

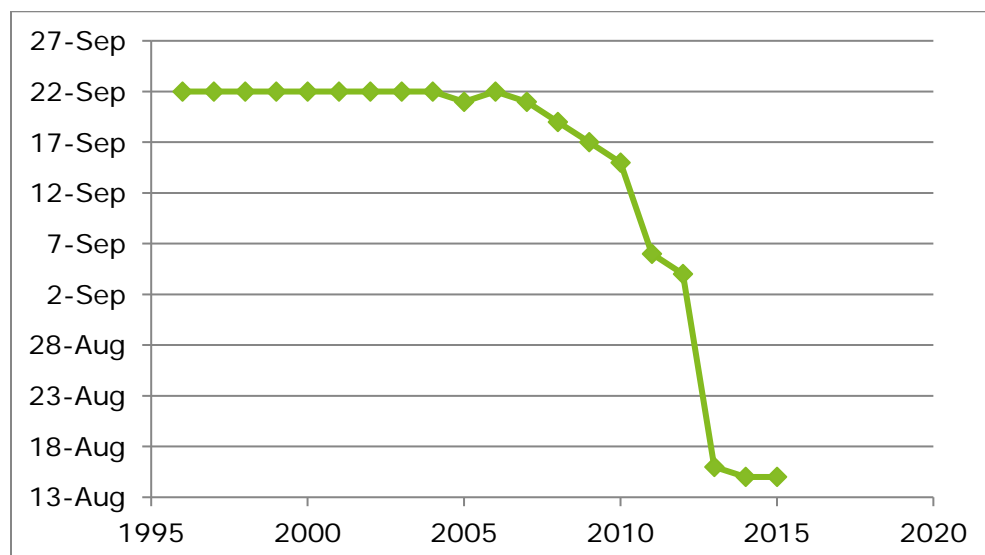
Time Series Data – Change Detection Using CUSUM

Kent Ng

For this question, μ (for each year) was set to be the average of the seasonality coefficients from July 1st to July 31st. This is appropriate because, by definition, μ should be the expected value if no change occurred; from research and experience, we know that Atlanta's summer never ends before September. Next, I played around with various C and T values to determine the best parameters for our model. "Best" here refers to a model that identifies the "last day of summer" for each year being relatively in the same time period as the other years, and also a model that isn't too sensitive that it identifies random fluctuation in the seasonality coefficient values as a change (noise). In the end, C value of 0.05 and T value of 0.4 appeared to produce the best change detection model; using such values, the end of summer for each year is as follows:

Year	Last day of Summer
1997	22-Sep
1998	22-Sep
1999	22-Sep
2000	22-Sep
2001	22-Sep
2002	22-Sep
2003	22-Sep
2004	22-Sep
2005	21-Sep
2006	22-Sep
2007	21-Sep
2008	19-Sep
2009	17-Sep
2010	15-Sep
2011	6-Sep
2012	4-Sep
2013	16-Aug
2014	15-Aug
2015	15-Aug

We can plot these points to give us a better idea of the overall trend. Based on the graph below, we can confidently determine that the unofficial end of summer has **NOT** gotten later over the 20 years. If anything, summers are ending earlier, demonstrated in the graph below.



For all the calculated S_t values for each day (per year), see the two charts below.

DAY	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
1-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7-Jul	-	0.099	0.099	0.072	0.074	0.052	0.031	0.023	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-Jul	-	0.051	0.051	0.043	0.058	0.06	0.036	0.032	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-Jul	-	0.039	0.039	0.033	0.049	0.048	0.022	0.022	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10-Jul	-	0	0	0.005	0.026	0.02	0.008	0.009	0.003	0	0.021	0.011	0.007	0.004	0	0.006	0	0	0	0
11-Jul	-	0	0	0	0.028	0.023	0.003	0.021	0.018	0.009	0.022	0	0.002	0	0	0	0	0	0.016	0.014
12-Jul	-	0	0	0	0.019	0.024	0.002	0.046	0.039	0.029	0.029	0	0	0	0	0	0	0.01	0.013	0.002
13-Jul	-	0	0	0	0.008	0.023	0.01	0.051	0.045	0.034	0.036	0.006	0.007	0.022	0.027	0.02	0.01	0.011	0.036	0.018
14-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0.011	0.025	0.019	0.018	0	0.006	0.022	0.022	0.021	0.029	0.026	0.04	0.021
15-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.005	0.02	0.02	0.016	0.059	0.055	0.06	0.047
16-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.004	0.051	0.051	0.058	0.06
17-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.024	0.029	0.032	0.037
18-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.014	0.029
19-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0.006	0	0.009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30-Jul	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31-Jul	-	0.137	0.136	0.108	0.07	0.046	0.026	0.005	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.005	0
1-Aug	-	0.177	0.176	0.16	0.126	0.097	0.077	0.038	0.031	0.015	0.005	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2-Aug	-	0.168	0.167	0.179	0.162	0.149	0.128	0.088	0.079	0.057	0.026	0.015	0.008	0	0.003	0.026	0.008	0	0	0
3-Aug	-	0.11	0.108	0.14	0.157	0.152	0.142	0.111	0.109	0.086	0.045	0.029	0.015	0.006	0	0.01	0	0	0	0
4-Aug	-	0.04	0.038	0.077	0.111	0.108	0.108	0.093	0.109	0.093	0.045	0.03	0.011	0.005	0	0	0.014	0.031	0.02	0.004
5-Aug	-	0	0	0.012	0.05	0.044	0.047	0.041	0.068	0.066	0.029	0.024	0.009	0.002	0	0	0	0.021	0.02	0.004
6-Aug	-	0	0	0	0.023	0.01	0.019	6E-04	0.037	0.055	0.023	0.038	0.016	0.004	0.009	0.008	0.008	0.038	0.037	0.01
7-Aug	-	0	0	0	0.012	0	0	0	0.027	0.056	0.039	0.04	0.02	0.017	0.018	0.024	0.023	0.062	0.065	0.026
8-Aug	-	0.046	0.045	0.044	0.045	0.023	0.008	0.011	0.033	0.062	0.044	0.046	0.022	0.034	0.032	0.036	0.035	0.06	0.08	0.05
9-Aug	-	0.177	0.176	0.168	0.155	0.105	0.076	0.071	0.079	0.095	0.062	0.065	0.032	0.052	0.047	0.05	0.056	0.085	0.092	0.068
10-Aug	-	0.225	0.223	0.221	0.222	0.172	0.139	0.129	0.132	0.165	0.124	0.118	0.076	0.092	0.083	0.083	0.08	0.114	0.114	0.098
11-Aug	-	0.201	0.199	0.215	0.221	0.202	0.18	0.172	0.185	0.207	0.158	0.174	0.135	0.141	0.125	0.122	0.118	0.158	0.153	0.144
12-Aug	-	0.154	0.151	0.192	0.201	0.199	0.19	0.186	0.218	0.246	0.192	0.228	0.214	0.23	0.225	0.21	0.195	0.224	0.214	0.191
13-Aug	-	0.108	0.105	0.152	0.169	0.178	0.191	0.191	0.22	0.266	0.218	0.273	0.25	0.28	0.279	0.269	0.257	0.28	0.273	0.255
14-Aug	-	0.073	0.07	0.135	0.15	0.16	0.166	0.181	0.208	0.251	0.201	0.259	0.249	0.286	0.297	0.316	0.31	0.341	0.351	0.328
15-Aug	-	0.023	0.021	0.093	0.125	0.126	0.141	0.165	0.192	0.235	0.18	0.244	0.233	0.27	0.292	0.326	0.347	0.394	0.441	0.408
16-Aug	-	0	0	0.008	0.058	0.058	0.068	0.102	0.152	0.195	0.15	0.212	0.208	0.25	0.283	0.326	0.356	0.402	0.494	0.464
17-Aug	-	0	0	0	0	0	0	0.024	0.079	0.125	0.087	0.164	0.168	0.219	0.263	0.31	0.343	0.405	0.522	0.495
18-Aug	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0.046	0.012	0.095	0.117	0.172	0.222	0.272	0.307	0.383	0.481	0.471
19-Aug	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.025	0.06	0.109	0.16	0.22	0.256	0.35	0.43	0.437
20-Aug	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.045	0.104	0.166	0.21	0.312	0.382	0.387
21-Aug	-	0.019	0.019	0.004	0	0.019	0.005	0	0	0	0	0	0	0.016	0.071	0.13	0.173	0.267	0.336	0.332
22-Aug	-	0.073	0.074	0.041	0.03	0.053	0.027	0.021	0.015	0.009	0.002	0.004	0	0.007	0.065	0.118	0.147	0.248	0.303	0.289
23-Aug	-	0.102	0.103	0.071	0.062	0.083	0.058	0.042	0.031	0.023	0.025	0.028	0.026	0.039	0.102	0.146	0.177	0.261	0.3	0.277
24-Aug	-	0.118	0.119	0.09	0.111	0.119	0.082	0.07	0.06	0.041	0.051	0.064	0.069	0.068	0.122	0.176	0.206	0.29	0.336	0.313
25-Aug	-	0.11	0.11	0.085	0.119	0.132	0.102	0.099	0.093	0.082	0.092	0.102	0.112	0.121	0.165	0.222	0.244	0.332	0.384	0.368
26-Aug	-	0.064	0.065	0.049	0.078	0.109	0.088	0.104	0.104	0.092	0.107	0.117	0.14	0.143	0.184	0.246	0.263	0.345	0.407	0.394
27-Aug	-	0	0	0	0.021	0.064	0.052	0.092	0.098	0.084	0.099	0.115	0.157	0.17	0.227	0.29	0.311	0.386	0.437	0.419
28-Aug	-	0	0	0	0	0	0.017	0.074	0.082	0.065	0.082	0.098	0.153	0.159	0.255	0.329	0.353	0.454	0.487	0.456
29-Aug	-	0	0	0	0	0	0	0.008	0.035	0.032	0.055	0.075	0.135	0.135	0.219	0.321	0.363	0.467	0.502	0.47
30-Aug	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.018	0.048	0.111	0.111	0.212	0.317	0.373	0.497	0.541	0.514
31-Aug	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.04	0.11	0.109	0.212	0.309	0.368	0.48	0.533	0.515

1-Sep	-	0.053	0.035	0.031	0.012	0.023	0.015	0	0	0	0	0.023	0.103	0.122	0.248	0.334	0.381	0.483	0.535	0.516
2-Sep	-	0.19	0.143	0.132	0.088	0.086	0.079	0.047	0.041	0.039	0.02	0.033	0.116	0.129	0.246	0.335	0.381	0.488	0.557	0.533
3-Sep	-	0.158	0.133	0.167	0.145	0.14	0.142	0.093	0.085	0.08	0.055	0.065	0.133	0.15	0.258	0.345	0.393	0.511	0.568	0.54
4-Sep	-	0.162	0.167	0.18	0.151	0.144	0.139	0.085	0.089	0.089	0.072	0.079	0.139	0.156	0.255	0.365	0.45	0.586	0.632	0.615
5-Sep	-	0.13	0.155	0.17	0.137	0.15	0.12	0.073	0.092	0.09	0.089	0.108	0.168	0.173	0.268	0.383	0.491	0.617	0.67	0.646
6-Sep	-	0.072	0.109	0.138	0.11	0.181	0.142	0.096	0.145	0.139	0.133	0.148	0.217	0.217	0.301	0.404	0.529	0.655	0.711	0.679
7-Sep	-	0.013	0.043	0.082	0.075	0.173	0.141	0.108	0.168	0.155	0.149	0.183	0.255	0.252	0.336	0.434	0.583	0.69	0.751	0.718
8-Sep	-	0	0	0.024	0.026	0.109	0.096	0.083	0.139	0.173	0.16	0.196	0.27	0.269	0.352	0.448	0.599	0.719	0.776	0.761
9-Sep	-	0	0	0	0.028	0.082	0.069	0.051	0.106	0.129	0.123	0.172	0.254	0.267	0.361	0.462	0.593	0.738	0.799	0.791
10-Sep	-	0	0	9E-04	0.011	0.054	0.033	0.007	0.075	0.093	0.093	0.142	0.229	0.253	0.367	0.467	0.586	0.739	0.81	0.802
11-Sep	-	0	0	0	0	0.021	0.004	0	0.044	0.061	0.062	0.115	0.204	0.244	0.38	0.476	0.585	0.745	0.819	0.802
12-Sep	-	0	0	0	0	0	0	0	0.019	0.043	0.035	0.096	0.193	0.227	0.358	0.478	0.584	0.754	0.827	0.802
13-Sep	-	0.07	0.042	0.014	0.006	0	0	0.031	0.032	0.057	0.034	0.128	0.222	0.249	0.373	0.504	0.6	0.771	0.852	0.834
14-Sep	-	0.128	0.092	0.058	0.041	0.027	0.014	0.049	0.053	0.077	0.046	0.124	0.236	0.259	0.379	0.506	0.597	0.77	0.871	0.879
15-Sep	-	0.102	0.079	0.059	0.043	0.049	0.057	0.058	0.066	0.109	0.065	0.131	0.246	0.294	0.416	0.537	0.635	0.792	0.893	0.904
16-Sep	-	0.124	0.096	0.075	0.078	0.099	0.109	0.104	0.111	0.149	0.105	0.161	0.29	0.339	0.453	0.578	0.716	0.863	0.943	0.935
17-Sep	-	0.146	0.111	0.094	0.105	0.141	0.143	0.146	0.155	0.179	0.141	0.191	0.321	0.406	0.538	0.643	0.774	0.93	1.029	1.007
18-Sep	-	0.216	0.172	0.162	0.165	0.2	0.196	0.211	0.218	0.236	0.189	0.236	0.362	0.424	0.555	0.673	0.815	0.992	1.103	1.08
19-Sep	-	0.272	0.222	0.224	0.234	0.24	0.236	0.263	0.266	0.287	0.233	0.296	0.411	0.466	0.61	0.729	0.871	1.049	1.152	1.136
20-Sep	-	0.328	0.267	0.272	0.32	0.306	0.292	0.307	0.304	0.344	0.285	0.371	0.483	0.537	0.662	0.775	0.907	1.097	1.194	1.186
21-Sep	-	0.396	0.341	0.343	0.373	0.384	0.359	0.374	0.378	0.413	0.349	0.437	0.558	0.622	0.744	0.852	0.966	1.142	1.275	1.251
22-Sep	-	0.427	0.433	0.42	0.462	0.486	0.451	0.478	0.497	0.509	0.446	0.512	0.616	0.666	0.784	0.908	1.036	1.201	1.322	1.312
23-Sep	-	0.42	0.432	0.445	0.496	0.516	0.491	0.523	0.546	0.554	0.5	0.558	0.671	0.723	0.839	0.97	1.095	1.276	1.39	1.394
24-Sep	-	0.413	0.422	0.458	0.507	0.524	0.561	0.614	0.634	0.638	0.576	0.633	0.73	0.793	0.903	1.043	1.169	1.361	1.501	1.499
25-Sep	-	0.37	0.436	0.474	0.516	0.538	0.61	0.689	0.708	0.716	0.658	0.738	0.829	0.879	0.979	1.111	1.225	1.417	1.588	1.591
26-Sep	-	0.364	0.431	0.472	0.513	0.582	0.643	0.72	0.75	0.772	0.741	0.823	0.924	0.976	1.077	1.243	1.345	1.517	1.662	1.677
27-Sep	-	0.42	0.493	0.517	0.56	0.628	0.677	0.754	0.789	0.838	0.792	0.881	0.99	1.058	1.175	1.344	1.454	1.619	1.752	1.758
28-Sep	-	0.525	0.579	0.61	0.64	0.691	0.725	0.79	0.853	0.891	0.844	0.931	1.047	1.102	1.227	1.423	1.554	1.724	1.858	1.868
29-Sep	-	0.667	0.684	0.728	0.757	0.801	0.837	0.902	0.981	1.003	0.943	1.05	1.165	1.203	1.35	1.535	1.657	1.834	1.971	1.99
30-Sep	-	0.906	0.874	0.909	0.941	0.964	0.991	1.035	1.103	1.116	1.057	1.157	1.28	1.314	1.462	1.654	1.787	1.994	2.121	2.103
1-Oct	-	1.119	1.098	1.103	1.129	1.14	1.152	1.181	1.242	1.244	1.179	1.257	1.383	1.449	1.589	1.776	1.949	2.154	2.267	2.232
2-Oct	-	1.258	1.264	1.289	1.311	1.315	1.311	1.331	1.401	1.396	1.318	1.391	1.508	1.583	1.724	1.91	2.09	2.309	2.418	2.379
3-Oct	-	1.251	1.297	1.367	1.391	1.408	1.413	1.444	1.533	1.536	1.46	1.529	1.655	1.716	1.856	2.071	2.231	2.451	2.564	2.539
4-Oct	-	1.415	1.435	1.491	1.539	1.55	1.551	1.585	1.649	1.656	1.58	1.649	1.776	1.831	1.98	2.213	2.359	2.565	2.678	2.704
5-Oct	-	1.627	1.622	1.666	1.709	1.712	1.71	1.731	1.784	1.792	1.721	1.783	1.906	1.958	2.144	2.37	2.501	2.7	2.813	2.837
6-Oct	-	1.864	1.842	1.896	1.932	1.942	1.946	1.95	1.993	1.998	1.934	2.002	2.107	2.146	2.311	2.527	2.658	2.852	2.962	2.965
7-Oct	-	2.148	2.111	2.144	2.17	2.197	2.203	2.21	2.247	2.242	2.173	2.248	2.34	2.369	2.503	2.694	2.829	3.056	3.179	3.152
8-Oct	-	2.213	2.222	2.318	2.358	2.437	2.423	2.462	2.5	2.497	2.42	2.498	2.585	2.631	2.745	2.917	3.046	3.292	3.418	3.369
9-Oct	-	2.375	2.386	2.49	2.54	2.642	2.66	2.721	2.76	2.761	2.686	2.747	2.838	2.883	2.984	3.145	3.285	3.517	3.639	3.584
10-Oct	-	2.511	2.523	2.636	2.697	2.787	2.814	2.894	2.954	2.972	2.892	2.959	3.06	3.108	3.234	3.389	3.54	3.76	3.869	3.81
11-Oct	-	2.683	2.688	2.789	2.851	2.92	2.948	3.021	3.121	3.138	3.053	3.134	3.284	3.332	3.463	3.621	3.789	4.002	4.11	4.047
12-Oct	-	2.855	2.864	2.961	3.028	3.08	3.096	3.151	3.238	3.275	3.214	3.324	3.479	3.536	3.702	3.873	4.025	4.231	4.338	4.279
13-Oct	-	2.978	2.997	3.103	3.198	3.241	3.252	3.312	3.389	3.452	3.384	3.53	3.68	3.741	3.904	4.09	4.242	4.46	4.566	4.508
14-Oct	-	3.028	3.102	3.228	3.308	3.361	3.388	3.484	3.556	3.63	3.556	3.698	3.846	3.91	4.099	4.311	4.457	4.677	4.798	4.761
15-Oct	-	3.054	3.172	3.305	3.397	3.454	3.493	3.648	3.745	3.822	3.739	3.876	4.023	4.084	4.298	4.509	4.652	4.879	5.033	5.018
16-Oct	-	3.092	3.247	3.387	3.473	3.527	3.615	3.763	3.875	3.94	3.878	4.057	4.208	4.263	4.488	4.707	4.841	5.081	5.234	5.233
17-Oct	-	3.105	3.249	3.413	3.502	3.566	3.69	3.853	3.989	4.043	3.994	4.161	4.317	4.425	4.692	4.904	5.034	5.278	5.437	5.418
18-Oct	-	3.314	3.424	3.563	3.652	3.697	3.803	3.954	4.093	4.151	4.091	4.243	4.42	4.558	4.836	5.065	5.213	5.466	5.628	5.613
19-Oct	-	3.56	3.638	3.754	3.849	3.894	3.964	4.095	4.216	4.286	4.21	4.356	4.538	4.692	4.955	5.188	5.389	5.65	5.843	5.832
20-Oct	-	3.744	3.821	3.953	4.066	4.108	4.153	4.267	4.37	4.431	4.346	4.507	4.687	4.838	5.075	5.323	5.569	5.839	6.025	6.022
21-Oct	-	3.794	3.901	4.071	4.199	4.254	4.295	4.419	4.508	4.564	4.485	4.652	4.826	4.963	5.187	5.437	5.694	5.968	6.16	6.161
22-Oct	-	3.818	3.969	4.19	4.3	4.358	4.404	4.562	4.662	4.713	4.666	4.825	5.007	5.142	5.345	5.592	5.832	6.1	6.303	6.322
23-Oct	-	3.989	4.124	4.348	4.49	4.541	4.571	4.746	4.844	4.896	4.845	5.055	5.21	5.357	5.55	5.793	6.014	6.274	6.491	6.502
24-Oct	-	4.109	4.252	4.46	4.621	4.682	4.721	4.881	5.004	5.053	5.048	5.264	5.471	5.634	5.82	6.04	6.239	6.488	6.695	6.694
25-Oct	-	4.229	4.339	4.544	4.704	4.773	4.842	5.028	5.16	5.197	5.221	5.451	5.679	5.825	6.038	6.274	6.462	6.706	6.938	6.919
26-Oct	-	4.324	4.437	4.632	4.776	4.859	4.969	5.142	5.3	5.334	5.347	5.571	5.804	5.953	6.194	6.43	6.629	6.886	7.122	7.093
27-Oct	-	4.419	4.577	4.762	4.879	4.954	5.124	5.286	5.46	5.485	5.484	5.694	5.932	6.116	6.376	6.629	6.82	7.102	7.313	7.278
28-Oct	-	4.441	4.643	4.842	4.965	5.037	5.22	5.375	5.594	5.629	5.627	5.84	6.068	6.298	6.532	6.805	7.011	7.346	7.556	7.523
29-Oct	-	4.451	4.642	4.866	5.009	5.102	5.268	5.432	5.636	5.704	5.71	5.912	6.179	6.402	6.634	6.945	7.21	7.568	7.756	7.742
30-Oct	-	4.462	4.641	4.867	5.015	5.12	5.262	5.464	5.65	5.73	5.733	5.943	6.219	6.436	6.71	7.035	7.333	7.718	7.907	7.926
31-Oct	-	4.485	4.678	4.906	5.049	5.151	5.284	5.524	5.704	5.771	5.766									