Exercices: PGCD-Gauss-Bezout

Exercice 1

Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, le $PGCD$ des entiers a et b:

a. $a = 354$; $b = 20$

b. $a = 1\,456$; $b = 256$

c. $a = 17$; $b = 3941$

d. $a = 256\,419$; $b = 3\,866$

Exercice 2

Soit n un entier naturel inférieur à 120. Déterminer l'ensemble des valeurs de n tels que:

$\text{pgcd}(n\,;120) = 6$

Exercice 3

On désigne par p un entier entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n l'entier: $A_n = 2^n + p$.

On note d_n le $PGCD$ de A_n et A_{n+1}

1. Montrer que d_n divise 2^n.
2. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.

Exercice 4

Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)$ d'entiers naturels tels que:

$\text{pgcd}(m\,;n) = 6 \quad ; \quad m+n = 72$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)$ d'entiers naturels vérifiant le système:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} m^2 - n^2 = 5440 \\ \text{pgcd}(m\,;n) = 8 \end{cases}$$

Exercice 6

Soit n un entier relatif.

1. On note d le pgcd des entiers $9n+4$ et $2n-1$. Justifier que d divise 17.
2. Etablir l'équivalence suivante: $n \equiv 9 \pmod{17} \iff \text{pgcd}(9n+4\,;2n-1) = 17$

Exercice 7

On considère deux entiers naturels x et y.

Montrer que si x et y sont premiers entre eux alors il en est de même pour les entiers $2x+y$ et $5x+2y$.

Exercice 8

Soit p et q deux entiers naturel non nuls.

1. En supposant que $a = 9p+4q$ et $b = 2p+q$, démontrer que les entiers a et b d'une part ; p et q d'autre part ont le même $PGCD$.
2. Démontrer que les entiers $9p+4$ et $2p+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 9

Soit k un élément de $\mathbb{Z}$.

1. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $9k+4$ sont premiers entre eux.
2. a. Démonter que le $PGCD$ des entiers $2k-1$ et $9k+4$ est nécessairement 1 ou 17.
   b. Etablir l'affirmation suivante: $\text{pgcd}(2k-1\,;9k+4) = 17 \iff k \equiv 9 \pmod{17}$

Exercice 10

Etablir que, quelque soit la valeur de n, les deux entiers $n+3$ et $-2n^2-n+14$ sont premiers entre eux.

Exercice 11

On considère l'équation diophantienne $x^2 - 8\cdot y^2 = 1$ où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Exercice 12

Pour chaque équation, déterminer un couple de solution d'entiers $(u\,;v)$:

a. $354\cdot u + 49\cdot v = 1$

b. $34\cdot u + 57\cdot v = 1$

Exercice 13

1. Déterminer un couple $(x\,;y)$ d'entiers solution de l'équation: $56\cdot x + 45\cdot y = 1$
2. En déduire un couple $(x'\,;y')$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité: $56\cdot x' + 45\cdot y' = 3$

Exercice 14

Soit n une entier naturel, on pose:
$a = 2n+8 \quad ; \quad b = 3n+15$

On note d le PGCD de a et de b.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d divise 6.
2. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers naturels n pour lesquels $d = 6$. C'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{S}$ est défini par:

$$\mathcal{S} = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \text{pgcd}(2n+8\,;3n+15) = 6 \right\}$$

   a. Montrer que si $n \in \mathcal{S}$ alors il existe un entier k tel que: $n = -4 + 3\cdot k$.
   b. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$.

Exercice 15

A chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un entier compris entre 0 et 25 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Etape 1 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.

Etape 2 : on calcule l'entier x' défini par les relations :
$x' \equiv 9{\cdot}x + 2 \pmod{26} \quad ; \quad 0 \leqslant x' \leqslant 25$

Etape 3 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.
2. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9{\cdot}u+26{\cdot}v=1$. Donner sans justifier un couple $(u\,;v)$ qui convient.
3. Démontrer que :
$x' \equiv 9{\cdot}x+2 \pmod{26}$ équivaut à $x \equiv 3{\cdot}x'+20 \pmod{26}$
4. Décoder la lettre R.

Exercice 16

On considère le système de congruence :
$$(S) : \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$
où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n-11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11+15{\cdot}k$, où k désigne un entier relatif.

Exercice 17

Soit x et y deux entiers vérifiant l'égalité :
$y{\cdot}(y-x) = x{\cdot}(2-x)$

On suppose que l'entier x est un entier premier.

1. Démontrer que l'entier x divise y.
2. On pose $y=k{\cdot}x$ avec $k \in \mathbb{Z}$:
   a. Montrer que x divise 2, puis que $x=2$.
   b. En déduire les valeurs possibles de k.

Exercice 18

On considère l'équation (E) définie par :
$(E) : \quad 17x - 15y = 3$
où l'ensemble de résolution est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs.

Démontrer que, pour tout couple $(x\,;y)$ solution de (E), x est un multiple de 3.

Exercice 19

1. a. Déterminer un couple trivial $(x\,;y)$ d'entiers solution de l'équation :
   $(E) : \ -7{\cdot}x + 25{\cdot}y = 1$
   b. En déduire l'ensemble des solutions entières de cette équation.
2. a. Déterminer un couple trivial $(x\,;y)$ d'entiers solutions de l'équation :
   $(F) : \ 135{\cdot}x + 18{\cdot}y = 9$
   b. En déduire l'ensemble des solutions entières de cette équation.

Exercice 20

Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;y)$, où x et y sont deux entiers relatifs, solutions de l'équation :
$(E) : \quad 2{\cdot}x + 11{\cdot}y = 7$

Exercice 21

On considère l'équation (E) : $7x-6y=1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Exercice 22

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) :
   $3x + 7y = 10^{2n} \quad x$ et y sont des entiers relatifs.
   a. Déterminer un couple $(u\,;v)$ d'entiers relatifs tels que : $3u + 7v = 1$.
   En déduire une solution particulière $(u_0\,;v_0)$ de l'équation (E).
   b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de (E).
2. On considère l'équation notée (G) :
   $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \quad$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Montrer que : $100 \equiv 2 \pmod{7}$.
   Démontrer que si $(x\,;y)$ est solution de (G) alors :
   $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$
   b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

   c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
   En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice 23

On considère l'équation (E) :

$$44\cdot x + 35\cdot y = 2 \qquad x\in\mathbb{N},\ y\in\mathbb{N}$$

1. a. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que les entiers 44 et 35 sont premiers entre eux.

   b. Déterminer un couple $(x_0\,;y_0)$ vérifiant la relation :
   $$44\cdot x_0 + 35\cdot y_0 = 1$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 24

Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :

$$\text{pgcd}(a+b\,;ab) = p$$

où p est un entier premier.

1. Démontrer que p divise a^2.
   (On remarquera que : $a^2=a(a+b)-ab$)

2. En déduire que p divise a.
   On constate donc, de même que p divise b.

3. Démontrer que : $\text{pgcd}(a\,;b) = p$.

Exercice 25

On se propose d'étudier des couples $(a\,;b)$ d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3$$

Soit $(a\,;b)$ un tel couple. On note $d=\text{pgcd}(a\,;b)$ et u, v les deux entiers naturels vérifiant :

$$a = d\cdot u \quad ; \quad b = d\cdot v.$$

1. Montrer que : $u^2=d\cdot v^3$.

2. En déduire que v divise u, puis que $v=1$.

3. Soit $(a\,;b)$ un couple d'entiers strictement positifs.
   Démontrer que l'on a $a^2=b^3$ si, et seulement si, a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.