**Аналитическая геометрия**

1 курс, специальность "Информатика"

1 семестр

(Лектор - Г. П. Размыслович)

# Оглавление

# Глава 1

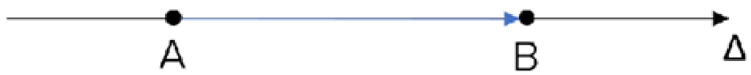
# Системы координат

**Метод координат** – это способ устанавливать местоположение геометрических объектов с помощью чисел, знаков.

## 1.1 Декартова система координат на прямой

Рассмотрим некоторую прямую, одно из двух направлений прямой назовём *положительным* и будем обозначать стрелкой, другое – *отрицательным*.

Прямая с выбранным на ней положительным направлением называется *осью* ($\Delta$).




Отрезок оси $\Delta$, ограниченный точками $A$ и $B$, называется **направленным**, если указано, какая из точек является точкой начала, а какая – точкой конца отрезка. Если $A$ – точка начала и $B$ – точка конца, то направленный отрезок обозначается как $\overline{AB}$.
Направление отрезка также обозначается на рисунке стрелкой.

Если точки $A$ и $B$ совпадают, то отрезок называется *нулевым* и его направление не определено ($\overline{AA}$).

### Направленные отрезки

Два направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ оси $\Delta$ называется **равными**, если $A = C$ и $B = D$ ($\overline{AB}$=$\overline{CD}$).

Выберем на оси $\Delta$ отрезок в качестве единицы масштаба, тогда можно измерить длину любого отрезка оси $\Delta$.

Длина направленного отрезка $\overline{AB}$: $|\overline{AB}|$

Если $d(A, B)$ – расстояние между точками $A$ и $B$, то

$$d(A, B) = |\overline{AB}| = |\overline{AB}|$$

Рассмотрим два направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, которые лежат соответственно на двух параллельных осях $\Delta_1$ и $\Delta_2$. Через точки $A$ и $C$ проведём плоскость $\Pi$, не содержащая точки $B$ и $D$. Эта плоскость $\Pi$ разбивает всё пространство на 2 полупространства.
Если точки $B$ и $D$ лежат в одном полупространстве, то говорят, что отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ **сонаправленными** и обозначается:

$$\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$$

**Замечание.** *Если $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ лежат на одной оси $\Delta$, то они сонаправлены, если найдётся такой направленный отрезок $\overline{EF}$, что $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{EF}$ и $\overline{CD} \uparrow\uparrow \overline{EF}$.*

Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *противоположно направленными* ($\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$), если

$$\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{DC}$$

**Определение.** *<u>Величиной</u> направленного отрезка $\overline{AB}$ называется неотрицательное действительное число $AB$ и определяется по формуле:*

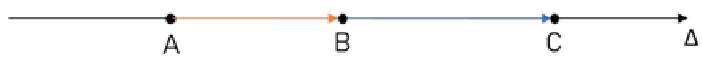
$$AB ::= \begin{cases} |\overline{AB}|, \overline{AB} \uparrow\uparrow \Delta \\ -|\overline{AB}|, \overline{AB} \uparrow\downarrow \Delta \end{cases} \tag{1}$$

**Теорема 1** (Шаля). *Для любых трёх точек $A$, $B$, $C$ оси $\Delta$ верно равенство*

$$AB + BC = AC \tag{2}$$

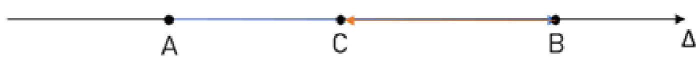
♦ Для взаимного расположения точек $A$, $B$, $C$ возможны 6 ситуаций:

1. $\overline{AB} \uparrow\uparrow \Delta$, $\overline{BC} \uparrow\uparrow \Delta$



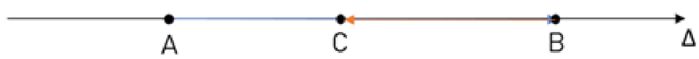

$AB + BC = [AB = |\overline{AB}|, BC = |\overline{BC}|] = |\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = AC$

2. $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{BC} \uparrow\downarrow \Delta$




$AB + BC = [AB = -|\overline{AB}|, BC = -|\overline{BC}|] = -|\overline{AB}| - |\overline{BC}| = -(|\overline{AB}| + |\overline{BC}|) = -|\overline{AC}| = AC$

3. $\overline{AB} \uparrow\uparrow \Delta, \overline{BC} \uparrow\downarrow \Delta, AB > BC$

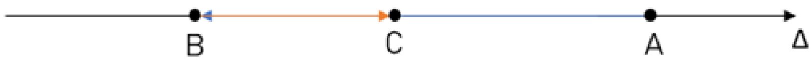



$AB + BC = [AB = |\overline{AB}|, BC = -|\overline{BC}|] = |\overline{AB}| - |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = AC$

4. $\overline{AB} \uparrow\uparrow \Delta, \overline{BC} \uparrow\downarrow \Delta, AB < BC$


$$AB + BC = [AB = |\overline{AB}|,\ BC = -|\overline{BC}|] = |\overline{AB}| - |\overline{BC}| = -|\overline{AC}| = AC$$

5. $\overline{AB} \uparrow\downarrow \Delta, \overline{BC} \uparrow\uparrow \Delta, AB > BC$




$$AB + BC = [AB = -|\overline{AB}|,\ BC = |\overline{BC}|] = -|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = -|\overline{AC}| = AC$$

6. $\overline{AB} \uparrow\downarrow \Delta, \overline{BC} \uparrow\uparrow \Delta, AB < BC$


$$AB + BC = [AB = -|\overline{AB}|,\ BC = |\overline{BC}|] = -|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = AC$$

■

Введём декартову систему координат. На оси $\Delta$ зададим точку $O$, которую назовём *началом отсчёта*, или **началом координат**. Возьмём $[O,\ E]$ в качестве единицы масштаба.

Ось, на которой заданы точка начала отсчёта и единица масштаба, называется *координатной осью.* Полупрямая, исходящая из точки $O$ в положительном направлении, называется *положительной полуосью*, а исходящая в отрицательном направлении - *отрицательной полуосью.*

Рассмотрим на координатной оси $\Delta$ точку $A$.

**Определение.** *Координата $x_A$ точки $A$ ($A(x_A)$) — величина $OA$ направленного отрезка $\overline{AB}$, т. е.*

$$x_A ::= OA \tag{3}$$

$f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ — отображение[1] точек оси $\Delta$ в множество действительных чисел $\mathbb{R}$

**Теорема 2.** *Для любых точек $A$ и $B$ координатной оси $\Delta$ верно:*

$$AB = x_B - x_A \tag{4}$$

$$|\overline{AB}| = |x_B - x_A| \tag{5}$$

⧫ На основании **Теоремы Шаля**

$$OA + AB = OB \Rightarrow AB = OB - OA \Rightarrow AB = x_B - x_A$$

(5) следует из (4) и того, что длина $|\overline{AB}|$ – это модуль величины этого отрезка. ■

[1]Это отображение является *взаимно-однозначным*

### Деление отрезков в заданном отношении

Рассмотрим на координатной оси $\Delta$ три точки $A$, $B$, $C$ $(A \neq B)$ и *некоторое число* $\lambda \in \mathbb{R}$. Точка $C$ делит направленный отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda$, если выполняется:

$$AC = \lambda CB \tag{6}$$

### Замечания.

1. $C \neq B$

   Если $C = B$, то из (6) следует, что

   $$AB = \lambda BB \Rightarrow AB = 0 \Rightarrow A = B$$

   **Противоречие!**

2. Если $C = A$, то из (6) следует, что

   $$AA = \lambda AB \Rightarrow \lambda AB = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

3. $\lambda \neq -1$

   Если $\lambda = -1$, то из (6) следует, что

   $$AC = -CB(BC) \Rightarrow A = B$$

   **Противоречие!**

4. Если $\lambda > 0$, то точка C делит отрезок $\overline{AB}$ *внутренним образом.*
   Если $\lambda < 0$, то точка C делит отрезок $\overline{AB}$ *внешним образом.*

Найдем координаты $x_C$ точки $C$, если известны координаты $x_A$ и $x_B$.

Рассмотрим равенство (6): $x_C - x_A = \lambda(x_B - x_C) \Leftrightarrow x_C + \lambda x_C = x_A + x_B \Leftrightarrow$

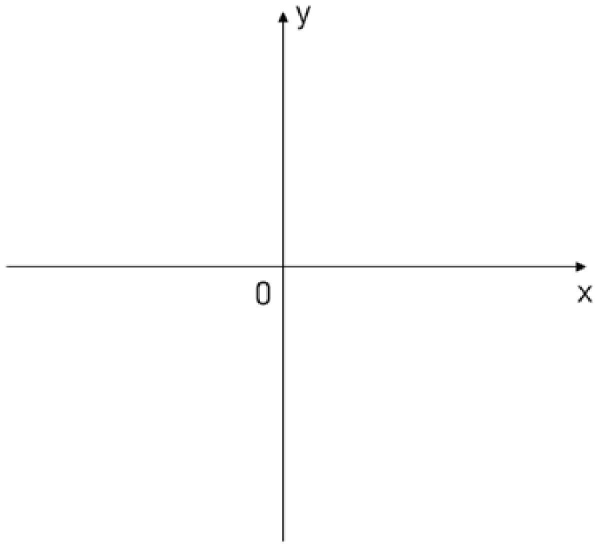
$$\boxed{x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}} \tag{7}$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \tag{8}$$

## 1.2 Система координат на плоскости

### 1.2.1 Декартова прямоугольная система координат (ДПСК)

Если на плоскости $\Pi$ зафиксировать *две взаимно-перпендикулярные координатные оси* с серединой $O$ - *точкой начала отсчёта*, то говорят, что на плоскости $\Pi$ задана прямоугольная система координат.




$O_x$ – ось абсцисс $\quad$ $O_y$ – ось ординат
**ДПСК** $O_{xy}$

Рассмотрим на плоскости П некоторую точку $A$. Ортогональным образом спроецируем её на координатные оси $O_x$ и $O_y$ и получим соответственно точки $A_x$ и $A_y$.

*Декартовыми прямоугольными координатами* точки $A$ называются величины направленных отрезков $\overline{OA_x}$ и $\overline{OA_y}$, т. е.

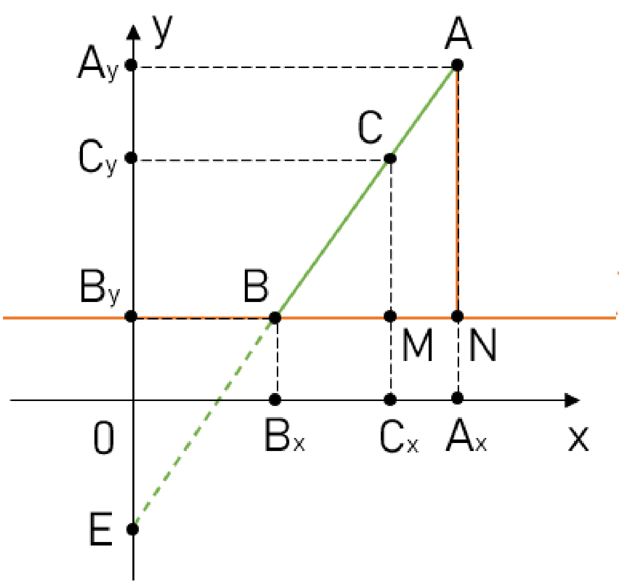
$$x_A ::= OA_x$$

$$y_A ::= OA_y$$

Запись $A(x_A, y_A)$ означает, что $(x_A, y_A)$ – величины декартовых прямоугольных координат точки $A$.

Таким образом, каждой точке на плоскости П ставится упорядоченная пара из двух декартовых координат этой точки.
Верно и обратное:

$$f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$$



Расмотрим на плоскости П ещё точку $B(x_B, y_B)$. Найти $d(A,B) = |\overline{AB}|$

► Ортогональным образом спроецируем точки $A$ и $B$ на координатные оси $O_x$ и $O_y$. Получим точки $A_x, A_y, B_x, B_y$.

$$|\overline{AN}| = |\overline{A_xB_x}| = |x_B - x_A|$$
$$|\overline{BN}| = |\overline{A_yB_y}| = |y_B - y_A|$$

Тогда по теореме Пифагора для $\triangle ANB$ получаем:

$$d(A,B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{9}$$

**Теорема 3.** *Координаты $(x_C, y_C)$ точки $C$, делящей направленный отрезок $\overline{AB}(B \neq C)$ в отношении $\lambda = \frac{AC}{BC}$, равны:*

$$\boxed{\begin{aligned} x_C &= \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} \\ y_C &= \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} \end{aligned}} \tag{10}$$

⧫ Проектируем точки $A, B, C$ на $O_x, O_y$ и воспользуемся *Теоремой Фалеса* (см. чертёж)

Рассмотрим $\triangle ABN$:

$$AN||CM \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{NM}{MB} = \lambda$$

$$\frac{NM}{MB} = \frac{A_xC_x}{C_xB_x} = \frac{x_A - x_C}{x_C - x_B} = \lambda \Leftrightarrow x_A - x_C = \lambda x_C - \lambda x_B \Leftrightarrow x_C(1+\lambda) = x_A + \lambda x_B \Leftrightarrow x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}$$

Аналогично для $\triangle AA_yE$:

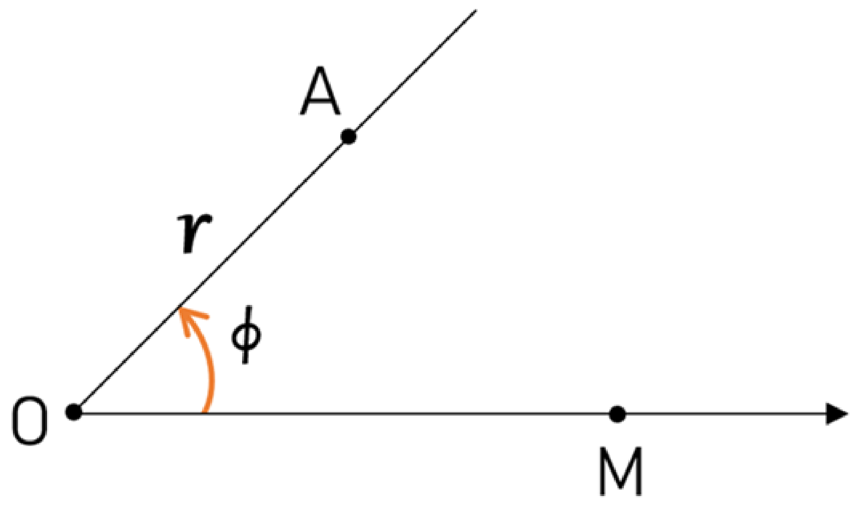
$$AA_y||BB_y||CC_y \Leftrightarrow \frac{y_A - y_C}{y_C - y_B} = \lambda \Leftrightarrow y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}$$

■

### 1.2.2 Полярная система координат

Зафиксируем на плоскости П некоторую точку $O$, которую назовём *полюсом*, и луч $OM$, который назовём *полярной осью*. На ней выберем некоторый отрезок в качестве единицы масштаба.

Рассмотрим некоторую точку $A$ на плоскости $Pi$ и проведём луч $OA$.



Тогда точке $A$ можно поставить в соответствие пару чисел $(r,\varphi)$ - ее **полярные координаты**, где

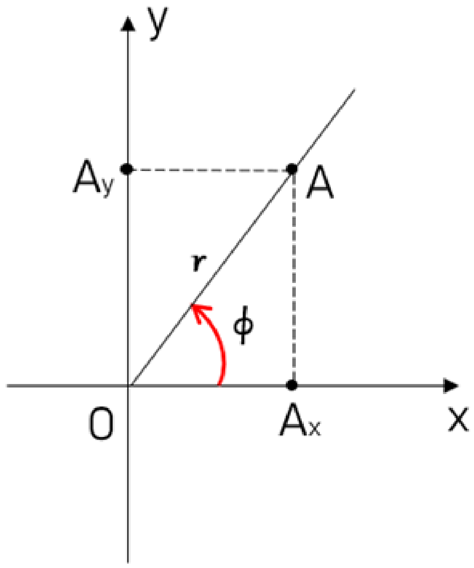
$$r = d(O,A), \underline{0 \le r < +\infty}$$

$\varphi$ - угол, на который нужно повернуть полярную ось, чтобы она совпала с лучом $OA$ (поворот провтив часовой стрелки - *положительное* направление, по часовой стрелке - *отрицательное*), $\underline{\varphi \in \mathbb{R}}$

Ясно, что если $\varphi$ - полярный угол точки $A$, то $\varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ также является полярным углом точки А. Поэтому значение полярного угла $\underline{-\pi < \varphi \le \pi}$ называется **главным значением полярного угла** точки $A$.

### 1.2.3 Связь между декартовой и полярной системами координат

Рассмотрим на плоскости $\Pi$ некоторую прямоугольную декартову систему координат $O_{xy}$ и такую полярную систему координат, что её полюс совпадает с точкой $O$, а полярная ось совпадает с положительной полуосью $O_x$.




Нетрудно видеть, что

$$\begin{cases} x_A = r\cos\varphi \\ y_A = r\sin\varphi \end{cases} \tag{11}$$

Из формулы (11) можно найти *выражения полярных координат точки через её декартовы координаты*, а именно:

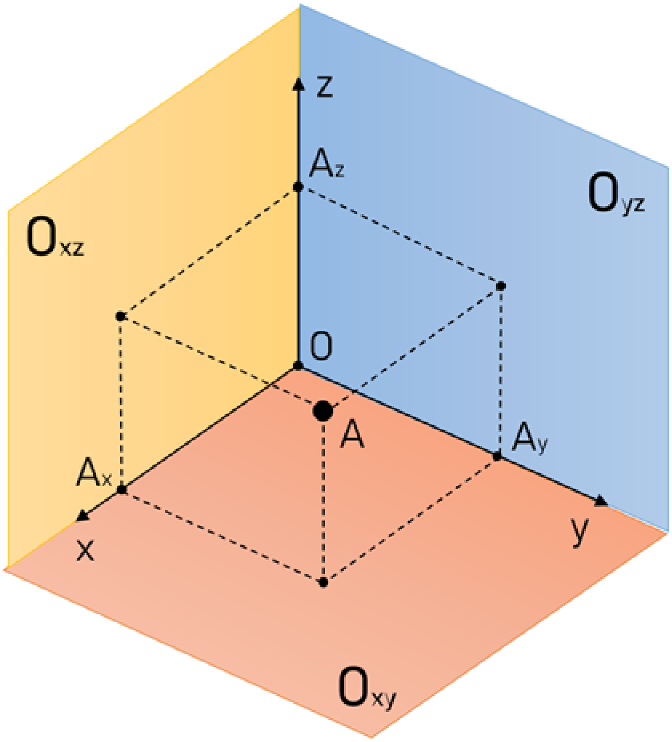
$$\boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \end{cases}} \tag{12}$$

## 1.3 Системы координат в пространстве

### 1.3.1 Декартова прямоугольная система координат

Рассмотрим в пространстве *3 взаимно-перпендикулярные ортогональные оси* с единой точкой отсчёта $O$.

Оси образуют 3 координатные плоскости: $O_{xy}, O_{yz}, O_{xz}$. Эти плоскости разбивают пространство на *8 октантов.*




Рассмотрим в пространстве точку $A$ и спроецируем ортогональным образом на оси $O_x, O_y, O_z$. Отметим соответствующие точки $A_x, A_y, A_z$.

**Определение.** ***Декартовыми прямоугольными координатами*** *точки $A$ в пространстве называются величины отрезков $\overline{OA_x}, \overline{OA_y}, \overline{OA_z}$, т. е.*

$$x_A ::= OA_x$$

$$y_A ::= OA_y$$

$$z_A ::= OA_z$$

$$A(x_A, y_A, z_A)$$

**Теорема 4.** *Координаты $(x_C, y_C, z_C)$ точки $C$, делящей отрезок $\overline{AB}$ $(B \neq C)$ в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$, равны:*

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}$$
$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} \tag{13}$$
$$z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}$$

♦ Доказательство **Теоремы 4** аналогично доказательству **Теоремы 3**

$$d(A,B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \tag{14}$$

■