Correction 1

a. L'algorithme d'Euclide permet d'obtenir le tableau :

Dividende	Diviseur	Reste
354	20	14
20	14	6
14	6	2
6	2	0

$354 = 17 \times 20 + 14$

$20 = 1 \times 14 + 6$

$14 = 2 \times 6 + 2$

$6 = 3 \times 2 + 0$

On en déduit : $\text{pgcd}(354\,;20) = 2$

b. L'algorithme d'Euclide permet d'obtenir le tableau :

Dividende	Diviseur	Reste
1456	256	176
256	176	80
176	80	16
80	16	0

$1456 = 5 \times 256 + 176$

$256 = 1 \times 176 + 80$

$176 = 2 \times 80 + 16$

$80 = 5 \times 16 + 0$

On en déduit : $\text{pgcd}(1456\,;256) = 16$

c. L'algorithme d'Euclide permet d'obtenir le tableau :

Dividende	Diviseur	Reste
3941	17	14
17	14	3
14	3	2
3	2	1
2	1	0

$3941 = 231 \times 17 + 14$

$17 = 1 \times 14 + 3$

$14 = 4 \times 3 + 2$

$3 = 1 \times 2 + 1$

$2 = 1 \times 1 + 0$

On en déduit : $\text{pgcd}(3941\,;231) = 1$

d. L'algorithme d'Euclide permet d'obtenir le tableau :

Dividende	Diviseur	Reste
256419	3866	1263
3866	1263	77
1263	77	31
77	31	15
31	15	1
15	1	0

$256419 = 66 \times 3866 + 1263$

$3866 = 3 \times 1263 + 77$

$1263 = 16 \times 77 + 31$

$77 = 2 \times 31 + 15$

$31 = 2 \times 15 + 1$

$15 = 15 \times 1 + 0$

On en déduit : $\text{pgcd}(256419\,;386) = 1$

Correction 2

L'entier 120 admet la décomposition suivante en produit de facteurs premiers :

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

Puisque 6 $(=2\times3)$ est le plus grand diviseur commun, il faut que l'entier n ait pour facteurs premiers 2 et 3 ; et ne doit pas posséder le facteur 5. Plus précisément, l'entier n doit admettre une décomposition :

$$n = 2\times3^{\alpha}\times p$$

où $\alpha \geqslant 1$ et p est un entier qui n'est pas divisible par 2, par 3, par 5.

Voici les différentes possibilités pour l'entier n :

- De la forme $2\times3\times p$ et inférieur à 120 :

$n = 2\times3 = 6$; $n = 2\times3\times7 = 42$; $n = 2\times3\times11 = 66$

$n = 2\times3\times13 = 78$; $n = 2\times3\times17 = 102$; $n = 2\times3\times19 = 114$

- De la forme $2\times3^2\times p$ et inférieur à 120 :
  $n = 2\times3^2 = 18$
- De la forme $2\times3^3\times p$ et inférieur à 120 :
  $n = 2\times3^3 = 54$
- Il n'y aucun entier n inférieur à 120 et s'écrivant sous la forme :
  $n = 2\times3^4\times p$

Il existe 8 entiers naturels inférieurs à 120 et vérifiant la relation :

$$\text{pgcd}(n\,;120) = 6$$

Correction 3

1. Soit d_n le $PGCD$ de A_n et A_{n+1} ; ainsi, il divise également la différence de ces deux entiers :

$$A_{n+1} - A_n = \left(2^{n+1}+p\right) - \left(2^n+p\right) = 2^{n+1} - 2^n$$
$$= 2^n\cdot\left(2-1\right) = 2^n\times1 = 2^n$$

Ainsi, d_n divise 2^n.

2. Puisque n est un entier naturel non nul, on peut écrire :
$2^n = 2\times2^{n-1}$ où $n-1\in\mathbb{N}$:

- Supposons p pair ; il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que :
  $p = 2\cdot k$
  Ainsi, on peut écrire :
  $A_n = 2^n + p = 2\times2^{n-1} + 2\cdot k = 2\cdot\left(2^{n-1}+k\right)$
  A_n est pair.
- Supposons p impair ; il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que :
  $p = 2\cdot k + 1$
  Ainsi, on peut écrire :
  $A_n = 2^n + p = 2\times2^{n-1} + \left(2\cdot k+1\right)$
  $= 2\cdot\left(2^{n-1}+k\right) + 1$
  A_n est impair.

Correction 4

- Puisque le $PGCD$ des entiers m et n est 6, alors il existe k et k' deux entiers premiers entre eux tels que :
  $m = 6\cdot k$; $n = 6\cdot k'$

  Ainsi, l'égalité suivante devient :

$$m + n = 72$$
$$6\cdot k + 6\cdot k' = 72$$
$$6\cdot\left(k+k'\right) = 72$$
$$k + k' = 12$$

- Voici les couples $(k\,;k')$ réalisant $k+k'=12$ tels que k et k' sont premiers entre eux sont :
  $(1\,;11)$; $(5\,;7)$; $(7\,;5)$; $(11\,;1)$
- Voici les couples $(m\,;n)$ associés aux couples précédem-

ment trouvés :
$(6\,;66)$; $(30\,;42)$; $(30\,;42)$; $(66\,;6)$

- Voici donc les seuls couples réalisant les deux conditions :
$\text{pgcd}(m\,;n)=6$; $m+n=72$

$(6\,;66)$; $(30\,;42)$; $(42\,;30)$; $(66\,;6)$

Correction 5

Soit $(m\,;n)$ solution du système $\mathcal{S}$.

Ainsi, on a $\text{pgcd}(m\,;n)=8$. On en déduit que les entiers m et n sont divisibles par 8, ainsi que l'existence de deux entiers k et k' premiers entre eux tels que :
$m=8{\cdot}k$; $n=8{\cdot}k'$

Le couple $(m\,;n)$ vérifiant le système $\mathcal{S}$, ils vérifient la première équation :

$$\begin{aligned}m^2-n^2&=5440\\ \left(8{\cdot}k\right)^2-\left(8{\cdot}k'\right)^2&=5440\\ 64{\cdot}k^2-64{\cdot}k'^2&=5440\\ 64{\cdot}\left(k^2-k'^2\right)&=5440\\ k^2-k'^2&=85\\ \left(k+k'\right)\left(k-k'\right)&=85\end{aligned}$$

Les diviseurs de 85 sont : 1 ; 5 ; 17 ; 85

Du fait que les entiers m et n sont positifs, on en déduit qu'il en ait de même de k et de k'. De la dernière équation, on en déduit que $k\geqslant k'$. Mais aussi $k+k'\geqslant k-k'$.

Ainsi, le couple $(k\,;k')$ doit être solution de l'un des systèmes suivants :

- $\left\{\begin{aligned}k+k'&=85\\ k-k'&=1\end{aligned}\right.$
On en déduit : $k=43$; $k'=42$ $\Longrightarrow$ $m=344$; $n=336$

  On vérifie facilement que le couple $(344\,;336)$ est une solution du système $\mathcal{S}$

- $\left\{\begin{aligned}k+k'&=17\\ k-k'&=5\end{aligned}\right.$
On en déduit : $k=11$; $k'=6$ $\Longrightarrow$ $m=88$; $n=48$

  On vérifie facilement que le couple $(88\,;48)$ est une solution du système $\mathcal{S}$

Ainsi, le système $\mathcal{S}$ admet les deux solutions :
$(344\,;336)$; $(88\,;48)$

Correction 6

1. d étant le PGCD des deux entiers $9n+4$ et $2n-1$. Ainsi, d divise toute combinaison linéaire de ces deux entiers et en particulier :
$$2{\cdot}\left(9n+4\right)-9{\cdot}\left(2n-1\right)=\left(18{\cdot}n+8\right)-\left(18{\cdot}n-9\right)$$
$$=18{\cdot}n+8-18{\cdot}n+9=17$$
On vient de montrer que d divise 17.

2. Démontrons ces deux assertions :

   - Supposons que $n\equiv 9 \pmod{17}$. On a les deux congruences suivantes :

     ⇨ $9n+4\equiv 9{\times}9+4\equiv 81+4\equiv 85$
     $\equiv 5{\times}17\equiv 0 \pmod{17}$

     ⇨ $2n-1\equiv 2{\times}9-1\equiv 18-1\equiv 17\equiv 0 \pmod{17}$

     On vient de montrer que 17 est un diviseur commun aux deux entiers $9n+4$ et $2n-1$: ainsi, 17 divise d.
     Or, d'après la question précédente, d divise 17, on en déduit :
     $\text{pgcd}(9n+4\,;2n-1)=17$

   - Supposons que : $\text{pgcd}(9n+4\,;2n-1)=17$.
     Ainsi, l'entier 17 divise les deux entiers $9n+4$ et $2n-1$.
     On en déduit la congruence suivante :
$$\begin{aligned}9n+4&\equiv 0 \pmod{17}\\ 2{\times}\left(9n+4\right)&\equiv 0 \pmod{17}\\ 18n+8&\equiv 0 \pmod{17}\\ 1n+8&\equiv 0 \pmod{17}\\ n+8+9&\equiv 9 \pmod{17}\\ n+17&\equiv 9 \pmod{17}\\ n&\equiv 9 \pmod{17}\end{aligned}$$

Correction 7

- **Première méthode :**

  D'après les propriétés du PGCD, on a :
  $\text{pgcd}(2x+y\,;5x+2y)$
  $=\text{pgcd}\big(2x+y\,;\left[5x+2y\right]-2{\times}\left[2x+y\right]\big)$
  $=\text{pgcd}(2x+y\,;5x+2y-4x-2y)=\text{pgcd}(2x+y\,;x)$

  D'après la même propriété :
  $=\text{pgcd}\big(2x+y-\left[2{\times}x\right]\,;x\big)=\text{pgcd}(y\,;x)=1$

  On en déduit que les entiers $2x+y$ et $5x+2y$ sont premiers entre eux.

- **Seconde méthode :**

  Supposons que x et y sont premiers entre eux. C'est à dire :
  $\text{pgcd}(x\,;y)=1$

  Notons d le $PGCD$ des deux entiers $2x+y$ et $5x+2y$:
  $\text{pgcd}(2x+y\,;5x+2y)=d$

  Ainsi, d divise $2x+y$ et d divise $5x+2y$. On en déduit que l'existence de k et de k' deux entiers relatifs vérifiant :
  $k{\cdot}d=2x+y$; $k'{\cdot}d=5x+2y$

  On a les égalités suivantes :

  ⇨ $$\begin{aligned}2{\cdot}(2x+y)-(5x+2y)&=2{\cdot}(2x+y)-(5x+2y)\\ 2{\cdot}(k{\cdot}d)-k'{\cdot}d&=4x+2y-5x-2y\\ (2k-k'){\cdot}d&=-x\\ (k'-2k){\cdot}d&=x\end{aligned}$$

  ⇨ $$\begin{aligned}5{\cdot}(2x+y)-2{\cdot}(5x+2y)&=5{\cdot}(2x+y)-2{\cdot}(5x+2y)\\ 5{\cdot}(k{\cdot}d)-2{\cdot}(k'{\cdot}d)&=10x+5y-10x-4y\\ 5{\cdot}(k{\cdot}d)-2{\cdot}(k'{\cdot}d)&=y\\ \left(5{\cdot}k-2{\cdot}k'\right){\cdot}d&=y\end{aligned}$$

  Les deux égalités précédemment obtenues montrent que d est un diviseur commun de x et de y. Ainsi, d divise le $PGCD$ de x et de y :
  $d=1$.
  On en déduit que les entiers $2x+y$ et $5x+2y$ sont premiers entre eux.

Correction 8

1. - **Première méthode :**
     On a :

$\text{pgcd}(a\,;b)=\text{pgcd}(9p+4q\,;2p+q)$

D'après les propriétés du PGCD :

$= \text{pgcd}\big(9p+4q-4\times[2p+q]\,;2p+q\big)$

$= \text{pgcd}(9p+4q-8p-4q\,;2p+q)=\text{pgcd}(p\,;2p+q)$

D'après les propriétés du PGCD :

$= \text{pgcd}(p\,;2p+q)=\text{pgcd}(p\,;2p+q-2\times p)$

$= \text{pgcd}(p\,;q)$

- **Seconde méthode :**

Notons d et d' les deux entiers définis par :

$d = \text{pgcd}(p\,;q)$; $d' = \text{pgcd}(a\,;b)$

➡ *Montrons que d' divise d :*

d' divise a et b. On en déduit :

- d' divise $(a-4\cdot b)$. Or :

$a-4\cdot b = (9p+4q)-4\cdot(2p+q)$

$= 9p+4q-8p-4q = p$

Donc, d' divise p.

- d' divise $(9\cdot b-2\cdot a)$. Or :

$9\cdot(2p+q)-2\cdot(9p+4q)$

$= 18p+9q-18p-8q = q$

Donc, d' divise q.

d' est donc un diviseur commun à p et q. On en déduit :

d' divise $\text{pgcd}(p\,;q)$.

➡ *Montrons que d divise d' :*

On a les implications suivantes :

- d divise p et q $\Longrightarrow$ d divise $9p+4q$

$\Longrightarrow d$ divise a

- d divise p et q $\Longrightarrow$ d divise $2p+q$

$\Longrightarrow d$ divise a

Donc, d est un diviseur commun à a et b. On en déduit que :

d divise $\text{pgcd}(a\,;b)$

Donc, d divise d' et d' divise d. On en déduit l'égalité :

$d=d'$

2. A la question précédente, on vient de montrer que :

$\text{pgcd}(9p+4q\,;2p+q) = \text{pgcd}(p\,;q)$

En prenant $q=1$

$\text{pgcd}(9p+4q\,;2p+q) = \text{pgcd}(p\,;q)$

$\text{pgcd}(9p+4\,;2p+1) = \text{pgcd}(p\,;1)$

$\text{pgcd}(9p+4\,;2p+1) = 1$

On en déduit que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux.

Correction 9

1. Notons d l'entier définie par : $d=\text{pgcd}(2k+1\,;9k+4)$

Ainsi, on a :

$d=\text{pgcd}\big(2k+1\ ;\ 9k+4\big)=\text{pgcd}\big(2k+1\ ;\ (9k+4)-4\cdot(2k+1)\big)$

$=\text{pgcd}\big(2k+1\ ;\ 9k+4-8k-4\big)=\text{pgcd}\big(2k+1\ ;\ k\big)$

$=\text{pgcd}\big((2k+1)-2k\ ;\ k\big)=\text{pgcd}(1\ ;\ k)=1$

On en déduit que les entiers $2k+1$ et $9k+4$ sont premiers entre eux.

2. a. Notons d le $PGCD$ des deux entiers $2k-1$ et $9k+4$.

Ainsi, d divise l'entier :

$d=\text{pgcd}\big(2k-1\,;9k+4\big)=\text{pgcd}\big(2k-1\,;(9k+4)-4\cdot(2k-1)\big)$

$=\text{pgcd}\big(2k-1\,;9k+4-8k+4\big)=\text{pgcd}\big(2k-1\,;k+8\big)$

$=\text{pgcd}\big((2k-1)-2\cdot(k+8)\,;k+8\big)=\text{pgcd}\big(2k-1-2k-16\,;k+8\big)$

$=\text{pgcd}\big(-17\,;k+8\big)$

On en déduit que d est un diviseur de 17.

17 étant un entier premier, on en déduit :

$d=1$ ou $d=17$.

b. Montrons les deux implications :

- Supposons que $k\equiv 9 \pmod{17}$:

➡ $2k-1 \equiv 2\times 9-1 \equiv 18-1 \equiv 17 \equiv 0 \pmod{17}$

➡ $9k+4 \equiv 9\times 9+4 \equiv 81+4 \equiv 85$

$\equiv 5\times 17 \equiv 0 \pmod{17}$

On vient de montrer que 17 est un diviseur commun aux entiers $2k-1$ et $9k+4$.

D'après la question précédente, on en déduit :

$\text{pgcd}(2k-1\,;9k+4) = 17$.

- Supposons que : $\text{pgcd}(2k-1\,;9k+4)=17$.

Donc 17 divise l'entier $9k+4$ et on en déduit qu'il divise l'entier $18k+8$. Ainsi, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} 18k+8 &\equiv 0 \pmod{17} \\ 1k+8 &\equiv 0 \pmod{17} \\ k+8+9 &\equiv 9 \pmod{17} \\ k+17 &\equiv 9 \pmod{17} \\ k &\equiv 9 \pmod{17} \end{aligned}$$

On en déduit que : $k\equiv 9 \pmod{17}$

Correction 10

On remarque le développement suivant :

$$(n+3)(5-2n) = 5n-2n^2+15-6n = -2n^2-n+15$$

Notons $a=n+3$ et $b=-2n^2-n+14$ et considérons la combinaison linéaire suivante des entiers a et b :

$$(5-2n)\cdot a+(-1)\cdot b = (5-2n)(n+3)-(-2n^2-n+14)$$

$$= -2n^2-n+15+2n^2+n-14 = 1$$

D'après le théroème de Bezout, les deux entiers a et b sont premiers entre eux.

Ainsi, $n+3$ et $-2n^2-n+14$ sont premiers entre eux.

Correction 11

1. - Le couple $(1\,;0)$ est solution de l'équation :

$x^2-8\cdot y^2 = 1^2-8\times 0^2 = 1-0 = 1$

- Le couple $(3\,;1)$ est solution de l'équation :

$x^2-8\cdot y^2 = 3^2-8\times 1^2 = 9-8 = 1$

2. Soit $(x\,;y)$ un couple solution de (E) :

$x^2-8\cdot y^2 = 1$

$x\cdot x-(8\cdot y)\cdot y = 1$

A l'aide du théorème de Bezout, on vient de montrer que les entiers x et y sont premiers entre eux.

Correction 12

a. L'algorithme d'Euclide permet de construire le tableau suivant :

Dividende	Diviseur	Reste
354	49	11
49	11	5
11	5	1
5	1	0

$354 = 7 \times 49 + 11$

$49 = 4 \times 11 + 5$

$11 = 2 \times 5 + 1$

$5 = 5 \times 1 + 0$

On en déduit : $\text{pgcd}(354\,;49) = 1$

Les entiers 354 et 49 sont premiers entre eux ; d'après, le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers $(u\,;v)$ vérifiant :
$354{\cdot}u + 49{\cdot}v = 1$

Utilisons les divisions euclidiennes de l'algorithme d'euclide et exprimons chacun des restes obenus successivement en fonction des deux entiers $a{=}354$ et $b{=}49$:

- $$\begin{aligned} 354 &= 7{\times}49 + 11 \\ a &= 7{\cdot}b + 11 \\ a - 7{\cdot}b &= 11 \\ 11 &= a - 7{\cdot}b \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 49 &= 4{\times}11 + 5 \\ b &= 4{\cdot}\big(a - 7{\cdot}b\big) + 5 \\ b &= 4{\cdot}a - 28{\cdot}b + 5 \\ -4{\cdot}a + 29{\cdot}b &= 5 \\ 5 &= -4{\cdot}a + 29{\cdot}b \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 11 &= 2{\times}5 + 1 \\ \big(a - 7{\cdot}b\big) &= 2{\cdot}\big(-4{\cdot}a + 29{\cdot}b\big) + 1 \\ a - 7{\cdot}b &= -8{\cdot}a + 58{\cdot}b + 1 \\ 9{\cdot}a - 65{\cdot}b &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, le couple recherché est $(\,9\,;-65\,)$. On peut vérifier que : $9{\times}354 + (-65){\times}49 = 1$

b. L'algorithme d'Euclide, appliqué aux entiers 34 et de 57, permet d'obtenir le tableau ci-dessous :

Dividende	Diviseur	Reste
57	34	23
34	23	11
23	11	1
11	1	0

$57 = 1 \times 34 + 23$

$34 = 1 \times 23 + 11$

$23 = 2 \times 11 + 1$

$11 = 11 \times 1 + 0$

On en déduit $\text{pgcd}(\,57\,;34\,){=}1$. Ces deux entiers sont premiers entre eux.
Le théorème de Bezout prouve l'existence d'un couple $(u\,;v)$ vérifiant :
$34{\cdot}u + 57{\cdot}v = 1$

Pour déterminer les valeurs de u et de v, utilisons les divisions euclidiennes obtenues à l'aide de l'algorithme d'Euclide et exprimons chacun de leurs restes en fonction de $a{=}34$ et $b{=}57$:

- $$\begin{aligned} 57 &= 1{\times}34 + 23 \\ b &= 1{\times}a + 23 \\ b - a &= 23 \\ 23 &= b - a \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 34 &= 1{\times}23 + 11 \\ a &= 1{\times}\big(b - a\big) + 11 \\ a &= b - a + 11 \\ 2a - b &= 11 \\ 11 &= 2a - b \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 23 &= 2{\times}11 + 1 \\ \big(b - a\big) &= 2{\times}\big(2a - b\big) + 1 \\ b - a &= 4a - 2b + 1 \\ -5a + 3b &= 1 \\ 1 &= -5a + 3b \end{aligned}$$

On en déduit que le couple d'entiers recherché est $(-5\,;3)$. On peut vérifier que : $-5{\times}34{+}3{\times}57{=}1$

Correction 13

1. L'algorithme d'Euclide, appliqué aux entierss 56 et 45, permet d'obtenir le tableau ci-dessous :

Dividende	Diviseur	Reste
56	45	11
45	11	1
11	1	0

$56 = 1 \times 45 + 11$

$45 = 4 \times 11 + 1$

$11 = 11 \times 1 + 0$

On en déduit : $\text{pgcd}(\,56\,;45\,){=}1$. Les deux entiers 56 et 45 sont premiers entre eux.
Le théorème de Bezout donne l'existence de deux entiers, il existe deux entiers x et y tels que :
$x{\cdot}56 + y{\cdot}45 = 1$

Exprimant les restes, obtenues dans le tableau de l'algorithme d'Euclide, à l'aide des deux entiers $a{=}56$ et $b{=}45$:

- $$\begin{aligned} 56 &= 1{\times}45 + 11 \\ a &= 1{\times}b + 11 \\ a - b &= 11 \\ 11 &= a - b \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 45 &= 4{\times}11 + 1 \\ b &= 4{\times}(a - b) + 1 \\ -4a + 5b &= 1 \\ 1 &= -4a + 5b \end{aligned}$$

On en déduit une valeur possible du couple $(x\,;y)$:
$(x\,;y) = (-4\,;5)$

2. De la question précédente, on a :
$$\begin{aligned} 56{\times}(-4) + 45{\times}5 &= 1 \\ 3{\cdot}\big[56{\times}(-4) + 45{\times}5\big] &= 3{\times}1 \\ 56{\times}\big[3{\times}(-4)\big] + 45{\times}\big(3{\times}5\big) &= 3 \\ 56{\times}(-12) + 45{\times}15 &= 3 \end{aligned}$$
Ainsi, un couple solution est : $(x'\,;y') = (-12\,;15)$.

Correction 14

1. d étant le PGCD des entiers a et b, il divise ces deux entiers et toutes combinaisons linéaires de ces deux entiers. En particulier :
$$\begin{aligned} 2{\cdot}b - 3{\cdot}a &= 2{\cdot}\big(3n + 15\big) - 3{\cdot}\big(2n + 8\big) \\ &= 6n + 30 - 6n - 24 = 6 \end{aligned}$$
d est un diviseur de l'entier 6.

2. a. Soit n un entier naturel tel que :
$\text{pgcd}(2n{+}8\,;3n{+}15) = 6$

Ainsi, 6 divise toute combinaison linéaire des entiers $2n{+}8$ et $3n{+}15$. On en déduit :

$$\begin{aligned}(-1)\cdot(2n+8)+1\cdot(3n+15) &\equiv 0 \pmod{3}\\ -2n-8+3n+15 &\equiv 0 \pmod{3}\\ n+7 &\equiv 0 \pmod{3}\\ n &\equiv -7 \pmod{3}\\ n &\equiv -4 \pmod{3}\end{aligned}$$

Ainsi, il existe un entier relatif k tel que :
$n = -4+3\cdot k$

b. Soit $n{\in}\mathbb{N}$ tel que a et b aient pour pgcd l'entier 6 :
$\text{pgcd}(a\,;b) = 6$

Ainsi, les entiers a et b s'expriment en fonction de k :

$$\begin{aligned}a &= 2n+8\\ &= 2\cdot\big(-4+3\cdot k\big)+8\\ &= -8+6\cdot k+8\\ &= 6\cdot k\end{aligned}\qquad\Bigg|\qquad\begin{aligned}b &= 3n+15\\ &= 3\cdot\big(-4+3\cdot k\big)+15\\ &= -12+9\cdot k+15\\ &= 3+9\cdot k\end{aligned}$$

Raisonnons par disjonction de cas :

- Si k est pair, il existe $\ell{\in}\mathbb{N}$ tel que : $k{=}2{\cdot}\ell$.
$a = 12\cdot\ell = 6\cdot\big(2\cdot\ell\big)$; $b = 3+18\cdot\ell = 3+6\cdot\big(3\cdot\ell\big)$
Or, l'entier b n'est pas divisible par 6 : l'entier 6 n'est pas leur pgcde peut être le PGCD de a et de b car b n'est pas un entier pair.

- Si k est impair, il existe $\ell{\in}\mathbb{N}$ tel que : $k{=}2{\cdot}\ell{+}1$.

$$a = 6\cdot\big(2\cdot\ell+1\big)\qquad\Bigg|\qquad\begin{aligned}b &= 3+9\cdot\big(2\cdot\ell+1\big)\\ &= 3+18\cdot\ell+9\\ &= 18\cdot\ell+12\\ &= 6\cdot\big(3\cdot\ell+2\big)\end{aligned}$$

On en déduit que 6 est un diviseur commun à a et b.
Pour montrer que 6 est leur PGCD, il faut montrer que $2\ell{+}1$ et $3\ell{+}2$ sont deux entiers premiers entre eux.

On remarque l'égalité :
$2\cdot\big(3\ell+2\big)+(-3)\big(2\ell+1\big) = 6\ell+4-6\ell-3 = 1$
Le théorème de Bézout permet d'affirmer que ces deux entiers sont premiers entre eux et on en déduit que 6 est le PGCD de entiers a et b.

De plus, n admet pour expression :

$$\begin{aligned}n &= -4+3k = -4+3\cdot\big(2\ell+1\big)\\ &= -4+6\ell+3 = 6\ell-1 \quad \text{où } \ell{\in}\mathbb{N}^*\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}$ s'exprime par :
$\mathcal{S}{=}\big\{6{\cdot}\ell{-}1 \mid \ell{\in}\mathbb{N}^*\big\}$

Correction 15

1.
- **Etape 1** : la lettre V correspond à l'entier 21.
- **Etape 2** : $9{\times}21+2 = 189+2 = 191 = 7{\times}26+9$
$\equiv 9 \pmod{26}$
- **Etape 3** l'entier 9 est associé à la lettre J.

2. Les entiers 9 et 26 sont premiers entre eux : les diviseurs de 26 sont 1, 2, 13, 26 ; hors, seul 1 est un diviseur commun.

Le théorème de Bezout stipule : "*Si deux entiers x et y sont premiers entre eux alors il existe deux entiers u et v tel que :*
$u{\cdot}x{+}v{\cdot}y{=}1$"

Pour $u{=}3$ et $v{=}{-}1$, on a :
$9{\cdot}u+26{\cdot}v = 9{\times}3+26{\times}(-1) = 27-26 = 1$

3.
- Supposons que :

$$\begin{aligned}x' &\equiv 9{\cdot}x+2 \pmod{26}\\ 3{\cdot}x' &\equiv 3{\cdot}\big(9{\cdot}x+2\big) \pmod{26}\\ 3{\cdot}x' &\equiv 27{\cdot}x+6 \pmod{26}\\ 3{\cdot}x' &\equiv 1{\cdot}x-20 \pmod{26}\\ x &\equiv 3{\cdot}x'+20 \pmod{26}\end{aligned}$$

- Supposons que :

$$\begin{aligned}x &\equiv 3{\cdot}x'+20 \pmod{26}\\ x &\equiv 3{\cdot}x'+20 \pmod{26}\\ 9{\cdot}x &\equiv 9{\cdot}\big(3{\cdot}x'+20\big) \pmod{26}\\ 9{\cdot}x &\equiv 27{\cdot}x'+\big(6{\times}26+24\big) \pmod{26}\\ 9{\cdot}x &\equiv 1{\cdot}x'+24 \pmod{26}\\ 9{\cdot}x &\equiv x'-2 \pmod{26}\\ x' &\equiv 9{\cdot}x+2 \pmod{26}\end{aligned}$$

4. La lettre est associée par l'entier 17.
Notons x l'entier associé à la lettre qui a été codé en R?.
L'entier x vérifie la relation :
$17 \equiv 9{\cdot}x+2 \pmod{26}$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}x &\equiv 3{\times}17+20 \pmod{26}\\ x &\equiv 51+20 \pmod{26}\\ x &\equiv 71 \pmod{26}\\ x &\equiv 2{\times}26+19 \pmod{26}\\ x &\equiv 19 \pmod{26}\end{aligned}$$

Or, comme x vérifie $0{\leqslant}x{<}26$, on en déduit :
$x{=}19$

Ainsi, la lettre recherchée est T.

Correction 16

1. On a : $\begin{aligned}11 &= 3{\times}3+2\\ &\equiv 2 \pmod{3}\end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned}11 &= 2{\times}5+1\\ &\equiv 1 \pmod{3}\end{aligned}$

2. Supposons que l'entier n soit solution de $(\mathcal{S})$. En particulier, on a :

$$\begin{aligned}n &\equiv 2 \pmod{3}\\ n-11 &\equiv 2-11 \pmod{3}\\ n-11 &\equiv -9 \pmod{3}\\ n-11 &\equiv 0 \pmod{3}\end{aligned}$$

On vient de montrer que $n{-}11$ sera alors divisible par 3.

3. D'après la question précédente, il existe un entier k tel que :

$$\begin{aligned}n-11 &= 3{\cdot}k\\ n &= 11+3{\cdot}k\end{aligned}$$

Puisque n vérifie le système, en particulier on a :

$$\begin{aligned}n &\equiv 1 \pmod{5}\\ 11+3{\cdot}k &\equiv 1 \pmod{5}\\ 1+3{\cdot}k &\equiv 1 \pmod{5}\\ 3{\cdot}k &\equiv 0 \pmod{5}\end{aligned}$$

Ainsi, l'entier $3{\cdot}k$ est divisible par 5 et les entiers 5 et 3 sont premier entre eux.
D'après le théorème de Gauss, on en déduit que l'entier 5 divise l'entier k.

Il existe un entier k' tel que $k{=}5{\cdot}k'$. Ainsi, l'entier n

admet l'expression :
$n=11+3{\cdot}k=11+3{\cdot}\big(5{\cdot}k'\big)=11+15{\cdot}k'$

Réciproquement, montrons que tout entier s'écrivant sous la forme $11{+}15{\cdot}k$ où $k{\in}\mathbb{Z}$ est une solution du système :

- $n=11+15{\cdot}k$
  $\equiv 2+0{\cdot}k\equiv 2 \pmod{3}$
- $n=11+15{\cdot}k$
  $\equiv 1+0{\cdot}k\equiv 1 \pmod{5}$

L'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}$ est :
$\big\{11{-}5{\cdot}k \mid k\in\mathbb{Z}\big\}$

Correction 17

1. Les entiers x et y vérifient l'égalité :

$$y{\cdot}(y-x)=x{\cdot}(2-x)$$
$$y^2-y{\cdot}x=x{\cdot}(2-x)$$
$$y^2=x{\cdot}(2-x)+y{\cdot}x$$
$$y^2=x{\cdot}(2-x+y)$$
$$x{\cdot}(2-x+y)=y{\times}y$$

L'égalité précédente montre que l'entier x divise le produit $y{\times}y$. Par disjonction de cas, on raisonne suivant les deux cas suivants :

- y est un multiple de x : alors il existe un entier k tel que : $y{=}k{\cdot}x$
- y n'est pas un multiple de x
  L'entier x étant premier, on en déduit que :
  $\mathrm{pgcd}(x\,;y){=}1$
  Or, x divise le produit $y{\times}y$. D'après le théorème de Gauss, s'il ne divise pas le premier facteur, il divisera le second. Ce qui est absurde puisque y n'est pas un multiple de x.

2. a. Ainsi, il existe $k{\in}\mathbb{Z}$ vérifiant $y{=}k{\cdot}x$.
On en déduit :

$$y{\cdot}(y-x)=x{\cdot}(2-x)$$
$$(k{\cdot}x){\cdot}(k{\cdot}x-x)=x{\cdot}(2-x)$$
$$k^2{\cdot}x^2-k{\cdot}x^2=x{\cdot}(2-x)$$
$$x^2{\cdot}(k^2-k)=x{\cdot}(2-x)$$
$$x^2{\cdot}(k^2-k)-x{\cdot}(2-x)=0$$
$$x{\cdot}\big[x{\cdot\cdot}(k^2-k)-(2-x)\big]=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. De plus, x étant un entier premier, il est non-nul :

$$x{\cdot}(k^2-k)-(2-x)=0$$
$$x{\cdot}(k^2-k)+x=2$$
$$x{\cdot}(k^2-k+1)=2$$

De cette dernière égalité, on déduit que x divise 2.
L'entier x est premier et sachant qu'il divise 2, on en déduit que :
$x=2$

b. L'équation de départ s'écrit :

$$y{\cdot}(y-x)=x{\cdot}(2-x)$$
$$2{\cdot}k{\cdot}(2{\cdot}k-2)=2{\cdot}(2-2)$$
$$4{\cdot}k{\cdot}(k-1)=0$$

Ainsi, les valeurs possibles de k sont 0 ou 1.
Et l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S}=\big\{(2\,;0)\,;\,(2\,;2)\big\}$$

Correction 18

Soit $(x\,;y)$ un couple solution de l'équation (E). Ainsi, on a l'égalité :
$17{\cdot}x-15{\cdot}y=3$
Cette égalité donne l'équivalence :

$$2{\cdot}x-0{\cdot}y\equiv 0 \pmod{3}$$
$$2{\cdot}x\equiv 0 \pmod{3}$$

De la dernière équivalence, on en déduit que le produit $2{\cdot}x$ est divisible par 3. Or, les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Gauss, on en déduit que 3 divise le facteur x : x est un multiple de 3.

Correction 19

1. a. Le couple $(7\,;2)$ est solution de cette équation :

$$-7{\cdot}x+25{\cdot}y=-7{\times}7+25{\times}2$$
$$=-49+50=1$$

b. Considérons un couple $(x\,;y)$ solution de l'équation.
On a l'égalité :

$$-7{\cdot}x+25{\cdot}y=1$$
$$\Longleftrightarrow -7{\cdot}x+25{\cdot}y=-7{\times}7+25{\times}2$$
$$\Longleftrightarrow -7{\cdot}x+7{\times}7=25{\times}2-25{\cdot}y$$
$$\Longleftrightarrow -7{\cdot}\big(x-7\big)=25{\cdot}\big(2-y\big)$$

Cette égalité permet d'affirmer que 7 divise le produit $25{\cdot}\big(2{-}y\big)$.
7 étant un entier premier, on en déduit que les entiers 7 et 25 sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Gauss, on en déduit que 7 divise $2{-}y$.
Il existe un entier k tel que :

$$2-y=7{\cdot}k$$
$$-y=-2+7{\cdot}k$$
$$y=2-7{\cdot}k$$

Utilisons ce résultat dans l'équation vérifiée par le couple $(x\,;y)$:

$$-7{\cdot}x+25{\cdot}y=1$$
$$-7{\cdot}x+25{\cdot}\big(2-7{\cdot}k\big)=1$$
$$-7{\cdot}x+50-7{\times}25{\cdot}k=1$$
$$-7{\cdot}x=1-50+7{\times}25{\cdot}k$$
$$-7{\cdot}x=-49+7{\times}25{\cdot}k$$
$$7{\cdot}x=7{\cdot}\big(7-25{\cdot}k\big)$$
$$x=7-25{\cdot}k$$

Ainsi, tout couple de solution de l'équation (E) est de la forme :
$(7-25{\cdot}k\,;2-7{\cdot}k)$ où $k{\in}\mathbb{Z}$
Vérifions que chacun des couples $(x\,;y)$ vérifient cette équation :

$$-7{\cdot}x-25{\cdot}y=-7{\cdot}(7+25{\cdot}k)+25{\cdot}(2-7{\cdot}k)$$
$$=-49+7{\times}25{\cdot}k+50-25{\times}7{\cdot}k$$
$$=-49+50=1$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est :
$\mathcal{S}{=}\big\{(7{-}25{\cdot}k\,;2{-}7{\cdot}k) \mid k{\in}\mathbb{Z}\big\}$

2. a. On remarque l'égalité suivante :
$135{\times}1+18{\times}(-7)=9$
Ainsi, le couple $(1\,;-7)$ est solution de l'équation.

b. Considérons un couple $(x\,;y)$ solution entière de l'équation (F). Ce couple vérifie l'égalité :

$135{\cdot}x + 18{\cdot}y = 9$

$\iff \quad 135{\cdot}x + 18{\cdot}y = 135\times1 + 18\times(-7)$

$\iff \quad 135{\cdot}x - 135\times1 = 18\times(-7) - 18{\cdot}y$

$\iff \quad 135{\cdot}(x-1) = 18{\cdot}(-7-y)$

$\iff \quad 9{\cdot}\big[15{\cdot}(x-1)\big] = 9{\cdot}\big[2{\cdot}(-7-y)\big]$

$\iff \quad 15{\cdot}(x-1) = 2{\cdot}(-7-y)$

Les entiers 15 et 2 sont premiers entre eux et 15 divise le produit $2{\cdot}(-7-y)$.

D'après le théorème de Gauss : 15 divise $(y+7)$.

Ainsi, il existe un entier k tel que :

$$y + 7 = 15{\cdot}k$$
$$y = -7 + 15{\cdot}k$$

Utilisons cette valeur dans l'équation (F) :

$$135{\cdot}x + 18{\cdot}y = 9$$
$$135{\cdot}x + 18{\cdot}(-7 + 15{\cdot}k) = 9$$
$$135{\cdot}x - 126 + 270{\cdot}k = 9$$
$$135{\cdot}x = 9 + 126 - 270{\cdot}k$$
$$135{\cdot}x = 135 - 270{\cdot}k$$
$$135{\cdot}x = 135{\cdot}(1 - 2{\cdot}k)$$
$$x = 1 - 2{\cdot}k$$

On vient de montrer que tout couple solution de l'équation (F) admet pour expression :

$(1-2{\cdot}k\,;-7+15{\cdot}k)$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Montrons que l'ensemble des couples admettant cette écriture est une solution de l'équation (F) :

$$135{\cdot}x' + 18{\cdot}y' = 135{\cdot}(1-2{\cdot}k) + 18{\cdot}(-7+15{\cdot}k)$$
$$= 135 - 270{\cdot}k - 126 + 270{\cdot}k = 9$$

On en déduit l'ensemble des couples solutions de l'équation (F) :

$\mathcal{S} = \big\{(1-2{\cdot}k\,;-7+15{\cdot}k) \;\big|\; k\in\mathbb{Z}\big\}$

Correction 20

Le couple $(-2\,;1)$ est solution de l'équation (E) :

$$2{\cdot}x + 11{\cdot}y = 2\times(-2) + 11\times1 = -4 + 11 = 7$$

Considérons $(x\,;y)$ une solution de l'équation. Ce couple vérifie l'équation :

$2{\cdot}x + 11{\cdot}y = 7$

$\iff \quad 2{\cdot}x + 11{\cdot}y = 2\times(-2) + 11\times1$

$\iff \quad 2{\cdot}x - 2\times(-2) = 11\times1 - 11{\cdot}y$

$\iff \quad 2{\cdot}(x+2) = 11{\cdot}(1-y)$

On vient d'établir que 2 divise le produit $11{\cdot}(1-y)$. Or, les deux entiers 2 et 11 sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, on en déduit que 2 divise le facteur $1-y$.

Ainsi, il existe un entier k relatif tel que :

$$1 - y = 2{\cdot}k$$
$$-y = 2{\cdot}k - 1$$
$$y = -2{\cdot}k + 1$$

Le couple $(x\,;y)$ étant une solution de l'équation. On a :

$$2{\cdot}x + 11{\cdot}y = 7$$
$$2{\cdot}x + 11{\cdot}(-2{\cdot}k + 1) = 7$$
$$2{\cdot}x - 22{\cdot}k + 11 = 7$$
$$2{\cdot}x = 7 + 22{\cdot}k - 11$$
$$2{\cdot}x = 22{\cdot}k - 4$$
$$2{\cdot}x = 2{\cdot}(11{\cdot}k - 2)$$
$$x = 11{\cdot}k - 2$$

On vient de montrer que tout couple solution de l'équation admet pour expression :

$(11{\cdot}k-2\,;-2{\cdot}k+1)$

Montrons que tout couple admettant cette expression est une solution de l'équation :

$$2{\cdot}x + 11{\cdot}y = 2{\cdot}(11{\cdot}k - 2) + 11{\cdot}(-2{\cdot}k + 1)$$
$$= 22{\cdot}k - 4 - 22{\cdot}k + 11 = 7$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$\mathcal{S} = \big\{(11{\cdot}k-2\,;-2{\cdot}k+1) \;\big|\; k\in\mathbb{Z}\big\}$

Correction 21

1. Le couple $(1\,;1)$ est solution de l'équation (E) :
$$7{\cdot}x - 6{\cdot}y = 7\times1 - 6\times1 = 7 - 6 = 1$$

2. Soit $(x\,;y)$ un couple de solution. On a :

$7{\cdot}x - 6{\cdot}y = 1$

$\iff \quad 7{\cdot}x - 6{\cdot}y = 7\times1 - 6\times1$

$\iff \quad 7{\cdot}x - 7\times1 = -6\times1 + 6{\cdot}y$

$\iff \quad 7{\cdot}(x-1) = 6{\cdot}(y-1)$

Ainsi, 7 est un diviseur du produit $6{\cdot}(y-1)$.

Or, les entiers 7 et 6 sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, on en déduit que l'entier 7 est un diviseur de l'entier $y-1$.

Ainsi, il existe un entier k relatif vérifiant :

$$y - 1 = 7{\cdot}k$$
$$y = 7{\cdot}k + 1$$

Soit $(x\,;y)$ une solution de l'équation (E) :

$$7{\cdot}x - 6{\cdot}y = 1$$
$$7{\cdot}x - 6{\cdot}(7{\cdot}k + 1) = 1$$
$$7{\cdot}x = 1 + 6{\cdot}(7{\cdot}k + 1)$$
$$7{\cdot}x = 1 + 42{\cdot}k + 6$$
$$7{\cdot}x = 42{\cdot}k + 7$$
$$7{\cdot}x = 7{\cdot}(6{\cdot}k + 1)$$
$$x = 6{\cdot}k + 1$$

On vient de montrer que tout couple de solution de l'équation admet pour expression :

$(6{\cdot}k + 1\,;7{\cdot}k + 1)$ où $k\in\mathbb{Z}$

Vérifions maintenant que tout couple admettant une telle expression est une solution de l'équation :

$$7{\cdot}x - 6{\cdot}y = 7{\cdot}(6{\cdot}k + 1) - 6{\cdot}(7{\cdot}k + 1)$$
$$= 42{\cdot}k + 7 - 42{\cdot}k - 6 = 1$$

L'ensemble des solutions est :

$\mathcal{S} = \big\{(6{\cdot}k+1\,;7{\cdot}k+1) \;\big|\; k\in\mathbb{Z}\big\}$

Correction 22

1. a. Considérons le couple $(-2\,;1)$. On a :
$$3{\cdot}x + 7{\cdot}y = 3\times(-2) + 7\times1 = -6 + 7 = 1$$
Ainsi, on a l'égalité :

$$3\times(-2)+7\times1=1$$
$$10^{2n}\cdot\big[3\times(-2)+7\times1\big]=10^{2n}\times1$$
$$3\times\big(-2\times10^{2n}\big)+7\times\big(1\times10^{2n}\big)=10^{2n}$$
$$3\times\big(-2\times10^{2n}\big)+7\times\big(10^{2n}\big)=10^{2n}$$
Le couple $(-2\times10^{2n}\,;10^{2n})$ est solution de (E).

b. Soit $(x\,;y)$ un couple solution de l'équation (E):
$$3\cdot x+7\cdot y=10^{2n}$$
$$\Longleftrightarrow\quad 3\cdot x+7\cdot y=3\cdot(-2\times10^{2n})+7\times10^{2n}$$
$$\Longleftrightarrow\quad 3\cdot x-3\times\big(-2\times10^{2n}\big)=7\times10^{2n}-7\cdot y$$
$$\Longleftrightarrow\quad 3\cdot\big(x+2\times10^{2n}\big)=7\cdot\big(10^{2n}-y\big)$$
De l'égalité précédente, l'entier 3 divise le produit $7\cdot\big(10^{2n}-y\big)$ et les entiers 3 et 7 sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, on en déduit que 3 est un diviseur de $10^{2n}-y$.

On en déduit l'existe d'un entier k relatif tel que:
$$10^{2n}-y=3\cdot k$$
$$-y=3\cdot k-10^{2n}$$
$$y=10^{2n}-3\cdot k$$
Le couple $(x\,;y)$ étant un couple solution de (E):
$$3\cdot x+7\cdot y=10^{2n}$$
$$3\cdot x+7\cdot\big(10^{2n}-3\cdot k\big)=10^{2n}$$
$$3\cdot x+7\times10^{2n}-21\cdot k=10^{2n}$$
$$3\cdot x=10^{2n}-7\times10^{2n}+21\cdot k$$
$$3\cdot x=-6\times10^{2n}+21\cdot k$$
$$3\cdot x=3\cdot\big(-2\times10^{2n}+7\cdot k\big)$$
$$x=-2\times10^{2n}+7\cdot k$$
Ainsi, tout couple solution de l'équation (E) admet pour expression:
$$(-2\times10^{2n}+7\cdot k\,;10^{2n}-3\cdot k)\quad\text{où } k\in\mathbb{Z}$$
Montrons chacun de ses couples est une solution de l'équation (E):
$$3\cdot x+7\cdot y=3\cdot\big(-2\times10^{2n}+7\cdot k\big)+7\cdot\big(10^{2n}-3\cdot k\big)$$
$$=-6\times10^{2n}+21\cdot k+7\times10^{2n}-21\cdot k=10^{2n}$$
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est:
$$\mathcal{S}=\big\{\big(-2\times10^{2n}+7\cdot k\,;10^{2n}-3\cdot k\big)\ \big|\ k\in\mathbb{Z}\big\}$$

2. a. La division euclidienne de 100 par 7 donne l'égalité:
$$100=14\times7+2$$
Qui donne la congruence:
$$\equiv 2\pmod{7}$$
Soit $(x\,;y)$ un couple solution de l'équation (G):
$$3\cdot x^2+7\cdot y^2=10^{2n}$$
$$3\cdot x^2+7\cdot y^2=\big(10^2\big)^n$$
$$3\cdot x^2+7\cdot y^2=100^n$$
On a la congruence suivante:
$$3\cdot x^2\equiv 2^n\pmod{7}$$
$$3\cdot x^2\equiv 2^n\pmod{7}$$

b. Voici le tableau complété:

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7	0	3	5	6	6	5	3

c. En remarquant que: $2^3=8\equiv1\pmod{7}$.

Considérons le reste de la division euclidienne de l'entier n par 3; il existe un couple $(q\,;r)$ vérifiant:
$$n=3\cdot q+r\qquad\text{où } 0\leqslant r<3$$
On en déduit:
$$2^n=2^{3\cdot q+r}=\big(2^3\big)^q\times2^r=8^q\times2^r$$
$$\equiv1^q\times2^r\equiv1\times2^r\equiv2^r\pmod{7}$$
Etudions la congruence de 2^n en fonction du reste de la division euclidienne de n par 3:

Reste de la division euclidienne de n par 3	0	1	2
Reste de la division euclidienne de 2^n par 7	1	2	4

On vient de montrer que les deux termes $3\cdot x^2$ et 2^n n'ont en commun aucun reste par la division euclidienne par 7: ainsi, leur égalité ne peut être jamais réalisée.

A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, on vient de montrer que l'équation (G) n'admet aucune solution.

Correction 23

1. a. L'algorithme d'Euclide associé au couple d'entiers $(44\,;35)$ permet d'obtenir le tableau suivant:

Dividende	Diviseur	Reste
44	35	9
35	9	8
9	8	1
8	1	0

$$44=1\times35+9$$
$$35=3\times9+8$$
$$9=1\times8+1$$
$$8=8\times1+0$$

Ainsi, on a: $\text{pgcd}(44\,;35)=1$

b. En notant: $a=44$; $b=35$

Utilisons les divisions euclidiennes obtenues lors de la question b. :

- D'après la première division euclidienne:
$$44=1\times35+9$$
$$a=1\times b+9$$
$$a-b=9$$
- D'après la seconde division euclidienne:
$$35=3\times9+8$$
$$b=3\times(a-b)+8$$
$$b-3a+3b=8$$
$$4b-3a=8$$
- D'après la troisième division euclidienne:
$$9=1\times8+1$$
$$\big(a-b\big)=1\times\big(4b-3a\big)+1$$
$$a-b-4b+3a=1$$
$$4a-5b=1$$
$$44\times4+35\times(-5)=1$$

Le couple $(x_0\,;y_0)$ recherché est $(4\,;-5)$

2. D'après la question 1. b., le couple $(x_0\,;y_0)$ vérifie:
$$44\times4+35\cdot(-5)=1$$
$$2\times\big[44\cdot4+35\cdot(-5)\big]=2\times1$$
$$44\times8-35\times10=2$$
Considérons $(x\,;y)$ un couple quelconque solution de l'équation (E). On a l'égalité:

$44{\cdot}x + 35{\cdot}y = 2$

$\iff\quad 44{\cdot}x + 35{\cdot}y = 44{\times}8 - 35{\times}10$

$\iff\quad 44{\cdot}x - 44{\times}8 = -35{\cdot}y - 35{\times}10$

$\iff\quad 44{\cdot}\big(x-8\big) = 35{\cdot}\big(-y-10\big)$

De l'égalité précédente, on obtient que l'entier 44 divise le produit $-y-10$.

Or, la question 1. a. montre que les entiers 44 et 35 sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, on en déduit que 44 divise l'entier $-y-10$.

Ainsi, il existe un entier relatif k vérifiant :

$$\begin{aligned} -y-10 &= 44{\cdot}k \\ -y &= 44{\cdot}k+10 \\ y &= -44{\cdot}k-10 \end{aligned}$$

En utilisant ce résultat dans l'équation (E), on obtient :

$$\begin{aligned} 44{\cdot}x + 35{\cdot}y &= 2 \\ 44{\cdot}x + 35{\cdot}\big(-44{\cdot}k-10\big) &= 2 \\ 44{\cdot}x - 35{\times}44{\cdot}k - 35{\times}10 &= 2 \\ 44{\cdot}x &= 35{\times}44{\cdot}k + 350 + 2 \\ 44{\cdot}x &= 35{\times}44{\cdot}k + 352 \\ 44{\cdot}x &= 44{\cdot}\big(35{\cdot}k+8\big) \\ x &= 35{\cdot}k+8 \end{aligned}$$

On vient de montrer que tout couple de solutions de l'équation (E) admet une expression de la forme :

$\big(35{\cdot}k+8\,;-44{\cdot}k-10\big)$ où $k\in\mathbb{Z}$

Vérifions maintenant que tout couple admettant une telle expression est bien une solution de l'équation (E) :

$$\begin{aligned} 44{\cdot}x+35{\cdot}y &= 44{\cdot}\big(35{\cdot}k+8\big)+35{\cdot}\big(-44{\cdot}k-10\big) \\ &= 44{\times}35{\cdot}k + 44{\times}8 - 35{\times}44{\cdot}k - 35{\times}10 \\ &= 352-350 = 2 \end{aligned}$$

Un tel couple est bien solution de (E).

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$\mathcal{S} = \big\{\big(35{\cdot}k+8\,;-44{\cdot}k-10\big)\;\big|\;k\in\mathbb{Z}\big\}$

Correction 24

1. Puisque $p=\text{pgcd}(a+b\,;ab)$, l'entier p est un diviseur de $a+b$ et un diviseur de ab.

   On a l'existence de deux entiers k et k' vérifiant les égalités :

   $a+b = k{\cdot}p \quad;\quad ab = k'{\cdot}p$

   On a les égalités suivantes :

   $a^2 = a{\cdot}(a+b) - a{\cdot}b = a{\cdot}(k{\cdot}p) - k'{\cdot}p = \big(a{\cdot}k-k'\big){\cdot}p$

   L'égalité précédente permet d'affirmer que l'entier p est un diviseur de a^2.

2. On vient de montrer que p divise a^2. C'est à dire que l'entier p, qui est premier, divise le produit $a{\times}a$.

   D'après le corollaire du théorème de Gauss, on en déduit que :

   ➪ soit p divise a ➪ soit p divise a

   Ainsi, p divise a.

3. Notons d le $PGCD$ des entiers a et b :

   $\text{pgcd}(a\,;b) = d$.

   - On vient de montrer que p est un diviseur des entiers a et b ; il existe deux entiers k et k' tels que :

     $a = k{\cdot}p \quad;\quad b = k'{\cdot}p$

     On a les égalités :

     $$\begin{aligned} \text{pgcd}(a\,;b) &= d \\ \text{pgcd}(k{\cdot}p\,;k'{\cdot}p) &= d \end{aligned}$$

     Par la propriété d'homogénéité du PGCD :

     $p{\cdot}\text{pgcd}(k\,;k') = d$

     On vient de montrer que p est un diviseur de d.

   - d étant le $PGCD$ des entiers a et b, il existe deux entiers ℓ et ℓ' vérifiant :

     $a = \ell{\cdot}d \quad;\quad b = \ell'{\cdot}d$

     On a l'égalité :

     $$\begin{aligned} \text{pgcd}\big(a+b\;;\;a{\cdot}b\big) &= p \\ \text{pgcd}\big(\ell{\cdot}d+\ell'{\cdot}d\;;\;(\ell{\cdot}d){\cdot}(\ell'{\cdot}d)\big) &= p \\ \text{pgcd}\big(d{\cdot}(\ell+\ell')\;;\;d{\cdot}(\ell{\cdot}(\ell'{\cdot}d)\big) &= p \end{aligned}$$

     D'après les propriétés du $PGCD$:

     $d{\cdot}\text{pgcd}\big(\ell+\ell'\;;\;\ell{\cdot}(\ell'{\cdot}d)\big) = p$

     Cette dernière égalité montre que l'entier d divise l'entier p.

   On en déduit : $\;p=d \implies \text{pgcd}\big(a\,;b\big)=p.$

Correction 25

1. On a l'égalité suivante :

   $$\begin{aligned} a^2 &= b^3 \\ \big(d{\cdot}u\big)^2 &= \big(d{\cdot}v\big)^3 \\ d^2{\cdot}u^2 &= d^3{\cdot}v^3 \\ u^2 &= d{\cdot}v^3 \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, on a :

   $u^2 = d{\cdot}v^3$

   $u^2 = \big(d{\cdot}v^2\big){\cdot}v$

   On en déduit que l'entier v divise u^2.

   D'après la définition des entiers u et v, ces deux entiers entiers sont premiers entre eux :

   $\text{pgcd}(v\,;u) = 1$

   Or :

   - v divise $u{\times}u$;
   - u et v sont deux entiers premiers entre eux.

   D'après le théorème de Gauss, on en déduit que :

   v divise u.

   On en déduit : $\;\text{pgcd}(v\,;u) = v \implies 1 = v$

3. - $\implies$: supposons que $a^2=b^3$.

     A la question précédente, on vient de montrer :

     $v=1 \implies b=d$

     Ainsi, on a :

     $$\begin{aligned} a^2 &= b^3 \\ \big(d{\cdot}u\big)^2 &= b^3 \\ \big(b{\cdot}u\big)^2 &= b^3 \end{aligned} \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} b^2{\cdot}u^2 &= b^3 \\ u^2 &= b \end{aligned}$$

     On vient de montrer que b est le carré d'un entier.

     On en déduit :

     $$\begin{aligned} a^2 &= b^3 \\ a^2 &= \big(u^2\big)^3 \\ a^2 &= u^6 \end{aligned} \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} a^2 &= \big(u^3\big)^2 \\ a &= u^3 \end{aligned}$$

     On vient de montrer que a est le cube d'un entier.

   - $\impliedby$: supposons que a et b soient respectivement le cube et le carré d'un même entier ; ainsi, il existe un entier k tel que :

     $a = k^3 \quad;\quad b = k^2$

Ainsi, on a les valeurs suivantes :

$a^2 = \left(k^3\right)^2 = k^6 \quad ; \quad b^3 = \left(k^2\right)^3 = k^6$

On a l'égalité suivante : $a^2 = b^3$

