Calculs dans $\mathbb{C}$

▶ Exercice 1

a) Soit $z_1 = 3 - 2i$, quelles sont les parties réelle et imaginaire de l'inverse de z_1 ?

b) Soit $z_2 = \dfrac{1-4i}{1+5i}$, écrire z_2 sous sa forme algébrique.

c) Écrire les nombres suivants sous la forme $a + ib$ (avec a et b deux réels).

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\ ; \qquad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 ; \qquad i + \frac{1}{i}.$$

▶ Exercice 2

1. Soit a et b deux réels quelconques.
Montrer que $(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab$.

2. Calculer $(1+\mathrm{i})^2$, $(1+\mathrm{i})^3$ et $(1+\mathrm{i})^4$.

3. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer j^2 puis j^3.

b) En déduire j^n selon les valeurs de n.

▶ Exercice 3

On appelle *entier de Gauß* tout nombre complexe de la forme $k + \mathrm{i}\ell$, où k et ℓ sont des entiers relatifs.

1. Montrer que la somme et la différence de deux entiers de Gauß sont des entiers de Gauß.

2. Montrer que le produit de deux entiers de Gauß est un entier de Gauß.

3. Déterminer l'écriture algébrique de l'inverse de 2i. L'inverse d'un entier de Gauß est-il nécessairement un entier de Gauß ?

Conjugué

▶ Exercice 4

a) Calculer le conjugué de $z_3 = \dfrac{(3-2i)(5+i)}{3i(7+2i)}$.

b) Montrer que pour tout nombre complexe z non-nul $\overline{z + \dfrac{1}{z}} - \overline{\dfrac{1+z}{\overline{z}}} = \overline{z} - 1$

c) Soit $z = \dfrac{3-7i}{9+2i}$ et $z' = \dfrac{3+7i}{9-2i}$ montrer sans calcul que $z + z'$ est un réel et que $z - z'$ est un imaginaire pur.

Équations diverses

▶ Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

1. $2z + 3\overline{z} = 5$.

2. $\overline{z}^2 + 2z\overline{z} - 3 = 0$

3. $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$

4. $iz^2 + 2\overline{z} - i = 0$

5. Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué ?

Ensemble de points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

▶ Exercice 6

On associe, à tout point M d'affixe z ; le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-3}{\mathrm{i}z+2}$.
On désigne par A le point d'affixe 3 et par B celui d'affixe 2i.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x' et y' réels.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

2. Démontrer que l'ensemble Γ des points M du plan, tels que M' soit un point de l'axe des réels $(0\ ;\ \overrightarrow{u})$, est le cercle de diamètre $[AB]$ privé d'un point que l'on précisera.

3. Résoudre l'équation $\dfrac{z-3}{\mathrm{i}z+2} = 1$.
On désigne par K le point d'affixe $\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.
Justifier sans calcul que $K \in \Gamma$.

▶ Exercice 7

Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $(z-1)^2$ soit :

a) réel ?

b) imaginaire pur ?

▶ Exercice 8

Déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie
$z + \overline{z} + z\overline{z} = 0$.

Équations du second degré

▶ Exercice 9

soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par
$f(z) = z^2 + z + 1$

1. Quelles sont les racines de f ?

2. Déterminer les nombres complexes invariants par f.

3. Quels sont les nombres complexes dont l'image par f est un réel ?

▶ Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2z + 26 = 0$

2. $z^4 - 8z^2 - 9 = 0$.

▶ Exercice 11

À tout complexe z $\left(z \neq \dfrac{1}{2}\right)$, on associe le complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z-2}{2z-1}$$

1. Déterminer les valeurs de z telles que $Z = z$.

2. Déterminer les valeurs de z telles que $Z = -z$. trouvées précédemment convient).

▶ Exercice 12

Soit A, B et I les points d'affixes respectives $1 + \mathrm{i}$, $3 - \mathrm{i}$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.

1. Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?

2. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.

3. Vérifier que pour tout nombre complexe z on a :
$z' + 4 = (z-2)^2$.