关于若尔当曲线定理的一个证明

日期：2021 年 11 月 1 日

摘　要

本文为作者对若尔当定理（Jordan Curve Theorem）证明方法[1]的学习记录。下文中的证明思路为：利用若尔当多边形，首先证明若尔当曲线定理在多边形的情况下成立，再考虑极限情况进行推广，使其逼近若尔当曲线，完成对若尔当曲线定理的证明。

关键词： 若尔当曲线定理, Tverberg

Abstract

This paper is a record of the author's study of the method of proving the Jordan Curve Theorem. In the following paper, the proof is based on the following idea: using Jordan polygons, we first prove that the Jordan Curve Theorem holds in the case of polygons, and then consider the limit case to generalize it to approximate the Jordan curve, and complete the proof of the Jordan Curve Theorem.

Key Words: Jordan Curve Theorem, Tverberg

1　定义与约定

定义 1.1. 若尔当曲线： 凡无重点的连续曲线，称为**若尔当曲线**；若该连续曲线的起点 $z(\alpha)$ 与终点 $z(\beta)$ 相等，则称为**若尔当闭曲线**。

定义 1.2. 若尔当曲线定理 (Jordan Curve Theorem)： 令曲线 Γ 为平面 R^2 上的一条若尔当闭曲线，则 $R^2 \setminus \Gamma$ 二连通。

定义 1.3. 若尔当多边形： 如果一条若尔当闭曲线 Γ（不自交）所围成的区域为多边形 C，且 C 可由有限条首尾相接的弧完全包围，且每条弧的形式为 $\gamma(\cos t, \sin t) = (\lambda t + \mu, \rho t + \sigma)$，其中 $\lambda, \mu, \rho, \sigma$ 为常数，就称 Γ 为**若尔当多边形**。

定义 1.4. $d(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\}$

[1]Tverberg, H. (1980) A Proof of the Jordan Curve Theorem.

2 引理

引理 2.1. 对于任意的若尔当多边形 Γ，若尔当曲线定理均成立。

证明. 令 Γ 上的弧为 $E_1, E_2, \ldots, E_n$，顶点为 $v_1, v_2, \ldots, v_n$，满足

$$E_i \cap E_{i+1} = \{v_i\}, i = 1, 2, \ldots, n (E_{n+1} = E_1, v_{n+1} = v_1)$$

(1) $R^2 \setminus \Gamma$ **至多**有两个连通分量。

考虑集合 $N_i = \{q : d(q, E_i) < \delta\}, \delta = \min\{d(E_i, E_j) : 1 < j - i < n - 1\}$，显然有 $N_i \cap \Gamma \subset E_{i-1} \cup E_i \cup E_{i+1} (E_0 = E_n)$ 并且 $N_i \setminus \Gamma$ 由两个连通分量 $N_i^{'}, N_i^{''}$ 组成，其中我们假设

$$N_i^{'} \cap N_{i+1}^{'} \neq \emptyset, N_i^{''} \cap N_{i+1}^{''} \neq \emptyset, i = 1, 2, \ldots, n$$

那么，$\bigcup_{i=1}^{n} N_i^{'}$ 与 $\bigcup_{i=1}^{n} N_i^{''}$ 都是连通集，并且对于任意的 $p \in R^2 \setminus \Gamma$ 都存在一条曲线将其连接到上述二者中的某一个集合。

(2) $R^2 \setminus \Gamma$ **至少**有两个连通分量。

将 $R^2 \setminus \Gamma$ 中的点按如下方式分成两类(奇数点和偶数点): 假设坐标系已经选定, 且 $v_i = (x_i, y_i)$ 中的 x_i 互不相同。对于任意 $p = \big(x(p), y(p)\big) \in R^2 \setminus \Gamma$，令 $m(p)$ 表示从 p 出发垂直 x 轴向上的射线与 Γ 的交点数，特别的当 $x(p) = x_i$ 且 v_{i-1}, v_{i+1} 在 p 的同侧，顶点 v_i 不被统计。如果 $m(p)$ 为奇数则称 p 为奇数点，反之称为偶数点。

对于任意的 p 都存在 $\epsilon > 0$，只要 $d(p, q) < \epsilon$ 都有 p, q 点类型相同。这是因为，

- 当 $x(p) \neq x_i$ 或者 $x(p) = x_i, y(p) < y_i$ 时，显然有 $mp(p) = mp(q)$
- 当 $(x_n - x_1)(x_2 - x_1) < 0$ 时，按照定义，也有 $mp(p) = mp(q)$
- 当 $(x_n - x_1)(x_2 - x_1) > 0$, 则靠近 x_n, x_2 的有 $mp(q) = mp(p) + 2$, 剩余部分有 $mp(p) = mp(q)$

上述结论说明在 p 的充分小的领域内的点与之同类型。那么，如果 $\Pi : [0, 1] \to R^2 \setminus \Gamma$ 是一条连续路径，同时 $\Pi(0)$ 为奇数点，$\Pi(1)$ 为偶数点。令

$$t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : \Pi(t) \text{is even}\}$$

则有，对于 $\epsilon > 0$，有 $t_0 < t < \epsilon + t_0$ 上 $\Pi(t)$ 为偶数点，同时 $t_0 - \epsilon < t < t_0$ 上 $\Pi(t)$ 为奇数点，由之前的结论有 $\Pi(t_0)$ 同时为奇数点和偶数点，显然矛盾。由此得到，$R^2 \setminus \Gamma$ 存在至少两个连通分量。

□

引理 2.2. 任意若尔当闭曲线 Γ 都能被若尔当多边形 Γ' 任意地逼近。

证明. 首先转换一下，即证

$$\forall \epsilon > 0, \exists \Gamma', \text{s.t.} \ |\gamma(\cos\theta, \sin\theta) - \gamma'(\cos\theta, \sin\theta)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall (\cos\theta, \sin\theta) \in C$$

由于其一致连续性，我们令 $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ 分别有

- $|p - q| \leq \epsilon_1 \Rightarrow |\gamma(p) - \gamma(q)| < \frac{\epsilon}{2}$
- $|\gamma(p) - \gamma(q)| \leq \epsilon_2 \Rightarrow |p - q| < \min(\epsilon_1, \sqrt{3})$

令 $\delta = \min(\frac{\epsilon}{2}, \epsilon_2)$，现在 Γ 只包含有限个如下的正方形:

$$\{(x, y) : |x - k\frac{\delta}{\sqrt{2}}| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{2}}, |y - l\frac{\delta}{\sqrt{2}}| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{2}}, k, l \in Z\}$$

将它们编号为 $S_1, S_2, \ldots, S_n$。由于 $\delta \le \epsilon_2$，每一个集合 $\gamma^{-1}(S_i)$ 的直径要小于 $\sqrt{3}$，同时存在一个最小圆弧 A_i 其弧度小于 $\frac{2\pi}{3}$。

下面通过有限步构造 Γ'。首先将 $\Gamma_0 = \Gamma$ 变成另一个若尔当曲线 Γ_1。令 A_1 包含 $\gamma_0^{-1}(S_1)$。可以知道，$\gamma_1 = \gamma_0$ 在 A_1 之外，且对于 $(\cos\theta, \sin\theta) \in A_1, \gamma_1(\cos\theta, \sin\theta) = (a_1\theta + b_1, c_1\theta + d_1)$，其中 a_1, b_1, c_1, d_1 确定。那么对于 $i \ge 2, \gamma_1^{-1}(S_i) \subseteq \gamma_0^{-1}(S_i)$，因此其直径小于 $\sqrt{3}$；甚至可以为空集。

通过 n 步，Γ_n 即为所要的若尔当曲线。此时，对于任意满足 $\gamma_n(a) \neq \gamma(a)$ 的 a，都存在 i 使得 $\gamma_n(a) = \gamma_i(a) \neq \gamma_{i-1}(a)$。令 A_i 的端点为 b, c，有 $\gamma_i(b) = \gamma(b), \gamma_i(c) = \gamma(c)$，有

$$\begin{aligned}|\gamma(a) - \gamma_n(a)| &= |\gamma(a) - \gamma(b) + \gamma_i(b) - \gamma_i(a)| \\ &\le |\gamma(a) - \gamma(b)| + \delta \\ &\le |\gamma(a) - \gamma(a)| + \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

由于 $|a - b| < |c - b| \le \epsilon_1, |\gamma(b) - \gamma(c)| \le \delta\epsilon_2$，我们有 $|\gamma(a) - \gamma(b)| < \frac{\epsilon}{2}$，且 $|\gamma(a) - \gamma_n(a)| \le \epsilon$。

□

引理 2.3. *令 Γ 为若尔当多边形，那么在 $R^2 \setminus \Gamma$ 的有界分量内存在一个圆盘 D(disc)，圆上两点 $\gamma(a), \gamma(b)$ 有 $|a - b| \ge \sqrt{3}$。*

证明. 假设 $|a - b| < \sqrt{3}$，那么 a, b 为弧度大于 $\frac{3\pi}{4}$ 的弧 A 的端点。由于 $\forall c \in A \setminus \{a, b\}, \max\{|a - c|, |b - c|\}$，$D$ 的边界圆不能与 $\gamma(A) \setminus \{\gamma(a), \gamma(b)\}$ 相交。令 $\gamma(v_i), i = 1, 2, \ldots, n$ 为 Γ 在 $\gamma(A)$ 上的顶点。

如果 $v_1 \neq a, v_n \neq b$，那么一个切于线段 $\gamma(a)\gamma(v_1), \gamma(b)\gamma(v_n)$ 的圆，其上两点 $\gamma(a'), \gamma(b')$ 与 Γ 相交，$|a' - b'| > |a - b|$ 与 $|a - b|$ 最大矛盾。

如果 $v_1 \neq a, v_n = b$，则圆依旧靠近 $\gamma(a)$，且经过 $\gamma(b)$，矛盾依旧；如果 $v_1 = a, v_n = b$，考虑一个过 $\gamma(a), \gamma(b)$ 的动圆，其中心从 D 的中心开始移动，由引理 2.1，最终它将切于 $\gamma(a)$ 之外的点 $(\gamma(a)\gamma(v_2), \gamma(b)\gamma(v_{n-1}))$，矛盾依然存在。

反之，结论成立。 □

Γ 为若尔当多边形，令 a, b 属于 $R^2 \setminus \Gamma$ 的一个连通分量 X，那么 X 中的一条不过端点的弦 S 使得，$X \setminus S$ 由两个连通分量组成（引理 2.1）。令 Γ 距离 $\{a, b\}$ 至少 1，假设对于每一条长度大于 2 的 S 都有 a, b 属于 $X \setminus S$ 的同一个连通分量。

引理 2.4. *在上面的假设下，存在一条从 a 到 b 的连续路径 Π 使得 $d(\Pi, \Gamma) \ge 1$。*

证明. a' 为 R^2 上任意一点，通过一条连续路径 Π' 连接 a' 和 a，$d(\Pi', \Gamma)$；S 为任意一条长度大于 2 的弦，Π' 不经过 S。于是 a' 和 a 处在 $X \setminus S$ 的同一个连通分量上，因此 a' 和 b 也在同一连通分量上。

假设 $d(a, \Gamma) = d(b, \Gamma) = 1$。选择 $\gamma(u_a), \gamma(u_b) \in \Gamma$，令一个**单位动圆** D 初始时中心 c 在 a 上，沿着 Γ 从 $\gamma(u_a)$ 开始移动，直至 c 落在 b 上。这条有向路径 Π 将由 c 产生。下证这条路径的存在性。

(1) D 可以到达 $\gamma(u_b)$。如果不能，那么一定在某处，D 和 Γ 存在一条公共弦 $S = \gamma(u_1)\gamma(u_2)$，其长度小于 2。令 $X \setminus S$ 的两个连通分量为 Y, Z。由假设可知，a, b 在同一连通分量中，不妨令为

Y, 则 a' 也在其中。由于 D 无法到达 $\gamma(u_b)$，则 $\gamma(u_b)$ 在 Z 的边界，即 Γ 之上，且在 $\gamma(u_1), \gamma(u_2)$ 之间。

考虑以 b 为圆心的单位圆 E，则 E 交 Γ 于 $\gamma(u_b)$，考虑从 b 到 $\gamma(u_b)$ 的半径，由于端点在 S 的异侧，则该半径与 S 有交点。由于 $E \in X, E \neq D$，则 $\gamma(u_1), \gamma(u_2)$ 均不在 E 上，那么 E 交 S 于两点。此时可知 b, c 在 S 同侧，且 $d(b,S) > d(c,S)$，那么 $\gamma(u_b)$ 一定落在 D 上或 D 内部，这与假设矛盾。则 D 可以到达 $\gamma(u_b)$。

(2) c 可以到达 b。上述过程已经证明了 D 能够到达 $\gamma(u_b)$，下面说明此时有 $c = b$。如果 $\gamma(u_b)$ 不是 Γ 的顶点，那么结论显然成立；反之，将存在一条长度小于 2 的弦 $S = \gamma(u_b)y$，使得 b, c 不在 $X \setminus S$ 的同一连通分量中，这与已知矛盾，故不可能发生。

□

3 证明若尔当曲线定理

证明. (1) $R^2 \setminus \Gamma$ 至少有两个连通分量。

首先，显然 $R^2 \setminus \Gamma$ 存在一个无界连同分量。下证有界连同分量的存在性。在 Γ 附近取一个圆 C_0，令 $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ 为一个若尔当多边形的序列，其收敛于 Γ。根据引理 2.3 有，对于每个 Γ_n 都有过 $\gamma_n(a_n), \gamma_n(b_n)$ 的圆 C_n，满足 $a_n - b_n \geq \sqrt{3}$, 令其中心为 z_n。我们假设所有的 Γ_n 都在 C_0 内，当 $n \to \infty, z_n \to z$。

选取 $\epsilon > 0$，满足 $|a-b| \geq \sqrt{3} \Rightarrow |\gamma(a) - \gamma(b)| \geq \epsilon$。那么，$|\gamma(a_n) - \gamma(b_n)| \geq \epsilon$，且当 n 更大时有 $|\gamma_n(a_n) - \gamma_n(b_n)| > \frac{\epsilon}{2}$。因此 C_n 的直径大于 $\frac{\epsilon}{2}$，$d(z_n, \Gamma_n) > \frac{\epsilon}{4}$，由此可知当 n 足够大时 z_n, z 处在 $R^2 \setminus \Gamma_n$ 的同一个连通分量。

如果 z 在 $R^2 \setminus \Gamma$ 的无界连同分量中，那么存在一条连续路径 $\Pi \in R^2 \setminus \Gamma$ 连接 z 与 C_0。令 $d(\Pi, \Gamma) = \delta$，对于充分大的 n，有 $|\gamma_n - \gamma| < \frac{\delta}{2}, d(\Pi, \Gamma_n) > \frac{\delta}{2}$，则 z_n 也属于 $R^2 \setminus \Gamma_n$ 的无界连通分量中，与假设矛盾。

(2) $R^2 \setminus \Gamma$ 至多有两个连通分量。

假设 p, q, r 来自 $R^2 \setminus \Gamma$ 的不同连通分量，且有 $d(\Gamma, \{p,q,r\}) = \epsilon$。同上令有 $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ 收敛于 Γ，那么 $d(\Gamma_n, \{p,q,r\}) \geq \frac{\epsilon}{2}$，对于充分大的 n 其中两点将一定会处于 $R^2 \setminus \Gamma_n$ 的一个连通分量 X_n，不妨令这两点为 p, q。

假设存在 $\delta \in (0, \epsilon)$ 和无穷多个的 n, 使得 p, q 被一条连续路径 Π_n 连通, 其中 $d(\Pi_n, \Gamma_n) \geq \delta$。对于这样的 n 有，$d(\Gamma, \Pi_n) > \frac{\delta}{2}$，那么 p, q 将处于 $R^2 \setminus \Gamma$ 的同一个连通分量。这说明 p, q 被一条不经过 Γ 的路径连接，因此不存在这样的 δ。

根据引理 2.4，δ 的不存在，产生了一个弦序列 $S_1, S_2, \ldots$, 和一个递增序列 $n(1), n(2), \ldots$ 满足：

1. p, q 在 $X_{n(i) \setminus S_i}$ 的不同的连通分量中。
2. $i \to \infty, \gamma_{n(i)}(a_i) - \gamma_{n(i)}(b_i) \to 0$，其中的 $\gamma_{n(i)}(a_i), \gamma_{n(i)}$ 为 S_i 的端点。

现在, 由于 $i \to \infty, \gamma(a_i) - \gamma(b_i) \to 0$, 得到 $a - b \to 0$。设对于无穷多个 i, p 属于 $X_{n(i)} \setminus S_i$ 的一个以 S_i 和 $\gamma_{n(i)}(A_i)$ 为边界的连通分量, 其中 A_i 为 C 上以 a_i, b_i 为端点的小弧。由于 $a_i - b_i \to 0$, $\gamma_{n(i)}(A_i)$ 的直径也趋向 0，因此对于无穷大的 i，p 所属的连通分量的直径小于 ϵ。

特别的，我们得到 $|p-\gamma(a_i)|<\epsilon$，这与 $d(\Gamma,\{p,q,r\})>\epsilon$ 矛盾。因此，至多有两个连通分量。

□

4 参考

1. Tverberg, H. (1980) A Proof of the Jordan Curve Theorem. Bulletin of the London Mathematical Society, 12, 34-38. https://doi.org/10.1112/blms/12.1.34
2. Xing Zhang. (2019) A Proof of the Jordan Curve Theorem. Natural Science, 2019, Vol. 11, (No. 12), pp: 345-360
3. H. Tverberg, 张南岳. Jordan 曲线定理的一个证明 [J]. 数学通报,1982(12):33-35.

5 感谢

1. 来自ElegantLaTeX Program的 LaTeX 模板支持。