

中間発表

最適配置問題への Principal Points の応用

計数工学科 数理情報工学コース 4 年
梶山拳太郎

指導教員：松田孟留准教授

December 8, 2023

施設配置問題

- 与えられた人口分布をもとに最適な施設配置に関する問題を考えたい。
- 施設配置コストは利用者と施設の距離に比例すると考えられる。

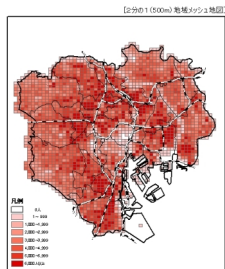


Figure: 地域メッシュ統計（総務省統計局：「平成 22 年国勢調査に関する地域メッシュ統計」より引用）

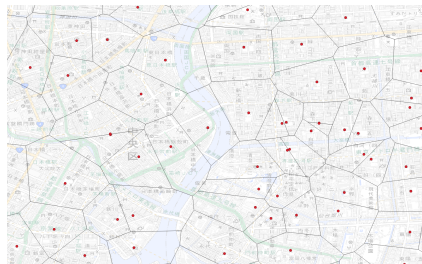


Figure: 地図上のボロノイ図

Principal Points

- k 個の点の最適配置を考えるため, k -Principal Points を導入する.

距離の定義

$y_j \in R^p (1 \leq j \leq k)$ は p 次元ユークリッド空間の k 個の点. $x \in R^p$ と k 個の点 $y_j (1 \leq j \leq k)$ との距離は,

$$d(x|y_1, \dots, y_k) = \min_{1 \leq j \leq k} \{(x - y_j)^T (x - y_j)\}^{\frac{1}{2}}$$

k -Principal Points の定義

X は R^p 内の確率変数, E は X についての期待値.

$$v_1, v_2, \dots, v_k = \operatorname{argmin}_{y_j \in R^p, 1 \leq j \leq k} E\{d^2(X|y_1, \dots, y_k)\}$$

Principal Points

- Principal Points は [Flury,1990] より提案された.
- 与えられた確率分布の密度関数を k 個の領域に分割する際の各領域の中心点と考えられる.

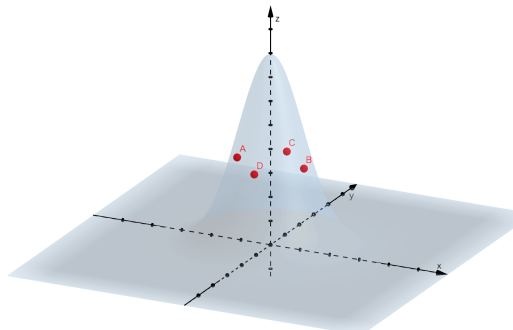


Figure: 例 : 4-Principal Points

- L_2 ノルムの 2 乗の期待値最小化を定義とした Principal Points の性質、応用に関する研究が多い.
- 本研究では L_2 ノルムの 1 乗の期待値最小化を定義とした Principal Points の性質、応用を中心に考える.
- 既存手法とノルムの 1 乗での方法による人口分布実データを利用した最適配置問題を考える.

ノルムの2乗と1乗

k-Principal Points(再掲)

$$v_1, v_2, \dots, v_k = \operatorname{argmin}_{y_j \in R^p, 1 \leq j \leq k} E\{d^2(X|y_1, \dots, y_k)\}$$

k-Principal Points(1乗の場合)

$$v_1, v_2, \dots, v_k = \operatorname{argmin}_{y_j \in R^p, 1 \leq j \leq k} E\{d^1(X|y_1, \dots, y_k)\}$$

ただし,

$$d^1(x|y_1, \dots, y_k) = \min_{1 \leq j \leq k} \|x_j - y_j\|_2^1$$

2乗の場合はデータの平均値として導出されるが、1乗の場合にはデータの中央値を考えることになる。(Geometric Median)

Geometric median について

- 1 乗の場合の代表点は Geometric Median と呼ばれる.
- 右図は [Vardi & Zhang,2000] のアルゴリズムによる計算例.

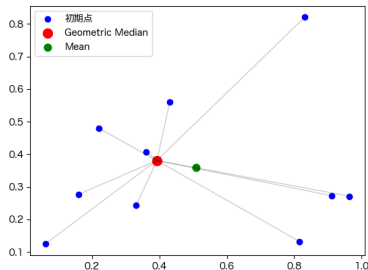


Figure: Geometric Median

d^1 と d^2 の比較

要約点の個数\距離の取り方	d^1	d^2
1 点のみ	Geometric Median	Mean
k 点	本研究	k-means

Table: d^1 と d^2 の比較

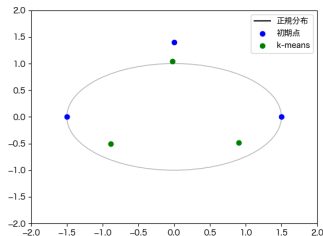


Figure: k-means 法による 3-Principal Points

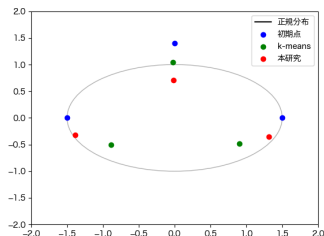


Figure: k-means 法及び本研究による 3-Principal Points

今後の研究について (1) : d^1 と d^2 の応用時の比較

- コスト関数が距離に比例すると仮定して 1 乗の場合の公共施設等の最適配置問題を考える.
- 1 乗の場合と 2 乗の場合の結果を比較する際の評価基準を定めることが今後の課題.

今後の研究について（２）：実データへの応用

- [栗田,2004,2013] では東京の人口分布及びそれに伴う交通網は中心点（例，皇居）を基準に放射状に伸びていると考え，2次元→1次元の近似を行なって施設配置を考えている．
- このような1次元モデルによる結果と2次元データから考えた場合の配置とを比較，考察する．

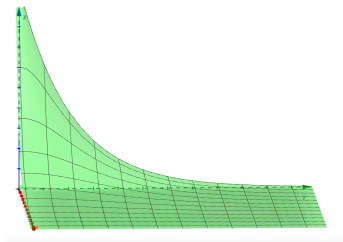









Figure: 回転対称な人口分布モデル



Figure: 関東路線図（JR 東日本：「路線図，東京近郊エリア」より引用

参考文献

-  Flury,B. Principal points. Biometrika. 1990, 77, 1, pp. 33-41.
-  Flury,B. Estimation of Principal points. Journal of the Royal Statistical Society. 1993, 42, 1, pp. 139-151.
-  Vardi,Y. & Zhang, C-H. The multivariate L_1 -median and associated data depth. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2000, 97, 4, pp. 1423-1426.
-  清水信夫, 水田正弘, 佐藤義治. Principal points の性質について. 応用統計学. 1998, 27, 1.
-  岡部篤行, 鈴木敦夫 (1992). 最適配置の数理論 —シリーズ現代人の数理3—. 朝倉書店
-  栗田治 (2013). 都市と地域の数理モデル. 共立出版.
-  栗田治 (2004). 都市モデル読本. 共立出版.



総務省統計局. ”平成 22 年国勢調査に関する地域メッシュ統計”. 総務省統計局. https://www.stat.go.jp/data/mesh/h22_w.htm, (参照 2023-12-4) .



JR 東日本. ”路線図”. JR 東日本. <https://www.jreast.co.jp/map/pdf/tokyo.pdf>, (参照 2023-12-4) .