia - (Ejemplo 3)

2.6. Permutaciones.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ilustración 131: Fórmula de permutaciones

1.Definición.

- Una permutación son todos los arreglos que se pueden hacer con todos o parte de los elementos n, de un conjunto, tomando m de ellos a la vez, donde su ordenamiento relevante y teniendo en cuenta que $n \geq m$. Su notación es: $P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$

"La permutación de n objetos tomando r a la vez, de un conjunto X, es cualquier elección de los elementos, donde el orden importa. Es simplemente un subconjunto de X con r elementos. Dicha permutación se denota por: $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$“ (Grimaldi, 2009)

“Una permutación es un subconjunto de los elementos de un conjunto cualquiera, importando el orden en que se ubiquen ellos.
El número de permutaciones, por r objetos, que pueden tomarse de un conjunto de n elementos es: $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$”. (Hernandez & Gonzalez, 2010)

2.6.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
  En una clase de programación de 15 alumnos se van a entregar 3 premios distintos a dicho curso por desempeñar en el lenguaje de programación C. Calcule de cuantas maneras se pueden entregar los premios si una persona no puede recibir más de un premio.

1. Análisis.
   Hay 15 posibles candidatos a los que se puede premiar, teniendo en cuenta que importa el orden, solo hay 3 premios, y no se puede premiar más de una vez a un ganador, por lo tanto, habría que aplicar la fórmula de permutaciones.

2. Solución.

$$\boldsymbol{P_3^{15} = \frac{15!}{(15-3)!} = 2730}$$

Ilustración 132: Clase de programación - (Ejemplo 1)

- ***Ejemplo 2.***

¿De cuántas formas distintas pueden colocarse 3 libros de Programación en C y 4 de programación en Python en una estantería, teniendo en cuenta que los del mismo lenguaje deben estar juntos?

1. Análisis.
   Hay que tener en cuenta que prioriza el orden en que se coloquen, ya que los de la misma categoría deben estar juntos, en el primer caso tendremos un total de 3 elementos y en el segundo un total de 4 elementos.

2. Solución.

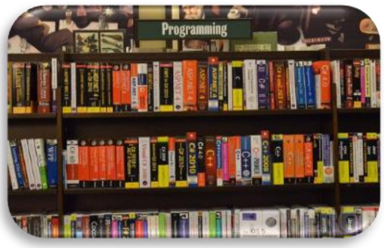


Ilustración 133: Libros de programación - (Ejemplo 2)

$$\boldsymbol{P_3^3 \; X \; P_4^4 = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} \; X \; \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = 144}$$

- ***Ejemplo 3.***

Para cierta conferencia de programadores participan 5 expositores ¿De cuántas maneras distintas se puede premiar los 3 primeros lugares, siendo el primero el que gane medalla de oro, el segundo gane medalla de plata y el tercero gane medalla de bronce?

1. Análisis.
   Hay que tener en cuenta que prioriza el orden en que se premien a los ganadores, ya que el primer lugar tiene más prioridad que el segundo y el tercero, el segundo tiene más prioridad que el tercero

2. Solución.

$$\mathbf{P_3^5} = \frac{5!}{(5-3)!} = \mathbf{60}$$

Ilustración 134: Expositores - (Ejemplo 3)

2.7. Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: ¿De cuántas maneras puede un estudiante realizar su proyecto de programación que tiene conocimiento de 2 lenguajes de programación imperativa y 3 lenguajes de programación orientada a objetos? Teniendo en cuenta que no puede programar en ambos tipos de lenguajes a la vez.

Ejercicio 2: Una ingeniero desea comprar una computadora para sus trabajos, tiene para escoger entre las siguientes marcas: Lenovo, Toshiba y Dell, el día en que va a realizar la compra se encuentra que la pc de la marca Lenovo se encuentra en dos generaciones: 6ta y 7ma generación, y de un solo color, mientras que la pc de la marca Toshiba, se presenta en una sola generación: 7ma generación, en 5 colores diferentes y por último la pc de la marca Dell, se presenta en dos generaciones, que es de 6ta y 7ma generación, y 8 colores. ¿De cuántas maneras tiene el ingeniero de comprar un pc?

Ejercicio 3: ¿De cuántas maneras un millonario puede escoger el vehículo que conducirá sabiendo que tiene a su entera disposición 3 autos deportivos, 3 camionetas y 3 motos?

Ejercicio 4: Un bachiller que define estudiar en una de las Universidades que hay en el Ecuador tiene las siguientes opciones: Espol, Espoch, Universidad de Guayaquil, Universidad Católica. De cuantas maneras tiene el estudiante de escoger una universidad.

Ejercicio 5: Un estudiante ha sacado 5 libros de su mochila. Va a colocarlos en el librero. ¿De cuantas maneras distintas podría colocarlos?

Ejercicio 6: Si hay un grupo de 15 estudiantes de ingeniería en telemática, y otro grupo de 10 estudiantes de licenciatura en sistemas de información, de los cuales se deben escoger para un concurso internacional de universidades. ¿cuántas maneras tenemos para escoger 3 estudiantes?

Ejercicio 7: En una encuesta hay 5 tipos diferentes de opciones a escoger en lo que se refiere a lenguajes de programación. ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 opciones?

Ejercicio 8: A una clase asisten 10 estudiantes y todos tienen que presentar su proyecto final de la materia de probabilidad antes se presentar se intercambian sus proyectos entre todos para poder ver quién tiene el mejor trabajo ¿Cuántos proyectos se han intercambiado?

Ejercicio 9: ¿De cuántas formas en una conferencia se pueden dar el primer, segundo y tercer premio entre 30 conferencistas?

Ejercicio 10: En una pancarta informativa de la carrera de ingeniería en sistemas palo se pueden publicar: 3 carteles grandes, 2 medianos y 1 pequeño. ¿Cuántos carteles diferentes pueden colocarse?

Ejercicio 11: En una mini empresa de mantenimiento de computadoras se tiene 2 técnicos: M, N. Cierto momento solicitan sus servicios dos empresas K, L, piden un técnico cada empresa. Describa el conjunto de posibles asignaciones si cada técnico puede ir a una sola empresa.

Ejercicio 11: Para conformar un negocio se requiere de tres socios y cuatro administradores. Si se tiene 5 socios y 6 administradores. ¿De cuantas maneras se puede hacer la elección?

Ejercicio 12. En un laboratorio se tiene 7 computadoras de las cuales tres resultan defectuosas. ¿De cuantas maneras se pueden tomar 4 computadoras de tal manera que solo haya una defectuosa?

Ejercicio 13: En un concurso a Miss Universo solían presentar 22 preguntas y cada una con tres opciones. ¿De cuántas formas diferentes se pueden contestar las preguntas?

Ejercicio 14: En un almacén de electrodomésticos, se tiene 4 modelos de aires acondicionados con características propias. ¿De cuántas maneras posibles puedo comprar un aire acondicionado?

Ejercicio 15: En un aula de clase con respecto a la materia programación III se tiene 50 alumnos en la cual se quiere elegir un comité formado por cuatro alumnos. ¿Cuántos comités se pueden formar?

Ejercicio 16: En un almacén venden siete tipos diferentes de televisores. ¿De cuántas formas se pueden elegir tres televisores

Ejercicio 17: Con las letras de la palabra FISICA. ¿Cuántas ordenaciones distintas puedo realizar?

1. ¿Cuántos números de dos cifras se puede formas con los siguientes dígitos? 1,4,3,5,7,8,9,

Bibliografía.

Flores, Á. J. (2012). *Ténicas de conteo.* Colombia.

Grimaldi, R. (2009). *Matemáticas discreta y combinatoria.* New york.

Hernandez, J. L., & Gonzalez. (2010). *Combinaciones.* México.

Higgins, P. (2008). *Number Story: From Counting to Cryptography.* New York: Copernicus.

Instituto de ciencias matemáticas, E. (2006). *Números reales.* Guayaquil.

Lipson, M. L., & Lipschutz, S. (2009). *Tecnicas de conteo.* México: McGraw-Hill.

Puttaswamy, T. K. (2010). *The Mathematical Accomplishments of Ancient Indian Mathematicians.* Netherlands.

Ramirez, O. (2012). *Tenicas de conteo.* México.

Reynoso, M. (2015). *Tecnicas de conteo.* México.

Sanchez, N. (2016). *Principio Aditivo y multiplicativo.*

CAPÍTULO 3

EXPERIMENTO ESTADÍSTICO Y ESPACIO MUESTRAL

Introducción.

En nuestro entorno en el mundo entero tenemos la posibilidad de poder visualizar diferentes tipos de fenómenos, los cuales, muchos de ellos nos presentan diferentes estados y resultados, aunque las condiciones son similares muchas veces.
En este capítulo entenderemos como la probabilidad se combina con nuestro entorno y nos permite relacionarnos con diferentes experimentos aleatorios o estocásticos, y así poder observar, estudiar y analizar los diferentes comportamientos de cada uno de los fenómenos mediante técnicas estadísticas y probabilísticas, para lograr el análisis e interpretación de los datos obtenidos y aplicar, entre muchos conceptos que brinda la probabilidad, lo que es la teoría de la probabilidad.

Ilustración 135: Pierre Simón de Laplace

Contenido.

- Experimentos.
- Espacio muestral del experimento.
- Eventos.
- Funciones.
- Función de la probabilidad.
- Axiomas de la probabilidad.
- Ley del complemento.
- Ley aditiva de probabilidad.

3.1. Experimentos estadísticos.

1.Definición.

- Un experimento es un fenómeno que va a sufrir varios cambios, se lo llama aleatorio si no se puede deducir cuál es el resultado que nos arrojará, pero sí conocemos todos los resultados posibles, además éste se puede repetir varias veces. Un experimento aleatorio sería el lanzamiento de un dado, el cuál tendría 6 posibles eventos: $E1, E2, E3, E4, E5, E6$.

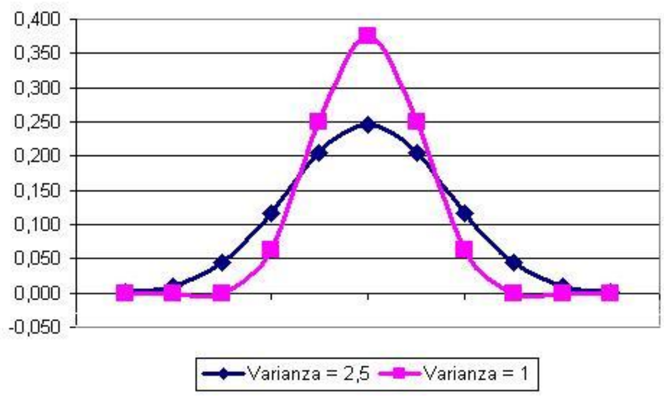


Ilustración 136: Gráfica de un experimento estadístico.

"Un experimento es un proceso que se observa con el fin de establecer una relación entre condiciones en que se realizan y los resultados que se obtienen." (Canavos, 2013)

"Un experimento es el proceso mediante el cual se obtiene una observación (o una medición) de un fenómeno." (Snell, 2013)

3.1.1. Clasificación de un experimento.

La clasificación de un experimento es la siguiente:

- **Experimento determinístico:** Esta clasificación del experimento es aquella que produce los mismos resultados cuando se lleva a cabo con mismas condiciones iniciales.

- **Experimento aleatorio:** Esta clasificación del experimento es aquella que produce resultados distintos, incluso si este se lleva cabo siempre de la misma forma.

3.2. Espacio muestral del experimento.

Ilustración 137: Lados de una moneda.

1.Definición.

- El espacio muestral decimos que es el conjunto de todos los sucesos o eventos elementales del experimento y lo denotamos como omega $(\Omega)\ o\ (E)$. por ejemplo, el espacio muestral de lanzar una moneda sería: $(\Omega) = \{S, C\}$.

"El espacio muestral de un experimento puede considerarse como un conjunto de diferentes resultados posibles, en el que cada resultado puede ser un punto, un elemento o un evento del espacio muestral." (Snell, 2013)

"El espacio muestral vendrá acompañado de sucesos, la pareja que ambos constituyen, (Ω, A), recibe el nombre de espacio probabilizable." (Suay, 2012)

3.2.1. Clasificación del espacio muestral del experimento.

La clasificación de un espacio muestral es la siguiente:

- **Espacio muestral discreto:** Espacio muestral discreto es aquel en el que se obtienen los elementos después de hacer un proceso de conteo, generalmente son subconjuntos de los números enteros.

- **Espacio muestral continuo:** Espacio muestral continuo es aquel en el que se obtienen los elementos después de hacer un proceso de mediciones, generalmente son intervalos en el conjunto de los números reales.

3.2.2. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
  Al realizar una encuesta en la universidad Guayaquil a los estudiantes de primer semestre de la carrera de Teleinformática indicando si el lenguaje de Programación Python es más sencillo y versátil en sintaxis, en comparación del lenguaje C y observar las respuestas posibles: totalmente de acuerdo, parcialmente de acuerdo, indiferente, parcialmente en desacuerdo, totalmente en desacuerdo; por lo que el espacio muestral es:

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \begin{array}{c} \textbf{totalmente de acuerdo,} \\ \textbf{parcialmente de acuerdo,} \\ \textbf{indiferente,} \\ \textbf{parcialmente en desacuerdo,} \\ \textbf{totalmente en desacuerdo} \end{array} \right\}$$

Ilustración 138: Ejemplo 1

- ***Ejemplo 2.***

Si realizamos la compra de dos programas , observamos que los posibles resultados pueden ser : compra dos licencias de antivirus Northon; compra una licencia de antivirus Northon, una licencia de antivirus Eset; compra una licencia de antivirus Eset, una licencia de antivirus Northon; compra dos licencia de Eset.

Ilustración 139: Ejemplo

$$\boldsymbol{T} = \left\{\begin{matrix} \{\boldsymbol{Northon}, \boldsymbol{Northon}\}, \\ \{\boldsymbol{Northon}, \boldsymbol{Eset}\}, \\ \{\boldsymbol{Eset}, \boldsymbol{Northon}\}, \\ \{\boldsymbol{Eset}, \boldsymbol{Eset}\} \end{matrix}\right\}$$

- ***Ejemplo 3.***

  En un proyecto que realizan dos estudiantes de ingeniería en sistemas que consiste realizar un programa de servicio al cliente, el cual tienen que presentarlo al día siguiente y el requisito más importante es que solo lo pueden programar en uno de los siguientes 4 lenguajes de programación: C#, Java, Visual Basic, C++. ¿Cuál sería el espacio muestral?

$$\boldsymbol{P} = \left\{\begin{matrix} \{\boldsymbol{C\#}\}, \\ \{\boldsymbol{JAVA}\}, \\ \{\boldsymbol{Visual\ Basic}\}, \\ \boldsymbol{C++} \end{matrix}\right\}$$

3.3. Eventos.

1.Definición.

- Un evento E está compuesto por todos los posibles resultados de algún experimento, es decir, tendremos uno o más eventos elementales del experimento aleatorio. Por ejemplo, los eventos seguros al lanzar un dado son: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Ilustración 140: Lanzamiento de una moneda

"Un Evento del espacio muestral es considerado como un grupo de resultados contenidos en este, cuyos elementos otorga características similares." (Canavos, 2013)

"Los sucesos o eventos no son más que subconjuntos de Ω , podemos operar con ellos de acuerdo con las reglas de la teoría de conjuntos." (Suay, 2012)

3.3.1. Tipos de eventos.

Evento seguro: Cuando llevamos a cabo cualquier experimento aleatorio es seguro que siempre tendremos posibles resultados, por lo tanto, un evento seguro es el que está compuesto por dichos resultados. (RedDescartes, 2011)

Evento imposible: Cuando llevamos a cabo un experimento aleatorio y nunca ocurre el suceso esperado. Se expresa con el símbolo $\emptyset$. (RedDescartes, 2011)

Evento complementario a otro evento(A): Evento complementario a otro es aquel que sucede cuando no ocurre el evento A. (RedDescartes, 2011)

Evento compuesto: Cuando llevamos a cabo un experimento aleatorio y obtenemos más de un resultado del espacio muestral. (RedDescartes, 2011)

Evento elemental: Cuando llevamos a cabo un experimento aleatorio y obtenemos un único resultado del espacio muestral. (RedDescartes, 2011)

3.3.2. Eventos especiales.

Eventos mutuamente excluyentes, podemos determinar que son mutuamente excluyentes si únicamente unos de los dos sucesos suceden en cualquier de los resultados o intentos. (Render, 2012)

Eventos colectivamente exhaustivos, podemos determinar que son colectivamente exhaustivos si del grupo de intentos incluye cada intento posible. (Render, 2012)

Eventos que no son mutuamente excluyentes: Cuando los eventos no son mutuamente excluyentes, no pueden obtenerse la probabilidad de que ocurra uno u otro sumando simplemente las probabilidades individuales. (Snell, 2013)

3.3.3. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**
  Si un experimento consiste en registrar el número de las compras que realiza una compañía a un distribuidor de software con licencias originales, al mes. El distribuidor solo vende al por mayor, es decir, de entre 25, 50 y 100 programas. Determine ¿Cuáles son los elementos de omega? Y liste los eventos.

  Solución:

1. Definición de eventos
   E_1: No se realizan compras nuevas.
   E_2: El número de compras nuevas es de 25.
   E_3: El número de compras nuevas es de 50.
   E_4: El número de compras nuevas es 100.

Ilustración 141: Software - (Ejemplo

2. Solución.

$\Omega = \{no\ se\ reciben\ compras, el\ número\ de\ compras\ es\ de\ 25, el\ número\ de\ compras\ es\ de\ 50, el\ número\ de\ compras\ es\ de\ 100\}$

- ***Ejemplo 2.***

Si un experimento consiste en tomar una prueba distinta en 2 días consecutivos a los alumnos de 1er semestre de ingeniería en telecomunicaciones. La prueba pide realizar un programa en un lenguaje de programación conocido, ya sea C# o Python. Liste sus eventos.

1. Definición de eventos.

E_1: Se toma la prueba un día en C# y el otro en C#.
E_2: Se toma la prueba un día en C# y el otro en Python.
E_3: Se toma la prueba un día en Python y el otro en Python.
E_4: Se toma la prueba un día en Python y el otro en C#.

2. Solución.

$\Omega = \{(C, \#\ C\#)(C\#, Python)(Pyhton, Python)(Python, C\#)\}$

Ilustración 142: Test - (Ejemplo 2)

- ***Ejemplo 3.***

Sea un experimento que consiste en determinar el primer y segundo lugar para premiar a 2 de los mejores estudiantes que hay en los cursos de ingeniería en sistemas e ingeniería en teleinformática. Determine los eventos:

1. Definición de eventos.

E_1:El primer lugar es para un estudiante de ingeniería en sistemas
E_2:El primer y segundo lugar son para los estudiantes de ingeniería en sistemas

2. Solución del problema.

Sea S= estudiante de ingeniería en sistemas y T= estudiante de ingeniería en networking

$$\Omega = \{(S, S)(S, T)(T, T)(T, S)\}$$

E_1:El primer lugar es para un estudiante de ingeniería en sistemas

$$E_1 = \{(S, S)(S, T)\}$$

E_2:El primer y segundo lugar son para los estudiantes de ingeniería en sistemas

$$E_1 = \{(S, S)\}$$

Ilustración 143: Estudiante - (Ejemplo 3)

3.4. Funciones.

1.Definición.

- Una función es una relación o corelación entre cantidades. Sea un conjunto X el cual se denominaría el dominio y otro conjunto Y el cual se denominaría en codominio, la función es una relación entre ellos que consiste en relacionar a cada elemento de X con un único elemento de Y, tambien se les llama valor de entrada y de salida. Si a los elementos de X le corresponden más de un elementeno del conjunto Y, deja de ser una función. Su notación sería: $f{:}X \ -> Y$

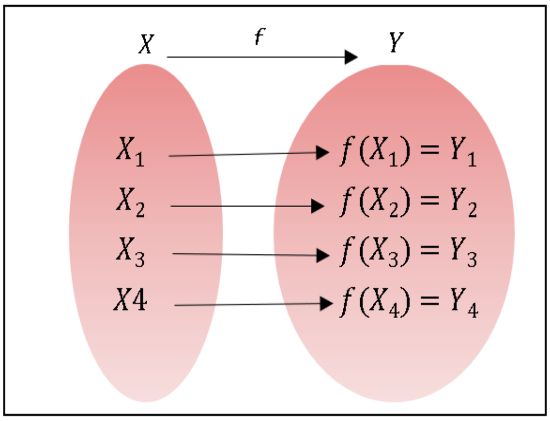


Ilustración 144: Relación entre un Conjunto X(Dominio) y un conjunto Y (Rango)

3.4.1. Tipos de funciones.

Hay que saber que una función cualquiera puede presentar muchas características, es por ello que hay que tipificarlas para poder sacar un respectivo análisis.

Entre los tipos de funciones tenemos:

1. **Función inyectiva.**
   Se la denomina función inyectiva si a cada elemento del rango o condominio le corresponde un solo elemento del dominio.
   Deja de ser función inyectiva si a un elemento del conjunto de llegada le corresponde más de un elemento del conjunto de partida.

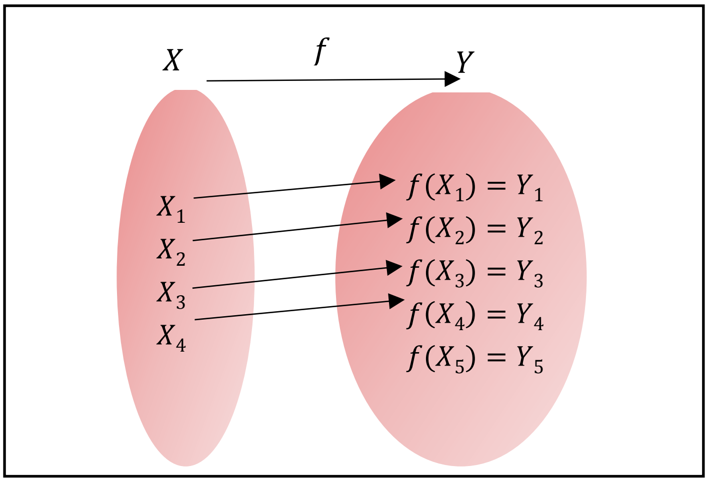


Ilustración 145: Función inyectiva.

2. **Función sobreyectiva.**
   Se la denomina función sobreyectiva si todos los elementos del conjunto de llegada, es decir, el rango, le corresponde al menos un elemento del conjunto de partida, es decir, el dominio.

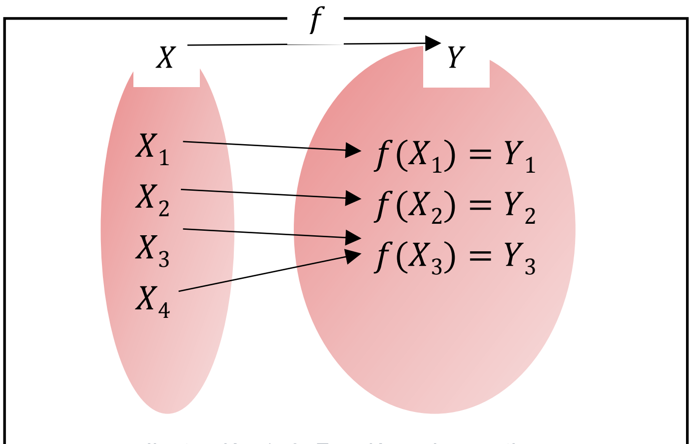


Ilustración 146: Función sobreyectiva.

3. **Función biyectiva.**
   Se la denomina función biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

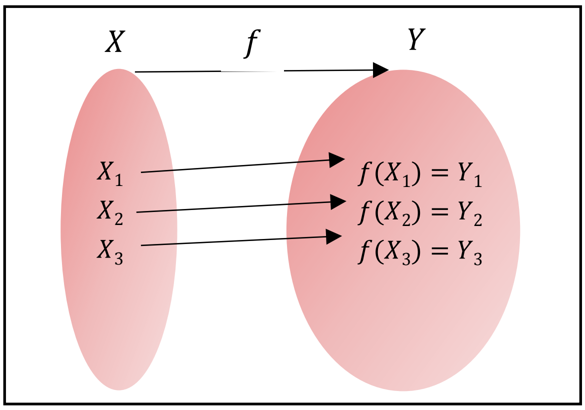


Ilustración 147:Función biyectiva

4. **Función constante.**

   Es aquella función que toma el mismo valor en su variable dependiente, para cualquier valor que se le dé a la variable independiente. Su definición formal es:

$$f(x) = C\ (La\ c\ es\ una\ constante)$$

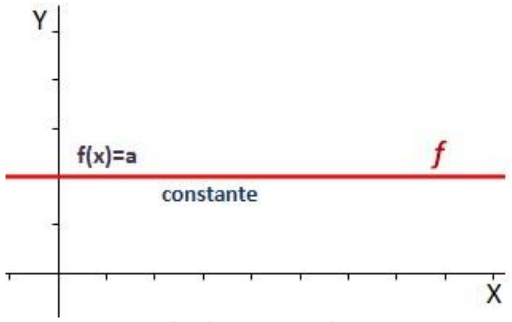


Ilustración 148: Gráfica de una función constante.

5. **Función polinómica.**

   La definición formal de una función polinómica es:

$$f(x) = a0 + a1X + a2X2 + \cdots + anXn$$

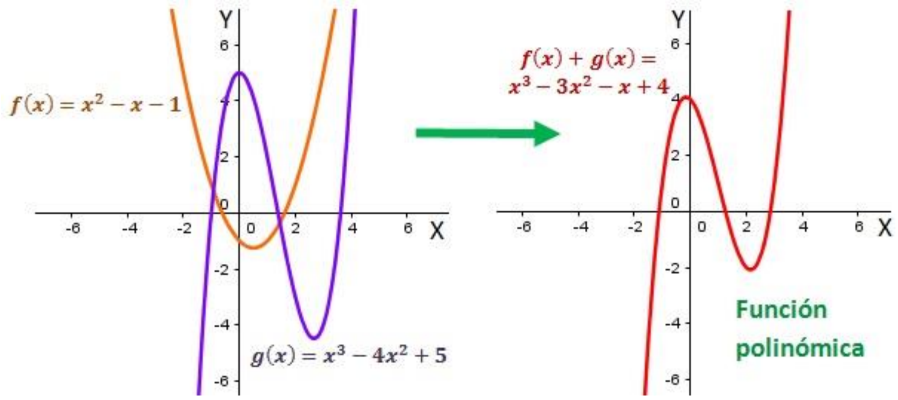


Ilustración 149: Gráfica de una función polinómica.

5.1. Función polinómica de primer grado.

Son las funciones que se componen de un polinomio de primer grado. Su definición matemática es:

$$f(x) = mx + n$$

Donde m es un escalar, x es la variable independiente y n es una constante.

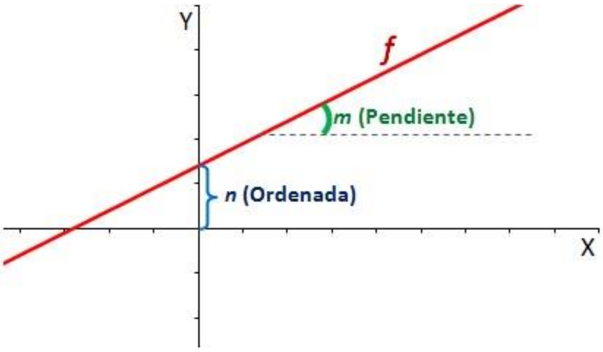


Ilustración 150: Gráfica de una función polinómica de primer grado.

5.1.1. Función lineal.

Forma parte de las funciones polinómicas de primer grado, esta función pasa por el origen. Su definición matemática es:

$$f(x) = mx$$

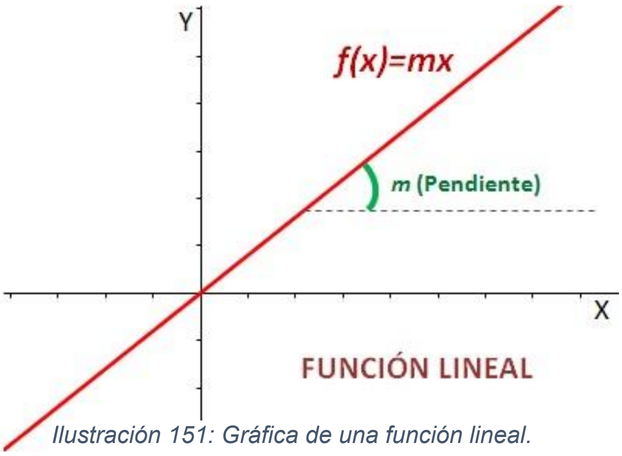


Ilustración 151: Gráfica de una función lineal.

5.2. Función cuadrática.

Es una función polinómica de segundo grado. Su definición matemática formal es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde los términos a, b y c son números reales y a necesariamente es diferente de 0.

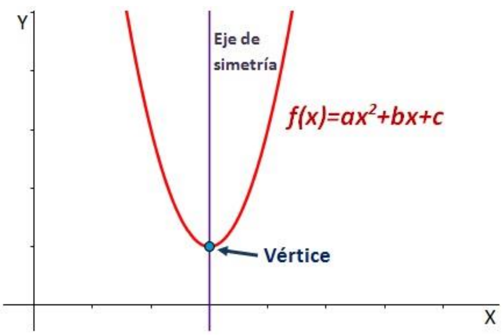


Ilustración 152: Gráfica de una función cuadrática.

5.3. Función cúbica.

Es una función polinómica de tercer grado. Su definición matemática formal es:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Donde los términos a, b, c y d son números reales y a necesariamente es diferente de 0.

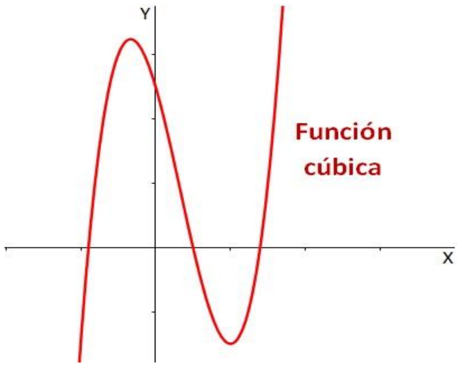


Ilustración 153: Gráfica de una función cubica

6. Función racional.

Es la función que resulta del cociente de dos polinomios. Su definición matemática formal es:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

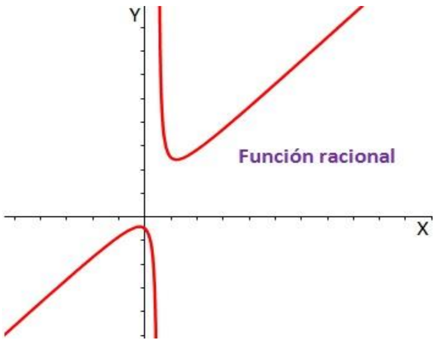


Ilustración 154: Gráfica de una función racional.

7. Función exponencial.

Su definición formal es:

$$f(x) = a^x$$

Donde a es un número real mayor a 0 y distinto de 1.

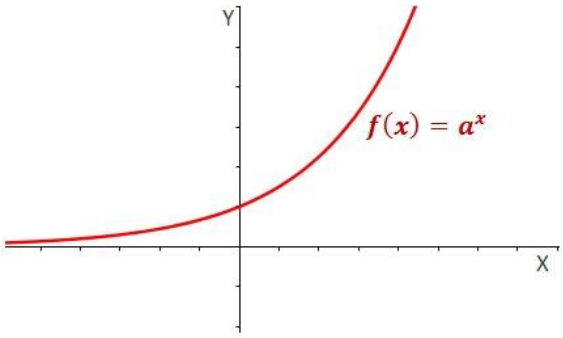


Ilustración 155: Gráfica de una función exponencial.

8. **Función logarítmica.**
   Su definición formal matemática se expresa:

$$f(x) = log_a(x)$$

Donde a es un número real mayor a 0 y distinto de 1.

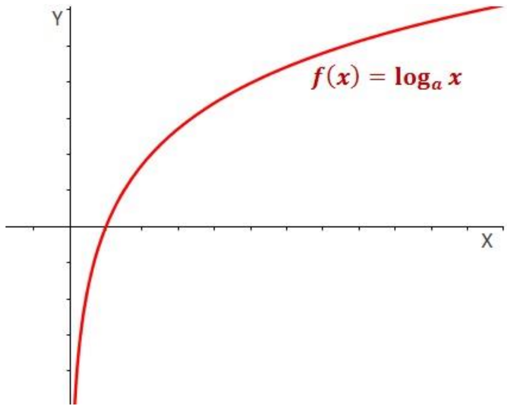


Ilustración 156: Gráfica de una función logarítmica.

1.Nota

- En este libro nos vamos a enfocar más sobre lo que es la **probabilidad.** Simplemente se hizo un preámbulo de lo que es una función y sus tipos para hacer más sencillo el entendimiento de lo que es una función probabilística, tema que veremos posteriormente.

3.5. Función de probabilidad.

1.Definición.

- La función de la probabilidad es la función que relaciona posibles resultados a cada uno de los espacios muestrales pertenecientes a una variable discreta. Supongamos que P es una función cuyo dominio es $\mathcal{L}$ y su conjunto de llegada es el intervalo cerrado de números reales de cero a uno: $P\colon \mathcal{L} \rightarrow [0,1]$

"Digamos que, Y es una variable aleatoria discreta, la Función de Probabilidad es la función $p: R \rightarrow [0, 1]$ que asigna probabilidades a cada uno de los espacios muestrales pertenecientes a Y." (Perez, 2010)

"Se la denomina como la probabilidad de que una variable aleatoria X tome un valor individual: $f(x_i) = (X = x)$". (Gasco, 2011)

3.5.1. Propiedades de la función de la probabilidad.

Sea $P: \mathcal{L} \rightarrow [0,1]$ una función de probabilidad. Se deben cumplir estas 3 propiedades:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $0 \leq P(E) \leq 1 \quad \forall \text{ E} \in \mathcal{L}$
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ si y solamente si E_1y E_2 son mutuamente excluyentes

3.5.2. Regla de Laplace.

1.Definición.

- Esta regla establece que la probabilidad de cualquier evento E es igual al cociente entre el número de resultados favorables y el número total de posibles resultados del espacio muestral Ω. Esto es: $P(E) = \frac{N(E_i)}{N(\Omega)}$

3.5.3. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***
En un colegio se fue preguntando a 4 parejas de estudiantes que versión, entre, Windows 7 y 8 preferían usar ¿cuáles fueron sus posibles respuestas?

a.) Defina el conjunto omega

$$\Omega = \begin{Bmatrix} \{windows\ 7\ , windows\ 7\}, \\ \{windows\ 7, windows\ \ 8\}, \\ \{windows 8, windows\ 7\}, \\ \{windows\ 8, windows\ 8\} \end{Bmatrix}$$

b.) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 pareja solo haya escogido Windows 7?

1. Definición de evento
   $E_{1=}$ Que los 2 estudiantes que conforman la pareja hayan escogido Windows 7
   $$E_{1=}\{(Windows\ 7,\ \ Windows\ 7)\}$$
2. Calculo de la probabilidad

$$P(E_1) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Ilustración 157: Windows 7 y Windows 8 - (Ejemplo1)

➢ ***Ejemplo 2.***
Se tienen los libros de cinco materias de distintos paralelos de la carrera Licenciatura en Sistemas de Información: Matemática aplicada I, contabilidad I, expresión oral y escrita, fundamentos de computación I y programación I.

a.) Defina el conjunto omega.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (Contabilidad\ I), \\ (Expresión\ oral\ y\ escrita), \\ (Fundamentos\ de\ computación\ I), \\ (Programación\ I) \\ (Matemática\ aplicada\ I) \end{Bmatrix}$$

Ilustración 158: Libros – (Ejemplo 2)

b.) Si se toma uno de ellos, ¿Cuál es la probabilidad de que este sea de matemática aplicada I o de fundamento de computación I?

1. Definición del evento
   $E_{1=}$ Al tomar un libro este sea de matemática aplicada I o de fundamento de computación I

$$E_{1=}\{Matemática\ aplicada\ I, Fundamento\ de\ computación\ I\}$$

2. Calculo de la probabilidad

$$P(E_1) = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

- ***Ejemplo 3.***

  En un curso de 20 estudiantes la carrera de ingeniería en teleinformática, 10 estudian inglés y 10 estudian programación, además de que 5 estudian ambas materias.

  a.) Defina los eventos.

  $E_{1=}\ Que\ 5\ estudien\ ambas.$

  $E_{2=}Que\ 10\ estudien\ inglés.$

  $E_{3=}Que\ 10\ estudien\ programación.$

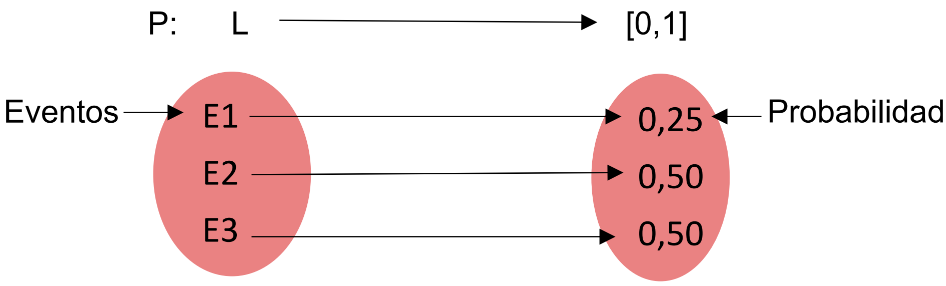
Ilustración 159: Estudiantes - (Ejemplo 3)

  b.) Relación los eventos con sus espacios muestrales.

$$P(E_1) = \frac{5}{20} = 0{,}25$$

$$P(E_2) = \frac{10}{20} = 0{,}50$$

$$P(E_3) = \frac{10}{20} = 0{,}50$$



  c.) Cuál es la probabilidad de que uno estudie programación al escoger al azar a un estudiante del grupo.

$$P(E_1) = \frac{10}{20} = 0{,}50$$

3.6. Axiomas de probabilidad.

1.Definición.

- Un axioma de probabilidad es el componente principal de un sistema de condiciones que deben cumplirse y junto con las pautas de inferencia especifican un sistema deductivo, para que una función determinada sobre un conjunto de eventos determine sus probabilidades.
- Los siguientes axiomas fueron formulados por el matemático ruso Kolmogórov. Por lo que se los denomina axiomas de Kolmogórov.

  - Axioma 1.- $Para\ todo\ evento\ S,\ 0 \leq P(S) \leq 1$
  - Axioma 2.- $P(S) = 1$
  - Axioma 3.- Si $A_1\ y\ A_2$ son eventos mutuamente exclusivos, entonces:

Ilustración 160: Andréi Kolmogórov

“Supongamos que S es un espacio muestral y P una función de valores reales definida en ε. Entonces P se la denomina función de probabilidad, y $P(A)$ es la probabilidad del evento A.” (Santalo, 2013)

“Los axiomas de probabilidad son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función que definimos sobre unos sucesos determine consistentemente valores de probabilidad sobre dichos sucesos.” (Reitsch, 2014)

3.7. Ley del complemento.

1.Definición.

- Sea x un subconjunto perteneciente al espacio muestral S, su complemento está compuesto por los elementos de S que no pertenecen a x. El símbolo del complemento se denota por: $\bar{A}$ o por A^C.
Según los axiomas antes mencionados, $P(S) = 1$.
  - En efecto, como $A \cup A^C = S$ entonces $P(A \cup A^C) = P(S)$
  - Así $P(A \cup A^C) = 1$
  - A y A^C son eventos mutuamente exclusivos, entonces $P(A) + P(A^C) = 1$
  - Finalmente $\boldsymbol{P(A^C) = 1 - P(A)}$ la cual se denomina la ley del complemento.

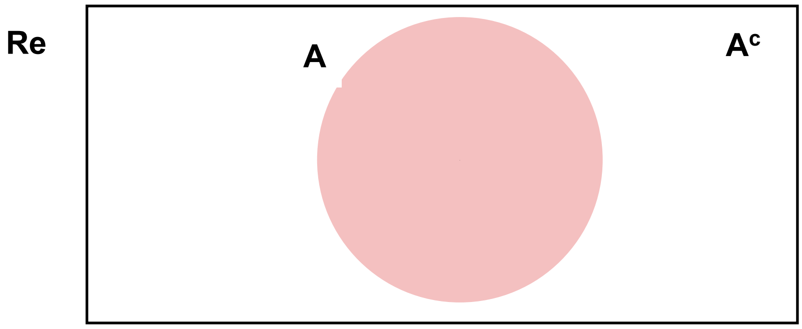


Ilustración 161: Complemento del conjunto A

"La probabilidad del complemento de un conjunto cualquiera D se denomina como la probabilidad complementaria: $P(D^C) = 1 - P(D)$." (Luna & Guillermo, 2010)

"Sea A un evento, su complemento está definido como un nuevo evento que consta de todos los espacios muestrales que no se encuentran en A. Se denota: A_c." (Anderson, Sweeney, & Williams, 2010)

3.7.1. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**
En un curso de 20 alumnos de la carrera de ingeniería en teleinformática, 10 estudian inglés y 10 estudian programación, además de que 5 estudian ambas materias. Sea el evento $E_{1=}$ $Que\ 5\ estudien\ ambas$. ¿Cuál es la probabilidad de que 5 alumnos estudien ambas? y determine su complementario.

Solución:

1. La probabilidad de escoger 5 estudiantes

$$P(E_1) = \frac{5}{20} = 0{,}25$$

Ilustración 162: Estudiantes - (Ejemplo 1)

2. Complementario

El complementario de un evento se determina por:

$$P(E^C) \ = \ 1 - P(E)$$

Entonces:

$$P\left({E_1}^C\right) \ = \ 1 - \frac{5}{20}$$

$$P({E_1}^C) \ = \ 0{,}75$$

- **Ejemplo 2.**

Sea un experimento que consiste en determinar el primer y segundo lugar para premiar a 2 de los mejores estudiantes que hay en 1 curso de ingeniería en sistemas y 1 curso de ingeniería en teleinformática, en ingeniería en sistemas hay 30 y en ingeniería en teleinformática hay 15. Determine el evento complementario de los siguientes eventos.
E_1:El primer lugar es para un estudiante de ingeniería en sistemas
E_2:El primer y segundo lugar son para los estudiantes de ingeniería en sistemas

Solución:

Sea S= estudiante de ingeniería en sistemas y T= estudiante de ingeniería en networking

1. Sea E_1: El primer lugar es para un estudiante de ingeniería en sistemas.

Y E_2:El primer y segundo lugar son para los estudiantes de ingeniería en sistemas

Sus cardinalidades son $N(E1) = 30$ y $N(E2) = 15$

2. Sus probabilidades son:

$$P(E_1) = \frac{30}{45} = 0,67$$

3. Su complementario sería:

$$P\left({E_1}^C\right) = 1 - \frac{30}{45} = 0,33$$

Ilustración 163: Ingenieros - (Ejemplo 2)

- **Ejemplo 3.**
  Se realiza una encuesta a 30 estudiantes de un curso de Ingeniería en teleinformática preguntando si prefieren el lenguaje de programación Python en vez del lenguaje de programación C, 15 seleccionaron "De acuerdo", 5 "Parcialmente de acuerdo", 10 "En total desacuerdo".
  ¿Cuál sería la probabilidad de el evento complementario de que un grupo de estudiantes estén en total desacuerdo con la opción planteada?

1. E_1: Estudiantes que estén en total desacuerdo en preferir el lenguaje de programación Python.

$$N(E1) = 15$$

2. Su probabilidad es:

$$P(E_1) = \frac{15}{30} = 0,50$$

Ilustración 164: Estudiantes- (Ejemplo 3)

3. La probabilidad del evento complementario es:

$$P\left({E_1}^C\right) = 1 - \frac{15}{30} = 0,50$$

3.8. Ley aditiva de probabilidad.

1.Definición.

- Sean dos eventos que pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir, no excluyentes. Se pueden descomponer en eventos mutuamente excluyentes para aplicar la ley aditiva de probabilidad, sumando las probabilidades de cada uno y restando la probabilidad de ambos. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

"Si dos o más eventos no son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que sucedan ambos o solo uno de ellos se deduce sumando sus probabilidades particulares, pero restando la probabilidad de que suceda la común entre ellos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$." (S. & Fernández., 2010)

"Sean dos eventos cualesquiera A y B la probabilidad de la unión de esos dos eventos es $P(A \cup B)$ entonces la ley aditiva de la probabilidad se la enuncia de la siguiente manera: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$." (Torres, 2010)

3.8.1. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**

En un grupo de estudiantes de la universidad de Guayaquil la probabilidad de que prefieran carreras técnicas es $23/100$; administrativas es de $23/100$; sociales $11/25$; las tres $1/10$; técnicas y administrativas $23/50$; técnicas y sociales $11/50$; administrativas y sociales $17/100$ ¿Cuál es la probabilidad de que prefieran las 3?

1. Definir eventos.

E_1: *Los estudiante prefieren carreras técnicas.*
E_2: *Los estudiante prefieren carreras administrativas.*
E_3: *Los estudiante prefieren carreras sociales.*

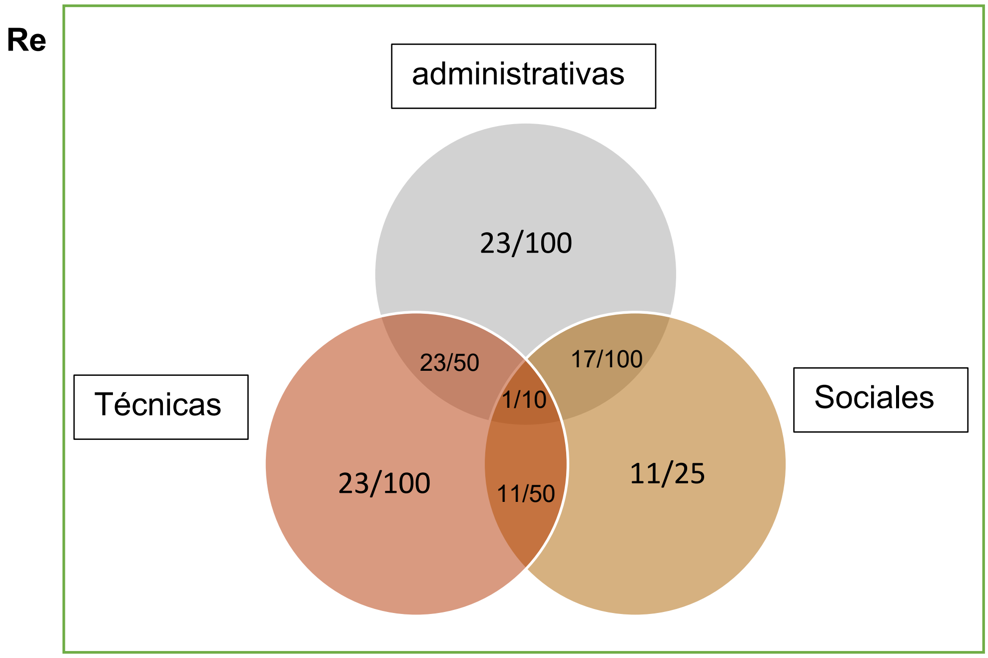
2. Definición matemática de los eventos.

$P\ (E_1) = 23/100$

$P\ (E_2) = 23/100$

$P\ (E_3) = 11/25$

3. Gráfico.



4. Desarrollo del problema.

$$P\ (E_1 U\ E_2 U\ E_3) = \frac{23}{100} + \frac{23}{100} + \frac{11}{25} - \frac{23}{50} - \frac{17}{100} - \frac{11}{50} + \frac{1}{10} = 0{,}15$$

$$P\ (E_1 U\ E_2) = 0{,}5.$$

- **Ejemplo 2.**
En una fiesta se realiza una apuesta la cual consiste en lanzar un dado y si sale un número par o divisible para 5 gana la apuesta. Determine la probabilidad para ganar la apuesta y grafique mediante diagrama de Venn.

1. Definir eventos.

E_1: Que el resultado sea impar

$E_{1=}\{1,3,5\}$

$N(E_1) = 3$

E_2: Que su resultado sea divisible para 5

$E_{1=}\{5\}$

$N(E_2) = 1$

2. Gráfico.

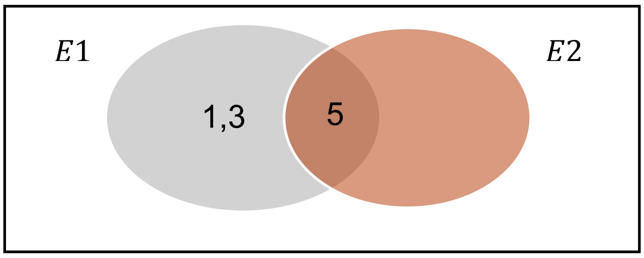


Ilustración 165: Diagramas de Venn de E1 y E2

3. Definición matemática

$E_1 \cap E_2 = 5$

$P\ (E_1) = \frac{3}{6}$

$P\ (E_2) = \frac{1}{6}$

$P\ (E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

4. Desarrollo del problema

$$P\ (E_1 U\ E_2) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$P\ (E_1 U\ E_2) = 0{,}5.$$

- **Ejemplo 3.**

En la universidad de Guayaquil existen dos carreras en la facultad de CISC ingeniería en sistemas e ingeniería en networking. El 50% de los estudiantes de ingeniería en sistemas saben programar en C y el 30% del de ingeniería en networking saben programar en Python. Un 20% de sus estudiantes saben programar en ambos.

Si se elige un estudiante de la facultad al azar. Calcular la probabilidad de que ese estudiante:

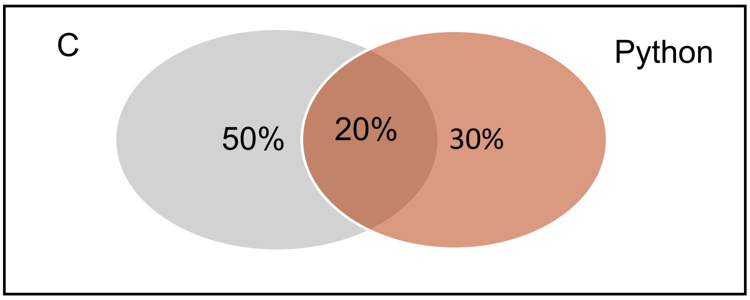
a) Sepa programar en algún lenguaje de programación.

1. Definimos eventos.

E_1: El estudiante escogido programe en C

E_1: El estudiante escogido programe en Python

2. Grafico



3. Definición matemática

$$E_1 \cap E_2 = 5$$
$$P\ (E_1) = \frac{50}{100}$$
$$P\ (E_2) = \frac{30}{100}$$
$$P\ (E_1 \cap E_2) = \frac{20}{100}$$

4. Desarrollo del problema

$$P\ (E_1 \cup E_2) = \frac{50}{100} + \frac{30}{100} - \frac{20}{100}$$

$$P\ (E_1 \cup E_2) = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

3.9. Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: En un casino en el juego de los dados se requiere lanzar un par de dados de 6 lados cada uno numerados del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar al lanzar los dos dados?

Ejercicio 2: En un examen de probabilidad el cual se califica sobre 10 puntos Pedro realizó el examen y necesitaba sacar un 9 o un 7. James realizó el examen, y quería sacar un 10 o un 9. ¿Qué evento tiene una probabilidad mayor?

Ejercicio 3: En un concurso que consiste en girar una ruleta para ganarse un premio la cual está dividida en 10 colores distintos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona haga girar esa ruleta y saque el color numero 6?

Ejercicio 4: Un profesor de programación en un examen él hace los exámenes para sus alumnos. En cada examen pone ejercicios: uno de dos lenguajes de programación (C, o Python), uno de dos temas (separación de capas, base de datos), un tema relacionado a base de datos (SQL, visual Basic).

Pero olvidó marcar los exámenes. Asumiendo que a cada alumno les toca exámenes igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad de que en el examen que le toque a algún estudiante haya un lenguaje de programación C y base de datos SQL?

Ejercicio 5: ¿Cuál es la probabilidad de sacar un estudiante de ingeniería en sistemas (10) o un estudiante de ingeniería en networking (15) en una conferencia de 100 estudiantes?

Ejercicio 6: Supongamos una encuesta aplicada a 200 alumnos sobre el lenguaje más sencillo de programación. Se obtuvo: 80 prefieren Python, 100 prefieren C, 5 prefieren ambos. Cuál es la probabilidad de que a una persona prefiera C y otra probabilidad de que una persona prefiera Python

Ejercicio 7: En un juego al lanzar tres dados y anotar los resultados de sus caras superiores. Calcular la probabilidad del evento " la resta obtenida sea 5".

Ejercicio 8: Si las probabilidades de que un programador realice programas a tres, cuatro, cinco o más compañías en un mes de trabajo son 0.28, 0.24, 0.10, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que programe a cinco compañías más al otro mes de trabajo?

Ejercicio 9: La probabilidad de que un carro provincial normalmente salga a tiempo es P(B)=0.70, la probabilidad de que llegue a su lugar de destino a tiempo es P(C)=0.80 y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo P (B y C) =0.75. Calcule: a) la probabilidad de que llegue a tiempo, dado que salió a tiempo

Ejercicio 10: Sea el experimento de tirar 5 dados al mismo tiempo a.) Supongamos que sabemos que el resultado es impar, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 13 en la suma de sus caras superiores?

b.) Supongamos que ahora se agrega un dado más y que el resultado es impar, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 17 en la suma de sus caras superiores?

Ejercicio 11: En un proceso de control de calidad, el inspector selecciona una pieza terminada para inspección. El inspector a continuación determina si la pieza tiene algún defecto importante, un defecto menor o no tiene defectos. Considere la selección y la clasificación de la pieza como un experimento. Enliste los puntos muestrales para el experimento.

Ejercicio 12: Un experimento con tres resultados ha sido repetido 50 veces, y E1 ocurrió 20 veces, E2 13 veces y E3 17 veces. Asigne probabilidades a los resultados.

a. ¿Qué método utilizó?

b. ¿Por qué?

Ejercicio 13: El administrador de un gran multifamiliar aporta el siguiente estimado de probabilidad subjetiva sobre el número de departamento ocupados que existiría el mes que sigue:

Enliste los puntos muestrales de cada uno de los eventos siguientes y proporcione la probabilidad de:

a. Ningún departamento desocupado.

b. Por lo menos 4 departamentos estén desocupados.

Ejercicio 14: Para dos eventos A and B, $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.60$ y $P(A \cap B) = 0.40$

a. Encuentre $P(A/B)$.

b. Encuentre $P(B/A)$

c. ¿Son A y B independientes? ¿Por qué sí o por qué no?

Ejercicio 15: Suponga que un espacio muestra contiene 5 resultados experimentales igualmente posible: E1, E2, E3, E4, E5 Supongamos que:

A= {E1, E2}

B= {E3, E4}

C= {E2, E3, E5}

a. Encuentre P(A), P(B), y P(C).

b. Encuentre P (A U B). ¿Son A y B mutuamente excluyentes?

c. Encuentre Ac, Cc, P(Ac), y P(Cc).

d. Encuentre A U Bc y P (A U Bc).

e. Encuentre P (B U C).

Ejercicio 16: Supongamos que

A= al evento en que una persona corra 5 millas o más por semana

B= al evento en que una persona muera de una enfermedad cardíaca

C= al evento en que una persona muera de cáncer

Además, suponga que $P(A) = 0.01$, $P(B) = 0.25$, y $P(C) = 0.20$

a. ¿Son los eventos A y B mutuamente excluyentes? ¿Puede usted determinar $P(A \cap B)$?

b. ¿Son los eventos B y C mutuamente excluyente? Encuentre la probabilidad de que una persona muera de una enfermedad cardíaca o de cáncer.

c. Encuentre la probabilidad de que una persona muera de causas distintas al cáncer.

Ejercicio 17: Una empresa farmacéutica llevó a cabo un estudio para evaluar el efecto de una medicina para el alivio de alergias. Para tal estudio se seleccionaron 250 pacientes quienes presentaban síntomas que incluían ojos irritados y trastornos epidérmicos. Estos 250 pacientes recibieron el nuevo medicamento.

Los resultados del estudio son como sigue: 90 de los pacientes tratados experimentaron mejora total en los ojos, 135 se curaron de su afección cutánea y 45 experimentaron tanto alivio total en los ojos y curación total en la piel.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que toma el medicamento experimente alivio en *uno de los dos síntomas o en ambos*?

Bibliografía

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (2010). Estadística para administración y economía. México.

Canavos, G. C. (2013). Probabilidad y Estadística Aplicaciones y métodos.

Gasco, J. L. (2011). Probabilidad. In Estadistica Descriptiva. Valencia.

Luna, M., & Guillermo. (2010). Introducción a la lógica difusa. México.

Perez, J. M. (2010). Variables aleatorias discretas. In Estadística. Murcia.

RedDescartes. (2011). Matemáticas. Sevilla.

Reitsch, H. J. (2014). Estadística para negocios. Editorial Mc Graw Hill. 2ª. Edición.

Render, S. &. (2012). Concepto de probabilidades y aplicaciones.

S., P. D., & Fernández., S. P. (2010). Cálculo de probabilidades: nociones básicas. La Coruña.

Santalo, L. (2013). Probabilidad e inferencia estadística. Organización de los estados Americanos: 3ª . edición.

Snell, A. R. (2013). Introducción a la probabilidad.

Suay, F. M. (2012). Introduccion a la Probabilidad. España.

Torres, P. (2010). Probabilidad y estadística. Universidad de Los Andes, Colombia.

CAPÍTULO 4

PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

Introducción.

En este capítulo se definirá lo que es la probabilidad condicional e independencia de eventos.
Muchas veces en nuestra rutina diaria decimos o escuchamos expresiones como: “es muy probable que llueva” o es “es probable que hoy este muy soleado”. Estas frases, si la analizamos, tiene un grado de incertidumbre, ya que no puede predecirse el resultado final, es imposible poderlo determinar a simple vista o por conjeturas.

Ilustración 166: Dados

Posteriormente, analizaremos el tratamiento de la probabilidad condicional e independencia de eventos, fórmulas y conceptos.

Contenido.

- Probabilidad condicional.
- Independencia de eventos.

4.1. Probabilidad condicional.

Definición.

- Se conoce como probabilidad condicional a la probabilidad de que se dé un suceso A, conociendo, que también se da un suceso B. La probabilidad condicional se define formalmente como: $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$; $P(B)>0$, leyéndose "probabilidad de A dado B".

"Sean (Ω,ρ,P) un espacio probabilístico, sean dos eventos $A,B\in\rho$ y sus probabilidades sean $P(A)\ y\ P(B)$ respectivamente. La probabilidad de que suceda el evento B condicionado por el evento A, representado por $P(B/A)$, es igual a la división entre las probabilidades $P(A\cap B)\ y\ P(A)$." (Miguel, 2011)

"La probabilidad condicional $P(A/B)$ de un acontecimiento A dado otro acontecimiento B es simplemente la probabilidad de que suceda A sabiendo que B se ha realizado. Su definición formal es la siguiente:
$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{PA\cap B}{P(B)}$, siempre y cuando $P(B)\ >0$." (Epsilon, 2010)

4.1.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***

Un hombre tiene una enfermedad hereditaria x ¿Determine la probabilidad de que su primer hijo obtenga dicha enfermedad?
Sea el espacio muestral el siguiente $\Omega=\{mM,mP,MM,MP\}$

1. Definición de eventos.

$D=\{primogénito\ enfermo\}=\{mP\}$
$E=\{ser\ hombre\}=\{mp,MP\}$

Ilustración 167: Ejemplo #1

2. Definición matemática.

$$P(D)=\frac{1}{4}=\ 0{,}25$$

$$P(E)=\frac{2}{4}=\ 0{,}50$$

3. Desarrollo del problema.

$P(D|E)\ =?$

$P(E)\ =\ 0{,}5;$

$$P(D|E) = \frac{0,25}{0,5} = 0,5$$

Si sabemos que es hombre, el espacio muestral ha cambiado, ahora es E. Por lo tanto, se puede calcular $P(D|E)$.

$$P(D|E) = \frac{1}{2} = 0,5$$

- ***Ejemplo 2.***

Se han dado dos eventos aleatorios cualesquiera, D y E, $P(D) = 1/5$ $P(E) = 1/6$ y $p\ (D \cap E) = 1/7$. Determinar: $P(D|E)$

Solución:

1. Definición matemática.

$p(D) = 1/5$

$p(E) = 1/\ 6$

$p\ (D \cap E) = 1/7$

$$P(D|E) = \frac{p(D \cap E)}{p(E)}$$

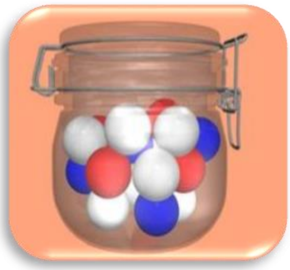


Ilustración 168: Ejemplo #2

2. Desarrollo del problema.

$$P(D|E) = \frac{p\left(D \cap E\right)}{p(E)}$$

$$P(D|E) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{7} = 0,86$$

- ***Ejemplo 3.***

En una conferencia hay 10 expositores, de los cuales 3 son ingenieros en Networking, 5 ingenieros en sistemas y 2 en teleinformática. Se escogen al azar 3 ingenieros para dar una charla. Calcular la probabilidad de que el primero sea ingeniero en teleinformática, y los otros dos ingenieros en sistemas.

1. Definir eventos.

$E1 = \{el\ primero\ sea\ ingeniero\ en\ teleinformática\}$;
$E2 = \{el\ segundo\ sea\ ingeniero\ en\ sistemas\}$
$E3 = \{el\ tercero\ sea\ ingeniero\ en\ sistemas\}$

2. Definición matemática.

$P(E1) = 2/10$

$P(E2|E1) = 5/9;$

$P(E3|E1 \cap E2) = 4/8$

Ilustración 169: Ejemplo #3

3. Desarrollo del problema.

$P\ (E1 \cap E2 \cap E3) = 2/10\ x\ 5/9\ x\ 4/8 = 1/18$

4.2. Independencia de eventos.

Definición.

- Se conoce como independencia de eventos, sean A y B dos sucesos cualesquiera, cuando la probabilidad de que ocurra el evento A no está influida por que el evento B suceda o no. La independencia de eventos se define formalmente como: $P(A \cap$

"Sean dos eventos A y B, se dice que el evento A es independiente de B si $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$. " (Calvo & Chamorro, 2008)

"En la mayor parte de los casos la independencia de eventos se deduce matemáticamente del criterio del producto: A y B son independientes si y sólo sí $P(A \cap B) = P(\ A)P(B)$." (Miguel, 2011)

4.2.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
  En un curso de programación gratuito. En un día, 40 personas que saben programar visitan el curso para aprender un nuevo lenguaje, de igual forma lo hacen 50 personas que buscan aprender a programar por primera vez en Python. Determine la probabilidad de que en un día una persona se acerque al curso para aprender a programar por primera vez y otras a aprender a programar en un nuevo lenguaje.

1. Definir eventos.

$E1 = \{personas\ que\ desean\ aprender\ a\ programar\ por\ primera\ vez\};$
$E2 = \{personas\ que\ desean\ aprender\ un\ nuevo\ lenguaje\}$

2. Definición matemática.

Ilustración 170: Ejemplo #1

$$P(E1) = \frac{50}{90} = 0{,}55$$

$$P(E2) = \frac{40}{90} = \ 0{,}44$$

3. Solución matemática.

$$P(E1 \cap E2) = P(\ E1)P(E2)$$
$$P(E1 \cap E2) = 0{,}55 * 0{,}44 = 0{,}24 = 24\%$$

- ***Ejemplo 2.***
Se realiza una encuesta a 200 estudiantes de las carreras de ingeniería en teleinformática y licenciatura en sistemas de información para saber que lenguaje de programación preferían estudiar. De los cuales 90 escogieron Python y 150 saben programar en C. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un estudiante que haya escogido Python en la encuesta y sepa programar en C?

1. Definir eventos.

$$E1 = \ \{personas\ que\ escogieron\ Python\ en\ la\ encuesta\};$$
$$E2 = \{personas\ que\ saben\ programar\ en\ C\}$$

2. Definición matemática


Ilustración 171: Ejemplo # 2

$$P(E1) = \frac{90}{200} = 0{,}45$$

$$P(E2) = \frac{150}{200} = \ 0{,}75$$

3. Solución matemática.

$$P(E1 \cap E2) = P(\ E1)P(E2)$$
$$P(E1 \cap E2) = 0{,}45 * 0{,}75 = 0{,}34 = 34\%$$

- ***Ejemplo 3.***
¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de ingeniería en sistemas pueda aprender varios lenguajes de programación y sepa programar en C es de 0,40, de que una persona sepa programar en Python 0,58 y de que una persona sepa programar en C# es de 0,10?

1. Definir eventos.

$$E1 = \ \{estudiante\ que\ sabe\ programar\ en\ c\};$$
$$E2 = \{estudiante\ que\ sabe\ programar\ en\ Python\}$$
$$E3 = \{estudiante\ que\ sabe\ programar\ en\ c\#\}$$

2. Definición matemática.

$P(E1) = 40\%$
$P(E2) = 58\%$
$P(E3) = 10\%$

Ilustración 172:Ejemplo 3

3. Solución matemática.

$P(E1 \cap E2 \cap E3) = P(E1)P(E2)P(E3)$
$P(E1 \cap E2 \cap E3) = 0{,}40 * 0{,}58 * 0{,}10 = 0{,}0232$

4.3. Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: Calcule la probabilidad de conseguir un 4 al tirar un dado sabiendo que ha salido par.

Ejercicio 2: Se lanza una moneda 4 veces, ¿Cuál sería la probabilidad de obtener 4 sellos dado que salió por lo menos un sello?

Ejercicio 3: Se arrojan 2 dados, si la suma de los números que aparecen es de por lo menos 9.

a.) determine la probabilidad de que en el segundo dado aparezca el número 4

Ejercicio 4: Se arrojan 2 dados, si la suma de los números que aparecen es de por lo menos 9.

a.) Calcule la probabilidad de que ambos números sean impares

Ejercicio 5: En el examen de admisión a la universidad Guayaquil las carreras que más han llamado la atención de los aspirantes "medicina" y "ingeniería civil". El total de las personas que aplicaron a esas carreras son 2000, de las cuales 1000 aplicaron a medicina y 900 a ingeniería civil. Cuál es el porcentaje de probabilidad de que los aspirantes hayan aplicado a ambas carreras.

Ejercicio 6: Se sabe por estudios previos que el 0,1% de la población tiene problemas vasculares. Un estudio sobre individuos con problemas vasculares revela que el 20% de ellos son placas de ateroma. Si el 10% de los individuos con placas de ateroma están expuestos a muerte súbita por desprendimiento de trombos ¿qué probabilidad tiene un individuo cualquiera de estar expuesto a muerte súbita por desprendimiento de trombos de una placa de ateroma?

Ejercicio 7: En una determinada materia el 1% de los estudiantes están bajos.
La probabilidad de que al analizar a un buen estudiante y erróneamente salga bajo es el 1%.
La probabilidad de que al analizar un estudiante bajo y salga erróneamente con notas altas es el 1%.

a.) Calcular la probabilidad de que una persona esté realmente baja si en un análisis sale que está bajo.

Ejercicio 8: Carlos tiene 5 ediciones libros de programación los cuales cada edición tiene 2 volúmenes: 2 en de programación en C, 1 de programación en Python, 2 programación en C#. Hoy quiere usar llevar 1 edición de programación en C a la universidad, pero tiene prisa para llegar a clases, por lo que agarra una edición al azar. Si no es el de programación en C, lo devolverá al librero. Si continúa agarrando ediciones aleatoriamente, ¿Cuál es la probabilidad de sacar una edición de programación en C en su cuarto intento?

Ejercicio 9: Defina los eventos y calcule la probabilidad de que al sacar una carta de un mazo:

a) La carta seleccionada sea un corazón negro.

b) La carta seleccionada sea un trébol negro.

Ejercicio 10: En una universidad se realiza una feria tecnológica en un piso hay 5 stands, 2 son de la materia de circuitos electrónicos, 2 de la materia de programación y 1 de la materia de matemáticas. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 10 personas, por lo menos a 1 stand de circuitos electrónicos y otras 10 personas no lo hagan?

Ejercicio 11: Dos personas eligen al azar, cada una de ellas, un número del 0 al 9. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos personas no piensen el mismo número?

Ejercicio 12: En unas oposiciones, el temario consta de 87 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 36 de los 86 temas, ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas?

Ejercicio 13: Tenemos para enviar tres cartas con sus tres sobres correspondientes. Si metemos al zar cada carta en uno de los sobres, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas vaya en el sobre que le corresponde?

Ejercicio 14: Extraemos dos cartas de una baraja española (de cuarenta cartas). Calcula la probabilidad de que sean:

- **a)** Las dos de oros.
- **b)** Una de copas u otra de oros.
- **c)** Al menos una de oros.
- **d)** La primera de copas y la segunda de oro.

Ejercicio 15: En un pueblo hay 200 jóvenes; 50 de los chicos y 45 de las chicas juegan al tenis. El total de chicas en el pueblo es de 55. Si elegimos un joven de esa localidad al azar:

- **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?
- **b)** Si sabemos que juega al tenis, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?
- **c)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico que no juegue al tenis?

Ejercicio 16: Un estudiante responde al azar 8 preguntas de verdadero y falso en un examen. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte todas las preguntas?

Ejercicio 17: Un restaurante ofrece un almuerzo en que se pueden elegir 4 entradas, 7 platos de fondo y 5 postre Si no me gustan 7 de los platos de fondo y 5 de los postres. ¿Cuál es la probabilidad de que me toque un menú de mi agrado si la elección es al azar?

Ejercicio 18: En una empresa trabajan hombres y mujeres, además se sabe que un 15% de los empleados se han perfeccionado en el extranjero. Si el 35% de las son mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que al escoger una persona de la empresa, esta sea mujer y se haya perfeccionado en el extranjero?

Ejercicio 19: Ante un examen, un alumno sólo ha estudiado 16 de los 25 temas correspondientes a la materia del mismo. Éste se realiza en trayendo al azar dos temas y dejando que el alumno escoja uno de los dos para ser examinado del mismo. Hallar la probabilidad de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados.

Bibliografía

Calvo, P. L., & Chamorro, I. (2008). Probabilidad condicionada. En Estadistica e investigación operativa. Sevilla.

Epsilon. (2010). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de estadística. En Condicional, comprensión intuitiva de la probabilidad. España.

Miguel, C. G. (2011). Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional. Granada.

Introducción


Ilustración 173: Thomas Bayes.

El teorema de Bayes permite realizar el cálculo de probabilidades después de haberse efectuado un experimento que se basa en los sucesos observados.

Podemos determinar, que con el teorema de Bayes se resuelve el problema conocido como de la probabilidad contraria o inversa. Esto es, considerar probabilísticamente las posibles condiciones que rigen el supuesto suceso observado.

En la vida cotidiana las personas se encuentran con incertidumbres de diferentes grados relacionándolos con los enfoques más comunes para el cálculo de probabilidades, en términos de experimentos, espacio muestral, sucesos, etc., llegando a la formalización axiomática, junto con la probabilidad condicionada y los teoremas de probabilidad total y de Bayes.

Contenido

- Sistema exhaustivo y excluyente de eventos.
- Teorema de probabilidad total.
- Teorema de Bayes.

5.1. Sistema exhaustivo y excluyente de eventos.

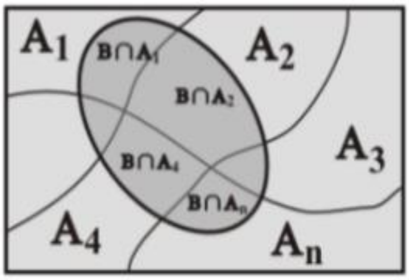


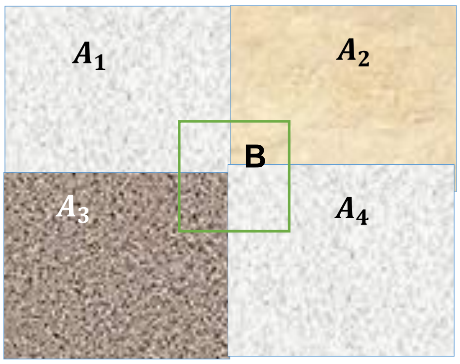
Ilustración 174:Diagrama de ven de un evento en varios subconjuntos mutuamente excluyente.

Definición

- Para cualquier evento, tenemos que éste sucede o no sucede. De modo que los eventos no son mutuamente excluyentes y exhaustivos. Si dos eventos no son mutuamente excluyentes, es posible que ambos se presenten al mismo tiempo. Es exhaustiva si $S = A\_1 \cup A\_2 \cup..\cup A\_n$, y $A\_i \cup A\_j = \emptyset$

"La exclusión mutua de los sucesos A y B significa que $\boldsymbol{A \cap B} = \emptyset$, y por tanto se cumple que $\boldsymbol{P(A \cap B) = 0}$. Por el contrario, la independencia significa que $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$. Por consiguiente, dos sucesos mutuamente exluyente de probabilidad positiva no son independientes uno de otro." (Maibaum., 2012)

"Una colección de eventos $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3 \dots . A_n}$ es exhaustiva y mutumante excluyente si la unión de todos forman el espacio muestral $\boldsymbol{S}$, y sus intersecciones son mutuamente excluyentes para cualquier para $\boldsymbol{A_i} \cap \boldsymbol{A_j}$ con $\boldsymbol{i \neq j}$." (Alvarado, 2013.)



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

ahora bien, los conjuntos $B \cap A_i$ son disjuntos dos a dos, ya que en caso contrario los A_i tampoco lo serían. En consecuencia

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \dots + P(B \cap A_n)$$

5.1.1. Ejemplos.

➢ ***Ejemplo 1.***

En bodega se han guardado 4 Discos duros en marca seagate, 3 en marca Toshiba, y un disco duro en una segunda bodega, 3 en marca seagate y 5 en marca toshiba. Se saca un disco duro de la primera bodega, sin verla, se guarda en la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que un disco duro que se extraiga al azar de la segunda bodega sea de marca toshiba?

Solución:
B = El segundo disco duro extraído de la segunda bodega sea de marca toshiba.

A = El disco duro transferido es en marca toshiba.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A^C}$
$\boldsymbol{P(A) = \frac{3}{7} = 0.43}$	$\boldsymbol{P(A^C) = \frac{4}{7} = 0.57}$

Entonces $\boldsymbol{P(B/A) = 6/9}$ puesto que habrán tre disco duros en marca seagate y 6 discos duros en marca toshiba en la bodega 2, al momento de la segunda extracción si es que A ocurre.

Análogamente $\boldsymbol{P(B|A^C) = 5/9}$. También tenemos que $\boldsymbol{P(A) = 3/7}$ y en consecuencia $\boldsymbol{P(A^C) = 4/7}$.

$$\boldsymbol{P(B) = P(A \cap B) + (A^C \cap B)}$$
$$\boldsymbol{= P(A)P(B|A) + P(A^C)\, P(B|A^C)}$$
$$\boldsymbol{= \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{38}{63}}$$

La probabilidad de que un disco duro extraído al azar de la segunda bodega sea Toshiba es de $38/63 = 0.6032$.

➢ ***Ejemplo 2.***

En la Facultad de Ingeniería Industrial, de la universidad de Guayaquil, el 70% de los alumnos son varones. De ellos el 20% son de la carrera de Ing. en teleinformática. De las mujeres son de la carrera de Ing. en Teleinformática el 10%.
¿Qué porcentaje de estudiantes de la carrera de Ing. en Teleinformática hay?

H	M
P(H)=0.7	P(M)=0.3
$\boldsymbol{P(T \setminus H) = 0.2}$	$\boldsymbol{P(T \setminus M) = 0.1}$

$$\boldsymbol{P(T) = P(H \cap T) + (M \cap T)}$$

$$\boldsymbol{= P(H)P(T|H) + P(M)\,P(T|M)}$$
$$\boldsymbol{= (0.7)(0.2) + (0.3)(0.1) = 0.17}$$

Tenemos un 17% de estudiantes que son de la carrera de Ing. en Teleinformática.

➢ **Ejemplo 3.**

Tengo una carro de compras llena de bananas y sandias, de las cuales hay 20 bananas y 10 sandias. ¿Qué fruta es más probable que saque al azar del carro de compras?

Para este ejemplo tenemos que 30 es el total de frutas en el carro de compras; es decir los casos posibles. Para calcular la probabilidad de sacar una sandía mis casos favorables son 10 puesto que existen sólo 10 sandías. Así, aplicando la fórmula obtenemos que:

	S
P(B)=0.66	P(S)=0.33

$\boldsymbol{P(S) = 10/30 = 1/3 = 33.3\%}$ probable

Calculando igual, la probabilidad de sacar es:
$\boldsymbol{P(B) = 20/30 = 2/3 = 66.7\%}$ probable.

Como 66.7% es mayor que 33.3%, es más probable que saque una Banana, pues hay más bananas que sandías en el carro de compras.

5.2. Teorema de probabilidad total.

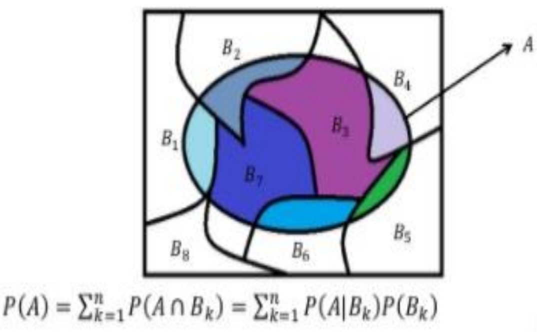


Ilustración 175:Representación de teorema de probabilidad Total.

Definición

- El teorema de probabilidad total podemos definir que es el que nos permite obtener la probabilidad de un evento a partir de las probabilidades condicionadas. $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A \setminus B_i)$

(P. Ibarrola, 2009), Podemos determinar que $\boldsymbol{E}$ es nuestro experimento aleatorio y Ω es el espacio muestral, si los eventos $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \ldots . \boldsymbol{E_n}$ son incompatibles dos a dos y su unión es Ω, entonces siendo $\boldsymbol{A}$ un evento a $\boldsymbol{E}$, es:

$$\boldsymbol{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\boldsymbol{S_i})\mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus \boldsymbol{S_i}) =$$

$$\boldsymbol{P(A)} = \mathbf{P}(\boldsymbol{S_1})\mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus \boldsymbol{S_1}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{S_2})\mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus \boldsymbol{S_2}) + \cdots + \mathbf{P}(\boldsymbol{S_n})\mathbf{P}(\mathbf{A} \setminus \boldsymbol{S_n})$$

(Webster, 2009), “Sea $\boldsymbol{B_i}$ $(\boldsymbol{i = 1, \ldots, n})$ n hechos no nulos mutuamente excluyentes y exhaustivos (es decir, una partición del espacio muestral) y sea $\boldsymbol{A}$ un suceso definido en el mismo espacio muestral; dado que las probabilidades marginales, $\boldsymbol{P(B_i)}$, y las probabilidades condicionales $\boldsymbol{P(A/B_i)}$, para todas las $\boldsymbol{i}$, son conocidas, la probabilidad marginal de $\boldsymbol{A}$.”

5.2.1. Ejemplos.

- **Ejemplo 1.**

Se sabe que el 65% de los estudiantes no culminan sus carreras debido a que no trabajan y su situación económica no es buena, el 25% no tiene el apoyo de un familiar, y el resto por otras causas, (forman un hogar...etc.). En estos casos, el resultado es nefasto el 30% de las veces en el primer caso, el 20% en el segundo y el 5% en el tercero.

a) Calcular la probabilidad de que uno de estos casos tenga resultado nefasto.

Solución:

A_1 = al suceso "No terminar la carrera debido a que no tiene ingreso económico, es decir, no trabaja"
A_2 = al suceso "No tiene el apoyo de un familiar"
A_3 = al suceso "No termina la carrera por otras causas".



Estos sucesos son incompatibles dos a dos y su unión es el espacio muestral, por lo que se verifican las hipòtesis del teorema de la probabilidad total. Sea $\boldsymbol{N}$ el suceso "tener resultado nefasto"

$$\boldsymbol{P(N) = P(A_1)P(N \setminus A_1) + P(A_2)P(N \setminus A_2) + P(A_3)P(N \setminus A_3) =}$$
$$\boldsymbol{P(N) = (0.65)(0.3) + (0.25)(0.2) + (0.1)(0.05) = 0.25}$$

La probabilidad de tener un resultado nefasto es de 25%

- **Ejemplo 2.**

Una Empresa multinacional elabora sus piezas en 3 plantas. El porcentaje de piezas defectuosas y el total de producción de cada planta se observa en la siguiente tabla:



	$\boldsymbol{F_1}$	$\boldsymbol{F_2}$	$\boldsymbol{F_3}$
Producción	0.4	0.35	0.25
Defectuosas	0.2	0.3	0.1

Calcular la probabilidad de que una pieza escogida al azar sea defectuosa.

$$\boldsymbol{F_1 = \{piezas\ fabricadas\ en\ la\ planta\ 1\}}$$
$$\boldsymbol{F_2 = \{piezas\ fabricadas\ en\ la\ planta\ 2\}}$$
$$\boldsymbol{F_3 = \{piezas\ fabricadas\ en\ la\ planta\ 3\}}$$

Una pieza se fabrica en una sola planta $\boldsymbol{F_i} \cap \boldsymbol{F_j} = \emptyset$
Cualquier pieza se fabrica en una de las plantas $\boldsymbol{F_1} \cup \boldsymbol{F_2} \cup \boldsymbol{F_3} = \boldsymbol{E}$

Consideramos $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{Piezas\ defectuosas}\}$

$$\boldsymbol{P(G) = \sum_{i=1}^{3} P(F_1)P(G \setminus F_1) + P(F_2)P(G \setminus F_2) + P(F_3)P(G \setminus F_3)}$$

$$\boldsymbol{P(G) = (0.40)(0.02) + (0.35)(0.03) + (0.25)(0.01)}$$

$$\boldsymbol{P(G) = 0.008 + 0.0105 + 0.00025 = 0.01875}$$

$\boldsymbol{La\ probabilidad\ de\ escoger\ una\ pieza\ defectuosa\ es\ de\ 1.875\%}$

5.3. Teorema de Bayes.

Ilustración 176: Thomas Bayes obtuvo la determinación de la probabilidad de los eventos que ocurren.

Definición

- El teorema de Bayes se basa en un acontecimiento en la que podemos calcular las probabilidades que suceden en una serie de eventos A_j.
- $P(A_j \setminus B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)\,P(B_i \setminus A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B \setminus A_i)}$

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)\,P(A \setminus B_i)}$$

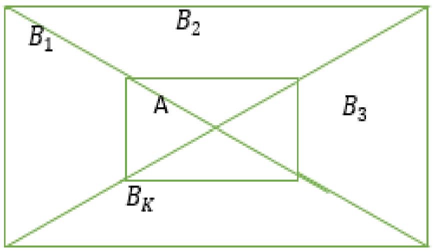


Ilustración 177: Partición de un espacio muestral.

(Martín-Pliego, 2015). "El teorema de Bayes nos permite determinar la probabilidad que que exista un acontecimiento, $\boldsymbol{A_j}$, condicionado a que el suceso $\boldsymbol{B}$ ya ha ocurrido."

(Canavos, 2013). "Si los eventos $\boldsymbol{B_1, B_2, \dots, B_k}$ constituyen una partición del espacio muestral tal que para $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, k}$, entonces para cualquier evento $\boldsymbol{A}$ del espacio muestral se tiene el teorema de Bayes."

5.3.1. Ejemplos.

- ***Ejemplo 1.***
  En cierta planta de producción cacao, tres máquinas, M1, M2 y M3, cargan 30%, 45% y 25% de los productos, respectivamente. Se sabe de la experiencia pasada que 2%, 3% y 2% de los productos elaborados por cada máquina, respectivamente, tiene defectos.

Ahora, supongamos que se selecciona de forma aleatoria un producto terminado, ¿cuál es la probabilidad de que este producto esté defectuoso?

Sean los siguientes eventos:

$\boldsymbol{D = \{ el\ producto\ está\ defectuoso\}}$
$\boldsymbol{M_1 = \{ el\ producto\ está\ elaborado\ por\ la\ máquina\ 1\}}$
$\boldsymbol{M_2 = \{ el\ producto\ está\ elaborado\ por\ la\ máquina\ 2\}}$
$\boldsymbol{M_3 = \{el\ producto\ está\ elaborado\ por\ la\ máquina\ 3\}}$

Al aplicar el teorema de la probabilidad total, podemos escribir:

$$\mathbf{P(D) = P(}\boldsymbol{M_1}\mathbf{)P(D|}\boldsymbol{M_1}\mathbf{) + P(}\boldsymbol{M_2}\mathbf{)P(D|}\boldsymbol{M_2}\mathbf{) + P(}\boldsymbol{M_3}\mathbf{)P(D|}\boldsymbol{M_3}\mathbf{)}$$

$$\mathbf{P(}\boldsymbol{M_1}\mathbf{)P(D|}\boldsymbol{M_1}\mathbf{) = (0.3)(0.02) = 0.006}$$

$$\mathbf{P(}\boldsymbol{M_2}\mathbf{)P(D|}\boldsymbol{M_2}\mathbf{) = (0.45)(0.03) = 0.0135}$$

$$\mathbf{P(}\boldsymbol{M_3}\mathbf{)P(D|}\boldsymbol{M_3}\mathbf{) = (0.25)(0.02) = 0.05}$$

y de aquí $\boldsymbol{P(D) = 0.006 + 0.0135 + 0.005 = 0.0245}$.

$\boldsymbol{La\ probabilidad\ de\ que\ este\ producto\ esté\ defectuoso\ es\ de\ 2.45\%}$.

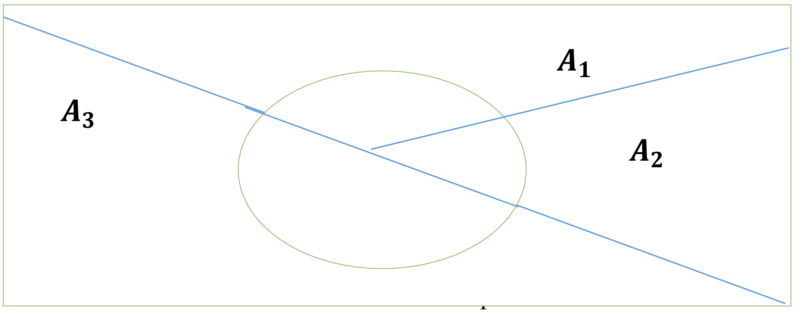
- ***Ejemplo 2.***

Una empresa de textiles tiene tres delegaciones, Ecuador, Brazil y Venezuela. De un determinado fármaco se produce el 45% en la delegación de Ecuador, el 30% en Brazil, y el 25% en Venezuela. Del total de los fármacos, son defectuosos el 5% de los producidos en Ecuador, el 3% en Brazil y el 4% en Venezuela. Calcular:

1. Probabilidad de que un fármaco sea defectuoso.
2. Si un fármaco es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la delegación de Venezuela?



$\boldsymbol{A_1}$= Producido en Ecuador	$\boldsymbol{A_2}$=Producido en Brazil	$\boldsymbol{A_3}$=Producido en Venezuela
$\boldsymbol{P(A_1) = 0.45}$	$\boldsymbol{P(A_2) = 0.30}$	$\boldsymbol{P(A_3) = 0.25}$
$\boldsymbol{P(B\|A_1) = 0.05}$	$\boldsymbol{P(B\|A_2) = 0.03}$	$\boldsymbol{P(B\|A_3) = 0.04}$



1. Literal.

$$\mathbf{P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$
$$\boldsymbol{P(B) = (0.45)(0.05)(0.30)(0.03)(0.25)(0.04) = 0.0415}$$

Probabilidad de que un fármaco sea defectuoso es de 4.15%

2. Literal.

$$\mathbf{P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{(0.25)(0.04)}{0.0415} = 0.241}$$

La probabilidad de que haya sido producido por la delegación de Venezuela es de 24.1%.

- ***Ejemplo 3.***

En una población el 51% de las personas son mujeres, el 18% tienen azúcar y el 10% ambas cosas. Obtener:

1. Probabilidad de que una persona tenga la azúcar si es mujer.
2. Probabilidad de ser hombre si se tiene azúcar.
3. Probabilidad de ser mujer si no se tiene azúcar.

$\boldsymbol{A = Es\ mujer}$	$\boldsymbol{B = Tener\ azúcar}$
$\boldsymbol{P(A) = 0.51}$	$\boldsymbol{P(B) = 0.18}$

$$\mathbf{P(A \cap B) = 0.10}$$

1. Literal.

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})} = \frac{\mathbf{0.10}}{\mathbf{0.51}} = \mathbf{0.19}$$

Probabilidad de que una persona tenga la azúcar si es mujer es de 19%

2. Literal.

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A^C}|\boldsymbol{B}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \mathbf{1} - \mathbf{0.555} = \mathbf{0.445}$$

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})} = \frac{\mathbf{0.10}}{\mathbf{0.18}} = \mathbf{0.555}$$

Probabilidad de ser hombre si se tiene azúcar es de 55%

3. Literal.

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B^C}) = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B^C})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B^C})} = \frac{\mathbf{0.4131}}{\mathbf{0.82}} = \mathbf{0.5037}$$

$$\frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B^C})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})} = \mathbf{P}(\boldsymbol{A})\mathbf{P}(\ \boldsymbol{B^C} \setminus \boldsymbol{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\big(\mathbf{1} - \boldsymbol{P}(\mathbf{B} \setminus \boldsymbol{A})\big) = \\ (\mathbf{0.51})(\mathbf{1} - \mathbf{0.19}) = \mathbf{0.4131}$$

Probabilidad de ser mujer si no se tiene azúcar es de 41.31%

5.4. Ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: Un analista de bolsa, antiguo miembro de la Compañía Bolsa de Valores, verifica la proforma de las acciones de un gran número de compañías. Encuentra que el 25 % experimentó un crecimiento superior a la media, el 25 % inferior y el 50 % restante se mantuvieron alrededor de la media. Para la próxima campañía, califica el 40 % de los valores que crecieron por encima de la media como valores recomendados, al igual que un 20 % de los que crecieron alrededor de la media y un 10 % de los que tuvieron un crecimiento inferior.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un valor sea recomendado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un valor clasificado como recomendado por el analista haya crecido por encima de la media del mercado?

Ejercicio 2: En la sala de medicina general del Hospital Universitario, el 60% de los pacientes son niñas. De los niños el 35% son menores de 24 meses. El 20% de las niñas tienen menos de 24 meses. Un Doctor que ingresa a la sala selecciona un infante al azar.

a.) Determine el valor de la probabilidad de que sea menor de 24 meses.
Si el infante resulta ser menor de 24 meses. Determine la probabilidad que sea una niña.

Solución:
Se definen los sucesos:
Suceso X: seleccionar una niña.
Suceso Y: seleccionar un niño.
Suceso Z: infante menor de 24 meses.

Ejercicio 3: Un Analista en sistemas dispone de tres impresoras para realizar impresiones. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35% el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error en la impresión de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un usuario busca su trabajo impreso y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato.

Solución:
Se definen los sucesos:
Suceso A: seleccionar el primer aparato.
Suceso B: seleccionar el segundo aparato.
Suceso C: seleccionar el tercer aparato.
Suceso D: seleccionar un resultado con error.

Se puede observar que la pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un documento mal impreso sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de Bayes. Claro está, que es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

Ejercicio 4: Dos cajas contienen memoria RAM DDR3 de 8 GB y memorias RAM DDR3 de 4GB. Suponga que la caja A contiene 60 memoria RAM DDR3 de 8 GB y 40 memorias RAM DDR3 de 4 GB. La caja B contiene 10 memoria RAM DDR3 de 8 GB y 20 memorias RAM DDR3 de 4 GB. Se extrae una memoria y resulta ser DDR3 de 8 GB. ¿Cuál es la probabilidad que se haya sacado de la caja B?

Ejercicio 5: Una fábrica de notebooks tiene dos líneas de producción. La línea 1 produce 6500 unidades diarias y la línea 2 produce 3500 por día. Por otra parte, la línea 1 tiene un 2% de producción defectuosa y la línea 2 solamente el 1% de partes defectuosas. Si se selecciona una notebook al azar y es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la línea 1?

Ejercicio 6: Supongamos que:

$A = \{Al\ evento\ en\ que\ una\ persona\ come\ 1000\ calorias\ o\ más\ por\ semana\}$
$B = \{Al\ evento\ en\ que\ una\ persona\ tenga\ obesidad.\}$
$C = \{Al\ evento\ en\ que\ una\ persona\ muera\ de\ infarto\ del\ corazón.\}$

Además, suponga que:
$P(A) = 0.01$
$P(B) = 0.25$
$P(C) = 0.20$

a) ¿Son los eventos $A\ y\ B$ mutuamente excluyentes? ¿Puede usted determinar $P(A \cap B)$?

b) ¿Son los eventos $B\ y\ C$ mutuamente excluyente? Encuentre la probabilidad de que una persona tenga obesidad.

c) Encuentre la probabilidad de que una persona muera de causas distintas al infarto del corazón.

Ejercicio 7: Un estudio de mercado que realizó la empresa Mc Donald a 800 personas reveló los siguientes hechos sobre la capacidad de recordar un anuncio en el periódico de un producto en particular y la adquisición de dicho producto. Digamos que T es el evento de la venta de la persona que recuerda la publicidad en el periódico y B el evento de adquirir o comprar el producto.

	Pudo recordar la publicidad del periódico	No pudo recordar la publicidad del periódico	Totales
Adquirió el producto	$160 \quad (0.2)$	$80 \quad (0.1)$	$240 \quad (0.3)$
No adquirió el producto	$240 \quad (0.3)$	$320 \quad (0.4)$	$560 \quad (0.7)$
Totales	$400 \quad (0.5)$	$400 \quad (0.5)$	800

a) Encuentre $P(PE), P(B), y\ P(PE|B)$

b) ¿Son $PE\ y\ B$ eventos mutuamente excluyentes?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que recuerde haber visto la publicación en el periódico haya adquirido el producto?

d) ¿Son $PE\ y\ B$ eventos independientes?

e) Comente sobre el valor de la publicidad en función con su relación a la adquisición del producto.

Ejercicio 8: En la empresa "Gráficos Nacionales S.A.", el 20% de los empleados con periodistas y el otro 20% son Ingenieros en Diseño gráfico. El 75% de los periodistas tienen el cargo del área de publicidad y el 50% de los Ingenieros de Diseño Gráfico también, mientras que los no periodistas y los no Ingenieros en Diseño gráfico solamente ocupa un puesto del área de publicidad. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado del área de publicidad elegido al azar sea periodista?

Ejercicio 9: La probabilidad de que haya un incendio en una empresa que dispone de alarma es de 0.1. La probabilidad de que suene este si se ha producido algún incendio es de 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incendio es 0.02.

En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incendio?

Ejercicio 10: Supongamos que A es un evento en el que una persona usa el medio de transporte de hacia y desde el trabajo sea en metrovía y B es un evento en que el medio de transporte de una persona hacia y desde el trabajo sea en carro propio.

Suponga que en la ciudad Guayaquil $P(A) = 0.45 \; y \; P(B) = 0.35$

a.) ¿Son los eventos $A \; y \; B$ mutuamente excluyentes? ¿Cuál es la probabilidad de que una persona utilice la metrovía o carro propio al ir y al regresar del trabajo?

b.) Encuentre la probabilidad de que el medio de transporte de una persona sea algún medio distinto a su carro propio.

Ejercicio 11: La prevalencia de infarto cardíaco para hipertensos es del 0,3% y para no hipertensos del 0,1%. Si la prevalencia de hipertensión en una cierta población es del 25% ¿Cuál es la prevalencia del infarto en esa población?

1) Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20% se realizan correcciones faciales, un 35% implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe además, que son de género masculino el 25% de los que se realizan correcciones faciales, 15% implantes mamarios y 40% otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar, determine:

a. Determine la probabilidad de que sea de género masculino
b. Si resulta que es de género masculino, determine la probabilidad que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios.

Ejercicio 12: Un Doctor dispone de tres equipos electrónicos para realizar eco-sonogramas. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35% el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un paciente busca el resultado de una ecografía y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato.

2) En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que, da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas; y da positiva en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

3) Una fábrica de piezas para aviones está organizada en tres secciones. La sección A fabrica el 30% de las piezas, la sección B el 35%, mientras que el resto se fabrican en la sección C. La probabilidad de encontrar una pieza defectuosa es del 0.01, 0.015 y 0.009 según se considere la sección A, B o C, respectivamente. a) Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar salga defectuosa de dicha fábrica. b) Si elegida una pieza al azar es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que sea de la sección B?

Bibliografía

Alvarado, A. A. (2013). *Probabilidad y Estadística*.

Canavos, G. C. (2013). Probabilidad y Estadística Aplicaciones y métodos.

GERT, M. (2012). Teoría de probabilidades y estadística matemática.

Martín-Pliego, F. y.-M. (2015). Fundamentos de Probabilidad.

P. Ibarrola, L. P. (2009). Teoría de la Probabilidad.

Render, S. &. (2012). Concepto de probabilidades y aplicaciones.

S., P. D., & Fernández., S. P. (2010). Cálculo de probabilidades: nociones básicas. La Coruña.

Santalo, L. (2013). Probabilidad e inferencia estadística. Organización de los estados Americanos: 3ª . edición.

Higgins, P. (2008). *Number Story: From Counting to Cryptography.* New York: Copernicus.

Webster, A. (2009). Estadística Aplicada a la Economía y los Negocios. Bogotá: 3era Edición.