Nombres complexes
Partie 2. Géométrie
Maths Expertes

Lycée Pierre Mendes France - Tunis

Table des matières

1 Module d'un nombre complexe

Définition 1

Soit z un complexe d'écriture algébrique $a + ib$ avec a et b réels.
Le module de z est le nombre réel positif, noté $|z|$ défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemples

Déterminer les modules des complexes $3 - 7i$, i et 5

. . . .
. . . .
. . . .

Propriété 1

Soient z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$. On a alors :

1. $|z| = z\bar{z}$
2. $|\bar{z}| = \dots$
3. $|-z| = \dots$
4. $|zz'| = \dots$
5. $|z + z'| \dots$
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = \dots$
7. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dots$

Démonstration 1

. . . .

2 Représentation géométrique d'un complexe

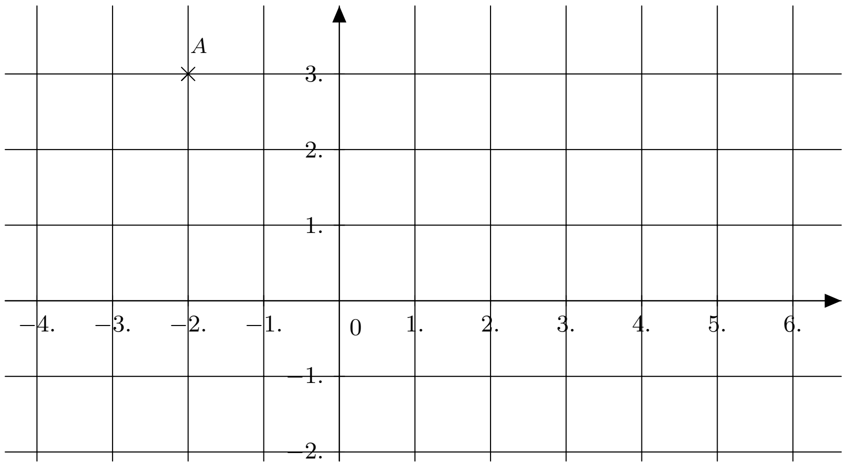
Le plan est rapporté à un repère **orthonormé direct** $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

2.1 Affixe d'un point

Définition 2

- *A tout nombre complexe $z = a + ib$ est associé le point M du plan de coordonnées $(a; b)$ appelé image de z et noté $M(z)$.*
- *A tout point M du plan de coordonnées $(a; b)$ est associé le complexe $z = a + ib$ appelé affixe du point M.*

Exemple



1. Quel est l'affixe du point A ? ....
2. Placer les points B et C d'affixe respective $3 + 2i$ et $2 - i$.

2.2 Affixe d'un vecteur

Définition 3

- *A tout nombre complexe $z = a + ib$ est associé le vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $(a; b)$ dans le plan.*
- *A tout vecteur $\overrightarrow{w}$ du plan de coordonnées $(a; b)$ est associé le complexe $z = a + ib$ appelé affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$.*

Exemple
Dans l'exemple précédent, quels sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$?
....
....

Propriété 2

1. *Soient deux vecteurs $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ d'affixes respectives z_c et z_d. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$ est ....*
2. *Soient $\overrightarrow{c}$ un vecteur d'affixe z_c et k un réel. L'affixe du vecteur $k\overrightarrow{c}$ est ....*
3. *Soient M et N deux points du plan d'affixes respectives z_M et z_N. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$ est ....*

Démonstration 2

2.3 Argument et forme trigonométrique d'un complexe

Définition 4

Dans le plan complexe, on considère le point M d'affixe z non nulle. On appelle argument de z, une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.
On notera ....

Propriété 3

Tout point M distinct de l'origine peut ainsi se repérer de deux manières différentes :

- *par son affixe $z = a + ib$;*
- *par ses coordonnées polaires $(|z|, \arg(z))$.*

Remarques

- Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments. Si θ est l'un d'entre eux, les autres sont de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $z \in \mathbb{Z}$.
- On note $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π) ou plus simplement $\arg(z) = \theta$.
- On ne définit les angles de vecteurs que lorsqu'ils sont non nuls. Le complexe 0 n'a donc pas d'argument !

Théorème 1 (*Écriture trigonométrique*)

Soit z un nombre complexe non nul d'écriture algébrique $a + ib$ (où a et b sont réels).
Un argument de z est un angle θ, exprimé en radian, noté $\arg(z)$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}.$$

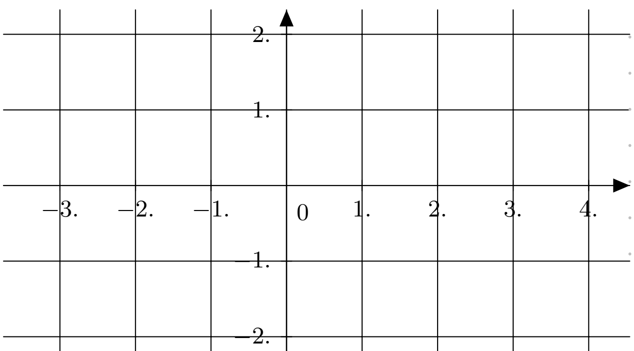
Le nombre complexe z s'écrit alors

$$z = a + ib = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Cette dernière écriture est appelée ***écriture trigonométrique*** *du complexe z.*

Exemple

Déterminer l'écriture trigonométrique de $z = \sqrt{3} + i$ et placer rigoureusement $M(z)$ dans le plan.



Propriété 4

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a :

1. $\arg(\bar{z}) = \dots$
2. $\arg(-z) = \dots$
3. $\arg(zz') = \dots$
4. $\forall n \in \mathbb{N}\ , \arg(z^n) = \dots$
5. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \dots$

Démonstration 3

2.4 Notation exponentielle

Propriété 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie par $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$.
Alors $f(t + t') = f(t)f(t')$.

Démonstration 4

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Remarque

On reconnaît la même équation fonctionnelle que celle trouvée dans le chapitre sur la fonction exponentielle. On peut donc adopter une notation semblable à la fonction exponentielle pour cette fonction f.

Définition 5

Pour tout réel θ, on note

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Tout nombre complexe z peut alors s'écrire sous la forme

$$z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$$

*Cette dernière écriture s'appelle **écriture exponentielle** de z.*

Exemples

Déterminer les écritures exponentielles de $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1$, $z_4 = 5$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Théorème 2

Soient r et r' deux nombres réels strictement positifs, θ et θ' deux nombres réels et n un entier naturel. Si $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{i\theta'}$, alors :

1. $zz' = \ldots$
2. $z^n = \ldots$
3. $\dfrac{1}{z} = \ldots$
4. $\dfrac{z}{z'} = \ldots$

Théorème 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
A, B, C *et* D *sont quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives* z_A, z_B, z_C *et* z_D.
On a les relations :

1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
2. $AB = |z_B - z_A|$
3. $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{|z_B - z_A|}{|z_D - z_C|}$
4. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
5. $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = re^{i\theta}$ *si et seulement si* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta$ *(modulo* 2π*) et* $\dfrac{CD}{AB} = r$

Démonstration 5