Document for Range Accrual

Zhongbing Chen

March 2022

目录

1 简介

区间累计（Range Accrual）是一类目前较为常见的复杂衍生品，根据目前的 QuantDev-TimeSheet 统计来看，区间累计类产品占所有产品计数量大约 1.8%，占非线性产品计数量约为 7.8%，为占比相对较高的复杂衍生品。产品与其他衍生品相比有如下特殊构成要素：

- 区间 (区间数量，区间上下限)
- 观察日

区间累计类产品核心思想是在**观察日**内观察标的资产收盘价格在合约约定的哪一个**区间**内。假设某合约标的资产为 Shibor 3M，交易日为 2022/03/14，到期日为 2022/04/14，观察日自 2022/03/14 开始，直至合约到期结束。假设合约规定区间下界为 2.1，区间上界为 2.5，每日 Shibor 3M 的定盘利率若落入这个区间，则需要**累计**，设定盘利率落入该区间的累计观察日共有 n 天，总观察日有 N 天，假设合约规定落入该观察区间的收益率为 r，则其估值应为：

$$MV = \frac{n}{N} \times r \tag{1}$$

以上这类区间累计产品相对较为常见，落入某个特定观察区间内收益为 r，定盘利率落入某个观察区间外收益为 0。部分更加复杂的区间累计产品会有多个观察区间并且各个区间收益率不同。例如某合约标的资产为 Shibor 3M，交易日为 2022/03/14，到期日为 2022/04/14，观察日自 2022/03/14 开始，直至合约到期结束。假设合约规定区间 1 为 [2,2.5], 区间 2 为 (2.5,3], 并且规定定盘利率落入合约区间 1 收益率为 3%，定盘利率落入合约区间 2 收益率为 2%，此类产品估值的逻辑与以上产品相似，可设有 m 个估值区间，落入第一个估值区间的天数累计为 n_1 天,...第 m 个估值区间的天数累计为 n_m 天，设落入第一个区间的收益率为 r_1,...，第 m 个区间的收益率为 r_m，则该产品的估值为：

$$MV = \sum_{i=1}^{m}(\frac{n_i}{N} \times r_i) \tag{2}$$

2 估值要素

Range IR 估值要素主要为以下部分：

- 区间要素（区间上下限）
- 利率（用于折现以及计算远期利率）
- 交易日及到期日
- 波动率

Range IR 波动率使用的是 Caps and floors Volatility，可从 Market Data -> Rate -> Caps and floors volatilitys assignments 查询对应的 volatility surface，随后从 Murex 系统中 Market Data -> Rate -> Caps and floors volatilitys 查找对应波动率。该波动率由波动率曲面对期限与执行价格线性插值即可得到。

利率可根据交易页面中使用的折现利率及标的利率进入 Rate->Revaluation rate curves 进行查找对应使用的利率曲线进行线性插值即可。随后从交易日及到期日以及区间要素均可由交易页面获取。除此之外估值日之前的定盘利率在 Murex 系统中无法找到，可通过 trade query-> 输入 trade id-> 右键 Check Price-> 在交易页面找到 Open 按钮点击即可看到在估值日之前的定盘利率情况。

3 估值方法

3.1 Range IR 估值思路介绍

Range IR 产品的估值方法主要为拆解为多个数字期权 (数字期权内容将在下文简要介绍) 进行估值，每个观察日落入固定区间的收益率以及观察日总数等要素为合约事先预定，则估值中不确定性的因素主要来自于落入合约约定区间的观察日累计天数，即 n。该值等于每日定盘价格落入对应区间的概率乘以总观察日数量，则 Range IR 产品的估值可改写为以下式子：

$$MV = r \times \sum_{i=1}^{N} 1_{\text{index}(i) \in \text{ Range}} \times \frac{1}{N} \tag{3}$$

以上为式子1的改写，式子2的改写如下所示：

$$MV = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} 1_{\text{index}(j) \in \text{ Range}_i}}{N} \times r_i\right) \tag{4}$$

其中主要变量如下:

- Range 为合约所约定的区间范围，Range(i) 为第 i 个收益区间，只有在多个收益区间的情况下使用。
- $index(i)$ 为第 i 个观察日的定盘利率，$1_{\text{index }(i) \in \text{ Range}}$ 为指示函数，当第 i 个观察日的定盘利率落入区间范围内值为 1，落入区间之外值为 0。其期望值为 $E[1_{\text{index }(i)} \in \text{ Range}] = P[index(i) \in \text{R}ange]$。
- N 为观察日的总数。
- r 为一个观察日的定盘利率落入对应区间的收益，r_i 为落入第 i 个收益区间的收益率，仅在多个收益区间的情形下使用。

该估值问题即转化为求解每日定盘利率落入区间内的概率问题。

3.2 Digital Option（数字期权）及其估值方法简介

上文提到了 Range IR 产品可拆解为多个数字期权。此处对数字期权进行简单的介绍。数字期权的产品核心特征非常简单。普通看涨期权当标的资产价格超过执行价，收益为 S-K，收益的结果更加多样。数字看涨期权的收益相比普通期权只有两种结果，一种为超过执行价，则获得一个事先预定的固定金额，一种为低于执行价格，该合约最终价值为 0。该类期权的期望收益为 $e^{-rt} \times P[S > K] \times nominal$，其中 BSM 公式规定了，资产价格超过执行价格的概率

为 $P[S>K]=N(d_2)$，资产价格低于执行价格的概率为 $P[S<K]=N(d_1)$，故我们可用 $e^{-rt}\times N(d_2)$ 来求取数字期权的资产价格。同理，既然 $N(d_2)$ 能求取超过某区间的概率，即数字期权的估值，那么也可以用 $N(d_2)$ 在不同执行价格的组合来模拟 Range IR 的估值。

3.3 估值模型

Range IR 的估值为式 3，我们可以利用 2.2 中数字期权的估值方式构造 Range IR。落入某个特定区间 $[K_{left},K_{right}]$ 的概率等于

$$
\begin{aligned}
P[K_{left}<S<K_{left}] &= P(K_{left}<S<\infty)-P(K_{right}<S<\infty) \\
&= N(d_2(F_i,K_{left},\sigma,T_e))-N(d_2(F_i,K_{right},\sigma,T_e))
\end{aligned}
$$

其中，d_2 的计算方式与 BSM 计算方式不同，采用的是 Black Normal(实际上该模型学名应为 Bachelier Model，是利率衍生品定价较早的模型[1]) 的计算逻辑，其计算方式如下所示：

$$
d_2=\frac{F-K}{\sigma\sqrt{T_{\mathrm{e}}}} \tag{5}
$$

假设估值日在交易日之后，在估值日前已经有部分观察日定盘信息，故该部分为确定性结果，设 D_i 为估值日前落入合约规定的第 i 个区间的累计观察日数，则确定性部分的估值为 $\frac{D_i}{N}\times r_i$，另一部分为估值日及其之后未获得定盘利率信息进行对不确定性的估值，即估计 $\sum_{j=1}^{m}(N(d_2(F_j,K_i^{left},\sigma,T_e))-N(d_2(F_j,K_i^{right},\sigma,T_e)))$，将未来的不确定的每一个观察日都视为一个数字期权，加总其每天的概率即为未来不确定部分的估值。汇总以上部分即可得到 Range IR 的估值为：

$$
MV=DF(t,T)\times\frac{N}{Daycount}\times\sum_{i=1}^{m}\left(r_i\times\left(\frac{D_i}{N}+\sum_{j=1}^{N}(N(d_2(F_j,K_i^{left},\sigma,T_e))-N(d_2(F_j,K_i^{right},\sigma,T_e)))\right)\right)
$$

其中，远期利率 F_j 的计算公式为以下公式

$$
F\left(t,t_j,t_{j+1}\right)=\frac{1}{t_{j+1}-t_j}\times\left(\frac{DF\left(t,t_j\right)}{DF\left(t,t_{j+1}\right)}-1\right) \tag{6}
$$

其中，$DF(t,T)$ 为折现因子，r_i 为第 i 个区间上的收益率，D_i 为第 i 个区间的累计天数，N 为总观察天数，K_i^{left} 与 K_i^{right} 分别为第 i 个区间的上界与下界,Daycount 为计息天数，取值有 360 与 365 两种方式。

[1]详情可见：https://arxiv.org/pdf/2104.08686.pdf