Exercice 1.

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $3n-17$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$, déterminer les valeurs de n pour lesquelles $n+2$ divise $3n-1$.

Exercice 2.

n est un entier relatif différent de -2.
On pose $a=-2n^2-4n+6$ et $b=n+2$.

1. Vérifier que $-2n^2-4n+6=-2n(n+2)+6$.
2. Pour quelles valeurs de n, b divise-t-il a ?

Exercice 3.

n est un entier relatif différent de 4. Pour quelles valeurs de n le nombre rationnel $\dfrac{35}{n-4}$ est-il entier ?

Exercice 4.

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n+1$ divise n^2+2.

Exercice 5.

1. Trouvez tous les couples d'entiers naturels $(x;y)$ tels que $(x+2)(y-3)=15$.
2. Trouvez tous les couples d'entiers relatifs $(x;y)$ tels que :
   (a) $x^2-y^2=20$; (b) $4x^2-49y^2=15$.

Exercice 6.

1. k est un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $a=4k+1$ et $b=3k-8$.
   Quels sont les diviseurs positifs communs possibles à a et à b ?
2. n est un entier naturel. On pose $a=3n^2+15n+18$ et $b=n+1$.
   (a) Trouvez deux entiers α et β tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a=(n+1)(3n+\alpha)+\beta$.
   (b) Quelles sont les valeurs de l'entier n pour lesquelles b divise a ?

Exercice 7.

k est un entier naturel. On pose $a=9k+2$ et $b=12k+1$.
Démontrer que les seuls diviseurs positifs possibles communs aux entiers a et b sont 1 et 5.

Exercice 8.

n est un entier.

1. Démontrer que, quel que soit l'entier n, $n+2$ divise n^2+3n+2.
2. En déduire les valeurs de l'entier n pour lesquelles $(n+2)$ divise $4n^2+12n+20$.

Exercice 9.

m et n sont deux entiers relatifs. On pose $a=10n+m$.

1. Démontrer que si $n-11m$ est divisible par 37, alors a est divisible par 37.
2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

Exercice 10.

n est un entier naturel.
Démontrer que si un entier naturel a divise les entiers $n^2+5n+17$ et $n+3$, alors a divise 11.

Exercice 11.

On considère l'algorithme ci-dessous, écrit à l'aide de Python.

```
d=0
n=int(input("Donner un entier n"))
b=int(input("Donner un entierb"))

while n>b:
    d=d+1
    n=n-b
print(d)
print(n)
```

1. Simuler cet algorithme en complétant un tableau indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
   On prendra $n=13$ et $b=4$.
2. Qu'obtient-on si on prend $n=203$ et $b=4$?
3. Que fait cet algorithme ?

Exercice 12.

n est un entier naturel.

1. Quels sont les entiers naturels pour lesquels le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n^2 est $12n+8$?
2. Quels sont les entiers naturels pour lesquels le reste de la division euclidienne de $(n+1)^3$ par n^2 est

$3n+1$?

3. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $2n^2+n$ par $n+1$.

Exercice 13.

1. Montrer l'implication : p impair $\Rightarrow$ p^2 impair.
2. Montrer l'équivalence : p pair $\Leftrightarrow$ p^2 pair.

Exercice 14.

(Raisonnement par disjonction des cas)

1. a et b sont deux entiers naturels tels que $a^2-2b^2=1$.
   Prouver que a est impair et que b est pair.
2. (a) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne par 3 ?
   (b) En déduire que si p n'est pas divisible par 3 alors $2p^2+1$ est divisible par 3.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $A = n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.
4. a est un entier naturel. Démontrer que $a(a^2-1)$ est multiple de 2 et de 3.
5. Démontrer que pour tout entier naturel n, $A = 3n^4+5n+1$ est impair. En déduire que A n'est jamais divisible par $n(n+1)$.
6. a et b sont des entiers naturels. On suppose que $N=a^2-b^2$ est un entier naturel impair.
   Démontrer que a et b n'ont pas la même parité.
7. Déterminer les entiers naturels n tels que $n^3+4n=240$. *On pourra distinguer le cas où n est pair et le cas où n est impair.*

Exercice 15.

Soit n un entier naturel non nul.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+4$?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de n^2+2 par $n+1$?

Exercice 16.

*On dit qu'un entier naturel est **déficient** s'il est supérieur à la somme de ses diviseurs positifs stricts. On dit qu'il est **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts et **abondant** s'il est inférieur.*

1. Voici un algorithme, écrit en Python, permettant de savoir si un nombre entier est déficient.

```python
s=0
n=int(input("Donner la valeur de n"))

for i in range(1,n):
     if n%i==0:
          s=s+i
if n>s:
     print(n)
     print(" est un nombre déficient")
else:
     print(n)
     print(" est un nombre non déficient")
```

   Étudier cet algorithme et à l'aide de celui-ci, écrire un nouvel algorithme permettant d'afficher la liste des nombres déficients compris entre 0 et 100.

2. Combien y a-t-il de nombre déficients entre 0 et 100 ?
   Même question pour les nombres parfaits puis abondants.
3. Montrer que les nombres premiers sont déficients.

Exercice 17.

1. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne par 6 ?
2. En déduire, par disjonction des cas, que tout nombre premier différent de 2 ou 3 peut s'écrire sous la forme $6n+1$ ou $6n-1$.
3. Donner, à l'aide de la calculatrice, tous les nombres premiers compris entre 0 et 100.

Exercice 18.

Déterminer les entiers naturels n tels que :

1. n^2-2n soit divisible par 7.
2. n^3+2n-1 soit divisible par 5.

Exercice 19.

Quel est l'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers naturels n tels que $3n \equiv 7[11]$?

Exercice 1.

Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n(2n+1)(n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 20.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 8^{2014} par 5 ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$. Démontrer que $a \equiv 0[7]$.

Exercice 21.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{943} par 7 ?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 ?

Exercice 22.

Démontrer que $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23.

n désigne un entier naturel.

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de 3^n par 11 ?
2. En déduire que $3^n + 7 \equiv 0[11]$ si, et seulement si, $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 24.
Quels sont les entiers naturels n pour lesquels $2^n - 1$ est divisible par 9 ?

Exercice 25.

1. Compléter ce tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv$					

2. En déduire que l'équation $x^2 - 5y = 3$ avec x et y entiers naturels, n'a pas de solution.

Exercice 26.

1. Compléter cette table des restes dans la congruence modulo 4.

$n \equiv$	0	1	2	3
$n^2 \equiv$				

2. Prouver que l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$, d'inconnues x et y entiers relatifs, n'a pas de solution.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x+3)^2 \equiv 1[4]$.

Exercice 27.

x et y sont deux entiers naturels tels que $\left\{\begin{array}{lcl} x & \equiv & 7[9] \\ y & \equiv & 4[9] \end{array}\right.$

Déterminer les restes dans la division euclidienne par 9 de :
1. $3x + 4y$; 2. $x^2 + y^2$; 3. $2x^2 - 5y^2$.

Exercice 28.

Déterminer tous les entiers naturels n tels que

$$n^2 - 3n + 6 \equiv 0[5]$$

.

Exercice 29.

x est un entier relatif.

1. Déterminer les restes de la division euclidienne de x^3 par 9 selon les valeurs de x.
2. En déduire que, pour tout entier naturel x :
   — « $x^3 \equiv 0[9]$ » équivaut à « $x \equiv 0[3]$ » ;
   — « $x^3 \equiv 1[9]$ » équivaut à « $x \equiv 1[3]$ » ;
   — « $x^3 \equiv 8[9]$ » équivaut à « $x \equiv 2[3]$ ».
3. x, y et z sont des entiers relatifs tels que $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9.

   Démontrer que l'un des nombres x, y, z est divisible par 3.

   La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 30.

Aux 10 caractères A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, on associe dans l'ordre les nombres entiers de 1 à 10. On note $\Omega = \{1; 2; 3; \cdots; 10\}$.

1. Dans cette question, f est la fonction définie sur par « $f(n)$ est le reste de la division par 11 de $5n$ ».

   À l'aide de f, on souhaite coder le message « BADGE ».

   (a) Compléter la grille de codage ci-dessous.

LETTRE	B	A	D	G	E
n	2				
$f(n)$	3				
LETTRE	C				

   (b) Peut-on décoder le message codé sans ambiguïté ?

2. Dans cette question, g est la fonction définie sur Ω par « $g(n)$ est le reste de la division par 11 de 2^n ».

   Établir la grille de codage de g et dire pourquoi elle permet le décodage de tout message écrit avec les lettres de Ω.

Exercice 31.

Sans utiliser la calculatrice, justifier qu'il y a une erreur dans la multiplication suivante : $765 \times 47 = 35\ 855$.
On pourra raisonner modulo 9.

Exercice 32.

1. Compléter le tableau de congruence modulo 3.

$n \equiv$	0	1	2
$n^2 \equiv$			

   Soit p et q deux entiers tels que $p^2 = 3q^2$.

2. À l'aide du 1., justifier que $p \equiv 0[3]$.
3. Montrer alors que q est divisible par 3.
4. En déduire que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 33.

À la pointe ouest de l'île de Ré, se situe le phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 246 et 260.

Teddy et Laure sont deux sportifs de haut niveau. Laure monte l'escalier trois marches par trois marches ; à la fin il lui reste deux marches. Teddy, lui, monte l'escalier quatre marches par quatre marches ; à la fin, il lui reste une marche.

Combien l'escalier compte-t-il de marches ?