

SOBRE OPERADORES QUE GENERALIZAN LA RAÍZ CUADRADA Y UNA DEFINICIÓN CANÓNICA DE SUMA PARA FUNCIONES NO DISCRETAS.

Keny Geovany Chin Parra

... something less cumbersome and closer to an intelligible language than mathematics in this instance has proved itself will likely be sought by our successors ... the discrete is mathematical bedrock ... we may anticipate that significant progress will demand genius at least equal to that responsible for the mathematics of continuity.
E. T. Bell (1940)

RESUMEN¹

En el presente texto se encuentran los principales resultados que he llegado tratando de responder algunas preguntas que me formulé desde hace mucho tiempo, y en este resumen incluyo las ideas informales (intuitivas) que me condujeron a esa investigación. Es de especial interés la pregunta 4 puesto que la he respondido parcialmente y me ha generado mucha investigación interesante al respecto.

Pregunta uno. La suma, el producto y la potencia son operaciones que se pueden definir de forma recursiva sobre los números naturales, y se pueden extender a operadores sobre los números reales y complejos fácilmente. Sin embargo existe el problema abierto de extender el operador de *potencia iterada* o mejor conocido como tetración, que solo está definida sobre los números naturales. Informalmente se pregunta como obtener el siguiente valor

$$\underbrace{z^{z^{z^{\dots}}}}_{n \text{ veces}}$$

donde $z, n \in \mathbb{C}$ están dados. En primer lugar es un problema inútil (no tiene aplicaciones), y en segundo el trabajo serio realizado, aunque preciso y muy elaborado, está pasando por alto alguna idea fundamental que no depende del concepto de analiticidad.

Pregunta dos. Considere la inversa de la función $f(x) = x^x$, a la que llamaré provisionalmente *infraradicación*, que puede ser entendida como el análogo de la raíz cuadrada pero en el contexto de *hiper-operadores*. Las raíces cuadradas de un número complejo se pueden expresar en términos de la raíz cuadrada real sobre valores no negativos, lo cual lleva a la pregunta de si esto también ocurre con la *infraradicación* sobre valores complejos, es decir si existe una fórmula cerrada para obtener todas las *infraraíces* de un número complejo en términos de la *infraradicación* sobre los reales positivos. La experimentación me lleva a concluir que las raíces se distribuyen, sobre cierto plano complejo, en circunferencias de radio $2\pi n$ y lo hacen a pares (incluyendo conjugación serían en conjuntos de cuatro puntos).

Pregunta tres. Sea $p \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ y $p_n(x) = \underbrace{p^{p^{p^{\dots}}}}_{n \text{ veces}}^x$, y considere la ecuación

$$a_{n+1}p_n(x) + a_n p_{n-1}(x) + \dots + a_3 p^{p^x} + a_2 p^x + a_1 x + a_0 = 0.$$

En todos los casos la ecuación tiene infinitas raíces (una raíz es una solución). Cuando $n = 2$ la solución general se puede expresar en términos de la *infraradicación* (equivalentemente, en términos de la función W de Lambert) y cuando $n = 3$ se pueden expresar algunas raíces en términos de la inversa de $g(x) = x^{x^x}$. La pregunta es ¿existe alguna fórmula general para expresar las raíces en términos de la inversa de la tetración?. Esta pregunta es análoga a la pregunta de si las raíces de un polinomio se pueden expresar en términos de radicales, sin embargo una teoría de Galois para la pregunta propuesta tendría muchas dificultades debido a la infinidad de las raíces y que no tienden a formar un campo.

Pregunta 4. Sea f una función continua dada y definida en un intervalo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Considere la ecuación de diferencias

$$F(x+1) - F(x) = f(x+1).$$

¹El capítulo 5 se redactó en 2024, el capítulo 4 en abril de 2025 y el resto del documento en mayo de 2025. El resumen es una modificación de una carta enviada al Dr. Javier Arturo Díaz Vargas en junio de 2025.

Se sabe que existen infinitas soluciones F definidas en $[a, b]$ que difieren en una función periódica. La pregunta es si existe alguna manera *canónica* y constructiva de definir una única solución que sea *consistente* con las soluciones de otras funciones g definidas sobre otros intervalos J . En particular se busca que sea consistente bajo restricción y que si f es analítica entonces coincida con la solución analítica.

Pregunta 5. Se conoce que la lógica proposicional de orden cero se puede representar de forma algebraica, por medio del álgebra de Bool, en el que las deducciones se puede interpretar como operaciones formales. Lo que me propuse a investigar es encontrar alguna representación del tipo aritmético de la lógica proposicional de orden cero. Lo que encontré fue que dada una proposición finita se pueden asignar números naturales a cada variable y luego mediante una formula, se puede calcular el valor de la proposición tratando a los operadores lógicos como operadores sobre los naturales. De esta manera el conjunto de los números naturales se pueden interpretar como un límite proyectivo, con los 16 operadores lógicos. ¿Se puede generalizar para lógica de orden uno?

A continuación describiré como sería una solución para un caso más general de la pregunta 4. Considere dos gavillas $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sobre un espacio vectorial topológico X , y cuyas secciones son funciones continuas de la forma $f : U \subseteq X \rightarrow Y$, donde Y es otro espacio vectorial topológico. Sea $G : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ un morfismo de gavillas. Se definen axiomas de constructibilidad que dependen de G :

1. Existe una *base* de secciones globales (en $\mathcal{F}(X)$), en el sentido de que para todo simplejo de 3 vértices existe exactamente un elemento de la base que pase por los 3 vértices, y el borde esté formado por segmentos de recta.
2. El conjunto de CW-complejos con un conjunto a lo más numerable de celdas, y que definen una función en X , forman una subgavilla densa de \mathcal{F} , es decir, para cada sección f existe un CW-complejo que lo aproxima con precisión arbitraria.
3. Sea Q un grupo que actúa sobre $X \times Y$. Entonces, para cada f en $\mathcal{F}(X)$ debe existir una asignación $J_f : Q \rightarrow \mathcal{F}'$ tal que

$$J_{qf}(r) = J_f(rq), \quad \forall r, q \in Q.$$

3. Si f y g son dos secciones globales, se define la función de corte con respecto un conjunto A como

$$f \odot_A g = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in A^c \end{cases}.$$

Fijando A , sea $Z_A \subset \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$, formado por pares (f, g) tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial A$. Entonces existe una asignación $J'_A : Z_A \rightarrow \mathcal{F}'$ tal que si $(f, g) \in Z_A$ y $(g, h) \in Z_B$, entonces

$$J'_A(f \odot_A g, h) = J'_B(f, g \odot_B h).$$

4. Para todo A

$$J_f(1) = J'_A(f, f).$$

Con estos axiomas establecidos es posible construir una solución para las secciones locales de manera que sean compatibles. Primero se selecciona una sucesión de CW-complejos que sean funciones sobre X y cuyo límite sea una función f dada, y luego por los axiomas se pueden ajustar los elementos de la base para construir una solución para cada elemento de la sucesión. Finalmente se toma el límite puntualmente.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Ecuaciones de diferencias	1
2. La superpotenciación y la infraradicación	5
2.1. La infraradicación $z \Omega 2$	6
2.1.1. Soluciones reales	7
2.1.2. El plano log-polar	8
2.2. Soluciones de $z \nabla 2 = C, z \in \mathbb{C}$	9
2.3. Solución usando el método Delves-Lyness	11
2.4. Solución algebraica de poli-exponenciales usando la infraradicación	14
2.4.1. Solución general del poli-exponencial de grado 2	15
2.4.2. Poli-exponenciales de grado 3	19
2.5. La ecuación Lotka-Volterra	22
3. La Σ-realización	25
3.1. Definiciones	25
3.2. Ejemplos	26
3.3. Continuidad	31
3.3.1. Desigualdad del Triángulo	32
3.4. Diferenciabilidad	36
3.4.1. Teorema Fundamental	37
3.4.2. Recíproco del Teorema Fundamental	39
3.4.3. Teorema del Valor Medio	40
3.5. Construcción	40
3.6. Σ -realización multivariable	42
3.7. La suma de línea	45
3.8. Métodos numéricos	48
3.8.1. Método usando una base de funciones	48
3.8.2. Método usando la fórmula de Euler-Maclaurin	49
3.8.3. Generalización de la fórmula de Euler-Maclaurin	51
3.8.4. La Σ -realización como límite de una sucesión de EDO's	52
3.9. Ecuaciones funcionales	52
3.9.1. Método 1: Asumiendo que f es infinitamente diferenciable	53
3.9.2. Método 2: Método infinitesimal	55
3.10. Relación con la geometría	58
3.11. Generalizaciones e interpretaciones	59
3.11.1. Σ -homotopía	59
3.11.2. Los operadores Δ^φ y Δ_φ	60
3.11.3. O -realización	61

3.12. Conjetura: la Σ -realización canónica de una función no negativa	61
3.13. Notas del capítulo	63
4. Constructibilidad de Funcionales Generales	65
4.1. Operadores de corte y traslación	66
4.2. Axiomas de Constructibilidad	67
4.3. Construcción de una Solución para f Continua	69
4.4. Caso Particular Cuando $G(F)$ es Lineal	71
4.5. Sobre la familia de constructores	72
4.6. Ejemplos	72
4.6.1. Identidad	72
4.6.2. Integral	72
4.6.3. Derivada	73
4.6.4. Suma	74
4.7. Solución de un problema general	76
4.8. Medida funcional	78
5. Aritmética de la lógica proposicional de orden 0	81
5.0.1. Verificador de expresiones lógicas bien formadas	84
6. Apéndice	87
6.1. Propiedades de los operadores definidos en la la sección 1 del capítulo 1	87
6.2. Identidades que involucran la función W de Lambert	87
6.3. Derivadas	88
6.4. Integrales	89
6.5. Operadores definidos en Latex	89
6.6. Algoritmos del capítulo 3	90
6.7. Algoritmo del capítulo 4	93

Capítulo 1

Introducción

Este tratado se divide en 3 investigaciones. La primera es sobre la operación inversa de $f(z) = z^z$ definida sobre los complejos a la que llamaré infraradicación, y sobre la solución de funciones de la forma

$$\cdots + p^{p^z} + p^z + az + b = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

que son análogos a los polinomios. Resolveré el caso con tres términos en función de la infraradicación, y mostraré que existen soluciones no triviales para el caso con 4 términos. Se propone una simplificación análoga a la transformación de Tschirnhaus para eliminar una variable del problema, aunque no logré encontrar una solución general para el caso de 4 términos.

En la segunda parte, que abarca los capítulos 3 y 4, planteo el problema de resolver la ecuación de diferencias

$$F(x+1) - F(x) = f(x+1).$$

Demuestro algunos resultados simples pero fundacionales, como la existencia, unicidad, linealidad, teorema fundamental, desigualdad triangular, etc, y luego propongo varios métodos numéricos para resolverlo. Muestro que el problema se puede interpretar como una homotopía y también generalizo el problema al caso multivariable, y defino el análogo de la integral línea sobre una curva. Como parte de la investigación propongo un método constructivo para resolver la ecuación de diferencias, que luego se generaliza para la solución de ecuaciones funcionales.

Finalmente, en el tercera parte o capítulo 5, propongo una interpretación de la lógica proposicional de orden cero como una aritmética sobre los número naturales. Esto permite un calculo paralelizable de expresiones lógicas de orden cero sin la necesidad de realizar las tablas de verdad (o al menos, no de forma explícita).

1.1. Ecuaciones de diferencias

La teoría de ecuaciones de diferencias tuvo su génesis en el artículo de Euler *De summis serierum reciprocarum* [1] (1735), donde exhibe su celebrada fórmula ahora llamada *Fórmula de Euler Maclaurin* (en honor a Colin Maclaurin quien la descubrió de forma independiente en 1742 [2]). Esta fórmula permite extender la noción de suma finita (definida para funciones discretas) a funciones real valuadas usando series infinitas. En 1860 George Boole publicó

su libro *A Treatise on the Calculus of Finite Differences* [3] que se puede considerar la primera formalización de la teoría de ecuaciones de diferencias aunque su tratado es más simbólico y algebraico que analítico. Luego en 1885 Poincaré publicó el artículo *Sur les Équations Linéaires aux Différentielles Ordinaires et aux Différences Finies* [4] donde expone un tratamiento unificado de ecuaciones diferenciales y en diferencias, subrayando el carácter estructural que ambas comparten. En 1887 C. Guichard, en *Sur la résolution de l'équation aux différences finies* [5] explora soluciones generales para ecuaciones funcionales lineales, y en la misma línea Ernest William Barnes [8, 9] consolidó a principios del siglo XX el estudio de la ecuación lineal de primera orden con coeficientes variables, y además abordó con profundidad las ecuaciones lineales de segundo orden y su relación con funciones especiales. De particular importancia es su introducción de la función $G(z)$, conocida como la función G de Barnes, que generaliza la función gamma mediante una ecuación funcional del tipo $G(z+1) = \Gamma(z)G(z)$ [6, 7]. Más tarde, George David Birkhoff en su artículo *Theory of Linear Difference Equations* (1909) abordó la existencia y unicidad de soluciones bajo condiciones monodrómicas, y en *Formal Theory of Irregular Linear Difference Equations* (1930) desarrolló una teoría asintótica para soluciones formales, análoga a la teoría de ecuaciones diferenciales irregulares. Un resultado concerniente a la unicidad de la función gamma en el dominio real es el famoso teorema de Bohr-Mollerup de Harald August Bohr [10] que caracteriza a la función gamma como la única interpolación log-convexa de la función factorial. Bohr fundó la teoría de funciones casi periódicas en su artículo *Zur theorie der fastperiodischen funktionen* [11] que generaliza las funciones periódicas para describir comportamientos recurrentes sin un período fijo. Considero relevante el trabajo hecho entre 1960 y 1980 por F. W. J. Olver [12, 15, 16], J. Oliver [14, 17, 18], y Daniel W. Lozier [19] sobre la solución numérica, usando álgebra lineal, de ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes variables. En tiempos recientes se ha perdido el interés por las ecuaciones de diferencias y se ha substituido por otras vertientes, como la teoría de ecuaciones de diferencias con retardo o ecuaciones de diferencias-diferenciales, la cuál es más atractiva ya que tiene muchas aplicaciones como por ejemplo en en dinámica de poblaciones [21], epidemiología [22], neurociencias [26], sistemas de control [25], y recientemente en modelos de inteligencia artificial [27]. Esto se debe a que permite el modelado de sistemas dinámicos con memoria, donde el estado actual depende no solo del presente sino también de la historia pasada del sistema. Otros problemas similares y que tienen muchas aplicaciones prácticas son las ecuaciones integrales, las ecuaciones integro-diferenciales, y las ecuaciones funcionales diferenciales.

La propuesta de este tratado es tratar de responder una pregunta que a mi conocimiento no ha sido ni formulada ni respondida en alguna de las referencias que he investigado, pero que sin embargo generaliza las teorías descritas en el párrafo anterior. El problema consiste considerar una ecuación funcional general G y una función continua f definida en un subintervalo real $I = [a, b]$. Se supone que f no está dada por ninguna fórmula cerrada pero es posible conocer el valor de f en cada punto $x \in I$, en otras palabras, es como trazar en un papel una línea $f(x)$ sobre el eje x sin levantar el papel, y luego poder hacer una medición tan precisa como se quiera de $f(x)$ donde x está dado. El problema es hallar una función continua F definida en I que satisfaga

$$G(F(x)) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Este problema puede tener una infinidad de soluciones, por lo que es necesario imponer condiciones globales, es decir que si f y g están relacionados de alguna manera, entonces las soluciones correspondientes deben estar *conectadas* de alguna manera. En términos de teoría de gavillas G es un morfismo de gavillas, de \widehat{X} a \widehat{X} , donde \widehat{X} representa el conjunto de funciones continuas sobre el σ -álgebra de Borel. Entonces el conjunto de soluciones para una f fija es una fibra, y lo que se busca es seleccionar un representante de cada fibra de manera

lógica, es decir satisfaciendo propiedades globales. No es necesario que las funciones consideradas sean continuas, por ejemplo, pueden tener discontinuidades discretas, sin embargo no se abordará en este tratado. Usaré como modelo de ejemplo el problema de resolver la ecuación de diferencias

$$F(x+1) - F(x) = f(x+1),$$

y mostraré que la solución se generaliza inmediatamente para un funcional general, es decir, no es necesario considerar una extensa clasificación de ecuaciones diferenciales, funcionales o de diferencias, si no que el método funciona igual para todos los casos. Como respaldo de esta afirmación mostraré que el método no distingue entre el concepto de integral, derivada y antiderivada discreta. Finalmente, partiendo de dicho método, generalizaré el concepto de medida, definiendo una medida funcional que toma por valores funciones, y es de hecho un morfismo de gavillas con *buenas* propiedades.

Capítulo 2

La superpotenciación y la infraradicación

Se define la superpotenciación como el operador $\nabla : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la recursión

$$x \nabla (n+1) = x^{x \nabla n}, \quad x \nabla 0 = 1. \quad (2.1)$$

A x se le llama base y n es el peso. La extensión obvia de este operador a valores no enteros de n se hace por medio de una ecuación de diferencias

$$G(n+1) - e^{G(n)} = \log \log(x), \quad x \geq e^e, \quad (2.2)$$

donde $x \nabla n = e^{e^{G(n)}}$ ¹. La existencia, unicidad y eficiente computabilidad de (2.2) no están claras del todo, sin embargo existe una excelente aproximación de $G(z)$ cuando $x = e$, $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_{-1}^-$ debido a Dmitrii Kouznetsov (2009) [24]. En general $x \nabla n$ está definido para todo $x \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_0^-$, y es analítica en dicho conjunto pues $x \nabla n = e^{x \nabla (n-1) \log(z)}$.

Se definen dos operadores inversos:

- La infraradicación se define por la relación

$$a \nabla n = b \Leftrightarrow a = b \Omega n.$$

b es el infraradicando y n el índice.

- La sublogaritmación se define por la relación

$$a \nabla n = b \Leftrightarrow n = b \mathcal{U} a.$$

b es el argumento y a es la base.

Como es fácil notar, estas relaciones tienen más de una solución en \mathbb{C} (incluso en \mathbb{R}) por lo que estos operadores se deben entender de forma similar al operador raíz cuadrada complejo. En la literatura existen nombres alternativos para estos operadores, sin embargo me parece que la simbología y notación que propongo son adecuados para hacer cálculos eficientes e incluso mentales. Una identidad interesante que sería una análogo de una ecuación Diofántica es

$$(i \nabla 3)(-i \nabla 3) = 1.$$

¹Note que formalmente el problema es: $G(n) = (E_1 - e^{Id})^{-1} \log \log x$, donde E_1 es una traslación por una unidad.

Que el producto sea real es obvio, pero que el módulo sea un número entero es una singularidad como podrá comprobar el lector intentando hallar más fórmulas de este tipo.

Existe otro operador natural al que llamo hiperpotenciación definida por la recursión

$$x \boxtimes (n+1) = (x \boxtimes n)^x, \quad x \boxtimes 1 = x, \quad (2.3)$$

el cual se puede expresar en términos de exponenciales como

$$a \boxtimes b = a^{a^{b-1}}, \quad (2.4)$$

de donde se deduce la curiosa relación $a \boxtimes 0 = \sqrt[a]{a}$. Los operadores inversos correspondientes son

- La supraradicación se define por la relación

$$a \boxtimes n = b \Leftrightarrow a = b \rhd n.$$

b es el supraradicando y n el índice.

- La hipologaritmación se define por la relación

$$a \boxtimes n = b \Leftrightarrow n = b \lhd a.$$

b es el argumento y a es la base.

Debido a (2.4) es preferible estudiar la exponenciación iterada definida por

$$a_n(x) = a^{(a_{n-1}(x))}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad a_0(x) = x,$$

Esta notación puede llegar a ser confusa fuera de contexto, pero es muy útil para hacer cálculos algebraicos. La notación estándar para esta función es $\exp_a(n)$, y como es de esperar debido a su naturaleza recursiva, la extensión para valores $n \in \mathbb{R}$ o \mathbb{C} no es trivial, véase [23] y [20].

En las siguientes secciones mostraremos 2 métodos para calcular todas las soluciones complejas de la ecuación $z^z = w$, la primera usando el método de Newton y la segunda usando el método Delves-Lines. Luego resolveremos poli-exponenciales usando el operador infraradicación cuando el grado del poli-exponencial es 2 y 3. En el apéndice ? se encuentra una lista de fórmulas y propiedades que relacionan los diferentes operadores definidos en esta sección y la función W de Lambert.

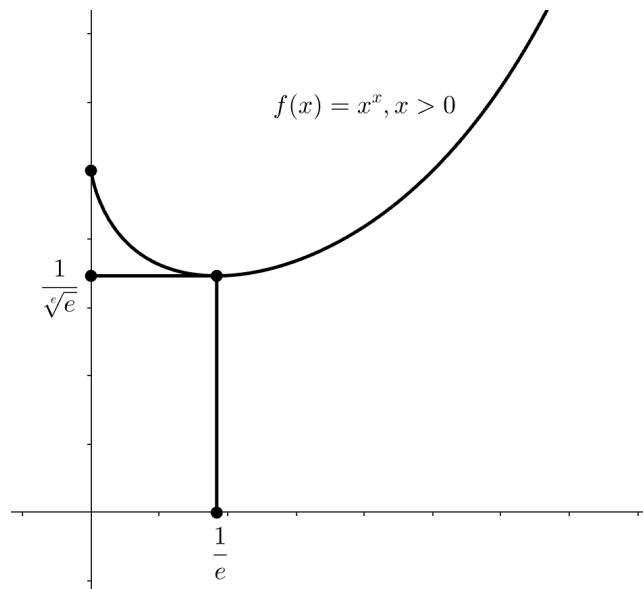
2.1. La infraradicación $z \Omega 2$

En esta sección se estudia la infraradicación usando técnicas elementales. Como ya se estableció, los posibles valores de $w \Omega n$ son aquellos números complejos z tales que

$$z^z = w. \quad (2.5)$$

La ecuación 2.5 puede ser resuelta usando la función W de Lambert como

$$z \Omega 2 = \frac{\log(z)}{W(\log(z))},$$

Figura 2.1: Gráfica de $f(x) = x^{\sqrt[2]{e}}$, $x > 0$.

donde W es la rama principal analítica en $\mathbb{C} - (-\infty, -1/e]$. Si W_1 denota la rama secundaria con parte imaginaria positiva y analítica en $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$, y W_{-1} denota la rama real y decreciente en $[-1/e, 0)$, con valores negativos y analítica en $\mathbb{C} - (-\infty, -1/e]$, entonces todas las soluciones vienen dadas por

$$z = \begin{cases} e^{W_0(\log w + 2i\pi n)} & \forall n \in \mathbb{Z}, 2\pi i n \neq \log w, \\ e^{W_{-1}(\log w + 2i\pi n)} & \forall n \in \mathbb{Z}, \Im(W_{-1}(\log w + 2i\pi n)) > -\pi \\ e^{W_1(\log w + 2i\pi n)} & \forall n \in \mathbb{Z}, \Im(W_1(\log w + 2i\pi n)) \leq -\pi \end{cases}$$

Existen muchos métodos numéricos para calcular los W_k , $k = 1, 2, 3$, en particular me parece destacable dos aproximaciones:

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n, \quad \forall |z| < \frac{1}{e},$$

$$W_k(z) = \log(z) + 2\pi i k - \log \log z + \frac{\log \log z}{z}, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

2.1.1. Soluciones reales

Sea $x \in \mathbb{R}^+$, entonces la ecuación

$$z \Omega 2 = x$$

tendrá una, dos o ninguna solución en \mathbb{R}^+ , dependiendo del valor de x , específicamente

$$|(x \Omega 2) \cap \mathbb{R}^+| = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt[2]{e}} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt[2]{e}} \text{ o si } x \geq 1 \\ 2 & \text{si } x \in (\frac{1}{\sqrt[2]{e}}, 1) \end{cases}$$

Si $x \in (\frac{1}{\sqrt[2]{e}}, 1)$ entonces hay dos soluciones z , una solución siempre satisface $z > \frac{1}{e}$ y la denotaremos z^+ , mientras que la otra solución siempre satisface $z < \frac{1}{e}$ y la denotaremos z^- . Si $x \notin (\frac{1}{\sqrt[2]{e}}, 1)$ entonces solo existe una solución y la denotaremos simplemente por z o z^+ .

Definition 2.1. Sea $z \in \mathbb{R}^+$. Si $0 < |z| < 1$ y $z \neq \frac{1}{e}$ se define la antípoda de z como el único elemento en

$$((z \nabla 2) \Omega 2) \cap \mathbb{R}^+ - \{z\}$$

Si $z = \frac{1}{e}$ o $z > 1$, entonces la antípoda de z es z mismo.

2.1.2. El plano log-polar

Considere el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi) &\mapsto (r \ln r, r\theta), \quad \sigma(0) = 0. \end{aligned}$$

Proposition 2.1. Sean dos puntos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \in \mathbb{C}^*$, $z_1 \neq z_2$, entonces $\sigma(z_1) = \sigma(z_2)$ si y solo si r_1 es el antipodal de r_2 y

$$\theta_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \theta_1.$$

Es decir, σ es inyectivo en todo \mathbb{C} salvo en

$$\mathfrak{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1, |z| \neq \frac{1}{e}\},$$

y para cada punto $w \in \mathfrak{D}$ existen exactamente dos puntos z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $\sigma(z_1) = \sigma(z_2) = w$.

Proposition 2.2. Para cada $w \in \mathfrak{D}$, existe un único punto $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_1| > \frac{1}{e}$ y un único punto $z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_2| < \frac{1}{e}$.

Definamos

$$\mathfrak{D}^\infty = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z|\}, \quad \mathfrak{D}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{e} < |z| < 1\}, \quad \mathfrak{D}^- = \{0 < |z| < \frac{1}{e}\}$$

Entonces $\sigma^+ := \sigma(D^+ \cup D^\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ y $\sigma^- := \sigma(D^- \cup D^\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ son ambos biyecciones. Note que σ transforma circunferencias de radio R a líneas verticales $x = R \ln R$. Por lo tanto $\sigma(D^+) = \sigma(D^-) = \{w \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{e} < \Re(w) < 0\}$, véase la figura ?. El número de elementos de $\sigma^{-1}(w)$ es

$$|\sigma^{-1}(w)| = \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{1}{e} > |\Re(w)| \\ 1 & \text{si } 0 < |\Re(w)| \\ 2 & \text{si } -\frac{1}{e} < |\Re(w)| < 0. \end{cases}$$

Supongamos que tenemos el problema de encontrar las raíces de $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, donde f involucra la superpotencia o la infraradicación. Entonces para hallar todas las soluciones w , primero se transforma el problema al plano $\sigma(\mathbb{C})$ y luego se resuelve el problema usando métodos elementales. Luego para cada solución (z, w) se deducen los posibles valores (r, θ) tales que $\sigma(r, \theta) = (z, w)$.

2.2. Soluciones de $z \nabla^2 = C, z \in \mathbb{C}$

Theorem 2.1. Sea $C = \alpha e^{i\beta} \in \mathbb{C}$. Las raíces de $z \nabla^2 - C = 0$ se distribuyen en circunferencias concéntricas de radio

$$R_n = \sqrt{\ln^2 \alpha + (\beta + 2\pi n)^2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

en el plano log-polar. Si φ_n representa el ángulo de las raíces en dichas circunferencias, entonces se cumple

$$\varphi_n = \tan^{-1} \left(\frac{\ln \alpha}{\beta + 2\pi n} \right) + \theta.$$

Demostración. Sea $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} z^z &= (re^{i\theta})^{(r \cos \theta + ir \sin \theta)} = \exp[(\ln r + i\theta)(r \cos \theta + ir \sin \theta)] \\ &= \exp[(r \ln r \cos \theta - r\theta \sin \theta) + i(r \ln r \sin \theta + r\theta \cos \theta)]. \end{aligned}$$

Ya que $z^z = C = \alpha e^{i\beta}$, entonces necesariamente se satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} r \ln r \cos \theta - r\theta \sin \theta &= \ln \alpha \\ r \ln r \sin \theta + r\theta \cos \theta &= \beta + 2\pi n, \end{cases} \quad (2.6)$$

para algún $n \in \mathbb{Z}$. Elevando al cuadrado las dos ecuaciones de (2.6), sumando y simplificando se obtiene

$$(r \ln r)^2 + (r\theta)^2 = R_n^2. \quad (2.7)$$

Resolviendo el sistema para $(r \ln r, r\theta)$ se obtiene

$$\begin{cases} r \ln r &= \ln \alpha \cos \theta + (\beta + 2\pi n) \sin \theta = R_n \sin(\theta_n + \theta) \\ r\theta &= (\beta + 2\pi n) \cos \theta - \ln \alpha \sin \theta = R_n \cos(\theta_n + \theta), \end{cases}$$

donde $\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{\ln \alpha}{\beta + 2\pi n} \right)$. Por lo tanto el ángulo en plano log-polar es

$$\tan^{-1} \left(\frac{r \ln r}{r\theta} \right) = \theta_n + \theta.$$

□

Lemma 2.1. Sea R_n como en el teorema 2.1 y sea $\varphi \geq 0$ un ángulo que define una dirección en el plano log-polar. Entonces hay exactamente 0, 2 o 4 raíces de $z^z = C$ que satisfacen 2.7.

Demostración. Supongamos que $(r \ln r, r\theta)$ es la intersección de la circunferencia de radio R_n y la recta de pendiente φ . Entonces

$$\begin{aligned} r \ln r &= R_n \cos \varphi \\ r\theta &= R_n \sin \varphi \end{aligned}$$

Luego

$$r^r = e^{R_n \cos \varphi} > 0. \quad (2.8)$$

Si $e^{R_n \cos \varphi} < \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$ entonces no hay soluciones posibles para r . Si $e^{R_n \cos \varphi} \in (\frac{1}{\sqrt[n]{e}}, 1)$, entonces siempre hay dos valores de $r_1, r_2 \in (0, 1)$ tales que $r_i^{r_i} = e^{R_n \cos \varphi}$. Tomando $\theta_i = \frac{R_n \sin \varphi}{r_i}$, se obtienen dos ternas $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ tales que

$$(r_i \ln r_i)^2 + (r_i \theta_i)^2 = R_n^2. \quad (2.9)$$

Si las dos ternas son soluciones de $z^z = C$, entonces $(r_i, -\theta_i)$ también lo son y satisfacen (2.9). Si 1 terna es raíz o ninguna terna es raíz entonces se deduce análogamente que hay 2 o 0 soluciones de $z^z = C$ respectivamente. Si $e^{R_n \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$ o $e^{R_n \cos \varphi} > 1$, entonces solo una r que satisface (2.8), luego hay tomando $\theta = \frac{R_n \sin \varphi}{r}$, se deduce que $(r, \pm \theta)$ son ambas soluciones de $z^z = C$ o ninguna lo es. \square

Conjecture 2.1. Sea $n \in \mathbb{Z}$ fijo. Existe un número finito de valores $\{r_1, \dots, r_k\} \in \mathbb{R}^+$ (posiblemente 0), tales que existe θ_i correspondiente r_i tal que

1. $(re^{i\theta}) \nabla 2 = C$.
2. $(r \ln r)^2 + (r\theta)^2 = R_n^2$.

Probaremos una resultado más débil.

Theorem 2.2. Existe un valor $S > 0$ tal que no existe $r < S$ que satisfaga 1. y 2.

Demostración. A partir de (2.6) se obtiene el sistema expresado en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \ln r \\ r\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \alpha \\ \beta + 2\pi n \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Invirtiendo la matriz

$$\begin{pmatrix} r \ln r \\ r\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln \alpha \\ \beta + 2\pi n \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

De la segunda ecuación se deduce

$$r\theta = (\beta + 2\pi n) \cos \theta - \ln \alpha \sin \theta.$$

Sea

$$f(r) = (\beta + 2\pi n) \cos \theta + \ln \alpha \sin \theta + r\theta,$$

donde $\theta = \pm \frac{1}{r} \sqrt{R_n^2 - r^2 \ln^2 r}$. Esta función es real cuando $R_n^2 - r^2 \ln^2 r \geq 0$ y compleja de otro modo. Observe que hemos cambiado el signo a la parte impar de f , puesto que se consideran los dos signos de θ . f es una función continua para valores $r > 0$ donde f es real.

Sea $g(r) = (\beta + 2\pi n) \cos \theta + \ln \alpha \sin \theta$. Se puede probar que g alcanza sus valores máximos y mínimos en $\pm R_n$. El límite cuando $r \rightarrow 0$ de $\sqrt{R_n^2 - r^2 \ln^2 r}$ es R_n , por lo que $\theta \rightarrow \frac{R_n}{r} \rightarrow \infty$, es decir, cuando $r \rightarrow \infty$, $g(r)$ alcanza infinitas veces su valor máximo e infinitas veces su valor mínimo. Además $r\theta \approx R_n - \epsilon_r$, donde ϵ_r es una función creciente de r . En un mínimo cerca de 0, con r pequeño se tiene

$$f(r) = -R_n + (R_n - \epsilon_r) = -\epsilon_r < 0,$$

y en máximo cerca de 0, con r pequeño se tiene

$$f(r) = R_n + (R_n - \epsilon_r) = 2R_n - \epsilon_r.$$

Sea $0 < \delta < 2R_n$. Para r suficientemente pequeño $2R_n - \epsilon_r > \delta$ y ya que ϵ_r es creciente respecto r , $2R_n - \epsilon_{r'} > \delta$, $\forall r' < r$, en todo máximo cercano a 0. Luego existirán infinitos cruces en la banda $[0, r] \times [0, \delta]$. Por continuidad $f(0)$ toma infinitos valores, una contradicción. Esto prueba que $f(0)$ no es un punto límite de ceros de f así que existe un $S > 0$ tal que $[0, S]$ no contiene ningún cero de f . \square

Del teorema anterior se deduce un método para hallar raíces de $z \nabla 2 = C$. Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces se hallan todos los valores r tales que

$$(\beta + 2\pi n) \cos\left(\frac{1}{r}\sqrt{R_n^2 - r^2 \ln^2 r}\right) \pm \ln \alpha \sin\left(\frac{1}{r}\sqrt{R_n^2 - r^2 \ln^2 r}\right) \pm \sqrt{R_n^2 - r^2 \ln^2 r} = 0 \quad (2.12)$$

Se hallan los correspondientes valores de θ y por último se comprueba si $re^{i\theta}$ es una solución de $z \nabla 2 = C$. Experimentalmente los valores de r que satisfacen (2.12) y que son soluciones de $z \nabla 2 = C$ se encuentran siempre como los más grandes (no siempre consecutivos), y siempre son en grupos de 2 o 3 valores de r .

El teorema previo no asegura que no existan puntos límite de ceros de $f(r)$, por lo que podrían existir infinitos valores de r que son soluciones de (2.12) y $z \nabla 2 = C$. Debido a esto en la siguiente sección se propondrá un método diferente para hallar todas las soluciones de $z \nabla 2 = C$ en cada circunferencia de radio R_n .

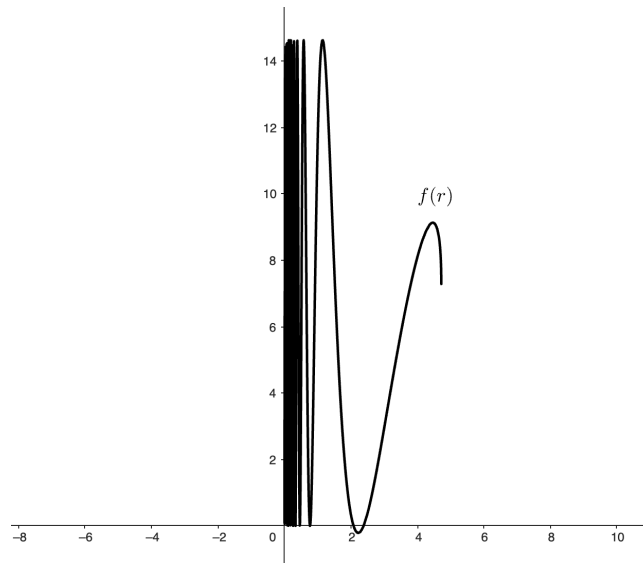


Figura 2.2: $f(r)$ para $\alpha = 2$, $\beta = 1$, y $n = 1$. Note que los máximos están muy cerca de la recta $y = 2\sqrt{\ln(2)^2 + (1 + 2\pi)^2} = 14.632\dots$

2.3. Solución usando el método Delves-Lyness

Esta sección está inspirada por el artículo de Leonard Morris Delves y John N. Lyness [13]. Sea $w \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$, $w = \alpha e^{i\beta}$, con $\alpha > 0$ y $\beta \in (-\pi, \pi]$. Se define

$$\ln w := \log \alpha + i\beta, \quad |w| = \alpha, \quad \arg w = \beta.$$

La superpotencia para valores complejos está dada por

$$z^z := e^{z \log z}, \quad z \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$$

El conjugado complejo es $\bar{w} = \alpha e^{-i\beta}$. Se sabe que $\arctan(z)$ es analítica en todo el plano complejo salvo en $z = \pm i$, y que

$$\arctan(z) = \frac{i}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1 - iz}{1 + iz} \right), \quad \forall z \neq \pm i.$$

Si $\frac{\beta}{\ln \alpha} = \pm i$ entonces $\beta = 2\pi n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $\beta \neq 2\pi n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, entonces $\frac{\beta}{\ln \alpha} \neq \pm i$, por lo que $\arctan\left(\frac{\beta}{\ln \alpha}\right)$ está definido y es

$$\arctan\left(\frac{\beta}{\ln \alpha}\right) = \frac{i}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1 - i \frac{\beta}{\ln \alpha}}{1 + i \frac{\beta}{\ln \alpha}} \right) = \frac{i}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{\ln \alpha - i\beta}{\ln \alpha + i\beta} \right) = \frac{i}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{\operatorname{Log} \bar{w}}{\operatorname{Log} w} \right).$$

Ya que $\frac{\beta}{\ln \alpha} \in \mathbb{R}$, entonces

$$C := \frac{i}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{\operatorname{Log} \bar{w}}{\operatorname{Log} w} \right) \in \mathbb{R}.$$

Sea $\widehat{\theta}(u, v)$ una función real valuada con valores complejos dada por

$$\widehat{\theta}(u, v) = C - \tan^{-1} \left(\frac{v}{u} \right) \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

La superpotencia no está definida en el semieje real negativo, por lo tanto para que

$$\frac{v}{\widehat{\theta}} e^{i\widehat{\theta}} \nabla 2,$$

esté definida, debemos suponer

$$\widehat{\theta} \neq 0, (2n+1)\pi, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.14)$$

es decir v, u no deben satisfacer

$$v = u \tan C.$$

Recíprocamente, si

$$v \neq u \tan C,$$

entonces se cumple (2.14). Sea $R_n^2 = \ln^2 \alpha + \beta^2$. Sabemos que si $z = re^{i\theta}$ es una raíz de $z^z = w$ que también es raíz de

$$f_n(r) = (\beta + 2\pi n) \cos \left(\frac{1}{r} \sqrt{R_n^2 - r^2 \ln^2 r} \right) \pm \ln \alpha \sin \left(\frac{1}{r} \sqrt{R_n^2 - r^2 \ln^2 r} \right) \pm \sqrt{R_n^2 - r^2 \ln^2 r},$$

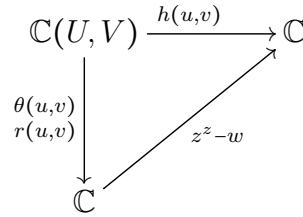
se satisface

$$r^2 \ln^2 r + r^2 \theta^2 = R_n^2.$$

En el plano UV definamos una región abierta Ω que contenga una sección de la circunferencia \mathcal{C} de radio R_n y que contenga un representante (bajo conjugación) de cada raíz r de $z^z = w$ y $f_n(r)$, véase la figura 2.3. Considere la función

$$h(u, v) = \frac{v}{\widehat{\theta}} e^{i\widehat{\theta}} \nabla 2 - w.$$

En un diagrama



Entonces $h(u, v)$ es analítica en Ω por lo que podemos usar el método de Delves-Lyness para encontrar todas las raíces de $h(u, v)$ en Ω . Si (u, v) es una solución particular, entonces definiendo

$$\theta = C - \tan^{-1} \left(\frac{u}{v} \right), \quad r = \frac{v}{\theta},$$

y $z = re^{i\theta}$. En le apéndice se anexa el código de implementación del método teniendo como variables w y $n \in \mathbb{Z}$ que determina el radio R_n . A grosso modo el método de Delves-Lyness consiste en utilizar la integral

$$s_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

cuenta el número de ceros (con multiplicidad) de una función f analítica en una región Ω . Luego se consideran las integrales

$$S_N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} z^N \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^{S_0} z_i^N, \quad N = 1, \dots, S_0,$$

y se construye un polinomio de grado S_0 (usando las identidades de Girard-Newton) cuyas raíces son precisamente las raíces de f en Ω . Luego cada raíz se refina usando un método para encontrar raíces iterativo, como el método de Newton.²

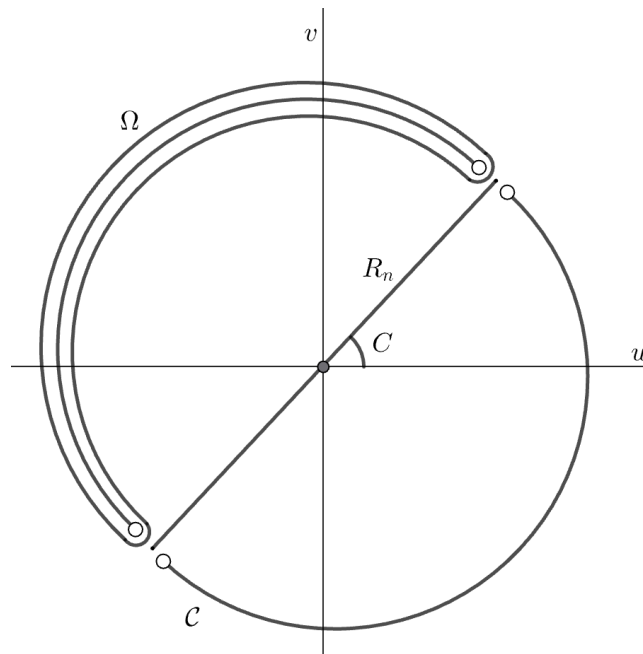


Figura 2.3

²El método empleado en esta sección fue implementado con éxito en 2024.

Example 2.1. Considere la función

$$f(z) = z^z - \frac{1}{16}.$$

La función $f_{n=1}(r)$ tiene dos pares de raíces r_1 y r_2 tales que $z_1 = r_1 e^{i\pm\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\pm\theta_2}$ en anillo de radio R_1 , los cuáles son:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3.7809\dots e^{i\pm 1.2371\dots} = 1.2383\dots \pm 3.5724\dots i \\ z_2 &= 2.2212\dots e^{i\pm 2.9870\dots} = -2.1947\dots \pm 0.3418\dots i. \end{aligned}$$

2.4. Solución algebraica de poli-exponenciales usando la infraradicación

Definition 2.2. Un poli-exponencial es una ecuación de la forma

$$f(z) = p_N(z) + \dots + a_3 p^{p^z} + a_2 p^z + a_1 z + a_0,$$

donde $N \in \mathbb{N}_1$, $p > 0$, y $a_i \in \mathbb{R}$. El grado del poli-exponencial es $N + 1$.

Es bien conocido que cuando $N = 1$, la ecuación

$$f(z) = p^z + az + b,$$

se puede resolver por medio de la función W de Lambert. Mostramos el resultado en términos de la infraradicación y encontraremos todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.3. Supongamos que $p \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R}_0^-\}$, entonces la función $f(z) = p_N(z) + a_3 p^{p^z} + a_2 p^z + a_1 z + a_0$ es analítica en \mathbb{C} .

Demostración. Recordemos que x^y es una abreviación de $e^{y \ln x}$. La función \ln complejo está bien definida en $\mathbb{C} - \{\mathbb{R}_0^-\}$, por lo que $e^{x \ln p}$ es analítica en \mathbb{C} . Ya que composición de funciones analíticas es analítica $p^{p^x} = e^{x \ln(p)} \circ e^{x \ln(p)}$ es analítica. Así sucesivamente. \square

De ahora en adelante supondremos que $p \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R}_0^- \cup \{1\}\}$, pues si $p = 1$ la solución es trivial. Se define $\log_p(z) = \ln(z)/\ln(p)$, donde

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad \arg(z) \in (-\pi, \pi]$$

Note que se ha usado dos veces la notación \ln , esto es por que el logaritmo complejo coincide con el logaritmo real (definida en los reales positivos con una integral). Entonces las soluciones de la ecuación $e^z = w$ son de la forma

$$z = \ln w + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En particular si z es un número complejo que satisface $p^z = w$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $z = \log_p(w) + 2\pi i n \log_p(e)$. Otra observación importante es que $\ln(e^z) = z$ si y solo si $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Si z es un número complejo arbitrario en $\mathbb{C} - \{\mathbb{R}_0^-\}$ entonces $\ln(e^z) = z + 2\pi i n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. De allí que

$$\log_p(e^z) = \frac{z + 2\pi i m}{\ln p}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

dándose la igualdad cuando $\arg z \in (-\pi, \pi]$,

$$\ln(p^z) = z \ln p + 2\pi im, \quad m \in \mathbb{Z},$$

dándose la igualdad cuando $\arg z \ln p \in (-\pi, \pi]$, y

$$\log_p(p^z) = z + \frac{2\pi im}{\ln p},$$

dándose la igualdad cuando $\arg z \ln p \in (-\pi, \pi]$.

2.4.1. Solución general del poli-exponencial de grado 2

Lemma 2.2. *Toda solución de la ecuación*

$$p^z + az + b = 0, \tag{2.15}$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$ es de la forma

$$z = -\frac{b}{a} - \frac{1}{a} \ln_{p^{1/a}} \left[p^{\frac{(-b/a)}{a}} \Omega 2 \right] + \frac{2\pi in}{a \ln p^{1/a}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea z una raíz del poli-exponencial, y considere el cambio de variable $y = az + b$. Entonces y satisface

$$(p^{1/a})^y p^{-b/a} + y = 0.$$

Definiendo $q = p^{1/a}$ y $r = p^{-b/a}$, la ecuación anterior se reescribe

$$q^y r + y = 0 \Rightarrow q^y r = -y,$$

Multiplicando por q^{-y} en ambos miembros se obtiene

$$r = -y q^{-y}.$$

Exponenciando en base q

$$q^r = q^{-y q^{-y}} = q^{-y} \Omega 2.$$

Por lo tanto $q^{-y} \in q^r \Omega 2$. Sea $w \in q^r \Omega 2$ tal que

$$q^{-y} = w,$$

entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$-y = \log_q w + \frac{2\pi in}{\ln q}.$$

Finalmente, retornado a la variable x y despejando

$$z = -\frac{b}{a} - \frac{1}{a} \log_q w - \frac{2\pi in}{a \ln q}, \quad w \in q^r \Omega 2.$$

□

Lemma 2.3. Sea $a \in \mathbb{C}$. Supongamos que $a \Omega 2 \neq 0$ y $\arg((a \Omega 2) \ln(a \Omega 2)) \in (-\pi, \pi]$. Entonces

$$a^{\frac{1}{a \Omega 2}} = a \Omega 2,$$

$$\frac{\ln a}{a \Omega 2} = \ln(a \Omega 2).$$

Demostración.

$$(a \Omega 2) = (a \Omega 2)^{\left(\frac{a \Omega 2}{a \Omega 2}\right)} = e^{\left(\frac{a \Omega 2}{a \Omega 2}\right) \ln(a \Omega 2)} = e^{\frac{1}{a \Omega 2} \ln a} = a^{\frac{1}{a \Omega 2}}.$$

$$\ln a = \ln(a \Omega 2)^{(a \Omega 2)} = (a \Omega 2) \ln(a \Omega 2).$$

□

Si no se cumple la condición $\arg((a \Omega 2) \ln(a \Omega 2)) \in (-\pi, \pi]$, no hay garantía de que se cumpla el lema anterior, por ejemplo, $-2 \in (\frac{1}{4} \Omega 2)$, donde $\arg((-2) \ln(-2)) = -2\pi$. Se tiene

$$(1/4)^{\frac{1}{-2}} = 2 \notin (1/4 \Omega 2).$$

Es decir, no solo no se da la igualdad, si no que el resultado no es una infraradicación de $1/4$. Tampoco se cumple la segunda igualdad pues

$$\frac{\ln(1/4)}{(-2)} = \ln(2) \neq \ln(-2).$$

Lemma 2.4. Sea $a \in \mathbb{C}$. Supongamos que $a \Omega 2 \in \mathbb{R}^-$. Entonces se cumple:

$$a^{\frac{1}{a \Omega 2}} = (a \Omega 2),$$

si y solo si $a \Omega 2 = -(2k + 1)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Sea $w = (a \Omega 2) < 0$ y $\epsilon = -w$. Entonces $\alpha = w^w = e^{-i\pi\epsilon \frac{1}{\epsilon^\epsilon}}$. Supongamos

$$\left(e^{-i\pi\epsilon \frac{1}{\epsilon^\epsilon}}\right)^{\frac{1}{w}} = w = -\epsilon.$$

Entonces

$$\left(e^{-i\pi\epsilon \frac{1}{\epsilon^\epsilon}}\right)^{\frac{1}{w}} = e^{\frac{1}{w} \ln(e^{-i\pi\epsilon \frac{1}{\epsilon^\epsilon}})} = e^{i[-\pi\epsilon]_{\text{mod } 2\pi}} = -\epsilon.$$

Dividiendo por ϵ ,

$$e^{i[-\pi\epsilon]_{\text{mod } 2\pi}} = -1 = e^{i\pi}.$$

Luego $-\pi\epsilon \equiv \pi \pmod{2\pi}$, lo que implica $\epsilon \equiv -1 \pmod{2}$. □

Theorem 2.3. Sea $p \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R}_0^- \cup \{1\}\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Supongamos que $\arg(\frac{1}{a}, \ln p), \arg(p^{-\frac{b}{a}}, \log p^{1/a}) \in (-\pi, \pi]$, entonces el conjunto de soluciones de

$$p^z + az + b = 0, \tag{2.16}$$

es

$$z = \left\{ -\frac{b}{a} - \frac{1}{a} \ln_{p^{1/a}} w \mid \arg(w \ln w) \in (-\pi, \pi], w \in \left(p^{\frac{p(-\frac{b}{a})}{a}} \Omega 2 \right) \right\} \tag{2.17}$$

$$\cup \left\{ -\frac{b}{a} - \frac{p^{-\frac{b}{a}}}{aw} \mid w = -(2k + 1), k \in \mathbb{N}_0, w \in \left(p^{\frac{p(-\frac{b}{a})}{a}} \Omega 2 \right) \right\}$$

Demostración. Antes de usar las hipótesis haré una cuenta general que muestra un poco de la estructura de las soluciones cuando para valores más generales de p, a, b . Sea z una raíz del poli-exponencial. Por el lema 2.2 podemos asumir que z es de la forma

$$z = -\frac{b}{a} - \frac{1}{a} \log_q w - \frac{2\pi i n}{a \ln q}, \quad w \in \left(p^{\frac{(-b)}{a}} \Omega 2 \right). \quad (2.18)$$

Substituyendo en p^z se llega a la expresión

$$p^z = p^{-\frac{b}{a}} w^{-\frac{1}{a} \frac{\ln p}{\ln q}} e^{-\frac{2\pi i n}{a} \frac{\ln p}{\ln q}}.$$

Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\ln p^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} \ln p + 2\pi i k$. Entonces

$$p^z = p^{-\frac{b}{a}} w^{-1} w^{2\pi i k} e^{-4\pi^2 n k}.$$

Note que

$$-(ax + b) = \frac{\ln w}{\ln q} + \frac{2\pi i n}{\ln q}.$$

Ya que z satisface $p^z = -(ax + b)$,

$$p^{-\frac{b}{a}} w^{-1} w^{2\pi i k} e^{-4\pi^2 n k} = \frac{\ln w}{\ln q} + \frac{2\pi i n}{\ln q},$$

equivalentemente

$$\ln(q) p^{-\frac{b}{a}} w^{2\pi i k} e^{-4\pi^2 n k} = w \ln w + w(2\pi i n).$$

Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\ln w^w = w \ln w + 2\pi i m$, entonces

$$\ln(q) p^{-\frac{b}{a}} w^{2\pi i k} e^{-4\pi^2 n k} = \ln q^r + w(2\pi i n) - 2\pi i m.$$

Finalmente si tomamos $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\ln q^{p^{-\frac{b}{a}}} = p^{-\frac{b}{a}} \ln q + 2\pi i l$, entonces

$$(\ln q^r - 2\pi i l) w^{2\pi i k} e^{-4\pi^2 n k} = (\ln q^r - 2\pi i m) + 2\pi i n w.$$

Ahora de acuerdo con las hipótesis $k = l = 0$, por lo tanto la relación anterior se reduce a

$$wn = m.$$

Hay 2 dos casos:

1. $n = 0$. Entonces $m = 0$ lo que indica que $\arg(w \ln w) \in (-\pi, \pi]$, por lo tanto z está en el primer conjunto de (2.17).
2. $n \neq 0$. Entonces $w = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} - \{0\}$. En este caso

$$n = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{\ln q^r}{w} - \ln w \right).$$

Substituyendo en (2.18) se obtiene

$$z = -\frac{b}{a} - \frac{\ln q^r}{aw \ln q} = -\frac{b}{a} - \frac{r}{aw}.$$

Ahora si $w > 0$, entonces se cumple $\arg(w \ln w) \in (-\pi, \pi]$ y además por el lema 2.3

$$z = -\frac{b}{a} - \frac{r}{aw} = -\frac{b}{a} - \frac{r \ln w}{a \ln q^r} = -\frac{b}{a} - \frac{1}{a} \log_q w.$$

Por lo tanto, en este caso z está en el primer conjunto de (2.17). Supongamos $w < 0$, entonces reemplazando en $z = -\frac{b}{a} - \frac{r}{aw}$ en el poli-exponencial se obtiene

$$p^z + az + b = p^{-\frac{b}{a}} e^{-\frac{1}{a} \frac{r}{w} \ln p} - \frac{r}{w} = r \left[(q^r)^{-\frac{1}{w}} - \frac{1}{w} \right],$$

el cual es cero si y solo si $w = -(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$ por lema 2.4. Por lo tanto z necesariamente está en el segundo conjunto de (2.17).

Para ver que cada elemento del conjunto (2.17) es una raíz del poli-exponencial se puede substituir directamente y usar las hipótesis. El resultado dará cero. \square

Observe que los conjuntos que forman (2.17) son disjuntos pues

$$\arg(-(2k+1) \ln(-(2k+1))) = -(2k+1)\pi \notin (-\pi, \pi].$$

También note que los elementos del primer conjunto se pueden reescribir como los elementos del segundo conjunto, pero los elementos del segundo conjunto no se puede reescribir como elementos del primer conjunto.

Inspirado por el teorema 2.3 definiré el discriminante del poli-exponencial de grado 2 $p^z + az + b$ como

$$\Delta = p^{\frac{p(-\frac{b}{a})}{a}}$$

Se puede expresar la base p en función del discriminante: $p = (\Delta^{-b} \Omega 2)^{\frac{b}{a}}$

Cuando se cumplen las hipótesis del teorema 2.3, las soluciones para el caso $w \notin \mathbb{R}_0^-$ se pueden escribir de muchas maneras. A continuación muestro algunas formas alternativas, incluyendo una relacionada con la función W de Lambert.

$$\begin{aligned} z &= -\frac{b}{a} - \frac{1}{a} \log_{p^{1/a}} (\Delta \Omega 2) = -\frac{b}{a} - \log_p (\Delta \Omega 2) = \log_p \log_p (\Delta \Omega 2)^a, \\ &= -\frac{b}{a} + \log_p \left[\left(p^{-\frac{b}{a}} \boxtimes 2 \right)^{\frac{1}{b}} \rhd 0 \right] = -\frac{b}{a} - \log_p \left[\left(p^{\frac{b}{a}} \boxtimes 0 \right)^{\frac{1}{b}} \rhd 2 \right] \\ &= -\frac{b}{a} - \frac{W \left[\frac{p(-\frac{b}{a}) \ln p}{a} \right]}{\ln p}. \end{aligned}$$

Una aplicación interesante sería para resolver la siguiente ecuación:

$$\ln(A + Bx) + Cx = \ln D.$$

Haciendo el cambio de variable $Ax + B = e^t$ se deduce la siguiente expresión

$$e^t + \frac{B}{C}t - \left(A + \frac{B}{C} \ln D \right) = 0,$$

cuya solución general es

$$t = \frac{AC}{B} + \ln D - \ln \left[e^{\frac{C}{B}} \left(e^{\frac{AC}{B} + \ln D} \right) \Omega 2 \right].$$

Retornando a la variable x se obtiene

$$x = \frac{D}{B} \left(\frac{e^{\frac{AC}{B}}}{\left((e^{\frac{AC}{B}} \boxtimes 2)^{\frac{D}{A}} \Omega 2 \right)} \right) - \frac{A}{B} = \frac{1}{C} W \left[\frac{CD e^{\frac{AC}{B}}}{B} \right] - \frac{A}{B}.$$

2.4.2. Poli-exponenciales de grado 3

Los poli-exponenciales de grado 3 son un poco más difíciles de resolver. En esta obra se estudiarán algunas soluciones de casos particulares de formas que no son triviales. Sea

$$f(z) = \sigma^{\sigma^z} + a\sigma^z + bz + c, \quad (2.19)$$

donde $\sigma \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R}_0^- \cup \{1\}\}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$. Si $b = 0$ entonces haciendo la substitución $w = \sigma^z$ se llega a una ecuación de segundo grado

$$\sigma^w + aw + c = 0,$$

que es resoluble por el teorema 2.3. Por lo tanto supondré de ahora en adelante que $b \neq 0$. El exponencial iterado con subíndices negativos se puede interpretar como logaritmos iterados:

$$\sigma_{-k}(z) = \log_{\sigma} \sigma_{-k+1}(z), k \geq 1 \quad \sigma_0(z) = z.$$

Se define la función $f_{-i}(\Delta) = f(\sigma_{-i}(\Delta))$, en particular con $i = 2$

$$\begin{aligned} f_{-2}(\Delta) &= \Delta + a \log_{\sigma} \Delta + b \log_{\sigma} \log_{\sigma} \Delta + c \\ &= \log_{\sigma} \sigma^{\Delta} + \log_{\sigma} \Delta^a + \log_{\sigma} \log_{\sigma}^b \Delta + \log_{\sigma} \sigma^c. \end{aligned}$$

Si Δ es solución de $f_{-2}(\Delta) = 0$ entonces $z = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \Delta$ es una solución de (2.19). Note que $f_{-2}(\Delta) = 0$ implica

$$\begin{aligned} \sigma^{\Delta} \Delta^a \log_{\sigma}^b(\Delta) \sigma^c &= 1 \\ \log_{\sigma}^b(\Delta) \sigma^c &= \Delta^{-a} \sigma^{-\Delta} \\ \log_{\sigma}(\Delta) \sigma^{\frac{c}{b}} &= \Delta^{-\frac{a}{b}} \sigma^{-\frac{\Delta}{b}} \\ \Delta \sigma^{\frac{c}{b}} &= \sigma \left[\Delta^{-\frac{a}{b}} \sigma^{-\frac{\Delta}{b}} \right] \\ \Delta \sigma^{\frac{c}{b}} \sigma^{-\Delta^{-\frac{a}{b}}} \sigma^{-\frac{\Delta}{b}} &= 1 \\ \Delta \left(\frac{\sigma^{\frac{c}{b}}}{b} \right)_{\sigma} \left(\frac{-\Delta^{-\frac{a}{b}}}{b} \right) \sigma^{-\left(\frac{\Delta}{b} \right)} &= 1 \end{aligned}$$

Haciendo $\tau = \sigma^{-\frac{1}{b}}$, $\beta = \frac{\sigma^{\frac{c}{b}}}{b}$ y $\alpha = -\frac{a}{b}$, la última ecuación se simplifica

$$\Delta^{\beta} \tau^{\Delta^{\alpha}} \tau^{\Delta} = 1. \quad (2.20)$$

Llamaré a la ecuación (2.20) la forma normal del poli-exponencial de grado 3. La forma normal suele ser más fácil de resolver que la forma original del poli-exponencial y la ecuación

$$\Delta^{\beta} \tau^{\Delta^{\alpha}} \tau^{\Delta^{\gamma}} = k,$$

puede ser considerado como el análogo de grado 3 de la ecuación que define la función W de Lambert: $We^W = k$. Finalmente tomando logaritmos y expandiendo se llega a la ecuación

$$\alpha \log_{\tau} \Delta + \Delta = \log_{\tau}(-\beta) + \log_{\tau} \log_{\tau} \Delta.$$

Haciendo el cambio de variable $\Delta = \tau^{\tau^{\hat{\Delta}}}$ se llega a la forma reducida del poli-exponencial de grado 3:

$$\tau^{\tau^{\hat{\Delta}}} + \alpha \tau^{\hat{\Delta}} - \hat{\Delta} - \log_{\tau}(-\beta) = 0. \quad (2.21)$$

Note que a diferencia de la forma original, la forma reducida tiene solo 3 parámetros, y se ha eliminado el coeficiente del término de grado 1.

Theorem 2.4. *El poli-exponencial*

$$\sigma^{\sigma^z} + a\sigma^z - az - a \log_{\sigma}(-a) = 0,$$

tiene soluciones de la forma

$$z = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \log_{\sigma} (\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 3)^a.$$

Demostración. En este caso ya que $\tau = \sigma^{\frac{1}{a}}$, $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, entonces la forma normal es

$$\Delta \tau^{\Delta \tau^{\Delta}} = 1.$$

Exponenciando en base τ

$$\tau^{\Delta} \nabla 3 = 1.$$

Por lo tanto

$$\Delta = \log_{\tau}(\tau \Omega 3) = \frac{\ln(\tau \Omega 3)}{\ln(\sigma^{\frac{1}{a}})} = a \frac{\ln(\tau \Omega 3)}{\ln \sigma} = a \log_{\sigma}(\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 3).$$

Entonces

$$z = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \Delta = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \log_{\sigma} (\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 3)^a$$

□

Theorem 2.5. *El poli-exponencial*

$$\sigma^{\sigma^z} + 2a\sigma^z - az - a \log_{\sigma}(-a) = 0,$$

tiene soluciones de la forma

$$z = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \log_{\sigma} (\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 2)^a = \log_{\sigma} \log_{\sigma} (\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 2)^{-1}.$$

Demostración. En este caso $\tau = \sigma^{\frac{1}{a}}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, entonces la forma normal es

$$\Delta \tau^{\Delta^2 \tau^{\Delta}} = 1 \Rightarrow (\tau^{\Delta} \nabla 2)^{\Delta} = \Delta^{-1} \Rightarrow (\tau^{\Delta} \nabla 2) = (\Delta^{-1} \nabla 2),$$

entonces

$$\tau^{\Delta} = (\Delta^{-1} \nabla 2) \Omega 2.$$

Tomando $\Delta^{-1} \in (\Delta^{-1} \nabla 2) \Omega 2$

$$\tau^{\Delta} = \Delta^{-1} \Rightarrow \tau^{\Delta} \nabla 2 = \tau,$$

y despejando Δ

$$\Delta = \log_{\tau}(\tau \Omega 2) = a \log_{\sigma}(\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 2)$$

Por lo tanto la solución del poli-exponencial es

$$z = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \Delta = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \log_{\sigma} (\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 2)^a = \log_{\sigma} \log_{\sigma} (\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 2)^{-1}.$$

□

Theorem 2.6. *El poli-exponencial*

$$\sigma^{\sigma^z} + az + a \log_{\sigma}(-a) = 0,$$

tiene soluciones de la forma

$$z = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \log_{\sigma} (\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 2)^a = \log_{\sigma} \log_{\sigma} (\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 2)^{-1}.$$

Demostración. Se tiene que $\tau = \sigma^{-\frac{1}{a}}$, $\alpha = 0$ y $\beta = -1$. Entonces la forma normal es

$$\Delta^{-1} \tau^{\tau^{\Delta}} = 1,$$

o equivalentemente

$$\tau^{\Delta} \nabla 2 = \Delta \nabla 2.$$

Tomando $\Delta \in (\Delta \nabla 2) \Omega 2$, entonces

$$\tau^{\Delta} = \Delta.$$

Despejando τ y Δ se obtiene

$$\tau^{-1} = \left(\frac{1}{\Delta} \right) \nabla 2 \Rightarrow \Delta = (\tau^{-1} \Omega 2)^{-1}.$$

Finalmente la solución obtenida del poli-exponencial es

$$z = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \Delta = \log_{\sigma} \log_{\sigma} (\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 2)^{-1} = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \log_{\sigma} (\sigma^{\frac{1}{a}} \Omega 2)^a.$$

□

Observe que los 3 poli-exponenciales de los teoremas anteriores son de la forma

$$\sigma^{\sigma^z} + na\sigma^z + \delta(az + a \log_{\sigma}(-a)), \quad n = 0, 1, 2.$$

donde δ es un signo que depende de n . La ecuación

$$\Delta \tau^{\Delta \tau^{\Delta}} = k,$$

tiene por solución $\Delta = \log_{\tau}(\tau^k \Omega 3)$ y $z = \log_{\tau} \Delta$ satisface

$$z + \tau^z \tau^{\tau^z} = \log_{\tau} k,$$

y si $k = 1$, entonces $z = \log_{\tau} \log_{\tau} \Delta$ satisface

$$\tau^{\tau^z} + \tau^z - z - \log_{\tau}(-1) = 0,$$

el cual es un caso particular del teorema 2.4. El teorema 2.5 se puede generalizar como sigue

Proposition 2.4. *Considere el poli-exponencial*

$$\sigma^{\sigma^z} + 2a\sigma^z - az - a \log_{\sigma}(-a) = a \log_{\sigma}(\log_q p).$$

Entonces algunas soluciones z son de la forma

$$z = \log_{\sigma} \log_{\sigma} (q^v \Omega 2)^{-1} = \log_{\sigma} \log_{\sigma} \log_{\sigma} (p^v \Omega 2)^a,$$

donde v viene dado por

$$\sigma^{\frac{1}{a}} = (p^v \Omega 2)^{(q^v \Omega 2)}.$$

Demostración. Sea $\alpha = \frac{1}{a}$. De la relación $\sigma^\alpha = (p^v \Omega 2)^{(q^v \Omega 2)}$, se deduce

$$(q^v \Omega 2)^{-1}(\sigma^\alpha)^{(q^v \Omega 2)^{-1}} = v \log_{(\sigma^\alpha)}(p).$$

Haciendo el cambio de variable

$$v = \log_q(\sigma^{\frac{1}{u}}) \Leftrightarrow u = \frac{1}{\log_\sigma(q^v)},$$

entonces

$$(\sigma^{\frac{1}{u}} \Omega 2)^{-1}(\sigma^\alpha)^{(\sigma^{\frac{1}{u}} \Omega 2)^{-1}} = \frac{1}{u} \log_q \sigma \log_{(\sigma^\alpha)} p.$$

Sea $k = \log_q \sigma \log_{(\sigma^\alpha)} p$, y considere el cambio de variable

$$\sigma^{\sigma^z} - z - j_\sigma = \log_\sigma u \Leftrightarrow \sigma^{\sigma^z} = (\sigma^{\frac{1}{u}} \Omega 2)^{-1}.$$

Entonces

$$(\sigma^{\sigma^z})(\sigma^\alpha)^{(\sigma^{\sigma^z})} = \frac{1}{\sigma^{(\sigma^z - z - j_\sigma)}} k,$$

y tomando logaritmo en base σ

$$\sigma^z + \alpha \sigma^{\sigma^z} = -\sigma^z + z + \log_\sigma(-k).$$

Teniendo que cuenta que

$$\log_\sigma(-k) = \log_\sigma(-a) + \log_\sigma(\log_q p),$$

se obtiene el resultado. □

Note que si $p = q$ entonces obtenemos el teorema 2.5 como caso particular. No es trivial despejar v en función de σ , p , q y a , pero si existiera una fórmula general para las raíces del poli-exponencial de grado 3, entonces debería ser posible hacerlo.

Termino esta sección haciendo un cambio de variable en la formula reducida del poli-exponencial de grado 3 (2.21). Tome $p = \tau^{-\beta^{-1}}$, $\Delta = \frac{1}{\beta} \log_p(-\beta) - \frac{\lambda}{\beta}$, $A = -\alpha\beta^{-1}$ y $B = \beta^{-1}$, entonces (2.21) queda como

$$p^{p^{p^\lambda}} (p^{p^\lambda})^A (p^\lambda)^B = 1,$$

o equivalentemente

$$p_3(\lambda) p_2(\lambda)^A p_1(\lambda)^B = 1.$$

2.5. La ecuación Lotka-Volterra

El modelo depredador-presa propuesta por Alfred J. Lotka en (1925) e independiente-mente por Vito Volterra en (1926) está dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = cy + dxy. \end{cases}$$

donde

- y es la población de depredadores.
- x es la población de presas.
- $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ representan el crecimiento de las dos poblaciones en el tiempo.
- $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son parámetros de interacción.

El cual tiene 2 puntos de equilibrio: $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) = (-a/b, -c/d)$. Se puede deducir fácilmente que la solución del sistema se encuentra sobre el lugar geométrico dado por

$$(dx + c \ln x) - (by + a \ln y) = \ln k,$$

donde $k > 0$ es una constante que depende de la condición inicial. Denotando $\varphi(y) = \frac{\ln k + (by + a \ln y)}{d}$ y $\alpha = \frac{c}{d}$, y haciendo el cambio de variable $x = e^z$, entonces el lugar geométrico queda descrito por

$$e^z + \alpha^{-1}z - \varphi(y) = 0,$$

cuya solución en función de y es

$$z = -\frac{b}{a} - \ln \left(e^{\alpha e^{\alpha \varphi(y)}} \Omega 2 \right).$$

Capítulo 3

La Σ -realización

3.1. Definiciones

Definition 3.1. Sea $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b > 1$. Una Σ -realización de f es una función $S_f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $S_f(0) = f(0)$ y las funciones definidas para cada $c \in [0, b - 1]$

$$S_{f(c)}(x) := S_f(x + c) - S_f(c) + f(c), \quad x \in [0, b - c], \quad (3.1)$$

satisfacen la condición

$$S_{f(c)}(n) = \sum_{t=0}^n f(t + c), \quad n = 0, 1. \quad (3.2)$$

A la propiedad (3.1) le llamo aditividad y se dice que f es Σ -realizable. \square

Observaciones:

1. La condición (3.1) para $c = 0$ es equivalente a

$$S_{f(0)} = S_f.$$

2. La condiciones (3.1) y (3.2) implican que

$$S_{f(c)}(n) = \sum_{t=0}^n f(t + c), \quad \forall n \in \{1, \dots, [b]\},$$

por inducción. Esto es válido para $b = +\infty$.

3. f es Σ -realizable si y solo si existe una función $F : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall c \in [0, b - 1]$,

$$F(1 + c) - F(c) = f(1 + c), \quad F(0) = f(0). \quad (3.3)$$

Por ejemplo tome $F = S_f$. Esta formulación es similar a la ecuación de diferencias de Euler. La idea detrás de la definición (3.1) es transferir la información de F en cada punto $c \in [0, b - 1]$ a la información de cada traslación $f(t + c)$ en el mismo punto $n = 1$. En un modo más general, se pueden considerar isometrías en vez de traslaciones.

Definition 3.2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b - a > 1$. f es Σ -realizable si $g(x) := f(x + a) : [0, b - a] \rightarrow \mathbb{R}$ es Σ -realizable. Si S_g es una Σ -realización de g , entonces

$$S_f(x) := S_g(x - a) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

es una Σ -realización de f . Toda Σ -realización de f es de esta forma. \square

Sea $S_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una Σ -realización de f y supongamos que $a \in \mathbb{N}_0$, entonces $\forall c \in [0, b - a - 1]$,

$$S_{f(c)}(x) := S_f(x + c) - S_f(a + c) + f(a + c), \quad x \in [0, b - c],$$

satisface

$$S_{f(c)}(a + n) = \sum_{t=a}^{a+n} f(t + c), \quad n = 0, 1.$$

Si $a = 0$, las definiciones 1 y 2 son equivalentes. Observe que si $0 < a < b - 1$, $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y

$$\widehat{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

está dado por $\widehat{f}(x) = f(x)$. Entonces una Σ -realización de \widehat{f} es

$$\begin{aligned} S_{\widehat{f}}(x) &:= S_{f(a)}(x - a) \\ &= S_f(x) - S_f(a) + f(a). \end{aligned}$$

Definition 3.3. Una función f es continuamente Σ -realizable si tiene una Σ -realización continua S_f . Se dice que f es diferencialmente Σ -realizable (resp. k veces diferencialmente Σ -realizable) si tiene una Σ -realización que es k veces diferenciable. \square

3.2. Ejemplos

Proposition 3.1. $F(x)$ es una Σ -realización de $\mathbf{0} : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si y solo si F es periódica de periodo 1 y $F(n) = 0$, $\forall n = 0, \dots, \lfloor b \rfloor$.

Demostración. \Rightarrow) Por aditividad, $\forall c \in [0, b - 1)$, $n = 0, \dots, \lfloor b \rfloor$

$$F(n + c) - F(c) = F_c(n) - \mathbf{0}(c) = \sum_{t=0}^n \mathbf{0}(t + c) = 0.$$

\Leftarrow) Si $F(x)$ es periódica y $F(n) = 0$, entonces $F_c(x) := F(x + c) - F(c) + \mathbf{0}(c)$ satisface

$$F_c(n) := F(n + c) - F(c) = 0 = \sum_{t=0}^n \mathbf{0}(t + c).$$

\square

Proposition 3.2 (Unicidad). Sea $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si F y G son Σ -realizaciones de f , entonces $F - G$, Σ -realiza a $\mathbf{0}$. \square

Por las proposiciones anteriores la Σ -realización es única salvo una función periódica de periodo 1 y nula en 0¹. Se define el siguiente subespacio vectorial de funciones

$$\Xi = \{\varphi \mid \varphi \text{ es periódica de periodo 1 y } \varphi(\mathbb{N}_0) = 0\}.$$

Los espacios Ξ^0, Ξ^k , $k \geq 1$, se definen respectivamente como Ξ intersectado con el conjunto de funciones continuas y Ξ intersectado con el conjunto de funciones k veces diferenciables. La notación

$$F = G \quad \text{mód } \Xi,$$

significa que $F - G \in \Xi$, lo cual sucede si y solo si F y G son Σ -realizaciones de una misma función f .

¹En general las soluciones de una ecuación de diferencias de la forma $F(x + h) - F(x) = f(x)$ se diferencian por una función periódica.

Corollary 3.1. Las Σ -realizaciones de f están determinadas por sus valores en $[0, 1]$.

Proposition 3.3 (Existencia). Sea $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b > 1$, y sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(0) = f(0)$. Entonces la función

$$S_f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in [0, 1) \\ g(\{x\}) + \sum_{t=1}^{\lfloor x \rfloor} f(t + \{x\}) & 1 \leq x \leq b \end{cases}$$

es una Σ -realización de f . Si además se cumple que f y g son continuas y

$$g(1) = f(0) + f(1),$$

entonces S_f es una Σ -realización continua de f .

Demostración. Se prueba que S_f es una Σ -realización usando la definición, y la continuidad se debe a que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \{\epsilon\} = 0$ y $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \{1 - \epsilon\} = 1$. \square

Sean S_f y \widehat{S}_f dos Σ -realizaciones de f construidas a partir de g y h como en la proposición 3.3, tales que $g(0) = h(0) = f(0)$, entonces la función periódica $\varphi \in \Xi$ asociada a S_f y \widehat{S}_f es

$$\varphi(x) = \begin{cases} g(x) - h(x) & x \in [0, 1) \\ g(\{x\}) - h(\{x\}) & 1 \leq x \leq b \end{cases}$$

Corollary 3.2. Con la construcción de la proposición 3.3 se deduce:

1. Si f es no negativa entonces existe una Σ -realización S_f de f no negativa.
2. Si f es no decreciente entonces existe una Σ -realización S_f de f no decreciente.

En cada caso si f es continua se puede elegir S_f continua. \square

Proposition 3.4 (Linealidad). Sean $f, g : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, y S_f, S_g dos Σ -realizaciones de f y g respectivamente. Entonces la función

$$S_{cf+g}(x) := cS_f(x) + S_g(x),$$

es una Σ -realización de $f + g$. \square

Por lo tanto si S_{cf+g}, S_f y S_g son Σ -realizaciones arbitrarias de $cf + g, f$, y g , entonces se cumple

$$S_{cf+g} = cS_f + S_g \quad \text{mód } \Xi.$$

Corollary 3.3. Del corolario 3.2 y la linealidad se deduce:

1. Si $f \geq g$, entonces para toda Σ -realización S_g de g existe una Σ -realización S_f de f tal que $S_f(x) \geq S_g(x)$, $\forall x$.
2. Si $f \geq g$, entonces para toda Σ -realización S_f de f existe una Σ -realización S_g de g tal que $S_f(x) \geq S_g(x)$, $\forall x$.

\square

Proposition 3.5. Si S_f es una Σ -realización de $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ entonces, para todo $c \in [0, b - 1]$, $S_{f(c)}(x)$ es una Σ -realización de $x \rightarrow f(x + c)$ en el intervalo $x \in [0, b - c]$. \square

Si se extiende la definición de aditividad a funciones en un intervalo $[a, b]$ con $a < 0$, la proposición 3.5 sigue siendo válida. Si $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una Σ -realización $S_f(x)$ que es lineal y $b \geq 2$, entonces $f(x) = 0$. Más generalmente, para cualquier $b \geq 0$, f es constante en los extremos.

Proposition 3.6. *Sea $\{f_m\}$ una sucesión de funciones tales que $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$, $\forall x$. Si S_{f_m} es una Σ -realización de f_m , $\forall m$, y $S_f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{f_m}(x)$, $\forall x$, entonces S_f es una Σ -realización de f .*

Demostración. Para todo $c \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} S_{f(c)}(n) &:= S_f(n+c) - S_f(c) + f(c) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_{f_m}(n+c) - \lim_{m \rightarrow \infty} S_{f_m}(c) + \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(c) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_{f_m}(n+c) - S_{f_m}(c) + f_m(c) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_{f_m(c)}(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^n f_m(t+c) \\ &= \sum_{t=0}^n \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(t+c) = \sum_{t=0}^n f(t+c). \end{aligned}$$

□

Sea f analítica. Dada una sucesión de funciones analíticas g_n definidas en $[0, 1]$ que converge a g , y las aproximaciones de Taylor f_n de f , se puede construir usando las proposiciones 3.3 y 3.6, una Σ -realización de f . Aunque esta Σ -realización no tiene por que ser diferenciable. Para garantizar la diferenciabilidad infinita se deben imponer condiciones de límite en el punto $x = 1$, lo cual reducirá el espacio de funciones elegibles g hasta que dicho espacio converja a una Σ -realización analítica de f .

Proposition 3.7. *Considere dos funciones f y g continuas y S_f, S_g dos Σ -realizaciones continuas de f y g respectivamente, y $b \in \mathbb{N}_1$. Se tienen las siguientes Σ -realizaciones continuas:*

1.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, b) \\ 0 & x \geq b, \end{cases} \Rightarrow S_h(x) = \begin{cases} S_f(x) & x \in [0, b] \\ S_f(b + \{x\} - 1) & x \geq b, \end{cases}$$

2.

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, b) \\ f(x-b) & x \geq b. \end{cases}, \Rightarrow S_h(x) = \begin{cases} S_f(\{x\} - 1) & x \in [0, b] \\ S_f(x-b) & x \geq b, \end{cases}$$

3.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, b) \\ g(x-b) & x \geq b. \end{cases}, \Rightarrow S_h(x) = \begin{cases} S_f(x) + S_g(\{x\} - 1) & x \in [0, b] \\ S_f(b + \{x\} - 1) + S_g(x-b) & x \geq b, \end{cases}$$

donde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Ver Figura 3.1.

Demostración. 1 y 2 se demuestran considerando los tres casos para $S_{h(c)}(x)$: caso $c < b$ y $n+c < b$, el caso $c < b$ y $n+c \geq b$, y el caso $c \geq b$. 3 se sigue de 1, 2 y linealidad. □

¹ $B_2 = 1/2$

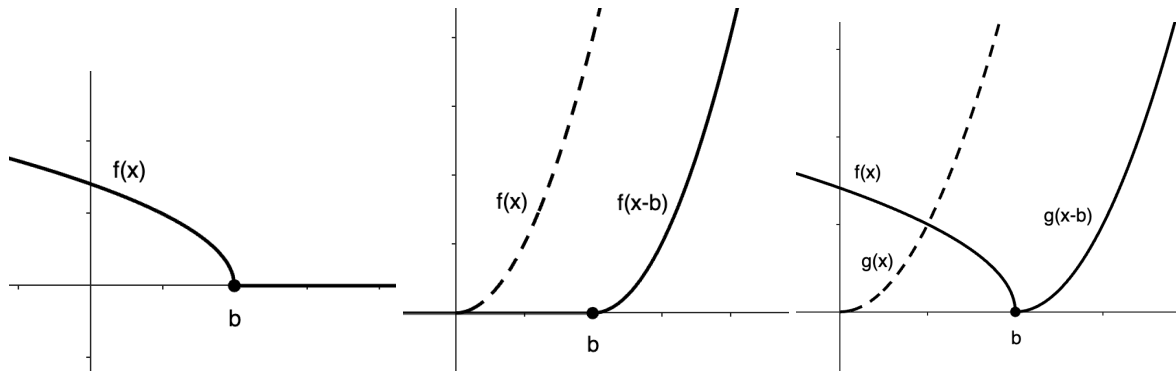


Figura 3.1

Note 3.1. Usando la proposiciones 3.5 y 3.7 se deduce que es posible Σ -realizar una función que tiene la forma de $h(x)$ en el caso 3 de la proposición 3.7, pero donde b está ubicando en un punto arbitrario (x_0, y_0) , $x_0 > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Si F y G son Σ -realizaciones de f , entonces $\frac{F+G}{2}$ es una Σ -realización de f . El promedio finito de Σ -realizaciones de f es una Σ -realización de f . Más generalmente, si $L = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, y F_i , $i = 1, \dots, k$ son Σ -realizaciones de f , entonces $\frac{1}{L} \sum_{i=1}^k \alpha_i F_i$ es una Σ -realización de f . Si una sucesión infinita de promedios de Σ -realizaciones converge a una función F , entonces F es una Σ -realización por la proposición 3.6.

Proposition 3.8. Sean S_f^i Σ -realizaciones continuas de f , $i = 1, \dots, N$, con f continua, entonces

$$\max\{S_f^i\}(x) := S_f^{\arg \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(\{x\})}(x), \quad \forall x \geq 0,$$

es una Σ -realización continua de f y satisface

$$S_f^k(x) \leq \max\{S_f^i\}(x), \quad \forall x \in [0, b], k = 1, \dots, N.$$

Demostración. $\max\{S_f^i\}$ está bien definida:

- $\forall x \in [0, 1)$: sean $m, k \in \arg \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(\{x\})$, entonces

$$S_f^m(x) = S_f^k(x) = \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(x).$$

- $\forall n \in \mathbb{N}_1, x \in [0, 1)$: sean $m, k \in \arg \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(\{n+x\}) = \arg \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(x)$.

Entonces

$$\begin{aligned} S_f^m(n+x) &= S_{f(x)}^m(n) + S_f^m(x) - f(x) \\ &= S_{f(x)}^k(n) + S_f^k(x) - f(x) \\ &= S_f^k(n+x). \end{aligned}$$

$\max\{S_f^i\}$ Σ -realiza a f :

$$\max\{S_f^i\}(x+1) - \max\{S_f^i\}(x) = S_f^{\arg \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(\{x\})}(x+1) - S_f^{\arg \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(\{x\})}(x) = f(x+1).$$

$\max\{S_f^i\}$ es continua: Sea $x_0 \in [0, 1]$ y $\epsilon > 0$. sea $k = \arg \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(\{x\})$. Supongamos

$$\begin{aligned} S_f^j(x_0) &< S_f^k(x_0), \quad \forall j \in A, \\ S_f^i(x_0) &= S_f^k(x_0), \quad \forall i \in B, \end{aligned}$$

donde $A \cup B = \{1, \dots, N\}$, $A \cap B = \emptyset$. Se puede encontrar una bola $B_\delta(x_0) \subset [0, 1]$ tal que $\forall x \in B_\delta(x_0)$,

$$S_f^j(x) < S_f^i(x), \quad \forall j \in A, i \in B,$$

y tal que $\forall x_0 + h \in B_\delta(x_0)$,

$$|S_f^i(x_0 + h) - S_f^i(x_0)| < \epsilon, \quad \forall i \in B.$$

Entonces $\forall x_0 + h \in B_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned} |\max\{S_f^i\}(x_0 + h) - \max\{S_f^i\}(x_0)| &= \left| S_f^{\arg \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(x_0 + h)}(x_0 + h) - S_f^{\arg \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(x_0)}(x_0) \right| \\ &= |S_f^m(x_0 + h) - S_f^k(x_0)|, \quad m, k \in B \\ &\leq |S_f^m(x_0 + h) - S_f^m(x_0)| + |S_f^m(x_0) - S_f^k(x_0)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Cuando $x_0 \in \{0, 1\}$, $A = \emptyset$. $\forall n \in \mathbb{N}_1$, $x \in [0, 1]$ $\max\{S_f^i\}(n + x)$ es continua pues

$$\max\{S_f^i\}(n + x) = \sum_{t=0}^n f(t + x) + \max\{S_f^i\}(x) - f(x).$$

Finalmente, $\max\{S_f^i\}$ es continua en n pues es continua por la izquierda y por la derecha, y los límites coinciden. Veamos que

$$S_f^k(x) \leq \max\{S_f^i\}(x), \quad \forall x \in [0, b], \quad k = 1, \dots, N.$$

- $\forall x \in [0, 1), \forall k = 1, \dots, N,$

$$S_f^k(x) \leq \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(x) = S_f^{\arg \max_{i=1, \dots, N} S_f^i(x)}(x) = \max\{S_f^i\}(x).$$

- $\forall n \in \mathbb{N}_1, x \in [0, 1), \text{ y } k = 1, \dots, N,$

$$S_{f(x)}^k(n) = \sum_{t=0}^n f(t + x) = \max\{S_f^i\}_{f(x)}(n),$$

entonces

$$\begin{aligned} S_f^k(n + x) &= S_{f(x)}^k(n) + S_f^k(x) - f(x) \\ &\leq \max\{S_f^i\}_{f(x)}(n) + \max\{S_f^i\}(x) - f(x) \\ &= \max\{S_f^i\}(n + x). \end{aligned}$$

□

A continuación mostramos una tabla con Σ -realizaciones de algunas funciones simples:

f	S_f	f	S_f
C	$C(x+1)$	$\frac{1}{x+1}$	$\psi^0(x+2) + \gamma$
$x^n, n \geq 1$	$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} B_j x^{n+1-j}$	$\frac{1}{(x+1)^n}, n \geq 2$	$\frac{(-1)^{n-1} \psi^{n-1}(x+2)}{(n-1)!} + \zeta(n)$
a^x	$\frac{a^{x+1}-1}{a-1}$	$\log(x+1)$	$\log(\Gamma(x+2))$
$\sin x$	$\csc\left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+1}{2}\right)$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{2} \left[\operatorname{csch}\left(\frac{1}{2}\right) \cosh\left(x + \frac{1}{2}\right) - \coth\left(\frac{1}{2}\right) \right]$
$\cos x$	$\csc\left(\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+1}{2}\right)$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{2} \left[\operatorname{csch}\left(\frac{1}{2}\right) \sinh\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1 \right]$

Tabla 3.1: Ejemplos de Σ -realizaciones analíticas.

Las fórmulas trigonométricas se pueden generalizar considerando una frecuencia ω y un desfase ϕ , por ejemplo, una Σ -realización de la función $f(x) = \cos(\omega x + \phi)$ es:

$$\frac{\csc(\omega/2)}{2} \left\{ \sin(\omega x) \cos\left(\omega c + \frac{\omega + \phi}{2}\right) + \cos(\omega x) \sin\left(\omega c + \frac{\omega + \phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\omega}{2} + \phi + \omega c\right) - \sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\phi}{2} + \omega c\right) + \sin\left(\frac{\omega}{2} - \phi - \omega c\right) \right\}.$$

3.3. Continuidad

De ahora en adelante continuidad de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto x significará (a menos que se indique lo contrario) continuidad en ambos lados cuando $x \in (a, b)$, y continuidad por un lado cuando $x \in \partial[a, b]$.

Proposition 3.9. *Sea S_f una Σ -realización de f , entonces $S_f(x)$ es continua derecha para todo x si y solo si $S_{f(y)}$ es continua en 0 para todo y .*

Demostración. Se sigue de que $\forall h > 0$,

$$|S_f(x+h) - S_f(x)| < M \Leftrightarrow |S_{f(x)}(h) - S_{f(x)}(0)| < M.$$

□

Proposition 3.10. *Si S_f es una Σ -realización continua de una función continua f , y definida en un intervalo $[-b, b]$, entonces $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_{f(-\epsilon)}(\epsilon) = f(0)$.*

Demostración. Por la continuidad de f , y S_f para $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall 0 \leq \epsilon < \delta$

$$|f(\epsilon) - f(0)| < M, \text{ y } |S_f(\epsilon) - f(0)| < M.$$

Por lo tanto

$$|S_{f(\epsilon)}(-\epsilon) - f(0)| = |S_f(\epsilon) - f(\epsilon)| \leq |S_f(\epsilon) - f(0)| + |f(\epsilon) - f(0)| < 2M.$$

□

La siguiente proposición muestra que conocer como se comporta $S_{f(y)}$, $\forall y$, en un intervalo muy pequeño $[0, \epsilon]$ es suficiente para reconstruir a S_f :

Theorem 3.1 (De reconstrucción). Sea S_f una Σ -realización de f , entonces

$$S_f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} S_f(h) & h \in [0, dx] \\ S_f(dx + h) = S_f(dx)(h) + S_f(dx) - f(dx) \\ S_f(2dx + h) = S_f(2dx)(h) + S_f(2dx) - f(2dx) \\ \dots \\ S_f(Ndx + h) = S_f(Ndx)(h) + S_f(Ndx) - f(Ndx) \end{cases}$$

donde $(N + 1)dx = b$.

La proposición 3.7 muestra que podemos aproximar una Σ -realización de f por medio de segmentos de recta $l(x)$, $x \in [0, \epsilon]$, tal que $l(0) = f(0)$ y $l(\epsilon) = f(\epsilon)$.

3.3.1. Desigualdad del Triángulo

Theorem 3.2 (No negatividad). Sea $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, b]$ continua y continuamente Σ -realizable. Entonces existe una Σ -realización continua de S_f tal que

$$S_f(x) \geq 0, \forall x \in [0, b].$$

Demostración. La idea es demostrar que se puede encontrar una Σ -realización positiva en el intervalo $[0, 1]$ y luego trasladar este resultado usando la aditividad.

Caso 1. Probemos primero que dado f continua y continuamente Σ -realizable, existe una Σ -realización S_f tal que $S_f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Considere cualquier Σ -realización continua S_f de f . Sea φ dado por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_f(x) \geq 0 \text{ y } x \in [0, 1) \\ -S_f(x) & \text{si } S_f(x) < 0 \text{ y } x \in [0, 1) \\ \varphi(x - \lfloor x \rfloor) & x \geq 1. \end{cases}$$

Entonces φ es periódica de periodo 1, y $\varphi(0) = 0$, pues $S_f(0) = f(0) \geq 0$. La continuidad de φ se sigue de la continuidad de S_f en $0, 1$, y los puntos x donde $S_f(x) = 0$. La Σ -realización continua $\widehat{S}_f = S_f + \varphi$ satisface que $\widehat{S}_f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Caso 2. Ahora Probemos el resultado para todo el intervalo $[0, \lfloor b \rfloor]$. Sea S_f una Σ -realización escogido tal que $S_f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Para $n \in \{1, \dots, \lfloor b \rfloor - 1\}$, definase

$$S_{f(n)}(x) := S_f(x + n) - S_f(n) + f(n),$$

el cual es una Σ -realización de

$$g_n(x) := f(x + n), \forall x \in [0, 1].$$

Por la primera parte, existe una Σ -realización \widehat{S}_{g_n} , de g_n , tal que $\widehat{S}_{g_n}(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Entonces

$$\begin{aligned} S_f(n + x) &= S_{f(n)}(x) + S_f(n) - f(n) \\ &= \widehat{S}_{g_n}(x) + \varphi_n(x) + S_f(n - 1) \geq \varphi_n(x), \end{aligned}$$

donde $\varphi_n \in \Xi^0$. Defina

$$\widehat{\varphi}_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi_n(x) \geq 0 \text{ y } x \in [0, 1) \\ -\varphi_n(x) & \text{si } \varphi_n(x) < 0 \text{ y } x \in [0, 1) \\ \widehat{\varphi}_n(x - \lfloor x \rfloor) & x \geq 1. \end{cases}$$

$\widehat{\varphi}_n(x)$ es periódica de periodo 1 por construcción, y $\widehat{\varphi}_n(0) = 0$ pues $\varphi_n(0) = 0$. Note que $\widehat{\varphi}_n(x) \geq 0$, y $\varphi_n(x) + \widehat{\varphi}_n(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Para ver que $\widehat{\varphi}$ es continua, basta ver que es continua en el intervalo $(0, 1)$, y que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \widehat{\varphi}_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \widehat{\varphi}_n(x)$. Sea $x \in (0, 1)$. Si $\varphi_n(x) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$,

$$|\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)| < \frac{\varphi_n(x)}{2} \Rightarrow 0 < \frac{\varphi_n(x)}{2} < \varphi_n(x+h).$$

Por lo tanto, $\forall h \in (-\delta, \delta)$, $\widehat{\varphi}_n(x+h) = 0$ y $\widehat{\varphi}_n$ es continua en x . Si $\varphi_n(x) < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$,

$$|\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)| < -\frac{\varphi_n(x)}{2} \Rightarrow \varphi_n(x+h) < \frac{\varphi_n(x)}{2} < 0.$$

Por lo tanto $\forall h \in (-\delta, \delta)$, $\widehat{\varphi}_n(x+h) = -\varphi_n(x+h)$ y $\widehat{\varphi}_n$ es continua en x . Si $\varphi_n(x) = 0$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$, $|\varphi_n(x+h)| < \epsilon$. Sea $h \in (-\delta, \delta)$. Si $\varphi_n(x+h) \geq 0$, entonces

$$|\widehat{\varphi}_n(x+h) - \widehat{\varphi}_n(x)| = |\widehat{\varphi}_n(x+h)| = 0 < \epsilon,$$

y si $\varphi_n(x+h) < 0$, entonces

$$|\widehat{\varphi}_n(x+h) - \widehat{\varphi}_n(x)| = |-\varphi_n(x+h)| < \epsilon.$$

Por lo tanto $\forall h \in (-\delta, \delta)$, $|\widehat{\varphi}_n(x+h) - \widehat{\varphi}_n(x)| < \epsilon$, y $\widehat{\varphi}_n$ es continua en x . La continuidad en 0^+ y 1^- se prueba de forma similar.

Ahora, sea $\widehat{\varphi}$ dado por

$$\widehat{\varphi}(x) := \sum_{n=1}^{\lfloor b \rfloor - 1} \widehat{\varphi}_n(x), \quad x \geq 0.$$

Entonces $\widehat{\varphi}$ es periódica de periodo 1, continua, no negativa, y nula en cero, por ser suma de funciones con las mismas propiedades. Además

$$\widehat{\varphi}(x) \geq \widehat{\varphi}_n(x), \quad \forall x \geq 0.$$

Considere la Σ -realización de f :

$$\widehat{S}_f = S_f + \widehat{\varphi},$$

que es no negativa en $[0, 1]$. Entonces $\forall x \in [0, 1]$ y $n \in 1, \dots, \lfloor b \rfloor - 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{S}_f(n+x) &= S_f(n+x) + \widehat{\varphi}(n+x) = S_f(n+x) + \widehat{\varphi}(x) \geq S_f(n+x) + \widehat{\varphi}_n(x) \\ &= \widehat{S}_{g_n}(x) + \varphi_n(x) + \widehat{\varphi}_n(x) + S_f(n-1) \geq 0. \end{aligned}$$

Caso 3. Supongamos que $b > 1$ y que $b \notin \mathbb{N}$. Por el caso 2, existe una Σ -realización de S_f de f tal que $S_f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, \lfloor b \rfloor]$. Ahora ya no vale el argumento de que $S_{f(\lfloor b \rfloor)}(x)$ es una

Σ -realización de $g(x) = f(x + \lfloor b \rfloor)$, por que g no está definido en un intervalo $[0, b']$ con $b' > 1$. Por lo tanto se procede como en el caso 1. Sea

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_f(\lfloor b \rfloor + x) \geq 0 \text{ and } x \in [0, b - \lfloor b \rfloor) \\ -S_f(\lfloor b \rfloor + x) & \text{si } S_f(\lfloor b \rfloor + x) < 0 \text{ and } x \in [0, b - \lfloor b \rfloor) \\ \frac{1-x}{1-b+\lfloor b \rfloor} \varphi^-(b - \lfloor b \rfloor) & x \in [b - \lfloor b \rfloor, 1] \\ \varphi(x - \lfloor x \rfloor) & x \geq 1. \end{cases}$$

Por construcción φ es periódica de periodo 1, continua, no negativa y $\varphi(0) = 0$. Por lo tanto $\widehat{S}_f = S + \varphi$ es una Σ -realización tal que $\widehat{S}_f(x) \geq 0, \forall x \in [0, b]$. \square

La idea de esta prueba es asumir que existe una Σ -realización no negativa S_f y que dada alguna otra Σ -realización \widehat{S}_f , esta se puede obtener de S_f por la suma de una función periódica que tiene algunos intervalos muy negativos que hacen negativa a \widehat{S}_f . Luego se pueden construir funciones continuas y periódicas que anulen esas regiones negativas, aunque no se obtenga la función S_f . Se tiene la siguiente conjetura:

Conjecture 3.1. Sea $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, b]$, k veces diferenciable y k veces diferencialmente Σ -realizable. Entonces existe una Σ -realización k veces diferenciable S_f tal que

$$S_f(0) \geq 0, \forall x \in [0, b].$$

Theorem 3.3 (Desigualdad del triángulo). Sea $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y supongamos que f y $|f|$ son continuamente Σ -realizables, definidas en $[0, b]$. Entonces existe una Σ -realización $S_{|f|}$ de $|f|$ que satisface

$$|S_f(b)| \leq S_{|f|}(b).$$

Demostración. Sean S_f y $S_{|f|}$, Σ -realizaciones continuas de f y $|f|$ respectivamente. Sea $c = \pm 1$ tal que

$$cS_f(b) = |S_f(b)|.$$

Sea

$$g(x) := |f(x)| - cf(x) \geq 0, \forall x \in [0, b].$$

Entonces g es continua y continuamente Σ -realizable por ser combinación lineal de funciones continuamente Σ -realizables. Por el teorema 3.2 existe una Σ -realización continua \widehat{S}_g de g , tal que

$$\widehat{S}_g(x) \geq 0, \forall x \in [0, b].$$

Luego, existe una función periódica y continua φ de periodo 1, con $\varphi(0) = 0$, y tal que

$$\widehat{S}_g(x) = S_{|f|}(x) - cS_f(x) + \varphi(x), \forall x \in [0, b].$$

En particular para $x = b$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \widehat{S}_g(b) &= S_{|f|}(b) - cS_f(b) + \varphi(b) \\ &= S_{|f|}(b) + \varphi(b) - |S_f(b)|. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|S_f(b)| \leq S_{|f|}(b) + \varphi(b) = \widehat{S}_{|f|}(b),$$

donde $\widehat{S}_{|f|}(x) := S_{|f|}(x) + \varphi(x), x \in [0, b]$, es una Σ -realización continua de $|f|$. \square

Los teoremas 3.2 y 3.3 se pueden generalizar a Σ -realizaciones sobre intervalos $[a, b]$, con $a > 0$, usando la propiedad de aditividad.

Note que $\widehat{S}_{|f|}$ depende de b , por lo que una prueba de la desigualdad del triángulo uniforme, es decir

$$|S_f(x)| \leq S_{|f|}(x), \quad \forall x \in [0, b],$$

con $S_{|f|}$ fijo, requiere una prueba adicional.

Theorem 3.4 (Desigualdad del triángulo uniforme). *Sea $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $b < +\infty$, f y $|f|$ Σ -realizables continuamente, y S_f una Σ -realización continua de f . Entonces existe una Σ -realización $S_{|f|}$ de $|f|$ continua tal que*

$$|S_f(x)| \leq S_{|f|}(x), \quad \forall x \in [0, b].$$

Demostración. Para cada $x_0 \in [1, b]$ existe $S_{|f|}^{x_0}(x)$ tal que

$$|S_f(x_0)| \leq S_{|f|}^{x_0}(x_0).$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$S_{|f|}^{x_0}(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \text{y que } |S_f(x_0)| < S_{|f|}^{x_0}(x_0), \quad (3.4)$$

(e.g. sumando una función periódica adecuada). Ya que $S_{|f|}^{x_0}$ y $|S_f|$ son funciones continuas y se cumple (3.4), existe una vecindad $B_\delta(x_0)$ tal que $|S_f(x)| < S_{|f|}^{x_0}(x)$, $\forall x \in B_\delta(x_0)$. La familia de vecindades $B_{\delta_{x_0}}(x_0)$, $x_0 \in [1, b]$ es una cubierta abierta de $[1, b]$. Por compacidad existen x_1, \dots, x_N tales que $|S_f(x)| < S_{|f|}^{x_i}(x)$, $\forall i = 1, \dots, N$, en una vecindad $B_{\delta_i}(x_i)$ y las $B_{\delta_i}(x_i)$ cubren a $[1, b]$. Sea $F = \max\{S_{|f|}^{x_i}\}$ que es una Σ -realización continua de $|f|$. Entonces $\forall x \in B_{\delta_i}(x_i)$,

$$|S_f(x)| \leq S_{|f|}^{x_i}(x) \leq F(x).$$

Además, si $x \in [0, 1]$,

$$|S_f(x)| \leq S_{|f|}^{x_k}(x) \leq F(x), \quad \forall k.$$

□

La demostración del teorema 3.4 es válido solo para funciones definidas en un conjunto compacto, pero conjeturo que el teorema es válido también para funciones definidas en \mathbb{R}_0^+ .

Lemma 3.1. $\forall f \geq 0$, Σ -realizable continuamente existe S_f Σ -realización tal que

$$f(0) \leq S_f(x), \quad x \geq 0.$$

Demostración. En la proposición 3.3 tome $g(x)$ como el segmento de recta que conecta $(0, f(0))$ con $(1, f(0) + f(1))$. □

Proposition 3.11. *Sea $f \geq 0$ entonces $\forall x \geq 0$ existe $\varphi_x \in \Xi^0$ tal que*

$$S_f(x + y) - S_f(x) \geq \varphi_x(y), \quad \forall y \geq 0.$$

Demostración. Por el lema 3.1 existe S_g tal que

$$f(x) = g(0) \leq S_g(y), \quad \forall y \geq 0.$$

Se sabe que $S_{f(x)}(y)$ es una Σ -realización de $f(y+x)$, por lo tanto $S_{f(x)}(y) = S_g(y) - \varphi(y)$ donde $\varphi \in \Xi^0$. Por lo tanto

$$f(x) \leq S_g(y) = S_{f(x)}(y) + \varphi(y),$$

$$\varphi(y) \leq S_{f(x)}(y) - f(x) = S_f(x+y) - S_f(x).$$

□

3.4. Diferenciabilidad

Lemma 3.2. Sea S_f una Σ -realización de f y sea

$$F(x, y) = S_{f(y)}(x) := S_f(x+y) - S_f(y) + f(y) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

Entonces

1. Si S_f es diferenciable en $x+y$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = S'_f(x+y).$$

2. Si f es diferenciable en y , y si S_f es diferenciable en $y, x+y$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = S'_f(x+y) - S'_f(y) + f'(y).$$

3. Si S_f es doblemente diferenciable en $x+y$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) F(x, y) = 0.$$

Demostración. Use la definición de derivada como límite y la aditividad. □

Corollary 3.4 (Invarianza de pendientes). Sea f diferenciable y sea S_f una Σ -realización de f diferenciable en y , entonces

$$\frac{d}{dx} S_{f(y)}(x)|_{x=0} = \frac{d}{dy} S_f(y).$$

Esto es, la pendiente de S_f en un punto y es la pendiente de $S_{f(y)}$ en 0.

Otra propiedad interesante que se deduce del lema 3.2 es:

$$\frac{d}{dy} S_{f(y)}(x)|_{y=0} = \frac{d}{dx} S_f(x). \quad (3.5)$$

3.4.1. Teorema Fundamental

Theorem 3.5. Sea f una función diferenciable y S_f una Σ -realización diferenciable de f , ambos definidos en $[0, +\infty)$, entonces

$$S_{f'}(x) := \frac{\partial}{\partial y} S_{f(y)}(x)|_{y=0} = S'_f(x) - (S'_f(0) - f'(0)).$$

es una Σ -realización de f' .

Demostración. La igualdad se da por el lema 3.2. Sea

$$F(x) = \frac{\partial}{\partial y} S_{f(y)}(x)|_{y=0},$$

y

$$F_c(x) := F(x+c) - F(c) + f'(c).$$

Se desea demostrar que

$$F_c(n) = \sum_{t=0}^n f'(t+c), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad c \geq 0.$$

Dado un $h > 0$, sea $g(t) = \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))$, $t \geq 0$, entonces

$$S_g(x) := \frac{1}{h}(S_{f(h)}(x) - S_f(x)),$$

es una Σ -realización de g por linealidad. Con esta notación $F_c(x)$ se escribe como

$$\begin{aligned} F_c(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{S_{f(h)}(x+c) - S_f(x+c) - S_{f(h)}(c) + S_f(c)\} + f'(c), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} S_g(x+c) - S_g(c) + f'(c) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} S_{g(c)}(x) - g(c) + f'(c). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y $c \geq 0$ fijos. Ya que f es diferenciable, $\forall M > 0$ y $t \in \{0, \dots, n\}$, existen $\delta_t, \widehat{\delta} > 0$, tales que $\forall h \in [0, \delta_t)$

$$\left| \frac{f(t+c+h) - f(t+c)}{h} - f'(t+c) \right| < M. \tag{3.7}$$

y $\forall h \in [0, \widehat{\delta})$

$$\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c) \right| < M. \tag{3.8}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_t, \widehat{\delta}\}$, entonces (3.7) y (3.8) se cumplen para todo $h \in [0, \delta)$ y $t \in \{0, \dots, n\}$. Por lo tanto $\forall h \in [0, \delta)$

$$\begin{aligned} &\left| S_{g(c)}(n) - g(c) + f'(c) - \sum_{t=0}^n f'(t+c) \right| \leq \left| S_{g(c)}(n) - \sum_{t=0}^n f'(t+c) \right| + |g(c) - f'(c)| \\ &= \left| \sum_{t=0}^n \frac{f(t+c+h) - f(t+c)}{h} - f'(t+c) \right| + \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c) \right| \\ &< \sum_{t=0}^n \left| \frac{f(t+c+h) - f(t+c)}{h} - f'(t+c) \right| + M < (n+1)M. \end{aligned}$$

Haciendo $M \rightarrow 0$, se obtiene por (3.6)

$$F_c(n) = \sum_{t=0}^n f'(t+c).$$

□

Corollary 3.5. Sea f diferenciable y $S_f, S_{f'}, \Sigma$ -realizaciones de f y f' respectivamente, con S_f diferenciable, entonces se cumple

$$S'_f(x) - S_{f'}(x) = \delta \pmod{\Xi^1},$$

donde δ es una constante que solo depende de S_f .

Definition 3.4. A la constante del corolario le llamo discrepancia (de orden 1) de f .

La definición de discrepancia depende fuertemente de S_f , por lo que se debe aclarar la Σ -realización usada para definir δ . Por ejemplo, si $\widehat{S}_f(x) = S_f(x) + \frac{A}{2\pi} \sin(2\pi x)$, entonces $\widehat{\delta} = \delta + A$.

Sea f un función n veces diferenciable con una Σ -realización S_f n veces diferenciable (posiblemente $n = +\infty$). Por el teorema fundamental, $\forall 1 \leq k \leq n$,

$$0 = \frac{d}{dx}(S_f^{(k-1)}(x) - S_{f^{(k-1)}}(x)) = S_f^{(k)}(x) - S'_{f^{(k-1)}}(x) = S_f^{(k)}(x) - (S_{f^{(k)}}(x) + \delta_k),$$

por lo tanto

$$S_f^{(k)}(x) - S_{f^{(k)}}(x) = \delta_k, \quad \forall k \geq 1 \quad (3.9)$$

donde δ_k es una constante que depende de la elección de S_f . Se define $\delta_0 := 0$ que es consistente con (3.9). Para $k \geq 0$, a la constante δ_k le llamo discrepancia de orden k .

Si se extiende el concepto de aditividad a funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $a \leq 0$, entonces

$$S_f(-1) = S_f(1-1) - S_{f(-1)}(1) + f(-1) = 0.$$

Por lo tanto, $\forall k \geq 1$,

$$S_f^{(k)}(-1) = S_{f^{(k)}}(-1) + \delta_k = \delta_k.$$

Si S_f es analítica en un radio $\rho > 0$

$$S_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} (x+1)^k, \quad \forall x \in (-\rho, \rho).$$

Theorem 3.6. Sea f una función k veces diferenciable y S_f una Σ -realización k veces diferenciable de f . Si $\lim_{x \rightarrow \infty} S_f^{(k)}(x) = 0$, entonces

$$S_f^{(k)}(n) = - \sum_{t=n+1}^{\infty} f^{(k)}(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.10)$$

Demostración. Sea $S_{f^{(k)}}$ definido recursivamente por

$$S_{f^{(k)}}(x) = \frac{d}{dy} S_{f^{(k-1)}}(y)(x)|_{y=0}, \quad \forall k \geq 1.$$

Se comprueba por el teorema 3.5 que $\forall k \geq 1$ y $x \geq 0$,

$$0 = \frac{d}{dx} \left[S_f^{(k-1)}(x) - S_{f^{(k-1)}}(x) \right] = S_f^{(k)}(x) - \frac{d}{dx} S_{f^{(k-1)}}(x) = S_f^{(k)}(x) - \left[S_{f^{(k)}}(x) + S'_{f^{(k-1)}}(0) - f^{(k)}(0) \right].$$

En particular

$$S_f^{(k)}(0) = S'_{f^{(k-1)}}(0). \quad (3.11)$$

También $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$,

$$S_f^{(k)}(m) - S_{f^{(k)}}(m) = S_f^{(k)}(n) - S_{f^{(k)}}(n).$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_f^{(k)}(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{f^{(k)}}(m) + S_f^{(k)}(n) - S_{f^{(k)}}(n) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^m f^{(k)}(t) + S_f^{(k)}(n) - \sum_{t=0}^n f^{(k)}(t) = \sum_{t=n+1}^{\infty} f^{(k)}(t) + S_f^{(k)}(n). \end{aligned}$$

□

Un resultado trivial que se puede interpretar como una versión discreta del teorema 3.5 es:

Proposition 3.12 (Suma telescópica). *Sea $\Delta f(x) := f(x+1) - f(x)$, $\forall x$, entonces dados S_f y $S_{\Delta f}$ Σ -realizaciones de f y Δf respectivamente, se cumple*

$$\Delta S_f(x) - S_{\Delta f}(x) = \Delta S_f(0) - S_{\Delta f}(0) = f(0), \forall x \quad \text{mód } \Xi.$$

Una aplicación directa del teorema 3.5 es poder resolver en términos finitos sumas de la forma:

$$\sum_{t=0}^x f(t)g(t),$$

donde $f(t)$ y $g(t)$ son algunas de las siguientes:

- Un polinomio con grado entero positivo.
- Una función exponencial.
- Una potencia entera positiva de $\sin(x)$ o $\cos(x)$.

3.4.2. Recíproco del Teorema Fundamental

Proposition 3.13. *Sea f diferenciable y S'_f una Σ -realización de f' , entonces*

$$S_f(x) := \int_0^x S_{f'}(u) du + Cx + f(0), \quad (3.12)$$

es una Σ -realización de f para una constante adecuada C .

Corollary 3.6. *Sea f diferenciable y f' analíticamente Σ -realizable, entonces f es analíticamente Σ -realizable.*

En general, si alguna derivada de orden $k > 0$ de f es analíticamente Σ -realizable, entonces f es analíticamente Σ -realizable.

3.4.3. Teorema del Valor Medio

Theorem 3.7 (Del valor medio de la suma). Sea $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y S_f una Σ -realización diferenciable de f . Sea $S_{f'}(x) = S'_f(x) - \delta$ la Σ -realización de f' dada por el teorema 3.5. Entonces existe $c \in [0, b]$ tal que

$$\frac{1}{b} S_f(b) - S_{f'}(c) = \delta + \frac{f(0)}{b}.$$

Demostración. Sea $F(x) = S_f(x)$, $x \in [0, b]$. Por el Teorema del Valor Medio existe $c \in [0, b]$ tal que

$$S_f(b) - f(0) = F(b) - F(0) = F'(c)(b - 0) = (S_{f'}(c) + \delta)b.$$

□

Cuando cambiamos el operador Σ por la integral en el teorema 3.7, el término de discrepancia se anula pues la derivada conmuta con la integral, el último término también se anula pues la integral tiene condición inicial cero, y $S_{f'}(c)$ es igual a f por el Teorema Fundamental del Cálculo, por lo que se obtiene el teorema del valor medio integral de cálculo univariable.

Example 3.1. Sea $f(x) = \log(x+1)$, entonces $S_f(x) = \log(\Gamma(x+2))$, $S_{f'}(y) = H(y+1)$ y $\delta = -\gamma$. Por el teorema 3.7 se deduce que la ecuación

$$\frac{\log(\Gamma(x+2))}{x} - H(y+1) + \gamma = 0,$$

tiene al menos una solución (x, y) para cada $x \geq 0$, tal que $0 \leq y \leq x$. Se puede comprobar que el lugar geométrico de las soluciones positivas están por debajo de la recta $y = x$.

3.5. Construcción

Considere una función que consta de 2 partes como en el caso 3 de la proposición 3.7, pero donde $b = (x_0, T) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Sea S_f una Σ -realización de $f : [-1, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$ y S_g una Σ -realización de $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, véase figura 3.2 (a).

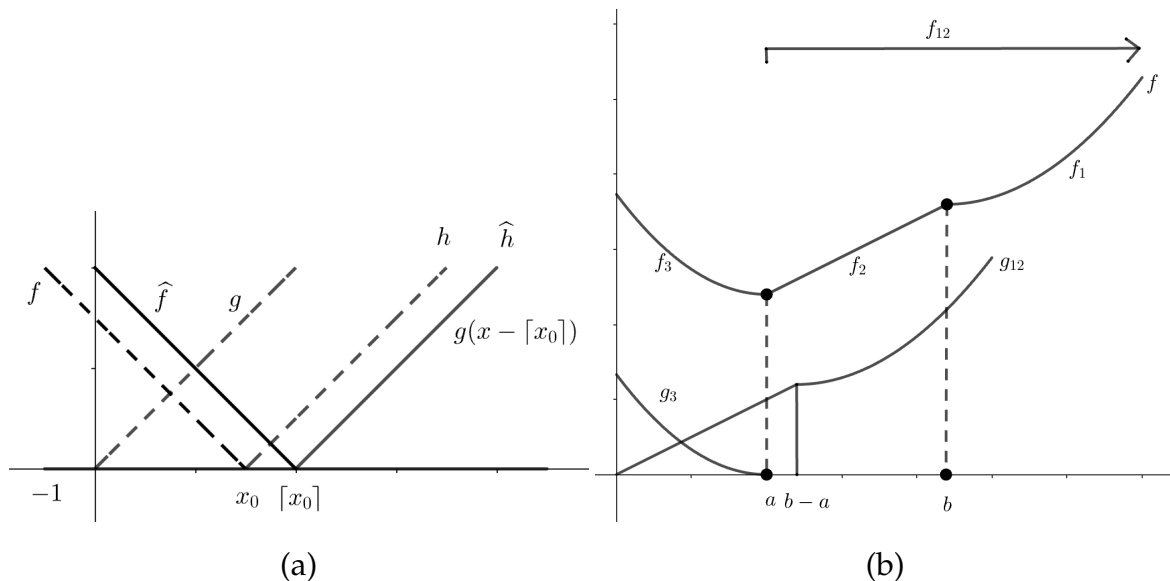


Figura 3.2

Sea

$$\widehat{h}(x) = h(x - 1 + \{x_0\}), \quad \widehat{f}(x) = f(x - 1 + \{x_0\}).$$

Sea $S_{\widehat{h}}(x)$ una Σ -realización de $\widehat{h}(x)$, entonces una Σ -realización de $h(x) = \widehat{h}(x + 1 - \{x_0\})$ es

$$S_h(x) := S_{\widehat{h}(1 - \{x_0\})}(x) = S_{\widehat{h}}(x + 1 - \{x_0\}) - S_{\widehat{h}}(1 - \{x_0\}) + \widehat{h}(1 - \{x_0\}),$$

donde $\widehat{h}(1 - \{x_0\}) = f(0)$. Luego una Σ -realización de $h + T$ es

$$S_{h+T}(x) = S_{\widehat{h}(1 - \{x_0\})}(x) + T(x + 1).$$

Ahora mostramos como Σ -realizar funciones con 3 partes, véase figura 3.2 (b). Sea $\widehat{f}_{12}(x) := f_{12}(x + a)$. Por lo visto arriba, existe una Σ -realización $S_{\widehat{f}_{12}}$ de \widehat{f}_{12} . Sea $g_{12}(x) := \widehat{f}_{12}(x) - \widehat{f}_{12}(0)$ con Σ -realización $S_{g_{12}}(x) = S_{\widehat{f}_{12}}(x) - \widehat{f}_{12}(0)(x + 1)$, y sea $g_3(x) := f_3(x) - f_3(a)$ con Σ -realización $S_{g_3}(x) = S_{f_3}(x) - f_3(a)(x + 1)$. Entonces, como se vio arriba, $f(x)$ se puede Σ -realizar combinando g_3 con g_{12} en el punto $b = (a, f_3(a))$.

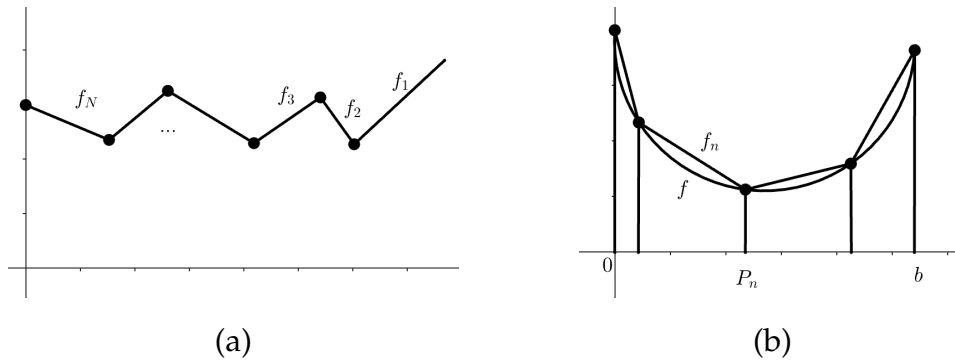
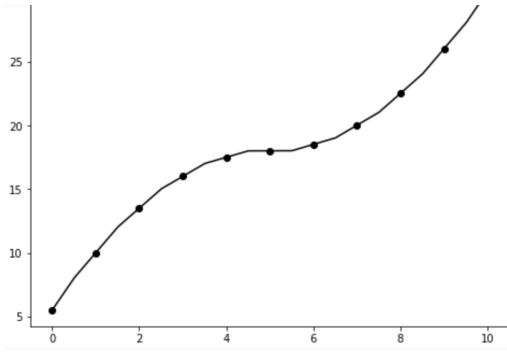


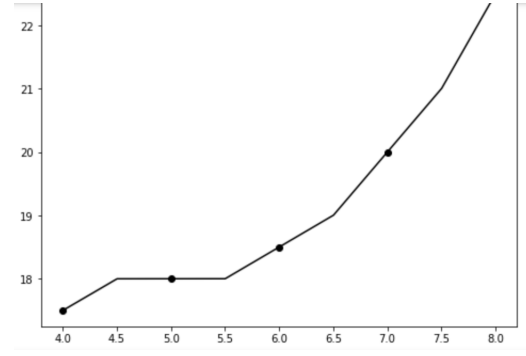
Figura 3.3

De esta manera se pueden Σ -realizar funciones lineales a trozos, como se muestra en la figura 3.3 (a). Sea f una función continua en $[0, +\infty)$. Sea $b > 0$ y $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ particiones de $[0, b]$ en n intervalos. Para cada P_n se construye una función f_n hecha de segmentos de recta cuyos extremos coinciden con f en los puntos que determinan a P_n , véase figura 3.3 (b). Por lo comentado anteriormente, se puede Σ -realizar f_n . Sea S_{f_n} Σ -realizaciones de f_n , $\forall n \in \mathbb{N}$. Si S_{f_n} converge a una función S_f , entonces S_f es una Σ -realización de f por la proposición 3.6.

Example 3.2. Sea $f(x) = |x - 5.5|$, entonces una Σ -realización no decreciente de f (aunque constante en algún intervalo) se construye siguiendo la técnica presentada en esta sección y da como resultado las gráficas de la Figura 3.4.



(a)



(b)

Figura 3.4: (a) Una Σ -realización S_f no decreciente de f . (b) Detalle en el intervalo $[4, 8]$. En el intervalo $[4.5, 5.5]$, S_f es constante.

En el capítulo 4 mostraremos una generalización para ecuaciones funcionales, el cual considera a la Σ -realización, la integral y la derivada como casos particulares. Dicha construcción tiene la ventaja de que es definible para intervalos cerrados y acotados de longitud arbitraria, que luego puede ser generalizado a ciertos conjuntos Borelianos.

3.6. Σ -realización multivariable

Definition 3.5. Sea $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [0, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b > 1$. Una Σ -realización de γ es una función $S_\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que la i -ésima componente de S_γ , es una Σ -realización de γ_i .

Example 3.3. Sea $B(x) = (\cos x, \sin x)$, $x \in [0, 2\pi]$. Usando las Σ -realizaciones de la tabla 3.1, se deduce

$$\begin{aligned}\widehat{B}(x) &= \sum_{t=0}^x B'(t) = \csc(1/2) \sin\left(\frac{x+1}{2}\right) (-\sin(x/2), \cos(x/2)), \\ \tilde{B}(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{t=0}^x B(t) = \frac{\csc(1/2)}{2} (\cos(x+1/2), \sin(x+1/2)).\end{aligned}$$

Por el teorema 3.5, $\widehat{B}(x) - \tilde{B}(x) = C$, por lo que \widehat{B} es una circunferencia de radio $\rho = \frac{\csc(1/2)}{2}$ y trasladado por el vector C . Haciendo $x = 0$ se deduce que $C = (-\frac{\cot(1/2)}{2}, 1/2)$ y $\|C\| = \rho$. Por lo tanto C pertenece a \tilde{B} , véase figura 3.5.

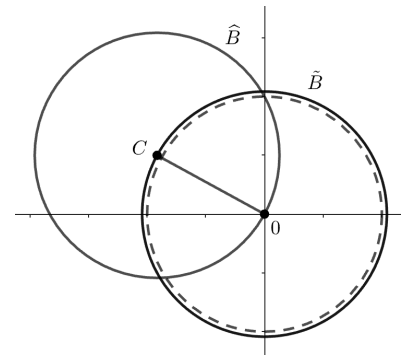


Figura 3.5

Haciendo una analogía directa de la definición de Σ -realización en una variable se obtiene la siguiente definición:

Definition 3.6 (Σ -realización fuerte). Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde $[0, 1]^2 \subset \Omega$ y $\partial[0, 1]^2 \cap \partial\Omega = \emptyset$. Una Σ -realización de f es una función $S_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall \vec{v}, \vec{v} + [0, 1]^2 \subset (\Omega - \partial\Omega)$

$$S_{f(\vec{v})}(\vec{x}) := S_f(\vec{x} + \vec{v}) - S_f(\vec{v}) + f(\vec{v}), \forall \vec{x}, \vec{x} + \vec{v} \in \Omega,$$

satisface

$$S_{f(\vec{v})}((n, m)) = \sum_{r=0}^n \sum_{t=0}^m f((r, t) + \vec{v}), \quad \forall n, m \in \{0, 1\}.$$

Esta definición exige condiciones muy fuertes y no me queda claro si existe una función distinta de cero que sea Σ -realizable con esta definición. Sin embargo, se puede debilitar la definición para que se cumpla la interpolación por los cuatro puntos (n, m) , $n, m \in \{0, 1\}$, y la aditividad se cumpla para todo \vec{v} en un subconjunto de Ω . A partir de ahora se supondrá que $\Omega = \mathbb{R}^n$, aunque los resultados son válidos para conjuntos Ω como en la definición 3.6. También se suprimirá el símbolo de vector (e.g. \vec{v}) siempre que quede claro el contexto.

Definition 3.7 (Σ -realización por 4 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Una Σ -realización de f por 4 puntos en la trayectoria $\phi(v_x, v_y) = 0$ es una función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_v(u) := F(u + v) - F(v) + f(v), \quad (3.13)$$

satisface que $\forall v, \phi(v_x, v_y) = 0$, y

$$F_v((n, m)) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n f((n, m) + v), \quad \forall n, m \in \{0, 1\}.$$

Example 3.4. Sea $f(u) = K$, con $K \neq 0$ constante. Sea $\phi(v_x, v_y) = v_y - (av_x + b)$, $a \neq 0$. Entonces la función

$$F(u) = A + Bu_x + Cu_y + Du_xu_y + Eu_x^2 + Fu_y^2,$$

donde $A = D = K$, $E = -\frac{Ka}{2}$, $F = -\frac{K}{2a}$, $B = K(1 - b + \frac{a}{2})$, $C = \frac{K}{a}(b + a + \frac{1}{2})$, es una Σ -realización de f por 4 puntos a lo largo de ϕ . Observe que $D^2 - 4EF = 0$.

La definición 3.7 tiene muchas variantes. Por ejemplo se podría considerar un conjunto de N puntos $S \subset \mathbb{N}_0^2$, o un sistema de trayectorias $\phi_i(v) = 0$. En más variables las opciones aumentan. Debido a esto y a que las soluciones no coinciden con el concepto de suma finita multivariable propongo una definición más usando Σ -realizaciones marginales.

Definition 3.8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Una Σ -realización de f es una función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $F(x, 0) \Sigma$ -realiza a $f(x, 0)$, $\forall x \geq 0$,
2. $F(0, y) \Sigma$ -realiza a $f(0, y)$, $\forall y \geq 0$.

□

Las condiciones 1 y 2 son equivalentes a

- $\forall v \in \mathbb{R}^2, F_v(0, 0) = f(v)$,
- $\forall v = v_i \delta_i, F_v(\delta_i) = f(v) + f(v + \delta_i)$,

donde $F_v(u)$ está dado por (3.13), y δ_i es un vector de ceros con un uno en la posición i . También 1 y 2 son equivalentes a

- $F(x + 1, 0) - F(x, 0) = f(x + 1, 0)$, $\forall x \geq 0$,
- $F(0, y + 1) - F(0, y) = f(0, y + 1)$, $\forall y \geq 0$,

con la condición inicial $F(0, 0) = f(0, 0)$.

La definición de aditividad es hereditaria en el sentido de que si $g := f(x \sum_k \delta_k)$, es decir f evaluado en x con las k -ésimas componentes iguales a cero, entonces $S_f(x \sum_k \delta_k) \Sigma$ -realiza a g .

Definition 3.9. Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Una Σ -realización de F es una función $S_F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que la i -ésima componente de S_F es una Σ -realización de F_i .

Proposition 3.14. Si F y G son Σ -realizaciones de f y g respectivamente, entonces $cF + G$, Σ -realiza a $cf + g$. \square

Theorem 3.8. Sea $f(x, y) = f_1(x)f_2(y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, S_{f_1} y S_{f_2} , Σ -realizaciones de f_1 y f_2 . Sean δ_1 y δ_2 las discrepancias correspondientes a S_{f_1} y S_{f_2} . Entonces existen Σ -realizaciones $S_{f'_1}$ y $S_{f'_2}$ de f'_1 y f'_2 tales que

$$\begin{aligned} F(x, y) &:= S_{f_1}(x)S_{f_2}(y), \\ G(x, y) &:= [S_{f_2}(y)S_{f'_1}(x), S_{f_1}(x)S_{f'_2}(y)], \end{aligned}$$

son Σ -realizaciones de f y ∇f respectivamente, tales que

$$\nabla F = G + (C_y, C_x),$$

donde $C_y = S_{f_2}(y)\delta_1$, $C_x = S_{f_1}(x)\delta_2$. En particular

$$\operatorname{div}(\nabla F - G) = 0.$$

Demostración. Es fácil probar que F Σ -realiza a f . Sea $F_v^i(u)$ dado por $F_v^i(u) = F(u + v) - F(v) + g_i(v)$, $i = 1, 2$. Entonces

$$\begin{aligned} F_v^1(1, 0) &= g_1(v) + f_1(1 + v_x)S_{f_2}(v_y), \\ F_v^2(0, 1) &= g_2(v) + f_2(1 + v_y)S_{f_1}(v_x). \end{aligned}$$

En particular tomando $g_1(v) = S_{f_2}(v_y)f_1(v_x)$ y $g_2(v) = S_{f_1}(v_x)f_2(v_y)$ se obtiene

$$\begin{aligned} F_v^1(1, 0) &= g_1(v_x, v_y) + g_1(1 + v_x, v_y), \\ F_v^2(0, 1) &= g_2(v_x, v_y) + g_2(v_x, 1 + v_y). \end{aligned}$$

Sea β constante, entonces $F(x, \beta)$ Σ -realiza a $h_1(x) = g_1(x, \beta)$ pues la función $F_w(x, \beta) := F(x + w, \beta) - F(x, \beta) + h_1(x)$, $w \geq 0$, satisface

$$\begin{aligned} F_w(1, \beta) &= F(1 + w, \beta) - F(w, \beta) + g_1(w, \beta) = F_{(w, \beta)}^1(1, 0) \\ &= g_1(w, \beta) + g_1(1 + w, \beta) = h_1(w) + h_1(1 + w). \end{aligned}$$

Análogamente, manteniendo α constante, se deduce que $F(\alpha, y)$ Σ -realiza a $h_2(y) = g_2(\alpha, y)$. Por el teorema 3.5

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = S_{\frac{\partial}{\partial x} S_{f_2}(y)f_1(x)}(x) + C_y = S_{f_2}(y)S_{f'_1}(x) + C_y, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = S_{\frac{\partial}{\partial y} S_{f_1}(x)f_2(y)}(y) + C_x = S_{f_1}(x)S_{f'_2}(y) + C_x, \quad (3.15)$$

donde $S_{f'_1}$ y $S_{f'_2}$ Σ -realizan a f'_1 y f'_2 . Por lo tanto

$$\nabla F(x, y) = [S_{f_2}(y)S_{f'_1}(x), S_{f_1}(x)S_{f'_2}(y)] + [C_y, C_x] = G + [C_y, C_x]. \quad (3.16)$$

Es fácil probar que G Σ -realiza a ∇f . Substituyendo $x = 0$ en (3.14) y $y = 0$ en (3.15) se obtiene

$$\begin{aligned} C_y &= \frac{\partial}{\partial x} F(0, y) - S_{f_2}(y)f'_1(0) = S_{f_2}(y)[S'_{f_1}(0) - f'_1(0)] = S_{f_2}(y)\delta_1, \\ C_x &= \frac{\partial}{\partial y} F(x, 0) - S_{f_1}(x)f'_2(0) = S_{f_1}(x)[S'_{f_2}(0) - f'_2(0)] = S_{f_1}(x)\delta_2. \end{aligned}$$

\square

Note que $S_{f_2}(y)f'_1(0)$ es una Σ -realización de $\frac{\partial}{\partial x}f(0, y)$ y que $S_{f_1}(x)f'_2(0)$ es una Σ -realización de $\frac{\partial}{\partial y}f(x, 0)$.

La demostración del teorema 3.8 se puede generalizar trivialmente a funciones con más de dos variables, es decir para funciones de la forma $f(x) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$, y se puede extender por linealidad a sumas de la forma

$$\sum f_{i,1}(x_1)\cdots f_{i,n}(x_n).$$

Conjecture 3.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y S_f una Σ -realización de f . Sea $S_{\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)}$ una Σ -realización de $\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces

$$\begin{aligned} S_{\nabla f}(x) &:= \nabla S_f(x) - \left[\frac{\partial}{\partial x_i} S_f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \right]_i \\ &+ \left[S_{\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \right]_i, \end{aligned}$$

es una Σ -realización de ∇f . En particular se cumple

$$\operatorname{div}(\nabla S_f - S_{\nabla f}) = 0.$$

Example 3.5. Sea $f(x, y) = \cos(Ax + By)$ y $g(x, y) = \sin(Ax + By)$. Usando la tabla 3.1 se deduce que una Σ -realización de f es

$$F(x, y) = \csc(A/2) \csc(B/2) \operatorname{sen}\left(\frac{A(x+1)}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B(y+1)}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{2}(Ax + By)\right),$$

y la correspondiente Σ -realización de g es

$$G(x, y) = \csc(A/2) \csc(B/2) \operatorname{sen}\left(\frac{A(x+1)}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B(y+1)}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(Ax + By)\right).$$

Luego se calcula

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y) &= \csc(A/2) \csc(B/2) \left[\frac{A}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{B(y+1)}{2}\right) \cos\left(Ax + \frac{A}{2} + \frac{By}{2}\right), \frac{B}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{A(x+1)}{2}\right) \cos\left(By + \frac{B}{2} + \frac{Ax}{2}\right) \right], \\ S_{\nabla f} &= -\csc(A/2) \csc(B/2) \operatorname{sen}\left(\frac{A(x+1)}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B(y+1)}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(Ax + By)\right) [A, B], \\ \nabla F(x, y) - S_{\nabla f}(x, y) &= \csc(A/2) \csc(B/2) \left[\frac{A}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{B(y+1)}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{2}(A - By)\right), \frac{B}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{A(x+1)}{2}\right) \cos\left(\frac{1}{2}(B - Ax)\right) \right]. \end{aligned}$$

3.7. La suma de línea

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi(t) : [0, a] \rightarrow \gamma \subset \Omega$, $a > 1$, $\phi(0) = x_0$, $\phi(a) = x_1$, donde ϕ es el único difeomorfismo que preserve longitud de arco y signo. Una Σ -realización S_f de f en la trayectoria γ , véase figura 3.6 (a), es una función $S_f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall y \in \phi([0, a-1])$,

$$S_{f(y)}(x) := S_f(\phi(\phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y))) - S_f(y) + f(y), \quad \forall x \in \phi([0, a-c]), \quad (3.17)$$

satisface

$$S_{f(y)}(\phi(n)) = \sum_{t=0}^n f(\phi(t + \phi^{-1}(y))), \quad n \in \{0, 1\}.$$

Esta definición es consistente con el concepto de Σ -realización en un intervalo $[a, b]$, siendo ϕ una traslación.

Sea γ una trayectoria formada por la unión de dos trayectorias γ_1 y γ_2 , como se muestra en la figura 3.6 (b). Sean $S_f^1 : \gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $S_f^2 : \gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$, Σ -realizaciones de f en las trayectorias γ_1 y γ_2 , tales que $S_f^1(x_1) = S_f^2(x_2)$. Sea

$$S_f(x) = \begin{cases} S_f^1(x) & x \in \gamma_1 \\ S_f^2(x) & x \in \gamma_2 \end{cases}, \quad (3.18)$$

La parametrización de $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ es

$$\Phi(t) = \begin{cases} \phi(t) & t \in [0, a] \\ \psi(t - a) & t \in [a, b + a] \end{cases},$$

donde ϕ y ψ son las parametrizaciones de γ_1 y γ_2 respectivamente. A partir de la definición se puede verificar que la función

$$S_{f(y)}(x) := S_f(\Phi(\Phi^{-1}(x) + \Phi^{-1}(y))) - S_f(y) + f(y), \quad \forall x \in \Phi([0, b + a - y]),$$

satisface

$$S_{f(y)}(\Phi(n)) = \sum_{t=0}^n f(\Phi(t + \Phi^{-1}(y))), \quad n \in \{0, 1\}, \quad (3.19)$$

para todo $y \in \Phi([0, a - 1] \cup [a, a + b - 1])$. Sin embargo, la única Σ -realización que satisface (3.19) para $y \in \Phi([a - 1, a])$ está dada por

$$S_f^1(y) = S_f^2(\Phi(1 + \Phi^{-1}(y))) - f(\Phi(1 + \Phi^{-1}(y))), \quad y \in \Phi([a - 1, a]) \subset \Phi([0, a]). \quad (3.20)$$

En (3.20) S_f^2 se evalúa sobre la única extensión de S_f^2 a toda la trayectoria.

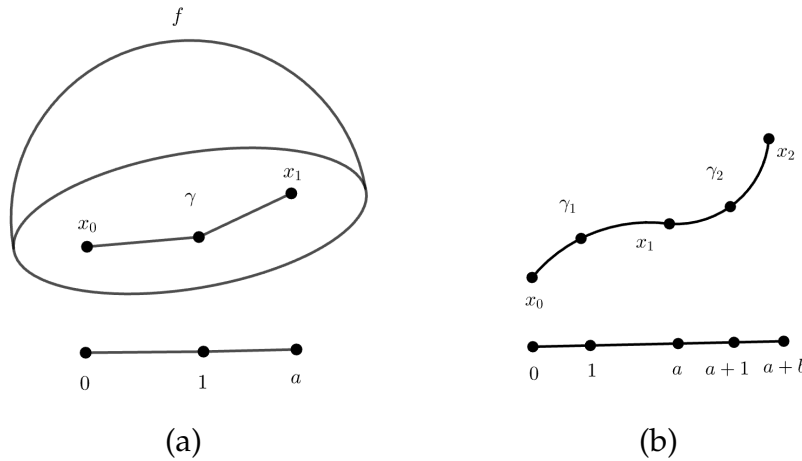


Figura 3.6

Aunque se pueden definir operadores formales que sean análogos a la integral de línea, como por ejemplo

$$\sum_{t=0}^x f(\phi(t))\phi'(t), \quad \sum_{t=0}^x f(\phi(t))\Delta_h\phi(t),$$

de donde se obtienen algunas fórmulas interesantes, no tienen una interpretación geométrica, y dependen de la parametrización ϕ pues no existe una regla de la cadena para la suma ². Observe que la definición se puede generalizar para funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, donde M es una variedad diferenciable.

Definition 3.10. Sea $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$, donde γ está parametrizada por $\phi(t)$, $t \in [0, a]$. La antípoda de f se define por

$$f(\phi(a - \phi^{-1}(x))) : \gamma \rightarrow \mathbb{R}.$$

□

Es trivial que la antípoda de la antípoda de una función es la misma función.

Theorem 3.9. Sea S_f una Σ -realización de f en la trayectoria γ . Entonces la antípoda de S_f es una Σ -realización de la antípoda de f en la trayectoria $-\gamma$.

Demostración. Sea $\widehat{f}(y) := f(\phi(a - \phi^{-1}(y)))$ la antípoda de f , y $\widehat{S_f}(y) = S_f(\phi(a - \phi^{-1}(y)))$ la antípoda de S_f . Sea ϕ la parametrización de γ , entonces la parametrización de $-\gamma$ viene dado por $\widehat{\phi}(t) = \phi(a - t)$. Defínase

$$\widehat{S_{f(y)}}(x) := \widehat{S_f}(\widehat{\phi}(\widehat{\phi}^{-1}(x) + \widehat{\phi}^{-1}(y))) - \widehat{S_f}(y) + \widehat{f}(y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{S_{f(y)}}(\widehat{\phi}(1)) &= \widehat{S_f}(\widehat{\phi}(1 + \widehat{\phi}^{-1}(y))) - \widehat{S_f}(y) + \widehat{f}(y) \\ &= \widehat{S_f}(\phi(\phi^{-1}(y) - 1)) - \widehat{S_f}(y) + \widehat{f}(y) \\ &= S_f(\phi(1 + a - \phi^{-1}(y))) - S_f(\phi(a - \phi^{-1}(y))) + \widehat{f}(y) \\ &= f(\phi(1 + \phi^{-1}[\phi(a - \phi^{-1}(y))])) + \widehat{f}(y) \\ &= f(\phi(1 + a - \phi^{-1}(y))) + f(\phi(a - \phi^{-1}(y))) \\ &= f(\phi(a - \phi^{-1}[\widehat{\phi}(1 + \widehat{\phi}^{-1}(y))])) + f(\phi(a - \phi^{-1}[\widehat{\phi}(0 + \widehat{\phi}^{-1}(y))])) \\ &= \sum_{t=0}^1 \widehat{f}(\widehat{\phi}(t + \widehat{\phi}^{-1}(y))). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\widehat{S_f}$ Σ -realiza a \widehat{f} en la trayectoria $-\gamma$. □

La definición de suma de línea para funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es componente a componente, como en el caso multivariable. El teorema fundamental tiene una versión para sumas de línea. Sea $g(x) = Jf(x)\phi'(\phi^{-1}(x))$, donde J denota el Jacobiano, entonces

$$S_g(x) := JS_f(x)\phi'(\phi^{-1}(x)) - [JS_f(x_0) - Jf(x_0)]\phi'(\phi^{-1}(x_0)),$$

es una Σ -realización de g .

Example 3.6. Sea $f(x) = C$ constante, $x \in \mathbb{R}^n$, y γ parametrizada por $\varphi : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Una Σ -realización de f es:

$$S_f(u) = C(\phi^{-1}(u) + 1).$$

²Sea $\psi(t)$ una función tal que $\sum_{t=0}^{\varphi(x)} f(t) = \sum_{t=0}^x f(\varphi(t))\psi(t)$, entonces $\psi(x) = \frac{1}{f(\varphi(x))} \Delta(S_f \circ \varphi)(x)$, es decir $\psi(t)$ depende de f . Cuando $\varphi(x) = x/N$ (una expansión), entonces $\sum_{t=0}^{Nx} f(t/N)$ contiene aproximadamente N veces cada término de $\sum_{t=0}^x f(t)$. Dividiendo por N y tomando $N \rightarrow \infty$ se obtiene la integral de f . ¿Existe alguna forma de promediar que de como resultado la suma?

Sea $S_{f(v)}(u)$ dada por (3.17), entonces

$$\begin{aligned}
 S_{f(v)}(\phi(1)) &= S_f(\phi(1 + \phi^{-1}(v))) - s_f(v) + f(v) \\
 &= C[\phi^{-1}(\phi(1 + \phi^{-1}(v))) + 1] - C(\phi^{-1}(v) + 1) + C \\
 &= C(1 + \phi^{-1}(v)) + C - C\phi^{-1}(v) \\
 &= 2C = \sum_{t=0}^1 f(\phi(t + \phi^{-1}(v))).
 \end{aligned}$$

3.8. Métodos numéricos

3.8.1. Método usando una base de funciones

El método más simple para Σ -realizar es elegir una base de funciones $\{b_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$, luego Σ -realizar cada elemento de la base y finalmente extender por linealidad. Procediendo de esta manera con la base $\mathfrak{b} = \{x^m\}_{m=0}^{\infty}$ se plantea el límite:

$$S_f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle M \frac{f^{(m)}(0)}{m!}, x^m \right\rangle, \quad (3.21)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/6 & 0 & -1/30 & 0 & 1/42 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/4 & 0 & -1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 1/3 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/2 & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \frac{f^{(m)}(0)}{m!} = \begin{bmatrix} \frac{f(0)}{0!} \\ \frac{f'(0)}{1!} \\ \frac{f''(0)}{2!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \end{bmatrix}.$$

Explícitamente y de forma general

$$\sum_{l=0}^x f(l) = f(0) + \sum_{l=1}^m \widehat{f}_l^m(b) x^l + R, \quad (3.22)$$

en donde

$$\widehat{f}_{l+1}^m(b) = \sum_{k=0}^m \binom{k}{l} \frac{(-1)^{k-l} B_{k-l}}{l+1} \frac{f^k(b)}{k!}, \quad \forall l \geq 0, \quad R = \sum_{l=0}^x \int_b^l \frac{f^{m+1}(t)}{m!} (l-t)^m dt.$$

Una identidad interesante es

$$\widehat{f}_{l+1}^m = \frac{1}{l+1} \widehat{f}_1^{m-l}.$$

Se pueden estudiar otras bases, por ejemplo, una formada por funciones periódicas (no necesariamente de periodo 1). Casi todos los métodos numéricos que he encontrado plantean un problema similar a (3.21). Esto es análogo a la integral expresada de la siguiente manera:

$$\int_0^x f(t) dt = \lim \langle Id^{-1} \cdot f(x_i), \Delta x_i \rangle. \quad (3.23)$$

Se puede observar una conexión entre la ecuación (3.23), el método infinitesimal presentado más adelante y las series asintóticas. En una serie asintótica las sumas parciales divergen, sin embargo se puede alcanzar una buena aproximación usando una cantidad pequeña de términos y la intuición sugiere que debería existir un término de índice no entero para el cual se de la igualdad, el cuál es imposible de alcanzar por un proceso iterativo tradicional. Entonces una propuesta sería subdividir las iteraciones por medio de una matriz infinitesimal que aproxime la serie asintótica, pero converja cuando el tamaño de la matriz tienda a infinito. Entonces el dominio de las iteraciones vendría a ser cambiado de un subconjunto de \mathbb{N}_0 a un conjunto compacto, cuyo extremo final corresponda con el valor correcto.

3.8.2. Método usando la fórmula de Euler-Maclaurin

Sea $f^{(-1)}(x) := \int_0^x f(t)dt$, entonces la fórmula de Euler-Maclaurin es

$$\sum_{i=a+1}^b f(i) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_a^b B_m(\{t\}) f^{(m)}(t) dt, \quad (3.24)$$

donde $a, b \in \mathbb{N}_0$ y $B_m(x)$ son los polinomios de Bernoulli. Por la aditividad (3.1) se tiene

$$\sum_{i=1}^x f(i) = \sum_{i=b+1}^{b+x} f(i) - \sum_{i=1}^b f(i+x) + \sum_{i=1}^b f(i).$$

Entonces substituyendo (3.24),

$$\sum_{i=0}^x f(i) \approx \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k B_k}{k!} [f^{(k-1)}(b+x) - f^{(k-1)}(b)] - \left[\sum_{i=1}^b f(i+x) - f(i) \right] + f(0) \quad (3.25)$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_b^{b+x} B_m(\{t\}) f^{(m)}(t) dt. \quad (3.26)$$

El símbolo de aproximación y no de igualdad se debe a que $b+x$ no es entero. De todos los métodos numéricos que he estudiado, este método es el que obtiene los mejores resultados. Véase la sección 6.6 del apéndice para una implementación del método.

El residuo integral en (3.25) es una buena aproximación del error real.

Theorem 3.10. Si la suma de la derecha de (3.25) converge para alguna sucesión $\{(b_r, m_r)\}_{r=0}^\infty$, cuando $r \rightarrow \infty$, entonces se tiene

$$\sum_{i=0}^x f(i) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m_r} \frac{(-1)^i B_i}{i!} [f^{(i-1)}(b_r+x) - f^{(i-1)}(b_r)] - \left[\sum_{i=1}^{b_r} f(i+x) - f(i) \right] + f(0). \quad (3.27)$$

Aquí hago un abuso de notación, en el entendido de que la Σ -realización que se encuentra es la única Σ -realización analítica (en le sentido de variable compleja) de f , que está garantizada pues (3.3) es una ecuación de Abel.

Demostración. Tomando en la fórmula de Euler-Maclaurin (3.24) $a = 0$, se obtiene

$$\sum_{i=0}^b f(i) = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i B_i}{i!} [f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(0)] + f(0) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^b B_m(\{t\}) f^{(m)}(t) dt.$$

Sea

$$\widehat{f}_1^m(x) := \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i B_i}{i!} f^{(i)}(x). \quad (3.28)$$

Por lo tanto tomando f' en vez de f obtenemos

$$\sum_{i=0}^b f'(i) := \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i B_i}{i!} [f^{(i)}(b) - f^{(i)}(0)] + f'(0) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^b B_m(\{t\}) f^{1+m}(t) dt.$$

Por lo tanto

$$S_{f'}(b) = \widehat{f}_1^m(b) - \widehat{f}_1^m(0) + f'(0) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^b B_m(\{t\}) f^{1+m}(t) dt.$$

Despejamos $\widehat{f}_1^m(0)$,

$$\widehat{f}_1^m(0) = \widehat{f}_1^m(b) - S_{f'}(b) + f'(0) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^b B_m(\{t\}) f^{1+m}(t) dt.$$

Sabemos que

$$\widehat{f(i+x)}_1^m(b) = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i B_i}{i!} f^i(b+x) = \widehat{f}_1^m(b+x).$$

Entonces

$$\widehat{f}_1^m(x) = \widehat{f(i+x)}_1^m(0) = \widehat{f(i+x)}_1^m(b) - S_{f'(i+x)}(b) + f'(x) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^b B_m(\{t\}) f^{1+m}(t+x) dt.$$

Por lo tanto

$$\widehat{f}_1^m(x) = \widehat{f}_1^m(b+x) - S_{f'(i+x)}(b) + f'(x) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^b B_m(\{t\}) f^{1+m}(t+x) dt.$$

Note que

1

$$\begin{aligned} \int_0^x \widehat{f}_l^m(b+u) du &= \sum_{i=0}^m \binom{i}{l} \frac{(-1)^{i+l} B_{i-l}}{l+1} \int_0^x \frac{f^i(b+u)}{i!} du \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{i}{l} \frac{(-1)^{i+l} B_{i-l}}{(l+1)i!} [f^{(i-1)}(b+x) - f^{(i-1)}(b)] \\ &= \widehat{f}^{-1}_l^m(b+x) - \widehat{f}^{-1}_l^m(b). \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} \int_0^x S_{f'(i+u)}(b) du &= \int_0^x \sum_{i=0}^b f'(i+u) du \\ &= \sum_{i=0}^b \int_0^x f'(i+u) du \\ &= \sum_{i=0}^b [f(i+x) - f(i)]. \end{aligned}$$

3

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0).$$

4

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^b B_m(\{t\}) f^{(1+m)}(t+u) dt du &= \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^b B_m(\{t\}) \left[\int_0^x f^{(1+m)}(t+u) du \right] dt \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^b B_m(\{t\}) [f^m(t+x) - f^m(t)] dt. \end{aligned}$$

Ya que asumimos que S_f es analítica, entonces por el teorema de invarianza y la expansión de orden 1 de la serie de Taylor de $S'_{f(x)}$ se tiene

$$S'_f(x) = S'_{f(i+x)}(0) = \widehat{f}_1^\infty(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{f}_1^m(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^x S'_f(t) dt &= \int_0^x \widehat{f}_1^\infty(t) dt, \\ &= \widehat{f}_1^{-1}{}^\infty(t) \Big|_0^{b+x} - \sum_{i=1}^b [f(i+x) - f(i)], \end{aligned}$$

pero

$$\int_0^x S'_f(t) dt = S_f(x) - S_f(0) = S_f(x) - f(0),$$

por lo tanto

$$S_f(x) = \widehat{f}_1^{-1}{}^\infty(t) \Big|_0^{b+x} - \sum_{i=1}^b [f(i+x) - f(i)] + f(0).$$

□

3.8.3. Generalización de la fórmula de Euler-Maclaurin

Sea g una función integrable y defínase recursivamente

$$\varphi_0(x) = g'(x), \varphi_1(x) = g(x) + \beta_1, \varphi_i(x) := \int_0^{\{x\}} \varphi_{i-1}(u) du + \beta_i, i \geq 2,$$

con las condiciones:

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(1), \forall i \geq 2, g(0) \neq g(1).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n f(i) &= \frac{1}{d} \left\{ \int_0^n f(x) g'(\{x\}) dx - [g(0)f(n) - g(1)f(0)] + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (f^{i-1}(n) - f^{i-1}(0)) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{2i-1} (f^{2i-2}(n) - f^{2i-2}(0)) \right\} + \frac{R}{d}, \end{aligned}$$

donde $d = g(1) - g(0)$ y

$$R = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^n f^{(m)}(t) \varphi_m(\{t\}) dt.$$

En particular si

$$\lim_{b,m} f^m(b+x) \cdot \sup_{[0,1]} |\varphi_m(x)| = 0,$$

entonces S_f vendría dada por una fórmula análoga a (3.27).

3.8.4. La Σ -realización como límite de una sucesión de EDO's

La fórmula de Euler-Maclaurin se deduce como la solución de la ecuación diferencial

$$(e^D - 1)F = f(x + 1)$$

con la condición inicial $F(-1) = 0$. Definiendo $g_N(x) := f(x + (1 - 1/N))$, entonces se puede plantear la siguiente sucesión de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left[\frac{(1 + D)^N}{N^N} - 1 \right] F = f \left(x + \left(1 - \frac{1}{N} \right) \right) = g_N(x).$$

Una solución particular para cada N es

$$y_0(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \exp\{(\zeta_N^{N-1} \cdot N - 1)x\} \zeta_N^i \int_{x_0}^x g_N(t) e^{-(\zeta_N^i \cdot N-1)t} dt,$$

donde ζ_N es una raíz N -ésima primitiva de 1. La solución general viene dada por

$$y(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \exp\{(\zeta_N^i \cdot N - 1)x\} c_i + \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_N^i \int_{x_0}^x g_N(t) e^{-(\zeta_N^i \cdot N-1)(t-x)} dt.$$

3

3.9. Ecuaciones funcionales

Definition 3.11. Sea $G(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ analítica, $\psi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, todas analíticas, y sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces la ecuación funcional asociada a (G, ψ_i, f) es

$$G(F(\psi_1(x)), \dots, F(\psi_n(x))) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.29)$$

donde F es una función incógnita a encontrar. Una solución F de (3.29) es una función

$$F : \bigcup_{i=1}^n \psi_i([a, b]) \rightarrow \mathbb{R},$$

que al componer en (3.29) se obtiene la identidad $\forall x \in [a, b]$. Se impondrán las $n - 1$ condiciones iniciales para garantizar la unicidad de la solución (en caso de que exista),

$$F(\psi_i(0)) = C_i, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Se puede representar simbólicamente la ecuación funcional (3.29) como $G(F) = f$, y entonces el conjunto de soluciones se denota $G^{-1}(f)$. Si F es una solución se tiene $F \in G^{-1}(f)$. Note que $G(F) = G(F(\psi_1(x)), \dots, F(\psi_n(x)))$ es un funcional con variable F , a un funcional de esta forma le llamare un puente funcional (por la analogía de las ψ_i con los arcos de un puente, véase figura 3.7).

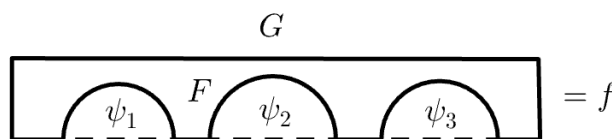


Figura 3.7

³Dos curiosidades: $\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\zeta_N^i}{(N\zeta_N^i - 1)} = \frac{N^N}{N^N - 1}$, $\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\zeta_N^i}{(N\zeta_N^i - 1)^2} = \frac{N^{N+1}}{(N^N - 1)^2}$.

Se define el núcleo del puente funcional $G(F)$ como $G^{-1}(0)$, donde 0 es la función cero en todo punto.

La serie de Taylor de G es

$$G(u) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i u_i + R_G,$$

donde R_G es el resto de la serie y

$$A_0 = G(F(\psi_1(0)), \dots, F(\psi_n(0))) = f(0), \text{ y } A_i = \frac{\partial}{\partial u_i} (F(\psi_1(0)), \dots, F(\psi_n(0))).$$

Podemos aproximar linealmente cada ψ_i por medio de su serie de Taylor:

$$\psi_i(x) = \omega_i x + \theta_i + R_i,$$

donde $\omega_i, \theta_i \in \mathbb{R}$ y R_i es el resto de la serie. Entonces una aproximación lineal de (3.29) vendría dada por resolver la ecuación de diferencias lineal

$$A_0 + \sum_{i=1}^n A_i F(\omega_i x + \theta_i) = f(x). \quad (3.30)$$

Example 3.7. La ecuación de Abel $F(x+1) = G(a_0, F(x))$ es de la forma (3.29), en particular, la superpotenciación ⁴ se puede definir como la solución $F(x)$ de la ecuación funcional

$$F(x+1) - e^{F(x)} = \log \log a_0,$$

cuya aproximación lineal es

$$F(x+1) - F(x) = \log \log a_0 + 1.$$

A continuación mostraré dos métodos para solucionar la ecuación (3.30), los cuales pueden ser generalizados para aproximar soluciones de G usando cualquier orden de aproximación.

3.9.1. Método 1: Asumiendo que f es infinitamente diferenciable

Se desea un polinomio $P(x) = \sum_{i=0}^r x^i$, tal que

$$L_p(x) := A_0 + \sum_{i=1}^n A_i P(\omega_i x + \theta_i),$$

satisfaga

$$L_p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \quad \forall 0 \leq k \leq r-1.$$

Entonces se forma un sistema de ecuaciones lineales con r ecuaciones y $r+1$ incógnitas. Se agrega la condición $a_0 = C$, que solo variará las soluciones obtenidas por una traslación.

⁴Lo que generalmente se conoce como tetración.

Entonces se obtiene explícitamente:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \left[\frac{l!}{(l-k)!} \sum_{i=0}^n A_i \omega_i \theta_i^{l-k} \right]_{k \leq l} \end{array} \right)}_M \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix}}_a = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ f(0) - A_0 \\ f'(0) \\ \vdots \\ f^{r-1}(0) \end{bmatrix}}_g,$$

el cual puede ser resuelto para a siempre que $\det M \neq 0$. Entonces, cuando el grado r del polinomio

$$P_r(x) = \langle M^{-1}g, [x^i]_{i=0}^r \rangle = \sum_{i=0}^r (M^{-1}g)_i x^i,$$

tiende a infinito y P_r converge, obtenemos una solución de (3.30) dado por $F(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} P_r(x)$.

Example 3.8. Sea $G(x, y) = x^2 + 5xy + y^3$, $\psi_1(x) = x + 1$, $\psi_2(x) = x$ y $f(x) = e^x$, es decir se tiene la ecuación funcional

$$F(x+1)^2 + 5F(x+1)F(x) + F(x)^3 = e^x,$$

con condición inicial $F(0) = 2$. El valor $F(1) = -5 \pm 3\sqrt{2}$ se obtiene como una raíz de (3.29). Entonces una aproximación de la solución F viene dado por resolver la ecuación de diferencias lineal

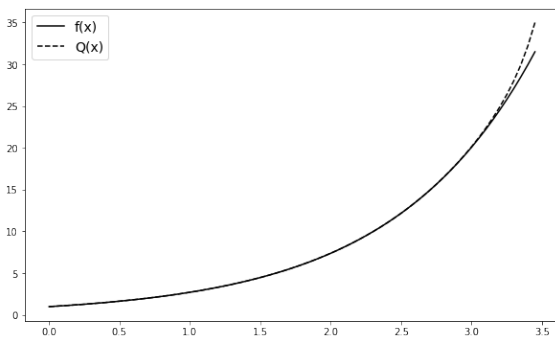
$$G(F(1), F(0)) + AF(x+1) + BF(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

donde

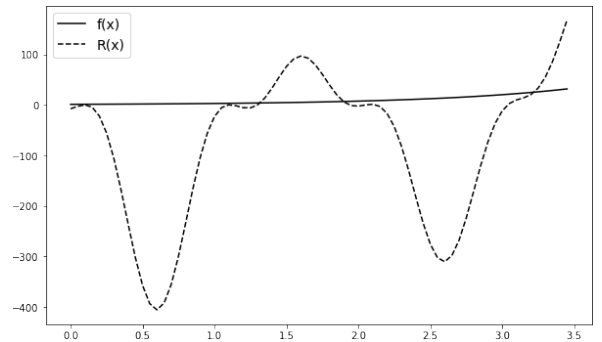
$$A = [2x + 5y]_{(F(1), F(0))} = \pm 6\sqrt{2}, \quad B = [5x + 3y^2]_{(F(1), F(0))} = -13 \pm 15\sqrt{2}.$$

Sea $F(x)$ la solución dada por el método numérico. Defínase

$$\begin{aligned} Q(x) &= G(F(1), F(0)) + AF(x+1) + BF(x), \\ R(x) &= F(x+1)^2 + 5F(x+1)F(x) + F(x)^3. \end{aligned}$$



(a)



(b)

Figura 3.8

En la figura 3.8 se observa que $F(x)$ resuelve con mucha precisión la ecuación de diferencias lineal, sin embargo solo aproxima a la ecuación funcional original en los puntos $n \in \mathbb{N}_0$. En medio de los intervalos $[n, n+1]$ existe una incertidumbre que se puede reducir usando una aproximación de mayor orden de la serie de Taylor de G . Dichas aproximaciones involucran polinomios multivariables que se pueden encontrar por medio de métodos de optimización. Generalmente, el método no converge al intentar resolver (3.3) para funciones que crecen rápido, sin embargo, encuentra polinomios $P(x)$ tales que $\int_0^1 |P(t+1) - P(t) - f(t+1)| dt < \epsilon$, donde ϵ puede ser tomado arbitrariamente pequeño. Véase la sección 6.6 del apéndice para una implementación del método.

3.9.2. Método 2: Método infinitesimal

En esta sección solo se considerará resolver el problema de encontrar una Σ -realización de una función f . La idea es encontrar en una familia de funciones Ξ , una subfamilia $P_{f(y)}(x)$, $y \geq 0$ que satisfaga lo mejor posible la aditividad, es decir, una solución al problema variacional:

$$\min_{P_{f(y)} \in \Xi} \iint_{\Omega} |P_{f(y)}(x) - P_f(x+y) + P_f(y) - f(y)| d\Omega,$$

donde $\Omega = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$, y $P_f = P_{f(0)}$.

Considere una familia de polinomios

$$P_{f(y)}(x) = \sum_{k=0}^d a_k^y x^k, \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

Partir el intervalo $[0, 1]$ en N subintervalos con N puntos como se muestra en la figura 3.9.



Figura 3.9

$\forall x_i, x_j$ se debe cumplir

$$P_f(x_i + x_j) = P_{f(x_i)}(x_j) + P_f(x_i) - f(x_i),$$

es decir

$$\sum_{k=0}^d a_k^0 (x_i + x_j)^k = \sum_{k=0}^d a_k^{x_i} x_j^k + \sum_{k=0}^d a_k^0 x_i^k - f(x_i). \quad (3.31)$$

Pero $P_f(0) = f(0) = a_0^0$, y $P_{f(x_i)}(0) = f(x_i) = a_0^{x_i}$, por lo que (3.31) se reescribe como

$$\sum_{k=1}^d a_k^{x_i} x_j^k + \sum_{k=1}^d a_k^0 (x_i^k - (x_i + x_j)^k) = 0. \quad (3.32)$$

Además, por (3.2) se desea la siguiente condición

$$P_{f(x_i)}(1) = \sum_{k=0}^d a_k^{x_i} = f(x_i) + f(1 + x_i),$$

o equivalentemente

$$\sum_{k=0}^d a_k^{x_i} = f(1 + x_i). \quad (3.33)$$

Con (3.32) y (3.33) se construye el siguiente sistema lineal

$$MA = F,$$

donde M , A y F se definen como sigue:

$$a_k^{x_i} = [a_1^{x_i}, \dots, a_d^{x_i}]^T, \quad a_k^0 = [a_1^0, \dots, a_d^0], \quad f_i = f(1 + x_i),$$

y

$$A = [a_k^{x_1}, \dots, a_k^{x_n}, a_k^0], \quad F = [0, \dots, 0, f_1, \dots, f_n],$$

$$B_{ij}^k = x_i^k - (x_i + x_j)^k, \quad B_i = \begin{bmatrix} B_{i1}^1 & \dots & B_{i1}^d \\ \vdots & & \vdots \\ B_{in}^1 & \dots & B_{in}^d \end{bmatrix}, \quad B = [B_1, \dots, B_n]^T, \quad V = \begin{bmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^d \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^d \end{bmatrix},$$

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} \overbrace{V \dots 0}^{dn} & \overbrace{B_1}^d \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & V & B_n \\ \hline 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} I_{n^2} \cdot x_j^k & x_i^k - (x_i + x_j)^k \\ I_n \cdot 1^k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

entendiéndose que la k se extiende hacia la derecha y las I_m se extienden en diagonal. Para que M sea cuadrado debemos igualar columnas y renglones, es decir, $dn + d = n^2 + n$, lo que nos lleva a $d = n$. Es fácil comprobar que

$$CV^{-1}B = \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \prod_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq j}} \frac{1 - x_m}{x_m - x_j} B_{ij}^k \right]_{ik} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \prod_{\substack{1 \leq m \leq n \\ m \neq j}} [B_{ij}^k]_{ik}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq d.$$

Ya que el complemento de Schur de M es $-CV^{-1}B$, entonces

$$\det M = -\det V \det(CV^{-1}B).$$

Ya que $\det V = x_1 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$, entonces M es invertible si y solo si $\det(CV^{-1}B) \neq 0$. También se tiene que

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} V^{-1} - V^{-1}B(CV^{-1}B)^{-1}CV^{-1} & V^{-1}B(CV^{-1}B)^{-1} \\ (CV^{-1}B)^{-1}CV^{-1} & -(CV^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Luego el sistema original $A = M^{-1}F$ es

$$\begin{bmatrix} a_k^{x_i} \\ a_k^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & -(CV^{-1}M)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(1+x_i) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto tomando los últimos n renglones, obtenemos el siguiente sistema reducido:

$$a_k^0 = -(CV^{-1}B)^{-1}f(1+x_i),$$

que calcula los coeficientes de $P_f(x)$. Si definimos $L = -(CV^{-1}B)^{-1}$, se tiene la siguiente fórmula cerrada:

$$L_{ij} = \frac{1}{D_j} \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \frac{n!}{n-k} \binom{n-k}{i} B_{n-k-i} E_j^k,$$

donde $E_j^k = \sum x_{m_1} \cdots x_{m_k}$, $m_l \neq k$, $\forall l$, y $D_j = n! \prod_{i \neq j} (x_j - x_i)$. Se deduce entonces que $M^{-1} = BS$, donde

$$B = \left[(-1)^k \frac{n!}{n-k} \binom{n-k}{i} B_{n-k-i} \right]_{n-k-i \geq 0}, \quad S = \left[\frac{E_j^k}{n! \prod_{i \neq j} (x_j - x_i)} \right]_{kj}.$$

A una matriz de la forma S , es decir, formada por polinomios elementales le llamo matriz infinitesimal por su relación con una partición de un intervalo. Finalmente la Σ -realización viene dada por

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M^{-1}f(1+x_j), x^k \rangle. \quad (3.35)$$

Este método puede ser extendido para intervalos arbitrarios $[a, b]$, y también puede ser generalizado para resolver ecuaciones de diferencias lineales y ecuaciones funcionales como se verá en la sección 3.11. Véase la sección 6.6 del apéndice para una implementación del método.

Una cota sencilla para $P_f(x)$ es

$$|P_f(x) - f(0)| \leq \sup_{x \in [0,1]} f(1+x) \sum_{k,j} |L_{kj}|.$$

Example 3.9. Para la implementación, se puede escoger cualquiera de las fórmulas mostradas anteriormente para calcular M^{-1} . Entonces una Σ -realización de $g(x) = (x+1)^{(x+1)}$ nos da

$$\sum_{t=0}^{1/2} (1+t)^{(1+t)} = 2.219...$$

Esta aproximación fue calculada usando los dos métodos. Sea $f(x) = x^x$, entonces por la aditividad

$$S_f(x) = S_{f(1)}(x-1) + f(0) \Rightarrow S_f(1.5) = S_{f(1)}(0.5) + f(0) = 3.219...$$

3.10. Relación con la geometría

Aunque la suma satisface una propiedad de aditividad, como la integral, no es un concepto intrínsecamente geométrico. Aún así muchas propiedades se pueden deducir haciendo analogías con la integral. Empezamos explicando por qué no es un concepto geométrico.

Definition 3.12. Un operador invariante bajo traslaciones es un operador F que actúa sobre funciones $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denotado $F_f(x, y) := F(f)(x, y)$, que satisface

$$F_{f \circ \Phi^{-1}}(\Phi(x), \Phi(y)) = F_f(x, y),$$

para toda traslación Φ . \square

En particular, la integral, la curvatura, y la longitud de arco, son operadores que son invariantes bajo traslaciones. Sin embargo, la función $S_{f(y)}(x)$ no es un operador invariante bajo traslaciones pues

$$S_{f \circ \Phi^{-1}}(\Phi(x), y) = S_f(x, y).$$

Una manera informal de interpretar la suma es como un volumen o área bajo f , pero donde el dominio tiene una deformación.

Considere el volumen acotado por los planos $X = x$, $X = y$, $Y = 0$, $Z = 0$, $Z = 1$, y la superficie $S = \{(x, f(x), z) \mid z \in [0, 1]\}$ (véase figura 3.10 a). Denotemos por $a_f(x, y)$ el área de la superficie S y $A_f(x, y)$ el área exterior total del volumen descrito anteriormente. Específicamente:

$$A_f(x, y) = \begin{cases} \text{Área del volumen} & \text{si } x < y \\ 2f(x) & \text{si } y \leq x \end{cases}.$$

El valor cuando $y \leq x$ se elige de manera que A_f es continua y definida $\forall x, y$. Entonces

$$A_f(x, y) = (y - x) + f(x) + f(y) + 2 \int_x^y f(t) dt + a_f(x, y), \quad x < y.$$

Con la fórmula anterior se deduce la siguiente aditividad que depende de f y es análoga a la aditividad:

$$A_{f(x)}(y) = A_f(y) - A_f(x) + 2f(x),$$

donde $A_{f(x)}(y) := A_f(x, y)$ y $A_f(x) := A_f(0, x)$. También se puede considerar la función $B_f(x, y) = A_f(x, y) + f(x + y)$. En este caso se cumple

$$B_{f(x)}(y) = B_f(x + y) - B_f(x) + f(x) - [A_f(x + y) + A_f(y) - 2f(x)],$$

que se parece a la aditividad salvo los términos con A_f .

Otra aditividad inducida geoméricamente consiste en considerar la superficie de revolución generada por $f(x)$ respecto al eje X y los planos $X = x$ y $X = y$, y opcionalmente el plano $Z = 0$.

Por la invarianza de pendientes, corolario 3.4, la Σ -realización se puede plantear como una homotopía $H(x, t)$ tal que

$$1. \quad H(x, 0) = g_1(x).$$

$$2. H(x, 1) = g_2(x).$$

$$3. \frac{\partial^+}{\partial t} H(x, 0) = \frac{\partial^+}{\partial t} H(0, t), \text{ (condición de frontera).}$$

Donde $g_1(x) = f(x)$ y $g_2(x) = f(x) + f(x+1)$. La solución buscada debe ser al menos C^1 , véase la figura 3.10 b.

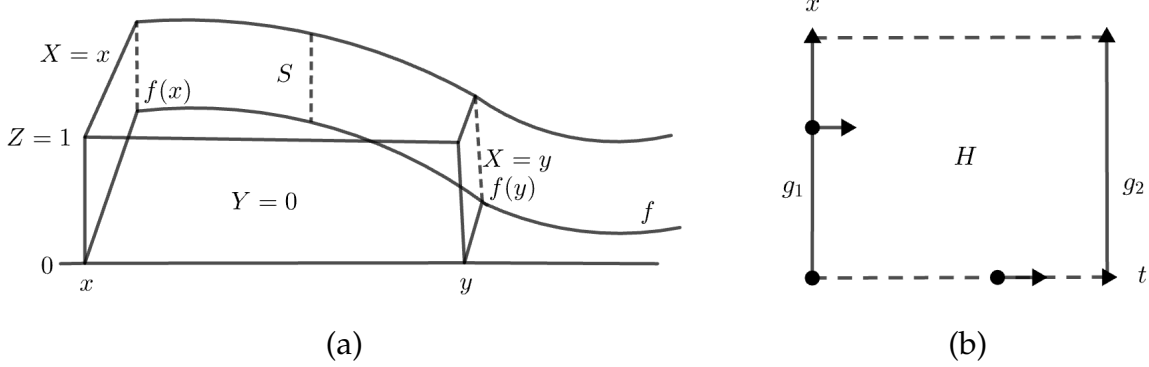


Figura 3.10

En relación con las funciones periódicas, el conjunto $\{1, s_n, c_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $s_n = \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$ y $c_n = \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$, es una base del espacio de funciones periódicas con periodo T . Si nos restringimos a funciones analíticas periódicas, entonces la Σ -realización es única y podemos definir el siguiente producto

$$\langle f, g \rangle = \sum_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t) := S_{fg}\left(\frac{T}{2}\right) - S_{fg}\left(-\frac{T}{2}\right) + (fg)\left(-\frac{T}{2}\right).$$

Se puede comprobar que se tienen las identidades:

$$\langle 1, 1 \rangle = T + 1, \langle 1, s_n \rangle = 0, \langle 1, c_n \rangle = (-1)^n, \forall n \geq 1, \langle s_n, c_m \rangle = 0, \forall n, m \geq 1,$$

$$\langle s_n, s_m \rangle = \begin{cases} \frac{T}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}, \langle c_n, c_m \rangle = \begin{cases} \frac{T}{2} + 1 & m = n \\ (-1)^{m+n} & m \neq n \end{cases}.$$

Usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt obtenemos una base ortonormal $\{\frac{1}{T+1}, \widehat{s}_k, \widehat{v}_k\}_{k=1}^{\infty}$, donde

$$\widehat{s}_k = \frac{2}{T} s_k, \widehat{v}_k = \frac{2(T + (2k-1))}{T(T + (2k+1))} \left[c_k + \frac{(-1)^{k+1}}{T + (2k-1)} \left(2 \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^l c_l + 1 \right) \right].$$

3.11. Generalizaciones e interpretaciones

3.11.1. Σ -homotopía

La definición de Σ -realización y el corolario 3.1 sugieren una interpretación como homotopía donde el concepto de continuidad es reemplazado por la aditividad. Una Σ -realización H de f restringido a $[0, b-1] \times [0, 1]$ satisface:

$$1. H(\theta, 0) = g_1(\theta), \forall \theta,$$

2. $H(\theta, 1) = g_2(\theta), \forall \theta,$
3. $H(\theta, t) = H(0, t + \theta) - H(0, \theta) + f(\theta), \forall (\theta, t) \in [0, b-1] \times [0, 1],$

donde $g_1(\theta) = f(\theta)$ y $g_2(\theta) = f(\theta) + f(\theta + 1)$. Una H con estas propiedades determina una única Σ -realización por el corolario 3.1 y la proposición 3.5.

Definition 3.13. Sea $\{\psi_\theta^i(t)\}$ familias de funciones parametrizadas por $\theta \in [0, 1]$, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$. Sean $G_i(\theta)$ y $A_i(\theta, t)$ funciones fijas. Una Σ -homotopía es una función $H(\theta, t)$ tal que

1. $H(\theta, 0) = G_1(\theta),$
2. $H(\theta, 1) = G_2(\theta),$
3. $H(\theta, t) = \sum_{i=1}^n A_i(\theta, t)H(0, t + \psi_\theta^i(t)) + G_3(\theta).$

□

Este problema puede ser resuelto usando el método 2 de la sección 3.9. Entonces, si $G_1(\theta) - G_3(\theta) = f(\theta) - A_0(\theta)$, evaluando el punto 3 en $t = 0$, y usando el punto 1, se obtiene

$$\sum_{i=1}^n A_i(\theta, 0)H(0, \psi_\theta^i(0)) = G_1(\theta) - G_3(\theta) = f(\theta) - A_0(\theta). \quad (3.36)$$

Definiendo $A_i(\theta) = A_i(\theta, 0)$, y $F(t) = H(0, t)$, y $\psi_i(\theta) = \psi_\theta^i(0)$, entonces (3.36) es equivalente a

$$A_0(\theta) + \sum_{i=1}^n A_i(\theta)F(\psi_i(\theta)) = f(\theta).$$

Es decir, se tiene una solución de la ecuación de diferencias lineal (3.30). Se sugiere la notación $H_{f(\theta)}(t) := H(\theta, t)$ y $H_f(t) = H(0, t)$ para hacer explícita la dependencia de f y θ .

La generalización a ecuaciones funcionales no lineales se hace como en la sección 3.9, definiendo

$$H_{f(\theta)} = Q(H_f(t + \psi_1(\theta)), \dots, H_f(t + \psi_n(\theta))) + G_3(\theta).$$

3.11.2. Los operadores Δ^φ y Δ_φ

Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $X = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $F: X \rightarrow X$. Se definen $\Delta^\varphi F$ y $\Delta_\varphi F$ por

$$\begin{aligned} \Delta^\varphi F: X &\longrightarrow X \\ f &\longmapsto [F(f) \circ \varphi](x) - [F(f) \circ \varphi](0), \\ \Delta_\varphi F: X &\longrightarrow X \\ f &\longmapsto F(f \circ \varphi)(x) - F(f \circ \varphi)(0). \end{aligned}$$

Considere el problema de encontrar un operador F tal que

1. $F(f \circ \varphi_\theta)(0) = G(f, \theta)$, (condición inicial).
2. $(\Delta^\varphi - \Delta_\varphi)F = 0$.

Haciendo $\varphi_\theta(x) = x + \theta$, entonces la Σ -realización satisface el problema anterior cuando $G(f, \theta) = f(\theta)$, y la integración lo satisface cuando $G(f, \theta) = 0$. A cada φ_θ le llamaré una dirección en analogía con la derivada direccional.

3.11.3. O -realización

Sea Ω un monoide y $\Omega' \subseteq \Omega$ un submonoide. Por ejemplo $\Omega' = \mathbb{N}_0$ y $\Omega = \mathbb{R}_0$. Sean $X = \{g \mid g : \Omega \rightarrow K\}$, $X' = \{g \mid g : \Omega' \rightarrow K\}$, donde K es un espacio vectorial, $O : X' \rightarrow X$ y $O_f := O(f)$, $\forall f \in X'$. Para cada $p \in \Omega$ se define la función traslación como

$$\begin{aligned} T_p : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ q &\longmapsto p * q. \end{aligned}$$

Sea $f : \Omega \rightarrow K$ y $f \circ T_p \upharpoonright \Omega' : \Omega' \rightarrow K$ la restricción de $f \circ T_p$ a Ω' . Denote

$$O_{f(p)} := O_{f \circ T_p \upharpoonright \Omega'} \in X', \quad O_f = O_{f(0)}.$$

Se dirá que f es O -realizable si existe $\widehat{O}_f \in X$ tal que

$$\widehat{O} \upharpoonright_{\Omega'} = O_f,$$

y la función definida para cada $p \in \Omega$

$$\begin{aligned} \widehat{O}_{f(p)} : \Omega &\longrightarrow K \\ \widehat{O}_{f(p)}(x) &\mapsto \widehat{O}_f(p * x) - \widehat{O}_f(p) + O_{f(p)}(0), \end{aligned}$$

extiende a $O_{f(p)}$, es decir

$$\widehat{O}_{f(p)} \upharpoonright_{\Omega'} = O_{f(p)}.$$

Esta definición incluye a los operadores aditivos como la integral y la identidad.

3.12. Conjetura: la Σ -realización canónica de una función no negativa

En este capítulo se enunciarán 3 conjeturas que, de ser ciertas, nos permitirían definir una Σ -realización canónica para cada función continua y no negativa.

Un resultado de cálculo es que si una función f es no negativa en un intervalo $[a, b]$, entonces la integral de f en ese intervalo es no decreciente. Experimentalmente he llegado a la siguiente conjetura:

Conjecture 3.3. Si f es continua y continuamente Σ -realizable, y satisface $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, b]$, entonces existe una Σ -realización S_f continua y no decreciente.

Si la conjetura 3.3 es cierta, entonces, dado $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa existe

$$s := \inf \left\{ \int_0^b S_f(x) dx \mid S_f \text{ es una } \Sigma\text{-realización de } f, \text{ no decreciente y continua} \right\}.$$

Conjecture 3.4. Existe una única Σ -realización S_f^0 no decreciente y continua tal que $\int_0^b S_f(x) dx = s$.

De ser cierta la conjetura 3.4, S_f^0 es consistente con las restricciones, equivalentemente no depende del intervalo elegido, i.e. es un concepto geométrico. Para ver esto, sea $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $1 < a < b$, continuas y no negativas, y $f(x) = g(x)$, $\forall x \in [0, a]$. Sean S_f^0 y S_g^0 las Σ -realizaciones canónicas de f y g respectivamente. Entonces si $S_g^0|_{[0, a]} \neq S_f^0$, la extensión de S_f^0 a $[0, b]$ tendría una integral estrictamente menor que S_g^0 , una contradicción.

La última conjetura es:

Conjecture 3.5. *Sea $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no negativa y analítica, entonces la Σ -realización canónica coincide con la única Σ -realización analítica, cuando esta existe.*

El teorema de Bohr-Morellup relaciona el concepto de convexidad con la función gamma, por lo que conjeturo que existe una relación íntima entre la convexidad y la Σ -realización. Lo que sí puedo afirmar (apoyado en argumentos geométricos) es que si existe una Σ -realización convexa y dos veces diferenciable S_f de f , entonces toda Σ -realización de f es eventualmente monótona creciente. Esto es porque S'_f es monótona creciente y la pendiente de una función periódica y diferenciable está acotada. También, me parece interesante estudiar las consecuencias de la fórmula que se deduce de la aditividad:

$$S_f(1-x) - S_f(-x) = f(1-x).$$

3.13. Notas del capítulo

Este capítulo es un intento de formalizar el estudio de las sumas finitas de funciones no discretas, donde existe infinita información de f . Creo que es posible extender este enfoque a muchos operadores discretos que actúan sobre funciones discretas, pero que pueden extenderse a funciones continuas satisfaciendo alguna ecuación de diferencias. El diagrama (3.37) muestra un esquema de este enfoque.

El nombre de Σ -realización es analogía con los grupos realizables de la teoría de grupos, y puesto que la propuesta es extender la suma al dominio real.

Finalmente, una aplicación de esta teoría sería para sobremuestreo de un conjunto de datos discreto f , combinando la diferencia discreta, una interpolación y luego una Σ -realización.

$$\begin{array}{ccc}
 f : \mathbb{R}_0 & \xrightarrow{f} & \int f \\
 \downarrow \uparrow & \searrow S_f & \downarrow \text{discretización} \\
 f : \mathbb{N}_0 & \xrightarrow{\Sigma} & \Sigma f
 \end{array} \tag{3.37}$$

Capítulo 4

Constructibilidad de Funcionales Generales

En esta sección estudiará un método de resolver problemas inversos $G(F) = f$, satisfaciendo algunas propiedades o axiomas de constructibilidad. En particular el método aplica para puentes funcionales $G(F(\psi_1(x)), \dots, F(\psi_n(x))) = f(x)$, pero no se restringe a ellas, pues que permite resolver también ecuaciones diferenciales, ecuaciones de diferencias-diferenciables, ecuaciones integrales, etc. En efecto la solución propuesta en este capítulo es una generalización del concepto de integral de Riemann que no distingue entre el concepto de Σ -analitización e integral, y que incluso ve a la integral y a la derivada como objetos del mismo tipo.

Sea \widehat{X} el conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre un intervalo I , donde I puede ser abierto, cerrado semiabierto, acotado o no acotado. Un funcional general es una aplicación $G : X \subseteq \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$, donde X es el dominio de G , $\text{dom } G$, y

$$G(F, I) = (\widehat{F}, I),$$

para algún $\widehat{F} \in \widehat{X}$ definido en I . Es decir G envía funciones continuas definidas en un intervalo a funciones continuas definidas en el mismo intervalo. La imagen de G se denota $\text{img } G^1$.

Dado una funcional general se puede plantear el problema inverso

$$F = G^{-1}(f),$$

donde $f \in \text{img } G$ está definida en un intervalo I y se desea encontrar F , definida en I tal que

$$G(F) = f.$$

Example 4.1. Un puente funcional es un funcional general.

Example 4.2. Sea G la derivada (definida en ambos lados de un punto), definida sobre las funciones C^1 (en particular continuas), es un funcional general y el problema inverso es la integración.

¹El marco correcto de definición sería la teoría de gavillas sobre σ -álgebras (en vez de espacios topológicos), y G sería un morfismo de gavillas, pero plantear así la definición haría que este tratado no sea elemental.

4.1. Operadores de corte y traslación

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^2$, entonces se define el operador de corte \odot por

$$(f, x_0) \odot (g, x_1) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \begin{cases} f(u + x_0) - f(x_0) & u \leq 0 \\ g(u + x_1) - g(x_1) & u > 0 \end{cases}$$

En particular si $f(0) = g(0) = 0$ se define

$$f \odot g = (f, 0) \odot (g, 0) = \begin{cases} f(u) & u \leq 0 \\ g(u) & u > 0 \end{cases}$$

Note que \odot es idempotente y asociativo pues

$$f \odot f(u) = \begin{cases} f(u) & u \leq 0 \\ f(u) & u > 0 \end{cases} = f(u),$$

y

$$(f \odot g) \odot h(u) = \begin{cases} f(u) & u \leq 0 \\ h(u) & u > 0 \end{cases} = f \odot (g \odot h)(u).$$

Geométricamente este operador corta una función f en el punto x_0 y la parte derecha se traslada al origen, mientras que la función g se corta en el punto x_1 y la parte izquierda se traslada al origen. Ambas funciones se pegan en el origen. Es común que después de este corte se desee trasladar la función resultante, llevando el origen $(0, 0)$ a un punto dado (a, b) ; dicha función vendría dada por

$$(f, x_0) \odot (g, x_1)(u - a) + b.$$

En particular, si $x_0 = x_1$, $a = x_1$ y $b = f(x_1) = g(x_1)$ se puede definir un operador de corte dependiente del punto x_1

$$f \odot_{x_1} g = (f, x_1) \odot (g, x_1)(u - x_1) + f(x_1).$$

Geométrica este operador corta a f y g en su intersección b y luego une la parte derecha de f con la parte izquierda de g . Una propiedad útil es

$$(f, x_0) \odot (g, x_1) = (\Delta_u f(x_0), 0) \odot (\Delta_u g(x_1), 0),$$

donde Δ_u representa el operador de diferencia $\Delta_u f(x) = f(u + x) - f(x)$. Definimos los operadores $\lfloor f$ y $\lceil f$, donde $f(0) = 0$, dados por

$$\lfloor f = (f, 0) \odot (0, 0) = \begin{cases} f(u) & u \leq 0 \\ 0 & u > 0 \end{cases},$$

$$\underline{f} = (0, 0) \odot (f, 0) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ f(u) & u > 0 \end{cases},$$

En particular, si $f(0) = g(0) = 0$, $\underline{f} + \underline{g} = f \odot g$.

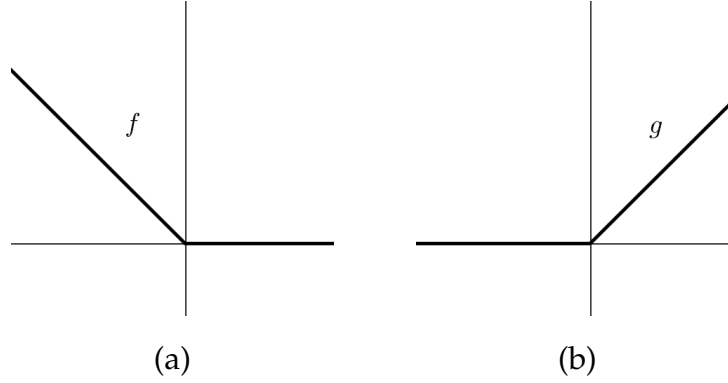


Figura 4.1: (a) Operador \underline{f} . (b) Operador \underline{f}

El operador de traslación $T_{a,b}$ actúa sobre la gráfica de f de la siguiente manera:

$$T_{a,b}f(x) := f(x - a) + b, \quad \forall x.$$

En particular se tiene la siguiente notación compacta

$$f \odot_{x_1} g = T_{x_1, f(x_1)}(f, x_1) \odot (g, x_1)$$

4.2. Axiomas de Constructibilidad

Sea $G(F)$ un funcional general con condiciones iniciales dadas, y sea X el conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$G(F) = f, \tag{4.1}$$

tiene solución. Una solución de (4.1) se denotará $\int f$ o S_f de manera indistinta, siendo el primero más útil cuando se desea hacer énfasis en f y la segunda cuando se desea tratar S_f como una variable.

El funcional general podría satisfacer 4 axiomas de constructibilidad:

Axioma 1. Existe una familia $\{f_A\}$ de funciones definidas en \mathbb{R} , que satisface:

1. $\{f_A\} \subset X$.
2. $0 \in \{f_A\}$, es decir la función cero está en la familia.
3. $\bigcup_A \text{Graph}(f_A) = \mathbb{R}^2$.
4. $\text{Graph}(f_A) \cap \text{Graph}(f_B) = \{(0, 0)\}$, $\forall A \neq B$.
5. Existe un funcional J^0 inyectivo que asigna a cada f_A a una solución $\int f_A$ de (4.1), denotado

$$J^0(f_A) = \int f_A.$$

Axioma 2 [Aditividad] Si se conoce una solución de (4.1) para f , denotado $\int f$, entonces se puede construir una solución para $T_{a,b}f$, denotado

$$\int T_{a,b}f = J_{a,b}^1(S_f, x),$$

el cual debe satisfacer 2 propiedades.

1. $J_{0,0}(S_f, x) = S_f$.
2. $J_{c,d}(J_{a,b}(S_f, x), x) = J_{(a+c, b+d)}(S_f, x)$.

Axioma 3 Si se conocen soluciones $\int f$ y $\int g$ de (4.1) para f y g respectivamente, donde $f(0) = g(0) = 0$, entonces se puede construir una solución para $f \odot g$, denotado

$$\int f \odot g = J^2(S_f, S_g, x),$$

el cual debe satisfacer 2 propiedades:

1. $J^2(S_f, S_f, x) = S_f$.
2. $J^2(S_{f \odot g}, S_h, x) = J^2(S_f, S_{g \odot h}, x)$.

Axioma 4 Si $f_{A_n} \rightarrow 0$ and $f_{B_n} \rightarrow 0$, donde $f_{A_n}, f_{B_n} \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces

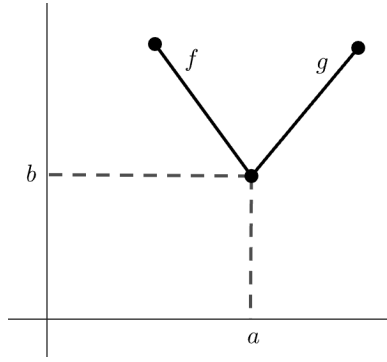
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{A_n} \odot f_{B_n} = \int 0.$$

Como se probará más adelante con estos axiomas es posible construir una solución $\int f$ de (4.1), dado un $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dicha construcción tiene 3 ventajas:

1. Generaliza el concepto de integral, y de hecho muestra que los conceptos de suma, integral y derivada son en realidad objetos del mismo tipo.
2. Permite resolver definir soluciones a ecuaciones de diferencias de la forma $F(x+1) - F(x) = f(x)$, sin que F tenga que tomar valor en un intervalo de longitud mayor a uno, de hecho se construye sobre el mismo intervalo en el que está definido f .
3. Permite dar soluciones canónicas a ecuaciones funcionales.
4. Se puede ajustar la construcción para encontrar soluciones de (4.1) donde f tiene discontinuidades aisladas.
5. Si el axioma 3 no se cumple o no es fácil de encontrar una construcción explícita, entonces se puede aproximar por medio de sucesiones de funciones f_n y g_n tales que $f_n \odot g_n$ tenga solución para todo n y $f_g \odot g_n \rightarrow f \odot g$.

Un funcional general $G(F)$ que satisface los 4 axiomas le denomino un funcional general construible, y un triplete $(J^0, J_{a,b}^1, J^2)$ le llamaré una construcción. Está claro que un mismo funcional general puede tener más de una construcción.²

²La expresión si P es construible entonces se puede construir Q , se puede formalizar con el concepto de computabilidad como sigue: una función f es exactamente computable si dado x se puede obtener el valor $f(x)$ exacto y es computable si se puede obtener este valor con un grado arbitrario de aproximación. Un operador es computable si el dominio está formado por funciones computables. Si existe un algoritmo iterativo que cuyo límite sea el valor de $f(x)$ entonces f es computable, sin embargo podría pasar que existan funciones computables tales que no exista un algoritmo iterativo que aproxime arbitrariamente para un f fijo, pero que existan sucesiones de algoritmos cada vez más precisos que permitan calcular $f(x)$ sin que con ellos se pueda construir un solo algoritmo iterativo. Tal ejemplo podría ser la tetración.


 Figura 4.2: $\int (f, x_0) \odot (g, x_1)(x - a) + b$

4.3. Construcción de una Solución para f Continua

Sea $G(f)$ un funcional general construible. Primero veamos como construir una solución de

$$G(f) = (f, x_0) \odot (g, x_1),$$

donde $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Note que

$$\begin{aligned} \int (f, x_0) \odot (g, x_1) &= \int (\Delta_u f(x_0), 0) \odot (\Delta_u g(x_1), 0) \\ &= J^2 \left(\int \Delta_u f(x_0), \int \Delta_u g(x_1), x \right). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \int \Delta_u f(x_0)(x) &= \int [f(u + x_0) - f(x_0)](x) \\ &= \int [T_{-x_0, -f(x_0)} f(u)](x) \\ &= J_{-x_0, -f(x_0)}^1(S_f, x). \end{aligned}$$

Análogamente

$$\int \Delta_u g(x_1)(x) = J_{-x_1, -g(x_1)}^1(S_g, x).$$

Por lo tanto

$$\int (f, x_0) \odot (g, x_1) = J^2(J_{-x_0, -f(x_0)}^1(S_f, x), J_{-x_1, -g(x_1)}^1(S_g, x), x).$$

Usando la aditividad se deduce

$$\int (f, x_0) \odot (g, x_1)(x - a) + b = J_{a,b}^1(J^2(J_{-x_0, -f(x_0)}^1(S_f), J_{-x_1, -g(x_1)}^1(S_g))),$$

donde se ha suprimido la x para mayor claridad.

Sea $h(x)$ una función continua definida en el intervalo $[a, b]$. Se construirá una solución de $G(F) = h$. Sea $\{x_i\}_{i=0}^N$ una partición del intervalo $[a, b]$ el cual define una partición de la gráfica $\{(x_i, h(x_i))\}_{i=0}^N$. En cada punto x_i , $i = 1, \dots, N$, existe un único constructor f_i tal que $f_i(x - x_i) + h(x_i)$ pasa por $(x_{i-1}, h(x_{i-1}))$ y $(x_i, h(x_i))$. Para ver esto note que por el punto 3 del axioma 1, existe un constructor f_i que pasa por $(x_{i-1} - x_i, h(x_{i-1}) - h(x_i))$ y $(0, 0)$, y este es único por el punto 4 del axioma 1.

Sea la función formada por secciones de las f_i :

$$\theta(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in [x_0, x_1) \\ f_2(x) & x \in [x_1, x_2) \\ \dots & \dots \\ f_N(x) & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases},$$

donde $f_1(x_0) = h(x_0)$, $f_N(x_N) = h(x_N)$, y $f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i) = h(x_i)$, $\forall i = 1, \dots, N-1$.

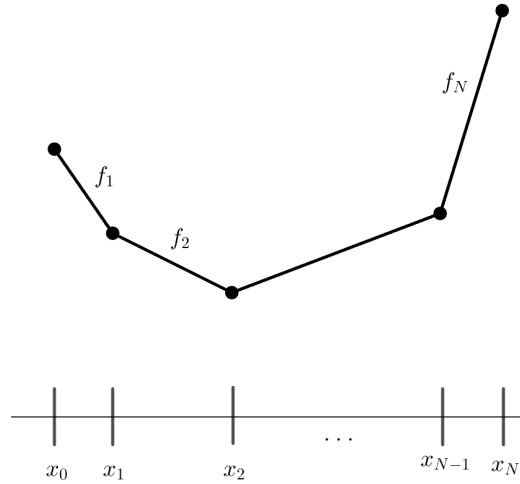


Figura 4.3

Se construirá S_θ usando el operador \odot . Primero unimos f_1 y f_2 :

$$g_{12}(x) = (f_1 \odot_{x_1} f_2)(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in [x_0, x_1) \\ f_2(x) & x \in [x_1, x_N] \end{cases}.$$

Luego unimos g_{12} con f_3

$$g_{13}(x) = (g_{12} \odot_{x_2} f_3)(x) = \begin{cases} g_{12}(x) & x \in [x_0, x_2) \\ f_3(x) & x \in [x_2, x_N] \end{cases}.$$

Continuando con este proceso se construye θ :

$$\theta(x) = ((f_1 \odot_{x_1} f_2) \odot_{x_2} f_3) \dots \odot_{x_{N-1}} f_N = (g_{1,N-1} \odot_{x_{N-1}} f_N).$$

Definiendo $g_{1,1} = f_1$, entonces por la primera parte se puede calcular

$$\int (g_{1,i} \odot_{x_i} f_{i+1}), \quad \forall i = 1, \dots, N-1.$$

En particular, se puede calcular S_θ . Tomando particiones más finas tales que $\theta \rightarrow h$, entonces $S_\theta \rightarrow S_h$.

4.4. Caso Particular Cuando $G(F)$ es Lineal

Cuando el funcional general $G(F)$ es lineal es posible hacer algunas simplificaciones. Para ello hay que asumir que $\int C$ es conocida para cualquier constante $C \in \mathbb{R}$.

Considere que se conocen un par reglas de construcción que reemplazan a J^2 (y que por lo general son mucho más fáciles de definir):

$$\int \underline{f} = J_1^2(S_f, x), \quad \int \underline{g} = J_2^2(S_g, x),$$

Definiendo $J^2(S_f, S_g, x) = J_1^2(S_f, x) + J_2^2(S_g, x)$, entonces J^2 cumple las condiciones del axioma 3:

$$J^2(S_f, S_f, x) = J_1^2(S_f, x) + J_2^2(S_f, x) = \int \underline{f} + \int \underline{f} = \int \underline{f} + \underline{f} = \int f \odot f = \int f.$$

También si $f(0) = g(0) = h(0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} J^2(S_f, S_{g \odot h}, x) &= J_1^2(S_f, x) + J_2^2(S_{g \odot h}, x) = \int \underline{f} + \int \underline{g \odot h} = \int \underline{f} + \underline{g \odot h} \\ &= \int f \odot (g \odot h) = \int (f \odot g) \odot h = \int \underline{f \odot g} + \underline{h} = \int \underline{f \odot g} + \int \underline{h} \\ &= J_1^2(S_{f \odot g}, x) + J_2^2(S_h, x) = J^2(S_{f \odot g}, S_h, x) \end{aligned}$$

El axioma 2 se puede reemplazar por una aditividad sobre el eje X : supongamos que dado S_f una solución para f se puede construir una solución de $f(u+a)$, dado por

$$\int f(u+a)(x) = J_a^1(S_f, x),$$

entonces definiendo $J_{a,b}^1(S_f, x) = J_a^1(S_f, x) + \int b$, $J_{a,b}^1$ cumple las condiciones del axioma 2: por construcción

$$J_{a,b}^1(S_f, x) = \int f(u-a) + b,$$

luego $J_{0,0}^1 = \int f$, y

$$J_{c,d}^1(J_{a,b}^1(S_f, x), x) = J_{c,d}^1\left(\int f(u-a) + b\right) = \int f(u-(a+c)) + (b+d) = J_{(a+c,b+d)}^1(S_f, x).$$

También se tiene la conmutatividad entre la construcción vertical y horizontal:

$$J_{0,b}^1(J_{a,0}^1(S_f, x), x) = \int f(u-a) + b = J_{a,0}^1(J_{0,b}^1(S_f, x), x).$$

Si $S_{f(x_0)}$ denota $J_a^1(S_f, x)$ como es usual, y $\int f(x_0)$ denota la solución de una constante, entonces

$$\int (f, x_0) \odot (g, x_1)(x) = J_1^2\left(S_{f(x_0)} - \int f(x_0), x\right) + J_2^2\left(S_{g(x_1)} - \int g(x_1), x\right).$$

En la práctica esta fórmula es mucho más fácil de implementar. Siendo G lineal, si $\varphi \in G^{-1}(0)$, y S_f es una solución de $G(F) = f$, entonces $S_f + \varphi$ es también una solución, sin considerar la condición inicial.

4.5. Sobre la familia de constructores

La familia de constructores $\{f_A\}$ por lo general se toma como el haz de rectas que pasan por el origen y con pendiente A , es decir $f_A(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}$. Tomando $A = 0$, entonces 0 es un constructor. Por el axioma 2, la función constante C es construible $\forall C \in \mathbb{R}$ (esto vale siempre), por lo tanto $f(x) = Ax + C$ es construible $\forall A, C \in \mathbb{R}$. En ocasiones no siempre resulta tomar una familia de rectas, como por ejemplo en la ecuación diferencial

$$\int_0^x \int_0^t F(u) du dt = f(x),$$

Entonces la solución es la segunda derivada de f , por lo que la familia de constructores se anula. Se puede tomar parábolas o polinomios de la forma Ax^n , sin embargo propongo que en el caso de ecuaciones diferenciales es mejor usar la familia de exponenciales:

$$f_0(x) = 0, \quad f_A^+(x) = A(e^x - 1), \quad f_A^-(x) = A(e^{-x} - 1), \quad A \neq 0.$$

4.6. Ejemplos

En todos los casos presentados a continuación la familia de constructores es un haz de rectas que pasa por el origen, y se supone que esta familia no se anula. Véase la sección 6.7 del apéndice para implementación del método.

4.6.1. Identidad

Considere el problema trivial:

$$F(x) = f(x),$$

entonces

$$S_{f(a)+b}(x) := f(x+a) + b, \quad \int \lfloor f \rfloor (x) = f \odot 0, \quad \int \lfloor g \rfloor (x) = 0 \odot g.$$

4.6.2. Integral

Considere el problema:

$$\int_0^t F(t) dt = f(x),$$

Sabemos que una solución para $f(x) = Ax$ es $\int Ax = A$ (no confundir, en este caso el símbolo de integral representa a la derivada). También sabemos que la derivada de $f(u+a) + b$ con respecto u es la derivada de f evaluado en $u+a$, por lo tanto

$$S_{f(a)+b}(x) = f(x+a).$$

También si consideramos la definición de derivada lateral (es lo mismo si se toma la derivada derecha o la derivada izquierda), entonces

$$\int \lfloor f \rfloor (x) = \begin{cases} \int f(x) & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}, \quad \int \lfloor g \rfloor (x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int g(x) & x > 0 \end{cases}.$$

Con esta construcción se obtiene una aproximación $\int \theta(x)$ (ver sección 4.3) dada explícitamente por

$$\int \theta(x) = \begin{cases} A_1 & x \in [x_0, x_1) \\ A_2 & x \in [x_1, x_2) \\ \dots & \dots \\ A_N & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases},$$

donde A_i es la pendiente determinada por $(x_{i-1}, h(x_{i-1}))$ y $(x_i, h(x_i))$. Está claro que cuando se toma el límite de la partición, las A_i tienden a la pendiente en un punto que es justo la definición de derivada. Es decir, aún si no entendemos bien como integrar, pero comprendemos algunas reglas que deben satisfacer la derivada, podemos hallar la definición de derivada usando el método constructivo presentado en este capítulo.

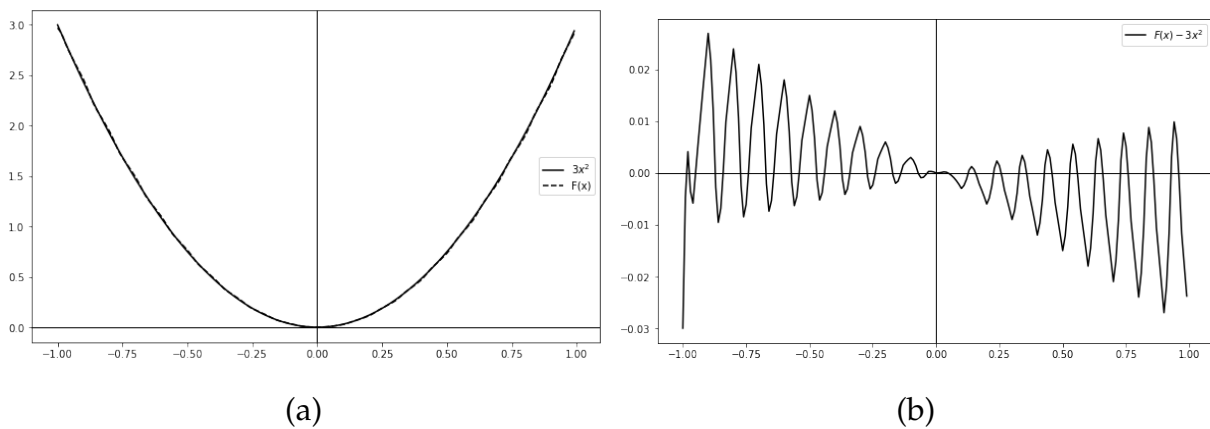


Figura 4.4: (a) $F(x)$ es la solución de la ecuación integral. (b) Error con respecto la derivada.

4.6.3. Derivada

Considere el problema:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x), \quad F(0) = 0.$$

Sabemos que una solución para $f(x) = Ax$ es $\int Ax = A\frac{x^2}{2}$, y que $\int C = Cx$. También sabemos que la integral de $f(u+a) + b$ con respecto u es

$$\begin{aligned} \int f(u+a) + b &= \int_0^x f(u+a) du + \int_0^x b du = \int_a^{x+a} f(u) du + bx \\ &= \int_0^{x+a} f(u) du - \int_0^a f(u) du + bx \\ &= \int f(x+a) - \int f(a) + bx. \end{aligned}$$

Observe que la formula resultante refleja el concepto de aditividad, es decir el axioma homónimo es una generalización de esta propiedad. Finalmente la construcción del axioma 3 está dada por:

$$\int \lfloor f \rfloor (x) = \begin{cases} \int f(x) & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}, \quad \int \lfloor g \rfloor (x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int g(x) & x > 0 \end{cases}.$$

Se puede probar que

$$\int [(f, x_1) \odot (g, x_1)(u - x_1) + f(x_1)](x) = \begin{cases} \int_{x_1}^x f(u) du & x \leq x_1 \\ \int_{x_1}^x g(u) du & x > x_1 \end{cases} - \begin{cases} \int_{x_1}^0 f(u) du & x_1 \geq 0 \\ \int_{x_1}^0 g(u) du & x_1 < 0 \end{cases}$$

Esto es exactamente la integral debajo de $(f, x_1) \odot (g, x_1)(u - x_1) + f(x_1)$ salvo una constante (que no depende de x) el cuál obliga a que se satisfaga la condición inicial. Entonces se puede definir alternativamente la integral definida como:

$$\int_a^b f(u) du := \int f(b) - \int f(a),$$

y no dependerá de una constante en particular. La construcción de la integral dada en esta sección se interpreta como una integral de Riemann, pero donde se toma el área total del polígono determinado por los puntos: $(x_{i-1}, 0)$, $(x_i, 0)$, $(x_{i-1}, h(x_{i-1}))$, y $(x_i, h(x_i))$.

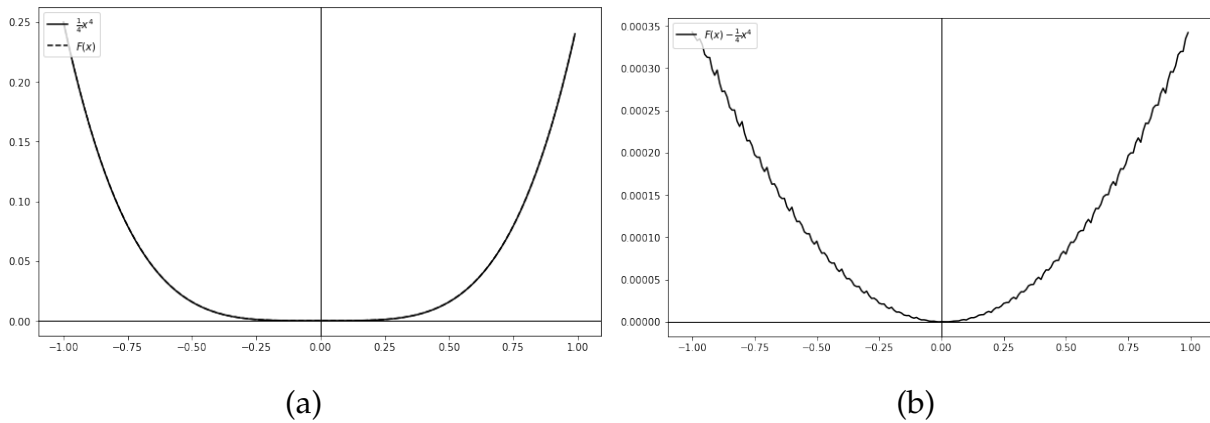


Figura 4.5: (a) $F(x)$ es la solución de la ecuación diferencial. (b) Error con respecto la integral.

4.6.4. Suma

Considere el problema:

$$F(x+1) - F(x) = f(x+1), \quad F(0) = f(0). \quad (4.2)$$

Es claro que $\int Ax = A\frac{x^2+x}{2}$ y que $\int C = C(x+1)$. La aditividad en el caso de la suma está dada por

$$\int f(u+a)(x) = \int f(x+a) - \int f(a) + f(a) + b(x+1),$$

que se puede comprobar fácilmente reemplazando en (4.2). También se puede inferir a partir de la suma finita definida en los enteros. La construcción $\int \underline{f}$ no es trivial, pero con un poco de esfuerzo se obtiene

$$\int \underline{f}(x) = \begin{cases} \int f(x) & x \leq 0 \\ \int f(\{x\} - 1) & x > 0 \end{cases}, \quad \int \underline{f}(x) = \begin{cases} \int f(\{x\} - 1) & x \leq 0 \\ \int f(x) & x > 0 \end{cases}.$$

Una vez que se obtiene $\int \lfloor f, \int \rfloor$ se obtiene por simetría. Observe que no se cumple la propiedad $\int \lfloor f + \rfloor = \int f$, por lo que hay que sumar funciones periódicas φ de periodo 1 y tales que $\varphi(0) = 0$ (elementos del núcleo). En el primer caso

$$\begin{aligned} \int \lfloor f \rfloor (x) &= \begin{cases} \int f(x) & x \leq 0 \\ -\frac{1}{2} \int f(\{x\} - 1) & x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int f(x) - \frac{1}{2} \int f(\{x\} - 1) & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \int f(\{x\} - 1) & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Análogamente

$$\int \rfloor f \rfloor (x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int f(\{x\} - 1) & x \leq 0 \\ \int f(x) - \frac{1}{2} \int f(\{x\} - 1) & x > 0 \end{cases}.$$

Usamos la notación de corchete por brevedad

$$[g(t), f(t)](x) := \left[\frac{g(t) - f(t)}{2} \right](\{x\} - 1) = \frac{1}{2} [g(\{x\} - 1) - f(\{x\} - 1)]. \quad (4.3)$$

Note que $[g(t), f(t)](x) = -[f(t), g(t)](x)$, $\forall g, f, x$. Cuando no exista confusión se escribirá $[S_g, S_f]$. Por lo tanto

$$\int (f, 0) \odot (g, 0) = \begin{cases} S_f + [S_g, S_f] & x \leq 0 \\ S_g + [S_f, S_g] & x > 0 \end{cases}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int (f, x_0) \odot (g, x_1) &= \int (\Delta_u f(x_0), 0) \odot (\Delta_u g(x_1), 0) \\ &= \begin{cases} S_{\Delta_u f(x_0)} + [S_{\Delta_u g(x_1)}, S_{\Delta_u f(x_0)}] & x \leq 0 \\ S_{\Delta_u g(x_1)} + [S_{\Delta_u f(x_0)}, S_{\Delta_u g(x_1)}] & x > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Desarrollando se deduce

$$\int (f, x_0) \odot (g, x_1) = \begin{cases} S_f(x + x_0) - S_f(x_0) - xf(x_0) + \theta & x \leq 0 \\ S_g(x + x_1) - S_g(x_1) - xf(x_1) - \theta & x > 0 \end{cases},$$

donde

$$\theta = \frac{1}{2} [\Delta_{(\{x\}-1)}(S_g(x_1) - S_f(x_0))] - (g(x_1) - f(x_0))(\{x\} - 1).$$

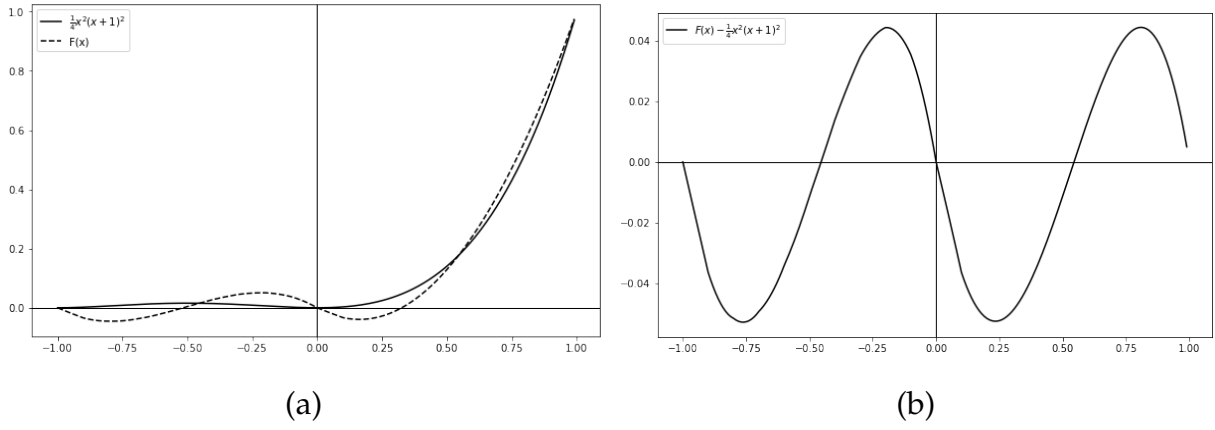


Figura 4.6: (a) $F(x)$ es la solución de la ecuación de diferencias. (b) Error con respecto una interpolación analítica de la suma.

4.7. Solución de un problema general

Considere el problema

$$\mathbb{L}F(x+1) - F(x) = f(x+1), \quad F_f(0) = 0, \quad (4.4)$$

donde \mathbb{L} es un operador lineal invertible. Supondremos que $\int(Ax)$ se anula solo para $A = 0$ y que se puede calcular. De la misma manera se supondrá que es sencillo calcular $\int C$, $\forall C \in \mathbb{R}$. Se demostrará la constructibilidad primero. Note que si S_f es solución de (4.4) para f , entonces

$$\int \lfloor f \rfloor (x) = \begin{cases} \int f & x \leq 0 \\ \mathbb{L}^{-n} \int f(\{x\} - 1) & x \in (n-1, n], \forall n \geq 1 \end{cases},$$

$$\int \lceil f \rceil (x) = \begin{cases} \mathbb{L}^{n-1} \int f(\{x\} - 1) & x \in (-n, 1-n], \forall n \geq 1 \\ \int f & x \leq 0 \end{cases}.$$

Por linealidad $\int \lfloor f \rfloor + \int \lceil f \rceil$ es una solución (4.4) para f . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi_f(x) &:= \int \lfloor f \rfloor + \int \lceil f \rceil - \int f = \begin{cases} \mathbb{L}^{n-1} \int f(\{x\} - 1) & x \in (-n, 1-n], \forall n \geq 1 \\ \mathbb{L}^{-n} \int f(\{x\} - 1) & x \leq (n-1, n], \forall n \geq 1 \end{cases}, \\ &= \mathbb{L}^{-n} \int f(\{x\} - 1) \quad \forall x \in (n-1, n], n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

es una solución de la ecuación homogénea, es decir

$$\mathbb{L}\varphi(x+1) - \varphi(x) = 0.$$

Ya que $\varphi(x+1) = \varphi(x)$, $\forall x$, entonces $\varphi(x)$ es una autofunción de \mathbb{L} . La comprobación de esto recuerda al hotel infinito de Hilbert:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}\varphi(x+1) &= \mathbb{L}^{-(n-1)} \int f(\{x\} - 1), \quad x \in (n-1, n] \\ &= \mathbb{L}^{-(n-1)} \int f(\{x-1\} - 1), \quad x \in (n-1, n] \\ &= \mathbb{L}^{-(n-1)} \int f(\{x\} - 1), \quad x \in (n-2, n-1] \\ &= \mathbb{L}^{-n} \int f(\{x\} - 1), \quad x \in (n-1, n] = \varphi(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto también $-\varphi_f(x)/2$ y $-\varphi_g(x)/2$ son autofunciones. Definiendo

$$\int \underline{f} = \begin{cases} \int f(x) & x \leq 0 \\ \mathbb{L}^{-n} \int f(\{x\} - 1) & x \in (n-1, n], \forall n \geq 1 \end{cases} - \frac{\varphi_f(x)}{2},$$

$$\int \underline{g} = \begin{cases} \mathbb{L}^{n-1} \int g(\{x\} - 1) & x \in (-n, 1-n], \forall n \geq 1 \\ \int g(x) & x > 0. \end{cases} - \frac{\varphi_g(x)}{2},$$

entonces se satisface

$$\int \underline{f} + \underline{f} = \int f.$$

Se puede comprobar que

$$\int \underline{f} + \underline{g} = \begin{cases} \int f(x) + \mathbb{L}^{n-1}[S_g, S_f](x) & x \in (-n, 1-n], \forall n \geq 1 \\ \int g(x) + \mathbb{L}^{-n}[S_f, S_g](x) & x \in (n-1, n], \forall n \geq 1 \end{cases},$$

donde el corchete se define como en (4.3).

Veamos que se cumple la aditividad. Sea S_f una solución de (4.4) y sea φ una solución de la ecuación homogénea.

$$\mathbb{L}\varphi(x+1) - \varphi(x) = 0,$$

pero tal que $\varphi(0) \neq 0$. Entonces la función

$$S_{f(a)} = S_f(x+a) - S_f(a) \frac{\varphi(x)}{\varphi(0)},$$

satisface

$$\mathbb{L}S_{f(a)}(x+1) - S_{f(a)}(x) = f(x+a+1), \quad S_{f(a)}(0) = 0.$$

Con este método se puede atacar problemas de la forma

$$\sum_{i=1}^r A_i \mathbb{L}_i F(Bx + h_i) = f(x),$$

donde las \mathbb{L}_i son operadores lineales invertibles. La aditividad se cumple puesto que si se conoce una solución $F(x)$, entonces tomando $F(x+Ba)$ se obtiene una solución para $f(x+a)$. La construcción de $\int \underline{f}$ y $\int \overline{f}$ no es trivial y requiere mayor investigación.

Example 4.3. Considere la ecuación de diferencias-diferencial

$$F'(x+1) - KF(x) = f(x). \quad (4.5)$$

Sea F_f una solución particular. Las soluciones de la ecuación homogénea

$$F'(x+1) - KF(x) = 0, \quad (4.6)$$

son

$$F_0(x) = \lambda(e^K \Omega 2)^x. \quad (4.7)$$

Imponemos la condición $F_f(0) = 0, \forall f$. Sea F_f una solución de (4.5) tal que $F_f(0) = 0$, entonces $F(x+a)$ es una solución de (4.5) para $f(x+a)$, pero no satisface la condición inicial. Por (4.7)

$$F_{f(a)}(x) = F(x+a) - F(a)(e^K \Omega 2)^x,$$

es una solución de

$$F'(x+1) - KF(x) = f(x+a),$$

tal que $F_{f(a)}(x) = 0$. Por lo tanto (4.5) es una ecuación de diferencias aditiva.

4.8. Medida funcional

Una medida funcional es una asignación $\mu : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$ que satisface 4 propiedades fundamentales:

1. Compatibilidad con la restricción: si $J \subseteq I$ son subintervalos de \mathbb{R} , y f está definida en I , entonces

$$\mu(f)|_J = \mu(f|_J).$$

2. Aditividad lateral: si f está definida en I y $T_a f : I - a \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por $T_a f(x) = f(x+a)$, entonces

$$\mu(T_c f) = T_c \mu(f), \forall c \in \mathbb{R}.$$

3. Condición inicial: si f es analítica, entonces $\mu(f)$ es analítica.

- Monotonía: Si $f \geq 0$, entonces $\mu(f)$ es monótona no decreciente.

Adicionalmente se pueden definir las siguiente propiedades propiedades

3.1 Si $k > 0$ (posiblemente $k = +\infty$), y f es k -veces diferenciable, entonces $\mu(f)$ es k -veces diferenciable.

4.1 No negatividad: Si $f \geq$, entonces $\mu(f) \geq 0$.

4.2 Definida: $\mu(0) = 0$ y si $\mu(f) = 0$ entonces $f = 0$.

Example 4.4. Si S_f es la σ -realización dada por la constructibilidad de la derivada discreta, entonces para f definida en un intervalo $[a, b]$

$$\mu(f) := S_f(x) - S_f(a) + f(a).$$

En particular cuando $x = a$ se obtiene $\mu(f)(a) = f(a)$. La aditividad se justifica por el hecho de que es equivalente a la aditividad definida en el capítulo 3: si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mu(T_c f) &= S_{f(c)}(x) - S_{f(c)}(a - c) + f(a) = S_f(x + c) - S_f(c) + f(c) - S_f(a) + S_f(c) - f(c) + f(a) \\ &= S_f(x + c) - S_f(a) + f(a) = T_c \mu(f), \end{aligned}$$

y si $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$

$$S_f(x + c) - S_f(c) + f(c) = T_c \mu(f) = \mu(T_c f) = S_{f(c)}(x) - S_{f(c)}(0) + f(c) = S_{f(c)}(x).$$

Definimos el área bajo la curva de una función $f \geq 0$, simplemente como $\mu_f([a, b]) = \mu(f)(b)$. Entonces, se cumple la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} \mu(f)([a, b]) + \mu(f)([b, c]) &= \mu(f)(b) + \mu(f)(c) = S_f(b) - S_f(a) + f(a) + S_f(c) - S_f(b) + f(b) \\ &= S_f(c) - S_f(a) + f(a) + f(b) \\ &= \mu(f)(c) + f(b) \geq \mu_f([a, c]). \end{aligned}$$

Si $f \leq 0$, ya que el área debe ser positiva, se definirá como $\mu_f([a, b]) = \mu(-f)(b)$. Luego si una región D esta acotada por dos funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con $f \geq 0$ y $g \leq 0$, y por las rectas $x = a$, $x = b$, entonces el área de D está dada por

$$\mu(D) := \mu_f([a, b]) + \mu_g([a, b]).$$

Entonces la medida de D es invariante lateralmente:

$$\begin{aligned} \mu(T_c D) &= \mu_{f(c)}([a - c, b - c]) + \mu_{g(a)}([a - c, b - c]) \\ &= \mu(T_c f)(b - c) + \mu(-T_c g)(b - c) \\ &= [T_c \mu(f)](b - c) + [T_c \mu(-g)](b - c) \\ &= \mu(f)(b) + \mu(-g)(b) \\ &= \mu_f([a, b]) + \mu_g([a, b]) \\ &= \mu(D). \end{aligned}$$

Es interesante notar que para el caso de un rectángulo de altura C y base x , ubicado en el origen, el área es $C(x+1)$, es decir el área es base por altura donde la base está modificada por una constante. Análogamente, un triángulo determinado por la recta $f(x) = Ax$, con base x y altura Ax , es $Ax(x+1)/2$ que es base por altura sobre dos, donde la base está modificada por una constante. En particular, si $A = C$, el triángulo se obtiene como la mitad del rectángulo, lo cuál tiene sentido geométrico si la medida fuera invariante bajo rotaciones.

Capítulo 5

Aritmética de la lógica proposicional de orden 0

En este capítulo se propondrá una manera mecánica de reducir proposiciones de lógica proposicional de orden cero usando un algoritmo que emula la aritmética de la suma y el producto en \mathbb{N}_0 . A lo largo de este capítulo el valor de verdad es 0 si para falso y 1 para verdadero.

Un operador lógico binario es una función $\square_i : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$. Los operadores lógicos binarios se pueden extender recursivamente a ternas $(a_1, \dots, a_{2^i}) \in \{0, 1\}^{2^i}$, $1 \leq i$:

$$(a_1, \dots, a_{2^i}) \square_i (b_1, \dots, b_{2^i})$$

Sea Q una expresión lógica de orden 0 con variables r_1, \dots, r_n , como por ejemplo

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

el cual es una tautología, lo que equivale a decir que sin importar que valores en $\{0, 1\}$ tome para p, q o r el resultado siempre será verdadero. Existen muchas maneras de demostrar que la proposición es una tautología, por ejemplo se puede hacer una deducción usando equivalencias y propiedades ya probadas, o se puede hacer una tabla de verdad y analizar todos los posibles valores de verdad que pueden tomar p, q y r :

p	q	r	Q
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0

Tabla 5.1

donde las deducción la deducción en cada fila se hace usando la definición de operador lógico binario. Note que el número de filas es 2^n , donde n es el número de variables diferentes, así que existen 2^n posibles resultados para Q , y esto no depende de la cantidad de veces que aparezcan p, q y r en Q . La pregunta es ¿existe una manera rápida de obtener la terna de longitud 2^n a la cuál es equivalente la proposición Q ?

Dada una proposición Q como antes, se puede asociar a cada variable un número binario y luego un número natural como sigue: primero elegir un orden r_1, \dots, r_n , para r_1 se elige el número binario $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, donde el cambio se hace a la mita de los índices. Luego r_2 se toma el número binario $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, donde los cambios ocurren en $1/4, 1/2$ y $3/4$ de los índices, etc. Finalmente r_n viene dado por $(0, 1, 0, 1, \dots)$ que alterna el cero y el uno. A cada uno de estos números binarios se le asocia el número natural correspondiente en base 10, y se reemplazan simbólicamente en Q , por ejemplo

$$15 \vee (51 \wedge 85) \Leftrightarrow (15 \vee 51) \wedge (15 \vee 85),$$

Entonces los operadores lógicos deben ser generalizados a operadores definidos en \mathbb{N}_0 para que la expresión anterior pueda ser tratada aritméticamente. La siguiente formula maravilla ofrece una manera eficiente de hacer este cálculo

$$a \square_i b = (a \% 2^i) \square_{i-1} (b \% 2^i) + \begin{cases} 2^i & \text{si } (2^i \leq a) \square (2^i \leq b) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Para cada $a, b \in \mathbb{N}$ existe un mínimo i tal que $a \square_i b$ está definido, y no está definida para valores menores que i , y es el mismo resultado para valores mayores que i . Por lo tanto existe un único valor para $a, b \in \mathbb{N}$ de manera que podemos definir

$$a \square b := a \square_i b \text{ tal que } i = \lfloor \log_2 \max\{a, b\} \rfloor.$$

Por ejemplo

- $a \wedge_{-1} b = 0, \forall a, b.$
- $a \wedge_i b = (a \% 2^i) \wedge_{i-1} (b \% 2^i) + \begin{cases} 2^i & \text{si } (2^i \leq a) \text{ y } (2^i \leq b) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$
- $a \vee_i b = (2^{i+1} - 1) - (2^{i+1} - 1 - a) \wedge_i (2^{i+1} - 1 - b).$
- $a \Rightarrow_i b = (2^{i+1} - 1 - a) \wedge_i b.$

Entonces el procedimiento para simplificar una expresión lógica de orden cero

$$\tilde{n} = ((p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_3 \Rightarrow p_1)) \vee (p_2 \wedge p_3), \quad i = 3.$$

Substituimos: $p_1 = 1, p_2 = 7, p_3 = 15, \Rightarrow = \square^1, \wedge = \square^2, \vee = \square^3$, y obtenemos

$$\tilde{n} = ((1 \square^1 7) \square^2 (15 \square^1 1)) \square^3 (7 \square^2 15) \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leq \tilde{n} \leq 2^{i+1} - 1 = 15.$$

Resolvemos el lado izquierdo y obtenemos un número natural $n \in \mathbb{N}_0$ que denotamos \tilde{n} para dar a entender que aunque es un número natural también significa que depende de las variables p_i , y que se puede entender como el conjunto de todas las expresiones lógicas en las variables p_i que son equivalentes a \tilde{n} , por ejemplo:

$$((p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_3 \Rightarrow p_1)) \vee (p_2 \wedge p_3) \in \tilde{n}_0.$$

Una forma reducida de \vec{n} es una expresión lógica

$$p_k \sqcup_i p_l \sqcup_j p_m \in \vec{n},$$

para alguna elección de k, l, m, i, j y una elección de paréntesis. Para lógica de segundo orden donde se usarán expresiones del tipo

$$\forall p_1, p_2, p_3(\vec{p}),$$

donde $\vec{p} \in \mathbb{N}$ tiene el significado descrito anteriormente, además existirán constantes (dadas por los axiomas) y 2 constantes universales 0 y 1 ($\vec{0}, \vec{\infty}$).

Proposition 5.1. $\forall a, b \in \mathbb{N}$

$$a \sqcup b := \sum_{k=0}^n 2^k \left(2^k \leq \frac{a}{2^{n+1} \triangleright \dots \triangleright 2^{k+1}} \sqcup 2^k \leq \frac{b}{2^{n+1} \triangleright \dots \triangleright 2^{k+1}} \right), \quad (5.1)$$

donde $n = \lfloor \log_2 \max\{a, b\} \rfloor$, y \triangleright denota la división entera módulo 2.

Demostración. Sea $i = \lfloor \log_2 \max\{a, b\} \rfloor$,

$$\begin{aligned} a \sqcup_i b &= (a \% 2^i) \sqcup_{i-1} (b \% 2^i) + \begin{cases} 2^i & \text{si } (2^i \leq a) \sqcup (2^i \leq b) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \\ &= \left\lfloor \frac{a}{2^i 2^{i-1}} \right\rfloor \sqcup_{i-2} \left\lfloor \frac{b}{2^i 2^{i-1}} \right\rfloor + \begin{cases} 2^{i-1} & \text{si } (2^{i-1} \leq a) \sqcup (2^{i-1} \leq b) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \\ &+ \begin{cases} 2^i & \text{si } (2^i \leq a) \sqcup (2^i \leq b) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \\ &= \dots \\ &= \left\lfloor \frac{a}{2^i 2^{i-1} \dots 2^1} \right\rfloor \sqcup_0 \left\lfloor \frac{b}{2^i 2^{i-1} \dots 2^1} \right\rfloor + \begin{cases} 2^1 & \text{si } (2^1 \leq a) \sqcup (2^1 \leq b) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} + \dots + \\ &+ \begin{cases} 2^i & \text{si } (2^i \leq a) \sqcup (2^i \leq b) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \\ &= \underbrace{(a \% 2) \sqcup (b \% 2)}_{f_{\sqcup}(a, b, 0)} + \sum_{k=1}^i f_{\sqcup}(a, b, k) \\ &= \sum_{k=0}^i f_{\sqcup}(a, b, k), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f_{\sqcup}(a, b, k) &= \begin{cases} 2^k & \text{si } (2^k \leq a \% 2^{k+1}) \sqcup (2^k \leq b \% 2^{k+1}) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \\ &= \sum_{k=0}^i 2^k (2^k \leq a \% 2^{k+1} \sqcup 2^k \leq b \% 2^{k+1} \equiv \text{true}) \\ &= \sum_{k=0}^i 2^k (2^k \leq a \% 2^{k+1} \sqcup 2^k \leq b \% 2^{k+1}) \end{aligned}$$

□

Quiere decir que es posible deducir cosas sobre la paridad de $a \square b$ a partir de conocer la paridad de a y b .

Proposition 5.2. $a \square b$ es par si y solo si $(a \text{ es par}) \square (b \text{ es par})$, donde \square debe ser substituido por alguna de las 16 operaciones binarias.

De aquí se obtienen resultados como por ejemplo, si a es impar o b es impar, entonces $a \vee b$ no puede ser una tautología. Con la fórmula (5.1) es posible tensorizar y calcular en paralelo cada uno de los dígitos de la expansión binaria de $a \square b$, y luego sumar, por ejemplo, si $a = (a_1, \dots, a_r)$ y $b = (b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{N}^r$, entonces $a \square b := (a_1 \square b_1, \dots, a_r \square b_r)$. El algoritmo sería

```

i = 3;
n = 2i+1 = 16;
T = 0, ak = a, bk = b;
for k = 0, ..., i + 1 do
    ak = ak % 2i-k+1;
    bk = bk % 2i-k+1;
    T = T + 2i-k (2i-k ≤ ak □ 2i-k ≤ bk);
Return: T;
    
```

Si se tiene un vector de proposiciones (p_1, \dots, p_n) , resulta que se puede equipar con una estructura de modulo, donde \mathbb{N}_0 actúa sobre el vector de la siguiente manera:

$$n \cdot (p_1, \dots, p_r) = (np_1, \dots, np_r), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.2)$$

De la misma manera se puede definir un modulo de matrices junto con un producto matricial dado por

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \square^{ij} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_1 \square^i q_1) \square^j (p_2 \square^i q_3) & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

El producto matricial definido no es asociativo pues los operadores lógicos binarios involucrados no lo son necesariamente. De la misma manera se define un monomio como

$$p^s := \underbrace{((p \square^i p) \square^i p) \dots \square^i p}_{5 \text{ veces}}$$

, y un polinomio como

$$f(p) = \sum_{k=0}^N n_s \cdot p^s, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

5.0.1. Verificador de expresiones lógicas bien formadas

A continuación mostrados dos tablas que muestran una manera de implementar un verificador de expresiones lógicas bien formadas. Estas tablas son un complemento de mucha utilidad ya que en la práctica es tedioso verificar a mano si una expresión, que estamos usando para un prueba de un algoritmo, está bien escrita. Mostramos dos tablas, la tabla ? permite verificar si una expresión está rigurosamente bien escrita de acuerdo a las reglas de la lógica, mientras que la tabla ? relaja un poco la notación permitiendo usar menos paréntesis. La entrada en la fila i y la columna j se interpreta como que el símbolo de la fila va antes de la el símbolo de la columna si hay una X , o no es admisible si no hay nada.

	()	a_1, \dots, a_k	$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$	$-$	\forall, \exists
(X	X	X	X	X	
)		X	X			
$a_1 \dots, a_k$	X			X		X
$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$		X	X			
$-$	X					
\forall, \exists	X					

Tabla 5.2

	()	a_1, \dots, a_k	$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$	$-$	\forall, \exists
(X	X	X	X	X	X
)		X	X			
$a_1 \dots, a_k$	X		X	X	X	X
$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$		X	X			
$-$	X			X	X	
\forall, \exists	X	X	X	X	X	

Tabla 5.3

Si las variables a_1, a_2, \dots se deben escribir de la forma x_{21}, x_{35}, \dots para no agotar las variables, entonces se recomienda la siguiente tabla:

	()	x	$-$	\forall, \exists	$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$	$0, \dots, 9$	\in	$=$
(X	X		X		X	X		
)		X					X		
x	X				X	X		X	X
$-$	X								
\forall, \exists	X								
$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$		X					X		
$0, \dots, 9$			X				X		
\in							X		
$=$							X		

Tabla 5.4

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Propiedades de los operadores definidos en la la sección 1 del capítulo 1

1. $z \boxtimes 2 = z \nabla 2$.
2. $z \nabla 1 = z$.
3. $z \nabla 0 = 1$.
4. $z \nabla -1 = 0$, si $z \neq 1$.
5. $a \boxtimes 1 = a$
6. $a \boxtimes 0 = \sqrt[a]{a}$.
7. $a \boxtimes b = a^{a^{b-1}}$.
8. $a \nabla b = 1 + \log_b \log_b a$.
9. $a \nabla 2 = a \Omega 2 = \sqrt[a]{\sqrt[a]{a}}$, (útil en el intervalo $[e^{-\frac{1}{e}}, e]$).
10. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a \nabla n) = a \nabla 0$, $\forall a \in [e^{-e}, \sqrt[e]{e}]$.
11. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a \Omega n) = a \boxtimes 0$, $\forall a \in [e^{-e}, \sqrt[e]{e}]$.
12. $(a \boxtimes 0)(a^{-1} \boxtimes 2) = 1$.
13. $(a \nabla 0)(a^{-1} \nabla 2) = 1$.
14. $(a \boxtimes a + 1) = (a \nabla 3)$.
15. $(a \boxtimes (m + n)) = (a \boxtimes m)^{a^n} = (a \boxtimes n)^{a^m}$.
16. $(a \boxtimes n)^{(a \nabla m)} = (a \nabla (m + 1))^{a^{n-1}}$

6.2. Identidades que involucran la función W de Lambert

1. $z \nabla 2 = z \Omega 2 = \frac{\ln z}{W(\ln z)} = e^{W(\ln z)}$.
2. $z \nabla 0 = \frac{W(-\ln z)}{-\ln z} = e^{-W(-\ln z)}$.

3. $W(z) = \ln(e^z \rhd 2) = \frac{z}{e^z \rhd 2} = z(e^{-z} \rhd 0).$
4. $z \rhd n = \left[\frac{(n-1) \ln z}{W[(n-1) \ln z]} \right]^{\frac{1}{n-1}} = \exp \left(\frac{W[(n-1) \ln z]}{(n-1)} \right).$
5. $W(z) = z \left(e^{\left(\frac{z}{n-1}\right) \rhd n} \right)^{1-n} = (n-1) \ln \left[e^{\left(\frac{z}{n-1}\right) \rhd n} \right].$
6. $W(A+B) = (A+B) \left(e^{-B \rhd} - \frac{A}{B} \right)^{\frac{A}{B}+1}.$
7. $W(AB) = AB (e^B \rhd (A+1))^{-A}.$

6.3. Derivadas

1. $d(u \boxtimes v) = (u \boxtimes v)[u^{v-2}[1 + (v-1) \ln u]du + u^{v-1} \ln^2(u)dv].$
2. $d(u \boxtimes z) = (u \boxtimes z)[u^{z-2}[1 + (z-1) \ln u]du],$ donde z es constante.
3. $d(z \boxtimes v) = (z \boxtimes v)[z^{v-1} \ln^2(z)dv],$ donde z es constante.
4. $d(u \rhd v) = \frac{\frac{du}{u} \log_u(v) + \frac{dv}{v} ((v \rhd e) - (u \rhd e) - 1)}{\ln^2 v}.$
5. $d(u \rhd z) = \frac{du}{u \ln(u) \ln(z)},$ donde z es constante.
6. $d(z \rhd v) = \frac{((v \rhd e) - (z \rhd e) - 1)dv}{v \ln^2 v},$ donde z es constante.
7. $d(u \rhd v) = \frac{(u \rhd v) \ln(u \rhd v)[du - u \ln(u) \ln(u \rhd v)dv]}{u \ln u [1 + (v-1) \ln(u \rhd v)]}.$
8. $d(u \rhd z) = \frac{(u \rhd z) \ln(u \rhd z)du}{u \ln(u) [1 + (z-1) \ln(u \rhd z)]},$ donde z es constante.
9. $d(z \rhd v) = -\frac{(z \rhd v) \ln^2(z \rhd v)dv}{1 + (v-1) \ln(z \rhd v)},$ donde z es constante.
10. $d(u \boxtimes 2) = d(u \nabla 2) = (u \boxtimes 2)[1 + \ln(u)]du = (u \nabla 2)[1 + \ln(u)]du.$
11. $d(u \boxtimes 0) = (u \boxtimes 0)u^{-2}[1 - \ln u]du.$
12. $d(e \boxtimes v) = (e \boxtimes v)e^{v-1}dv.$
13. $d(u \rhd e) = \frac{du}{u \ln u}.$
14. $d(e \rhd v) = \frac{[(v \rhd e) - 2]dv}{v \ln^2(v)}.$
15. $d(u \rhd 2) = d(u \Omega 2) = \frac{du}{u[1 + \ln(u \rhd 2)]} = \frac{du}{u[1 + \ln(u \Omega 2)]}.$
16. $d(u \rhd 0) = \frac{(u \rhd 0)^2 du}{u[1 - \ln(u \rhd 0)]}.$
17. $d(\ln \ln(e^u \Omega 2)) = \frac{du}{u[1 + \ln(e^u \Omega 2)]},$ muy similar a 15.

6.4. Integrales

1. $\int \frac{x \vartriangle z}{x} dx = (x \vartriangle z)^z \left[\frac{z-1}{z} \ln(x \vartriangle z) + \frac{1}{z^2} \right] + C$, donde z es constante.
2. $\int \frac{dx}{x(x \vartriangle z)} = (x \vartriangle z)^{z-2} \left[\frac{z-1}{z-2} \ln(x \vartriangle z) - \frac{1}{(z-2)^2} \right] + C$, donde z es constante.
3. $\int \frac{1}{x} (x \vartriangle 2)^a dx = (x \vartriangle 2)^{a+1} \left[\frac{\ln(x \vartriangle 2)}{a+1} + \frac{a}{(a+1)^2} \right] + C$, donde $a \neq -1$ es constante.
4. $\int \frac{(x \vartriangle 2)}{x} dx = \frac{1}{2} (x \vartriangle 2) \ln x + \frac{1}{4} (x \vartriangle 2)^2 + C$.
5. $\int \frac{dx}{x(x \vartriangle 2)} = \frac{\ln^2 x}{2(x \vartriangle 2)^2} + \frac{\ln x}{(x \vartriangle 2)} + C$.
6. $\int (e^x \vartriangle 2) dx = \frac{x}{2} (e^x \vartriangle 2) + \frac{1}{4} (e^x \vartriangle 2)^2 + C$.
7. $\int \frac{dx}{(e^x \vartriangle 2)} = \frac{x^2}{2(e^x \vartriangle 2)^2} + \frac{x}{(e^x \vartriangle 2)} + C$

Sea $\varphi(x)$ con antiderivada exacta, entonces

$$\begin{aligned} \int \varphi(W(x)) dx &= \int \varphi \left[\frac{x}{(e^x \vartriangle 2)} \right] dx = \int \frac{1}{z} \varphi \left[\frac{\ln z}{z \vartriangle 2} \right] dz = \int \frac{1}{t^t} \varphi(\ln t) t^t (1 + \ln t) dt \\ &= \int \varphi(\ln t) (1 + \ln t) dt = \int \varphi(W(x)) dx = \int \varphi(y) e^y (1 + y) dy, \end{aligned}$$

que usualmente es integrable por métodos elementales. Teniendo en cuenta los cambios de variables $x = \ln z^z$, $z = t^t$, $t = e^y$, se deduce

8. $\int \varphi(W(x)) dx = \left[\int \varphi(y) e^y (1 + y) dy \right]_{y=W(x)} + C$.
9. $\int W(x) dx = x \left[\frac{1}{W(x)} + W(x) - 1 \right] + C$.
10. $\int \frac{x^s}{(e^x \vartriangle 2)} dx = \left[\int (t^{s-1} \ln^s t + t^{s-1} \ln^{s+1} t) dt \right]_{t=e^x \vartriangle 2} + C$, donde s es constante.

6.5. Operadores definidos en Latex

1. Operadores \vartriangle , Ω , \mathcal{U} , \boxtimes , \vartriangleleft , y \vartriangleright , junto con sus versiones reescaladas.

```
\DeclareRobustCommand{\suppot}{\tikz[scale=0.15]\draw[black]
(1,0) -- +(120:2) --+(1,1.732050808) -- cycle
(0.5,0.8660254038) -- +(60:1) --+(360:1)-- cycle
;\sim}

\DeclareRobustCommand{\msuppot}{\tikz[scale=0.09]\draw[black]
(1,0) -- +(120:2) --+(1,1.732050808) -- cycle
(0.5,0.8660254038) -- +(60:1) --+(360:1)-- cycle
;\sim}

\DeclareRobustCommand{\infrac}{\text{\small\rotatebox[origin=c]{0}
{\hspace{1mm}\Omega\hspace{1mm}\$}}}

\DeclareRobustCommand{\minfrac}{\text{\small\rotatebox[origin=c]{0}
{\scriptstyle\hspace{1mm}\Omega\hspace{1mm}\$}}}
```

```

\DeclareRobustCommand{\sublog}{\rotatebox[origin=c]{180}{\infrad$}}

\DeclareRobustCommand{\msublog}{\rotatebox[origin=c]{180}{\minfrad$}}

\DeclareRobustCommand{\hippot}{\boxtimes}

\DeclareRobustCommand{\suprad}{~\tikz[scale=0.2]\draw[black]
(0.2,0) -- (0.9,0) -- (0.5,0.8660254038) -- (2,0.8660254038) -- (1.6,0) -- (2.3,0)
;~}

\DeclareRobustCommand{\msuprad}{~\tikz[scale=0.12]\draw[black]
(0.2,0) -- (0.9,0) -- (0.5,0.8660254038) -- (2,0.8660254038) -- (1.6,0) -- (2.3,0)
;~} % 19.05.2025

\DeclareRobustCommand{\hiplog}{\text{\small\rotatebox[origin=c]{180}{\hspace{1mm}\suprad\hspace{1mm}$}}}

\DeclareRobustCommand{\mhiplog}{\text{\small\rotatebox[origin=c]{180}{\hspace{1mm}\msuprad\hspace{1mm}$}}}

```

2. Operadores \lfloor y \rfloor .

```

\newcommand{\lcorner}[1]{%
\mathrel{%
\begin{tikzpicture}[baseline=(base.base)]
% Nodo inferior izquierdo
\node[inner sep=0pt] (base) at (0,0.1) {};
% Ancho del contenido
\pgfmathsetlengthmacro{\contentwidth}{width("#1 ")}
% Posición del texto adaptable
\node[inner sep=1pt] (content) at (\contentwidth*0.5,0.2) {$#1$};
% Línea vertical
\draw (0,0.5) -- (0,0);
% Línea horizontal adaptable
\draw (0,0) -- ++(\contentwidth + 0.6,0);
\end{tikzpicture}}%
}%
}

\newcommand{\rcorner}[1]{%
\mathrel{%
\begin{tikzpicture}[baseline=(base.base), xscale=-1] % Reflejo horizontal
% Nodo inferior izquierdo
\node[inner sep=0pt] (base) at (0,0.1) {};
% Ancho del contenido
\pgfmathsetlengthmacro{\contentwidth}{width("#1 ")}
% Posición del texto adaptable
\node[inner sep=1pt] (content) at (\contentwidth*0.5,0.2) {$#1$};
% Línea vertical
\draw (0,0.5) -- (0,0);
% Línea horizontal adaptable
\draw (0,0) -- ++(\contentwidth + 0.6,0);
\end{tikzpicture}}%
}%
}

```

6.6. Algoritmos del capítulo 3

Todos los métodos del capítulo 3 se implementaron en el CAS SageMath y fueron probados en el entorno de programación Jupiter.

1. Implementación del método de Euler-Maclaurin para x^3 , véase teorema 3.10 en la sección 3.8.2.

```

import numpy as np

def S_f(f,Df,b,m,x):
    # Término 1
    suma = 0
    for i in range(0,m+1):
        suma += ( (-1)**i*bernoulli(i)*(Df(b+x,i-1)-Df(b,i-1)) )/factorial(i)
    Term_1 = suma

```

```

# Término 2
suma = 0
for i in range(1,b+1):
    suma += f(i+x)-f(i)
Term_2 = suma

return Term_1 - Term_2 + f(0)

# Función objetivo f(x) = x^3
def f(x):
    return x^3
def Df(x, n):
    derivadas = {
        -1: x^4 / 4,
        0: x^3,
        1: 3*x^2,
        2: 6*x,
        3: 6
    }
    return derivadas.get(n, 0)

# Ejecución del método
T = S_f(f,Df,100,100,0.5)
print(T)

```

2. Implementación del ejemplo 3.8, correspondiente al método uno para resolver ecuaciones funcionales lineales con coeficientes constantes, véase la sección 3.9.1.

```

import numpy as np
from sympy import symbols
from scipy import optimize

# Parámetros
N = 9 # Orden de la aproximación lineal
R = RealField(1024) # Precisión de los decimales
C_F = 2 # Condición inicial

# Variables
A, B, C, E, x, u, v = symbols('A,B,C,E,x,u,v')
def build_vector_df(n):
    return symbols(f'df:{n}') # sympy.core.symbol.Symbol df[n] = dfn = f(1,n)
df = build_vector_df(N+1)

# Funciones
G(u,v) = u^2 + 5*u*v + v^3
f(x) = e^x #
def G0(u):
    y = G.subs(u=u,v=C_F)-f.subs(x=0) # G(u, F(0))-f(0)
    return RR(y)
def fn(z,n):
    # Derivative n-th of f
    y = f
    for i in range(n):
        y = diff(y)
    return y.subs({x:z})

# Encontramos A, B y D usando métodos numéricos
D_F = optimize.newton(G0,1)
print(f'F(0) = {C_F}')
print(f'F(1) = {D_F}')

A_F = RR(G.derivative(u).subs(u=D_F,v=C_F))
B_F = RR(G.derivative(v).subs(u=D_F,v=C_F))
print(f'A = {A_F}')
print(f'B = {B_F}')

E_F = RR(G(D_F,C_F))

# Esta implementación es rápida.
def P_fast(x,n,A,B,C):
    # Define the matrix M
    M = np.zeros((n+1,n+1))
    M[0,0] = 1
    for j in range(1,n+1):
        for i in range(1,n+1):
            if i<=j:

```

```

        M[i,j] = factorial(j)/factorial(j-i+1)
    for j in range(n):
        M[j+1,j] = factorial(j)*(1+B/A)
    M = A*M
    M[0,0] = 1
    # Define F
    F = np.zeros((n+1,))
    F[0] = C
    F[1] = fn(0,0) - G(D_F,C_F)
    for i in range(2,n+1):
        F[i] = fn(0,i-1)

    # Get coeficientes of the polynomial
    MinvF = np.matmul(np.linalg.inv(M),F)

    # Compute the value of P at x
    suma = 0
    for i in range(n+1):
        suma = suma + MinvF[i]*x^i
    return suma

```

3. Implementación del método infinitesimal, correspondiente al método dos para resolver ecuaciones funcionales lineales, véase la sección 3.9.2.

```

R = RealField(1024)

# Derivative n-th of f
def fn(x,n):
    x = R(x)
    z=var('z')
    y=1/(z+1)-1
    for i in range(n):
        y = y.derivative()
    return y({z:x})

# Función f
def f(x):
    return fn(R(x),0)

# Suma discreta de f
def Sf(N):
    suma = f(0)
    for i in range(1,N+1):
        suma = suma + f(i)
    return suma

# Interpolación
def Pf(x, n):
    # Define the matrix M
    M = matrix(R,n+1,n+1)
    M[0,0] = R(1)
    for j in range(1,n+1):
        for i in range(1,n+1):
            if i<=j:
                M[i,j] = R(factorial(j)/factorial(j-i+1))

    # Define F
    F = vector(R,n+1)
    F[0] = f(0)
    F[1] = f(1)
    for i in range(2,n+1):
        F[i] = fn(1,i-1)
    #print(F)

    # Obtener coeficientes del polinomio
    A = M^(-1)*F

    # Calcula el valor de P en x
    suma = R(0)
    for i in range(n+1):
        suma = suma + R(A[i]*x^i)

    return suma

```


6.7. Algoritmo del capítulo 4

1. Implementación de la constructibilidad para x^3 . Es una implementación para el CAS SageMath y en particular fue probado en el entorno de programación Jupiter. Debido a problemas de eficiencia se realizó una interpolación cuadrática intermedia en el proceso de construcción de g_{1i} y $S_{g_{1i}}$, $i = 1, \dots, N$. Véase la sección 4.3, y el ejemplo 4 de la sección 4.6.

```
def prod_f_g(f,g,x0,x1,a,b):
    def h(x):
        if x+a <= 0:
            return f(x+a+x0)-f(x0)+b
        else:
            return g(x+a+x1)-g(x1)+b
    return h

def S_prod_f_g(f,g,S_f,S_g,x0,x1,a,b):
    def h(x):
        if x <= 0:
            return RR(f(x+x0)-f(x0))
        else:
            return RR(g(x+x1)-g(x1))

    def S_h(x):
        corchete = RR((1/2)*(S_g(frac(x)-1+x1) - S_f(frac(x)-1+x0) - S_g(x1) + S_f(x0) - (g(x1)-f(x0))*(frac(x)-1+x1))))
        if x <= 0:
            return RR(S_f(x+x0)-S_f(x0)-f(x0)*x + corchete + b*(x+1))
        else:
            return RR(S_g(x+x1)-S_g(x1)-g(x1)*x - corchete + b*(x+1))

    def S_ha(x):
        return RR(S_h(a+x)-S_h(a)+h(a))

    return S_ha

def frac(x):
    return x-floor(x)

a, b = -1, 1
N = 500 # {x0,x1,...,xN}
M = N

def F(x):
    return x^3

X = [RR(a+k*(b-a)/N) for k in range(M+1)]
Y = [RR(F(x)) for x in X]

A = [(Y[k+1]-Y[k])/(X[k+1]-X[k]) for k in range(M)]
B = [Y[k]-X[k]*A[k] for k in range(M)]

f = {}
for i in range(M):
    f[i] = lambda x, a=A[i], b=B[i]: RR(a * x + b)

R.<x> = PolynomialRing(RR)
def construir_interpolador_por_parabolas(X, Y):
    assert len(X) >= 3
    assert len(X) == len(Y)

    parabolas = []
    for i in range(len(X) - 2):
        a = X[i]
        b = X[i+2]
        pts = zip(X[i:i+3], Y[i:i+3])
        p = R.lagrange_polynomial(pts)
        parabolas.append((a, b, p))

    def f_interp(x_val):
        for a, b, p in parabolas:
            if a <= x_val <= b:
                return p(x_val)
        raise ValueError("x fuera del dominio definido")
```

```

    return f_interp

f0to = {}
f0to[0] = prod_f_g(f[0], f[1], X[1], X[1], -X[1], Y[1])
for i in range(1, M-1):
    f0to[i] = prod_f_g(f0to[i-1], f[i+1], X[i+1], X[i+1], -X[i+1], Y[i+1])

S_f = {}
for i in range(M):
    S_f[i] = lambda x, a=A[i], b=B[i]: RR(a * (x^2+x)/2 + b*(x+1))

S_f0to = {}
S_f0to[0] = S_prod_f_g(f[0], f[1], S_f[0], S_f[1], X[1], X[1], -X[1], Y[1])
for i in range(1, M-1):
    S_f0to[i] = S_prod_f_g(f0to[i-1], f[i+1], S_f0to[i-1], S_f[i+1], X[i+1], X[i+1], -X[i+1], Y[i+1])
    # Parámetros para la interpolación -----
    a, b = -20, 20
    n = 400
    U = [a + k*(b-a)/n for k in range(n+1)]
    V = [S_f0to[i](x) for x in U]
    # -----
    S_f0to[i] = construir_interpolador_por_parabolas(U, V)

# Ajustar a una condición inicial dada
const = -S_f0to[M-2](0) + F(0)
def g(x):
    return S_f0to[M-2](x) + const

```

Bibliografía

- [1] Leonhard Euler. «De summis serierum reciprocarum». En: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (1740), págs. 123-134.
- [2] Colin Maclaurin. *A treatise of fluxions: in two books*. Vol. 1. Ruddimans, 1742.
- [3] George Boole. *A Treatise on the Calculus of Finite Differences*. Second edition. Cambridge: Macmillan y Co., 1860.
- [4] Henri Poincare. «Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies». En: *American Journal of Mathematics* (1885), págs. 203-258.
- [5] C Guichard. «Sur la résolution de l'équation aux différences fines $G(x + 1) - G(x) = H(x)$ ». En: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Vol. 4. 1887, págs. 361-380.
- [6] E. W. Barnes. «The Theory of the G-Function». En: *Quarterly Journal of Mathematics* 31 (1900), págs. 264-314.
- [7] E W Barnes. «VI. The theory of the double gamma function». En: *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 196.274-286 (1901), págs. 265-387.
- [8] E W Barnes. «The linear difference equation of the first order». En: *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1 (1905), págs. 438-469.
- [9] EW Barnes. «On functions generated by linear difference equations of the first order». En: *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1 (1905), págs. 280-292.
- [10] Harald August Bohr y Johannes Mollerup. «Laerebog i matematisk Analyse». En: (1920).
- [11] Harald Bohr. «Zur theorie der fastperiodischen funktionen». En: *Acta Mathematica* 47.3 (1926), págs. 237-281.
- [12] Frank WJ Olver. «Error analysis of Miller's recurrence algorithm». En: *Mathematics of Computation* 18.85 (1964), págs. 65-74.
- [13] LM Delves y JN Lyness. «A numerical method for locating the zeros of an analytic function». En: *Mathematics of computation* 21.100 (1967), págs. 543-560.
- [14] J Oliver. «Relative error propagation in the recursive solution of linear recurrence relations». En: *Numerische Mathematik* 9.4 (1967), págs. 323-340.
- [15] F. W. J. Olver. «Numerical Solution of Second-Order Linear Difference Equations». En: *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section B: Mathematics and Mathematical Physics* 71B.2-3 (1967), págs. 111-129.
- [16] FWJ Olver. «Bounds for the Solution of Second-order linear difference equations». En: *Journal of Research of the National Bureau of Standards: Mathematics and mathematical physics. B* 71.4 (1967), págs. 161-166.
- [17] J Oliver. «An extension of Olver's error estimation technique for linear recurrence relations». En: *Numerische Mathematik* 12 (1968), págs. 459-467.

- [18] J Oliver. «The numerical solution of linear recurrence relations». En: *Numerische Mathematik* 11.4 (1968), págs. 349-360.
- [19] Daniel William Lozier. «Numerical Solution of Linear Difference Equations». Ph.D. dissertation. 1981.
- [20] CW Clenshaw y col. «Generalized exponential and logarithmic functions». En: *Computers & Mathematics with Applications* 12.5-6 (1986), págs. 1091-1101.
- [21] Yang Kuang. *Delay differential equations*. Academic press New York, 1993.
- [22] J Arino y P Van Den Driessche. «Time delays in epidemic models». En: *Delay differential equations and applications* (2006), págs. 539-578.
- [23] MH Hooshmand. «Ultra power and ultra exponential functions». En: *Integral Transforms and Special Functions* 17.8 (2006), págs. 549-558.
- [24] Dmitrii Kouznetsov. «Solution of $F(z+1) = \exp(F(z))$ in complex z -plane». En: *Mathematics of computation* (2009), págs. 1647-1670.
- [25] Yuliya N Kyrychko y Stephen John Hogan. «On the use of delay equations in engineering applications». En: *Journal of vibration and control* 16.7-8 (2010), págs. 943-960.
- [26] David S Glass, Xiaofan Jin e Ingmar H Riedel-Kruse. «Nonlinear delay differential equations and their application to modeling biological network motifs». En: *Nature communications* 12.1 (2021), pág. 1788.
- [27] Maria Oprea y col. «Learning the delay using neural delay differential equations». En: *arXiv preprint arXiv:2304.01329* (2023).