Corrigé de l'épreuve de Maths
Examen National SN 2024
11/06/2024

2ème année Sciences Mathématiques

Fait par
Mr.EL ABBASSI Mohammed
Professeur de Mathématiques
Au lycée Ibn Abdoun- Khouribga

***NB** : Je fais ces corrigés dont le but de contribuer à donner un model à nos chers élèves, j'espère avoir réussi à leur donner un bon model à suivre.*

Exercice 1 (L'Analyse1)

$$(\forall x\in[1,+\infty[)\ :\ f(1)=\frac{1}{2}\ \text{ et }\ f(x)=\frac{\ln x}{x^2-1},\ si\ x\rangle 1.$$

1) On a : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{2}\frac{\ln x^2}{x^2-1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln t}{t-1}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}=f(1)$. (posons $t=x^2$)

Donc f est continue à droite en 1 .

2) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-x^{-1}}\times\frac{\ln x}{x}=0\times0=0$

Donc la droite d'équation : $y=0$ c.à.d l'axe des abscisses est une asymptote horizontale de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3) a- Soit $x\in]1,+\infty[$.

Posons $t=(x-1)^2$, donc $1-x=-\sqrt{t}$ et $x=\sqrt{t}+1$ donc $\frac{1-x+\ln x}{(x-1)^2}=\frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$.

b-Soit $t\in]0,+\infty[$. Appliquons le TAF à la fonction g définie par : $g(x)=-\sqrt{x}+\ln(1+\sqrt{x})$ sur le segment $[0,t]$.

Comme la fonction : $x\to1+\sqrt{x}$ est continue et strictement positive sur $[0,t]$ et comme la fonction $\ln$ est continue sur $]0,+\infty[$ alors la fonction: $x\to\ln(1+\sqrt{x})$ est continue sur $[0,t]$ donc g est continue sur $[0,t]$ et comme la fonction : $x\to1+\sqrt{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0,t[$ alors la fonction: $x\to\ln(1+\sqrt{x})$ est dérivable sur $]0,t[$ alors d'après le TAF $(\exists c\in]0,t[)$: $\frac{g(t)-g(0)}{t-0}=g'(c)=\frac{-1}{2\sqrt{c}}+\frac{1}{2\sqrt{c}(1+\sqrt{c})}=\frac{-1}{2(1+\sqrt{c})}$

Comme $0\langle c\langle t$ alors $\frac{-1}{2}\langle\frac{-1}{2(1+\sqrt{c})}\langle\frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$. Donc $\frac{-1}{2}\langle\frac{g(t)-g(0)}{t-0}\langle\frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$

c.à.d $\frac{-1}{2}\langle\frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}\langle\frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$.

c- On a : $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-x+\ln x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$ (car : $t=(x-1)^2$).

Et comme $(\forall t\rangle0)$: $\frac{-1}{2}\langle\frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}\langle\frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$ et $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}=\frac{-1}{2}$ alors $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}=\frac{-1}{2}$

Et par suite $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-x+\ln x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{2}$.

4)a- Soit $x\in]1,+\infty[$.

On a d'une part : $\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{\frac{\ln x}{x^2-1}-\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{1}{x-1}\times\frac{2\ln x-(x^2-1)}{2(x^2-1)}$

Et d'autre part :

$$-\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{1}{2(x+1)}+\frac{\ln x-x+1}{2(x-1)^2}=\frac{-(x-1)\ln x+(x+1)(\ln x-(x-1))}{2(x+1)(x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{x-1}\times\frac{\ln x(-(x-1)+(x+1))-(x+1)(x-1)}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{1}{x-1}\times\frac{2\ln x-(x^2-1)}{2(x^2-1)}$$

D'où , on a : $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=-\dfrac{\ln x}{x-1}\times\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{\ln x-x+1}{2(x-1)^2}$.

b-On a :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\left(-\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\times\frac{1-x+\ln x}{(x-1)^2}\right)=-1\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$$

Donc f *est derivable à droite en 1 et on a :* $f_d(1)=\frac{-1}{2}$ *et la courbe* (C) *admet une demi-tangente à droite au point* $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ *de coefficient directeur* $\frac{-1}{2}$.

5)a- Soit $x\in\left]1,+\infty\right[$ *, montrons que* $0\le I(x)\le J(x)$.

Comme la fonction : $t\mapsto\dfrac{t^2-1}{t^3}$ *est continue et positive sur* $\left]1,+\infty\right[$ *et comme* $(0,x)\in\left]1,+\infty\right[^2$ *tel que* $0\le x$ *alors* $\int_0^x\frac{t^2-1}{t^3}dt\ge0$ *et comme* $(\forall t\in[1,x]):\frac{t^2-1}{t^3}\le\frac{t^2-1}{t^2}$ *(car* $(\forall t\in[1,x])$: $t^2-1\ge0$ *et* $\frac{1}{t^3}\le\frac{1}{t^2}$ *) alors* $\int_0^x\frac{t^2-1}{t^3}dt\le\int_0^x\frac{t^2-1}{t^2}dt$.

D'où on a : $0\le I(x)\le J(x)$.

b- Soit $x\in\left]1,+\infty\right[$ *, On a :* $I(x)=\int_1^x\frac{t^2-1}{t^3}dt=\int_1^x\left(\frac{1}{t}-t^{-3}\right)dt=\left[\ln t+\frac{1}{2}t^{-2}\right]_1^x=\ln x+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}=\ln x-\frac{x^2-1}{2x^2}$

et $J(x)=\int_1^x\frac{t^2-1}{t^2}dt=\int_1^x\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[t+\frac{1}{t}\right]_1^x=x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{2x^2}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}$.

c-Comme la fonction ln est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$ *et la fonction :* $x\mapsto x^2-1$ *est dérivable et ne s'annule pas sur* $\left]1,+\infty\right[$ *alors la fonction* f *est dérivable sur* $\left]1,+\infty\right[$ *et on a* $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)$ *:*

$$f'(x)=\frac{\ln'(x)(x^2-1)-(x^2-1)'\ln x}{(x^2-1)^2}=\frac{\frac{x^2-1}{x}-2x\ln x}{(x^2-1)^2}=\frac{\frac{x^2-1}{x^2}-2\ln x}{\frac{(x^2-1)^2}{x}}=\frac{-2\left(\ln x-\frac{x^2-1}{2x^2}\right)}{\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{x}}=\frac{-2}{(x+1)^2}\times\frac{\ln x-\frac{x^2-1}{2x^2}}{\frac{(x-1)^2}{x}}$$

D'où, on a $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right)$*:* $f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}\times\dfrac{I(x)}{J(x)}$.

d- Soit $x\in\left]1,+\infty\right[$, comme $f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}\times\dfrac{I(x)}{J(x)}$ et comme $0\leq I(x)\leq J(x)$ et $J(x)>0$ et $\dfrac{-1}{2}<\dfrac{-2}{(x+1)^2}<0$ (car $(x+1)^2>4$) alors $\dfrac{-1}{2}\leq f'(x)\leq 0$.

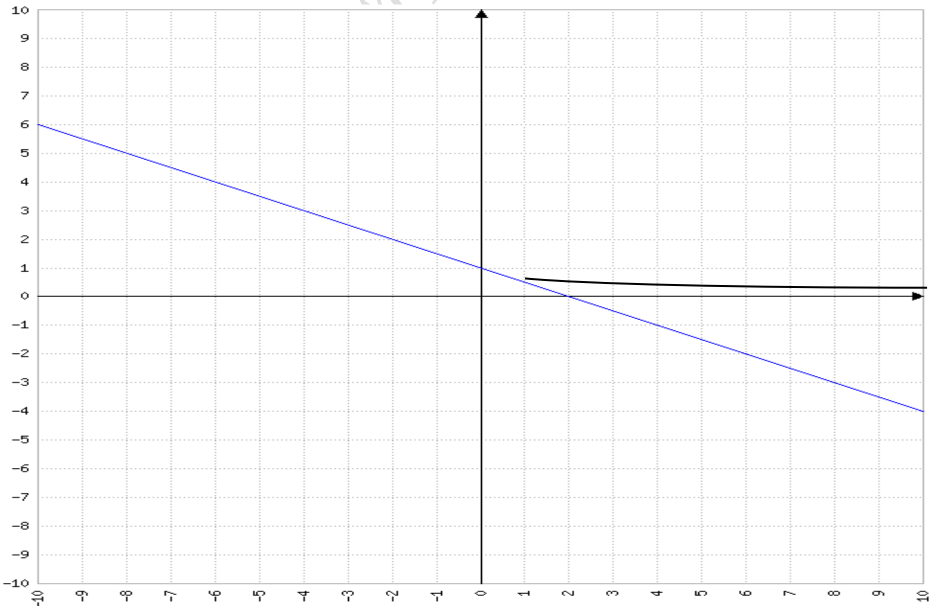
6)a- Comme $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right): f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}\times\dfrac{I(x)}{J(x)}$.

Comme la fonction : $t\mapsto\dfrac{t^2-1}{t^3}$ est continue sur $\left[1,+\infty\right[$ et comme $1\in\left[1,+\infty\right[$ alors la fonction $I: x\mapsto I(x)$ est dérivable sur $\left[1,+\infty\right[$ et On a $\left(\forall x\in\left[1,+\infty\right[\right): I'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$ et comme $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right): I'(x)>0$ alors la fonction I est strictement croissante sur $\left]1,+\infty\right[$ et comme elle est continue à droite en 1 alors elle est strictement croissante sur $\left[1,+\infty\right[$, donc on a $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right): I(x)>I(1)=0$.

Donc on a : $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right): f'(x)<0$, donc f est strictement décroissante sur $\left]1,+\infty\right[$ et comme elle est continue à droite en 1 alors elle est strictement décroissante sur $\left[1,+\infty\right[$. D'où le tableau de variations de f :

x	1	$+\infty$
$f(x)$	$1/2$ ↘	0

b- Courbe représentative de f



7) Considérons la fonction $h: x \mapsto f(x) - x + 1$

On a h est dérivable sur $]1,2[$ (somme de deux fonctions dérivables) et $\left(\forall x \in]1,2[\right)$: $h'(x) = f'(x) - 1 \langle 0$

donc h est continue et strictement décroissante sur $]1,2[$ donc elle réalise une bijection de $]1,2[$ vers $h(]1,2[) = \left]\lim_{x\to 2^-} h(x), \lim_{x\to 1^+} h(x)\right[=]h(2), h(1)[$ et comme $h(2) = f(2) - 1 \langle 0$ et $h(1) = f(1) = \frac{1}{2} \rangle 0$

alors $\left(\exists! \alpha]1,2[\right)$: $h(\alpha) = 0$ c.à.d $\left(\exists! \alpha]1,2[\right)$: $f(\alpha) = \alpha - 1$.

8) $a_0 \in [1,+\infty[$ et $a_{n+1} = 1 + f(a_n) = \varphi(a_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, avec φ est la fonction définie par :

$\varphi(x) = f(x) + 1$. On a φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\left(\forall x \in [1,+\infty[\right)$: $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$ (d'après la question 5)d et du fait que $f_d'(1) = \frac{-1}{2}$ et $\left(\forall x \in [1,+\infty[\right)$ $\varphi'(x) = f'(x)$, donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a $\left(\forall (a,b) \in [1,+\infty[^2\right)$: $|\varphi(b) - \varphi(b)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$ et comme $\alpha \in [1,+\infty[$ et $(\forall n \in \mathbf{N})$: $a_n \in [1,+\infty[$ (puisque $\varphi([1,+\infty[) = \left]1, \frac{3}{2}\right] \subset [1,+\infty[$) alors on a $(\forall n \in \mathbf{N})$:

$|\varphi(a_n) - \varphi(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|a_n - \alpha|$ et comme $\varphi(a_n) = a_{n+1}$ et $\varphi(\alpha) = \alpha$ alors on a $(\forall n \in \mathbf{N})$: $|a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|a_n - \alpha|$.

b-Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbf{N})$: $|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$.

Pour $n = 0$, on a : $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0 - \alpha| = |a_0 - \alpha|$ donc $|a_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0 - \alpha|$.

Donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons que $|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$ et montrons que $|a_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - \alpha|$.

Comme $|a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|a_n - \alpha|$ (d'après la question précédente) et comme $|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$ (S.H.R)

Alors on a : $|a_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - \alpha|$.

Et par suite, d'après le principe de la récurrence, on a $(\forall n \in \mathbf{N})$: $|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$.

c-On a, d'après la question précédente, $(\forall n \in \mathbf{N})$: $|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$ et comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

(car $-1 \langle \frac{1}{2} \langle 1$) alors la suite (a_n) est convergente et on a : $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$.

Exercice 2 (L'Analyse2)

$$(\forall x \in [0,1]) : F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

1)a- Comme la fonction : $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et en particulier sur $[0,1]$ et comme $0 \in [0,1]$ alors la fonction F est dérivable et par suite continue sur $[0,1]$ et $(\forall x \in [0,1])$:

$F'(x) = e^{x^2} \rangle 0$, donc F est strictement croissante sur $[0,1]$.

b- Comme F est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ alors elle réalise une bijection de $[0,1]$ vers $F([0,1]) = [F(0), F(1)] = [0, \beta]$, avec $\beta = F(1) = \int_0^1 e^{t^2}\, dt$.

2) On a $(\forall n \in \mathbf{N}^*)$: $\beta S_n = \dfrac{\beta - 0}{n} \sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(0 + \dfrac{k}{n}(\beta - 0)\right)$.

a- Comme F^{-1} est continue sur $[0, \beta]$ (car F est continue sur $[0,1]$) alors la suite $(\beta S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta S_n = \int_0^\beta F^{-1}(x)\, dx$. Et par suite, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l = \dfrac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(x)\, dx$.

b- Considérons l'intégrale $\int_0^\beta F^{-1}(x)\, dx$ et faisons un changement de variable en posant $u = F^{-1}(x)$. On a $(\forall x \in [0, \beta])(\forall u \in [0,1])$: $u = F^{-1}(x) \Leftrightarrow x = F(u)$

Donc on a : $dx = F'(u)\, du = e^{u^2} du$. De même on a : $x = 0 \Leftrightarrow u = 0$ et $x = \beta \Leftrightarrow u = 1$

D'où on a : $\int_0^\beta F^{-1}(x)\, dx = \int_0^1 u e^{u^2} du$. Et par suite, on a : $l = \dfrac{1}{\beta}\int_0^1 u e^{u^2} du$.

c- <u>Déduction</u>

Considérons l'intégrale $\int_0^1 u e^{u^2} du$

On a : $\int_0^1 u e^{u^2} du = \dfrac{1}{2}\int_0^1 (u^2)' e^{u^2} du = \dfrac{1}{2}\left[e^{u^2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}(e-1)$.

Et par suite on a : $l = \dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{1}{2}(e-1)\right) = \dfrac{e-1}{2\beta}$.

<u>Exercice 3</u> (Complexe)

<u>Partie 1</u>

$$(E_\alpha) : z^2 - 2iz + \alpha = 0 \quad , \quad \alpha \in \mathbf{C}$$

1)a-On a : $\Delta = (-2i)^2 - 4\alpha = -4 - 4\alpha = -4(1+\alpha)$.

b- On a (E_α) admet deux solutions distinctes dans $\mathbf{C}$ si seulement si $\Delta \neq 0$.

Donc (E_α) admet deux solutions distinctes dans $\mathbf{C}$ si seulement si $\alpha \neq -1$.

Donc l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles (E_α) admet deux solutions distinctes dans $\mathbf{C}$ est $\mathbf{C} \backslash \{-1\}$.

2) On a pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$ l'équation (E_α) est de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -2i$ et $c = 1$. On sait que : $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = 2i$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} = \alpha$.

Partie 2

Considérons les points $\Omega(\alpha)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$

1)On suppose dans cette question que $\alpha = m^2 - 2m$ *, avec* $m \in \mathbf{R}$.

a- Dans ce cas on a : $\Delta = -4(m-1)^2 = \left(2i(m-1)\right)^2$*, d'où :*

$$z_1 = \frac{2i - 2i(m-1)}{2} = (2-m)i \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{2i + 2i(m-1)}{2} = mi$$

b- Comme $m \in \mathbf{R}$ *alors* $2-m \in \mathbf{R}$*, donc* z_1 et z_2 *sont des nombres imaginaires purs.*

D'où les points M_1 et M_2 *appartiennent à l'axe imaginaire, et comme le point O l'est aussi alors les trois points* O, M_1 et M_2 *sont alignés.*

2) On suppose que les trois points O, M_1 et M_2 *ne sont pas alignés. On en déduit que* $\alpha \neq 0$*, car si non c.à.d si* $\alpha = 0$ *alors on aura* $z_1 = 0$ *ou* $z_2 = 0$ *(puisque* $z_1 z_2 = \alpha$ *) et dans ce cas on aura* $M_1 = O$ *ou* $M_2 = O$ *et donc les points* O, M_1 et M_2 *seront alignés.*

D'où $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$

a- On a :

$$\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \in i\mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_2} \in i\mathbf{R} \ (car\ |z_2|^2 \in \mathbf{R}^*)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$$

b- On a :

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1 - z_2}\right) = (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) + |z_2|^2 - 4\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = |z_1 + z_2|^2 - 4\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

c-Tenant compte de l'équivalence de la question 2)a et du résultat de la question 2)b,on a :

$$\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |2i| = 2 \ \left(car\ z_1 + z_2 = 2i\right)$$

3) a-On a : $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2 = (2i)^2 - 4\alpha = -4 - 4\alpha = -4(1+\alpha) = \Delta$

b- $\Gamma = \left\{\Omega(\alpha) \in P \,/\, le\ triangle\ OM_1M_2\ est\ rectangle\ en\ O\right\}$

Soit $\Omega(\alpha) \in P$*, ona :*

$$\Omega(\alpha) \in \Gamma \Leftrightarrow OM_1M_2\ est\ rectangle\ en\ O$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_{M_1} - z_O}{z_{M2} - z_O} \in i\mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in i\mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = 2 \ (\ d'après\ q)2c)$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \left|(z_1 - z_2)^2\right| = 4$$

$$\Leftrightarrow |-4(1+\alpha)| = 4$$

$$\Leftrightarrow |\alpha - (-1)| = 1 \Leftrightarrow A\Omega = 1.(\ avec\ A(-1)\ )$$

$$\Leftrightarrow \Omega(\alpha) \in C\left(A(-1), 1\right)$$

D'où $\Gamma = C\left(A(-1), 1\right)$

Exercice 4 (Structure)

On définit sur $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ la loi $\top$ par : $\forall(a,b)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ et $\forall(c,d)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$:

$$(a,b)\top(c,d)=\left(a\bar{d}+c,bd\right)$$

1) a-On a : $(i,2)\top(1,i)=\left(i\times\bar{i}+1,2\times i\right)=(1+1,2i)=(2,2i)$ et $(1,i)\top(i,2)=\left(1\times\bar{2}+i,2\times i\right)=(2+i,2i)$.

b- On constate d'après la question précédente que $(i,2)\top(1,i)\neq(1,i)\top(i,2)$.

Donc la loi $\top$ est non commutative.

2) Soient (a,b) ,(c,d) et (s,t) trois éléments de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$, on a :

d'une part : $\left((a,b)\top(c,d)\right)\top(s,t)=\left(a\bar{d}+c,bd\right)\top(s,t)=\left(\left(a\bar{d}+c\right)\bar{t}+s,(bd)t\right)=\left(a\bar{d}\bar{t}+c\bar{t}+s,bdt\right)$

d'autre part : $(a,b)\top\left((c,d)\top(s,t)\right)=(a,b)\top\left(c\bar{t}+s,dt\right)=\left(a\overline{dt}+c\bar{t}+s,b(dt)\right)=\left(a\bar{d}\bar{t}+c\bar{t}+s,bdt\right)$

D'où : $(a,b)\top\left((c,d)\top(s,t)\right)=\left((a,b)\top(c,d)\right)\top(s,t)$

Donc la loi $\top$ est associative.

3) Comme $\forall(a,b)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$: $(a,b)\top(0,1)=\left(a\bar{1}+0,b\times1\right)=(a,b)$ et $(0,1)\top(a,b)=\left(0\bar{b}+a,1\times b\right)=(a,b)$

Alors $(0,1)$ est l'élément neutre de $\left(\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*,\top\right)$

4) a-On a $\forall(a,b)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$: $(a,b)\top\left(-\frac{a}{\bar{b}},\frac{1}{b}\right)=\left(a\overline{\left(\frac{1}{b}\right)}+\left(-\frac{a}{\bar{b}}\right),b\times\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{a}{\bar{b}}-\frac{a}{\bar{b}},b\times\frac{1}{b}\right)=(0,1)$.

De même, on a : $\left(-\frac{a}{\bar{b}},\frac{1}{b}\right)\top(a,b)=\left(\left(-\frac{a}{\bar{b}}\right)\bar{b}+a,\frac{1}{b}\times b\right)=\left(-a+a,b\times\frac{1}{b}\right)=(0,1)$

D'où tout élément (a,b) de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ est symétrisable par rapport à $\top$ de symétrique $\left(-\frac{a}{\bar{b}},\frac{1}{b}\right)$

b- On a $\top$ est associative et non commutative dans $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ et admet un élément neutre $(0,1)$ et comme tout élément (a,b) de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ est symétrisable par rapport à $\top$ de symétrique $\left(-\frac{a}{\bar{b}},\frac{1}{b}\right)$ alors $\left(\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*,\top\right)$ est un groupe non commutatif.

5) a- On a $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*\subset\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*\neq\varnothing$.

Soient (a,b) et (c,d) deux éléments de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$, on a : $(a,b)\top(c,d)=\left(a\bar{d}+c,bd\right)$

Et comme $a\bar{d}+c\in\mathbf{R}$ et $bd\in\mathbf{R}^*$ alors $(a,b)\top(c,d)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$.

D'où $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$ est une partie stable de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$.

b- On a $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*\subset\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*\neq\varnothing$. Soient (a,b) et (c,d) deux éléments de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$ et $\left(-\frac{c}{\bar{d}},\frac{1}{d}\right)$ le symétrique de (c,d) dans $\left(\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*,\top\right)$, on a :

$$(a,b)\top\left(-\frac{c}{\bar{d}},\frac{1}{d}\right)=\left(a\times\overline{\left(\frac{1}{d}\right)}+\left(-\frac{c}{\bar{d}}\right),b\times\frac{1}{d}\right)=\left(\frac{a-c}{\bar{d}},\frac{b}{d}\right)=\left(\frac{a-c}{d},\frac{b}{d}\right)\ (car\ d\in\mathbf{R}^*)$$

Et comme $\frac{a-c}{d}\in\mathbf{R}$ et $\frac{b}{d}\in\mathbf{R}^*$ alors $(a,b)\top\left(-\frac{c}{\bar{d}},\frac{1}{d}\right)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$.

D'où $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$ est un sous-groupe de $\left(\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*,\top\right)$.

Exercice 5 (Arithmétique)

Données : $(p,q)\in P^2$ *tel que* $p\neq q$ *et soit* $r\in\mathbf{N}$ *tels que* $p\wedge r=1$ *et* $q\wedge r=1$.

1) a- Comme p *et* q *sont premiers et comme* $p\wedge r=1$ *et* $q\wedge r=1$ *alors d'après le théorème de Fermat on a :* $r^{p-1}\equiv 1\ [p]$ et $r^{q-1}\equiv 1\ [q]$. *D'où on a :* $p/r^{p-1}-1$ *et* $q/r^{q-1}-1$.

b-On a : $r^{p-1}\equiv 1\ [p]$ *et* $q-1\in\mathbf{N}$ *(puisque* $q\geq 2$ *) alors* $\left(r^{p-1}\right)^{q-1}\equiv 1^{q-1}\ [p]$ *c.à.d* $r^{(p-1)(q-1)}\equiv 1\ [p]$

D'où $p/r^{(p-1)(q-1)}-1$ *et comme* p *et* q *jouent deux rôles symétriques alors on démontre de la même manière que* $q/r^{(q-1)(p-1)}-1$.

c- Comme $p/r^{(p-1)(q-1)}-1$ *et* $q/r^{(p-1)(q-1)}-1$ *et comme* $p\wedge q=1$*(puisqu'ils sont premiers et distincts)* *alors on a :* $pq/r^{(p-1)(q-1)}-1$.

2) Résolvons dans $\mathbf{Z}$ *l'équation :* $2024^{192}x\equiv 3\ [221]$

Dans ce qui précède prenons $p=13$ *et* $q=17$ *et* $r=2024$.

On a : 13 et 17 sont deux entiers naturels premiers et distincts et on a :
$(13-1)(17-1)=12\times 16=192$. *Et comme* $2024=13\times 155+9$ *et* $2024=17\times 119+1$ *alors*
13 ne divise pas 2024 *de même pour 17 et comme ils sont premiers alors on a :*
$13\wedge 2024=1$ *et* $17\wedge 2024=1$.

De la question 1) on en déduit que $13\times 17/2024^{192}-1$ *c.à.d* $221/2024^{192}-1$

Donc on a : $2024^{192}\equiv 1\ [221]$.

D'où , on a l'équivalence :

$$2024^{192}x\equiv 3\ [221]\Leftrightarrow x\equiv 3\ [221]$$
$$\Leftrightarrow x=3+221k\ \ (k\in\mathbf{Z})$$

Donc l'ensemble des solutions de notre équation est : $S=\{3+221k\ /k\in\mathbf{Z}\}$

End

Toute remarque ou suggestion de votre part sera la bienvenue

Email : elabbassimed2014@gmail.com

Tel : 0613332835

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2024
- الموضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSSS NS 24F

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية) 4CU799A	المعامل	9

<u>CONSIGNES</u> :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ……………………(7.5 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse ……………………(2.5 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes……….(3.5 pts)

- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique ………………(3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 :(7.5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$f(1)=\frac{1}{2} \text{ et pour tout } x\in]1,+\infty[\quad , \quad f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- Montrer que f est continue à droite en 1

0.5 2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 3- a) Soit $x\in]1,+\infty[$

En posant : $t=(x-1)^2$, vérifier que : $\dfrac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$

0.5 b) Montrer que $(\forall t\in]0,+\infty[)$, $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t}<\dfrac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0;t]$)

0.25 c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$

0.5 4- a) Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[$, $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=-\dfrac{\ln(x)}{x-1}\times\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$

0.5 b) En déduire que f est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5- Pour tout $x\in[1,+\infty[$ on pose $I(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2-1}{t^3}dt$ et $J(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2-1}{t^2}dt$

0.5 a) Montrer que : $\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\le I(x)\le J(x)$

0.5 b) Montrer que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $I(x)=\ln(x)-\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ et $J(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}$

0.5 c) Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}\times\dfrac{I(x)}{J(x)}$

0.5 d) En déduire que : $\forall x\in]1,+\infty[,\ -\dfrac{1}{2}\le f'(x)\le 0$

0.25 6- a) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.5 b) Tracer la courbe (C) (On prendra $\|\vec{i}\|=1\text{cm}$ et $\|\vec{j}\|=2\text{cm}$)

0.5 7- Montrer que l'équation $f(x)=x-1$ admet une unique solution a dans $]1,2[$

8- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$a_0\in[1,+\infty[\qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \qquad a_{n+1}=1+f(a_n)$$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ |a_{n+1} - a| \le \frac{1}{2}|a_n - a|$

0.5 b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ |a_n - a| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$

0.25 c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

EXERCICE2 :(2.5 points)

Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$

0.5 1-a) Montrer que F est continue, strictement croissante sur $[0;1]$

0.5 b) En déduire que F est une bijection de $[0;1]$ vers $[0;\beta]$ avec $\beta = \int_0^1 e^{t^2}\,dt$

2- On note F^{-1} la bijection réciproque de F

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

0.5 a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)\,dt$

0.5 b) Montrer que $\ell = \frac{1}{\beta}\int_0^1 u\,e^{u^2}\,du$

(On pourra effectuer le changement de variable $u = F^{-1}(t)$)

0.5 c) En déduire que : $\ell = \frac{e-1}{2\beta}$

EXERCICE3 : (3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E_\alpha):\ z^2 - 2iz + \alpha = 0 \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{C}$$

Partie I :

0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta = -4(1+\alpha)$

0.25 b) Déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles l'équation (E_α) admette dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes.

0.5 2- On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α).

Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$

Partie II :

Soient Ω , M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α , z_1 et z_2

1- On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$

0.5 a) Déterminer z_1 et z_2 en fonction de m

0.25 b) En déduire que les points O , M_1 et M_2 sont alignés.

2-On suppose que les points O , M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

0.25 a) Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $Re\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$

0.5 b) Montrer que : $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4\,Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$

0.25 c) En déduire que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$

0.25 3-a) Montrer que : $(z_1 - z_2)^2 = \Delta$

0.5 b) Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O

EXERCICE4 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$$\forall\left((a,b),(c,d)\right) \in \left(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*\right)^2 \; ; \; (a,b)T(c,d) = \left(a\overline{d} + c,\, bd\right)$$

($\overline{d}$ étant le conjugué du nombre complexe d)

0.5 1-a) Vérifier que $(i,2)T(1,i) = (3,2i)$, puis calculer $(1,i)T(i,2)$

0.25 b) En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

0.5 2- Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

0.25 3- Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$

0.5 4-a) Vérifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \; ; \; (a,b)T\left(-\frac{a}{\overline{b}}, \frac{1}{b}\right) = (0,1)$

0.5 b) Montrer que $\left(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T\right)$ est un groupe non commutatif.

0.5 5-a) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T

0.5 b) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $\left(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T\right)$

EXERCICE5 :(3 points)

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q

1 1- a) Montrer que p divise $r^{p-1}-1$ et que q divise $r^{q-1}-1$

0.5 b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)}-1$

0.5 c) Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)}-1$

1 2- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3 \quad [221]$ (On donne : $221 = 13 \times 17$)

FIN