Attendus
- Modéliser des situations sous forme de graphes.
- Écrire les implémentations correspondantes d'un graphe : matrice d'adjacence, liste de successeurs/de prédécesseurs.Passer d'une représentation à une autre.
- Parcourir un graphe en profondeur d'abord, en largeur d'abord.
- Repérer la présence d'un cycle dans un graphe.
- Chercher un chemin dans un graphe.

I Notion de graphes

1) Qu'est-ce qu'un graphe ?

Imaginez un réseau social ayant 6 abonnés (A, B, C, D, E et F) où :
- A est ami avec B, C et D
- B est ami avec A et D
- C est ami avec A, E et D
- D est ami avec tous les autres abonnés
- E est ami avec C, D et F
- F est ami avec E et D

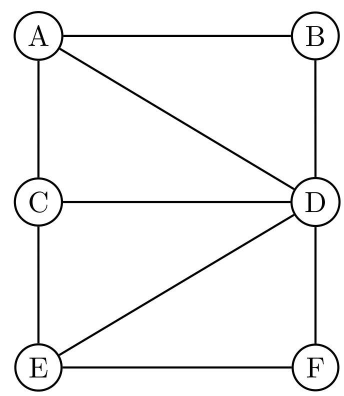
On peut représenter ce réseau social par un schéma où :
- Chaque abonné est représenté par un cercle avec son nom.
- Chaque relation « X est ami avec Y » est représentée par un segment de droite reliant X et Y (« X est ami avec Y » et « Y est ami avec X » étant représenté par le même segment de droite).

Voici ce que cela donne avec le réseau social décrit ci-contre.

Ce genre de figure s'appelle un graphe.

Les graphes sont des objets mathématiques très utilisés, notamment en informatique.

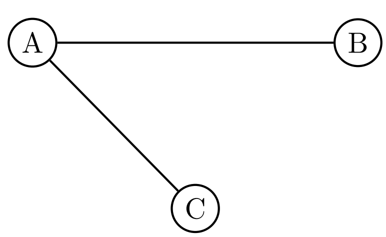
Les cercles sont appelés des sommets et les segments de droites des arêtes.



2) Définitions et terminologie

On appelle *graphe* $G = (V, E)$, la donnée d'un ensemble de points V appelés *sommets* et d'un ensemble E de couples d'éléments de V appelées *arêtes*.

Exemple : $V = \{A; B; C\}$ et $E = \{(A, B); (A, C)\}$. Dans ce cas, $G = (V, E)$ est le graphe de sommets A, B et C, où A et B sont reliés et où A et C sont reliés.



Le nombre de sommets d'un graphe s'appelle l'*ordre du graphe*.

Deux sommets reliés entre eux par une arête sont dits *adjacents*.

Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de ce sommet.

Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre sommet du graphe est dit *isolé*.

Un graphe est dit *complet* si deux sommets quelconques distincts sont toujours adjacents. Autrement dit, tous les sommets sont reliés deux à deux par une arête.

Un graphe est dit *cyclique* s'il existe un chemin reliant n'importe quel sommet à lui-même.

Un graphe est dit *connexe* si les sommets peuvent être reliés deux à deux par une arête ou un arc.

II Les différents types de graphes

1) Graphes non orientés

Définition : Un graphe non orienté est un graphe dont les arêtes n'ont pas de sens.

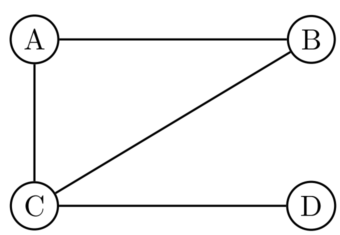
Cela signifie que si $G = (V, E)$ est un graphe avec $V = \{A; B; C; D\}$ alors les éléments (X, Y) et (Y, X) de E sont identiques pour tout X, Y dans V.

Exemple : quatre villes sont reliées par un réseau routier :
- A et B sont reliées par une route ;
- A et C sont reliées par une route ;
- B et C sont reliées par une route ;
- C et D sont reliées par une route.

On peut alors représenter ce réseau routier par le graphe $G = (V, E)$ où :

$$V = \{A; B; C; D\} \text{ et } E = \{(A, B); (A, C); (B, C); (C, D)\}$$

dont une représentation sagittale est :



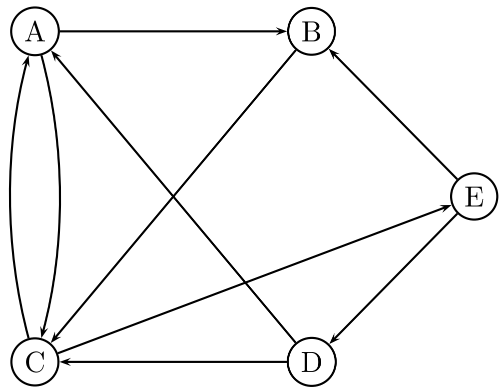
2) Graphes orientés

Définition : Un graphe orienté est un graphe dont les arcs ont un sens.

Remarque : cela signifie que dans un graphe $G = (V, E)$, les éléments (X, Y) et (Y, X) sont distincts pour deux sommets distincts X et Y de V.

Exemple : imaginons un site internet composé de 5 pages nommées A, B, C, D et E.
- Sur A sont présents des liens vers B et C.
- sur B figure un lien vers C.
- sur C sont présents des liens vers A et E.
- sur D sont présents des liens vers A et C.
- sur E sont présents des liens vers B et D.

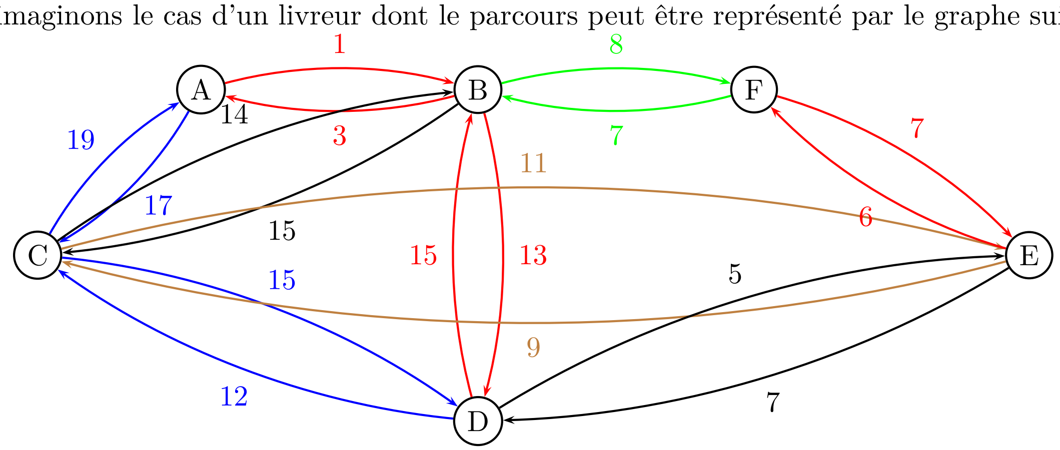
On peut représenter ceci à l'aide d'un graphe où les sommets sont A, B, C , D et E et où les arcs représentent les liens.



3) Graphes pondérés

Définition : On dit d'un graphe qu'il est *pondéré* quand ses arêtes ou ses arcs sont couplés avec des nombres. Ces nombres sont appelés des *poids*.

Exemple : imaginons le cas d'un livreur dont le parcours peut être représenté par le graphe suivant :



Les nombres attribués à chaque arc représentent ici le temps en minutes qu'il met pour aller d'un sommet à un autre.

Définition (plus court chemin) : dans le cas d'un graphe pondéré, on appelle *plus court chemin* le chemin dont la somme des pondérations est minimale.

Exemple : dans l'exemple précédent, le plus court chemin de A à E est :

A - B- F -E

dont le poids total est $1 + 8 + 7 = 16$.

III Matrices de représentation

Considérons un graphe G d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On numérote ces sommets de 1 à n.

1) Matrice d'adjacence de graphe non pondéré

Définition : On appelle *matrice d'adjacence* de G la matrice carrée $M = (m_{ij})$ d'ordre n telle que :
- si G est non orienté,

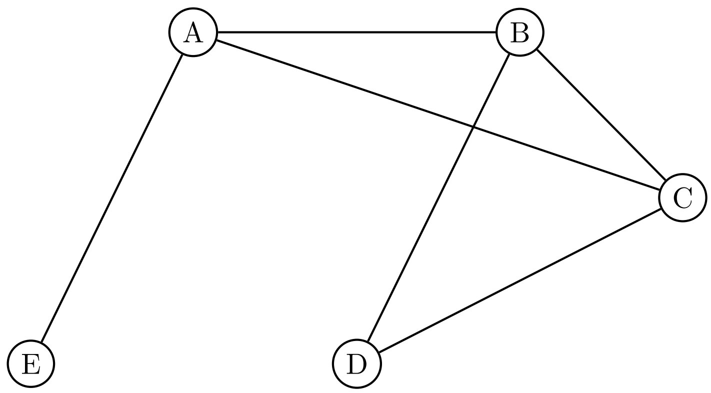
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si les sommets } i \text{ et } j \text{ sont adjacents} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- si G est orienté,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est l'origine d'un arc dont le sommet } j \text{ en est une extrémité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : le coefficient m_{ij} est situé à la ligne i et colonne j.

Exemple (graphe non orienté) :



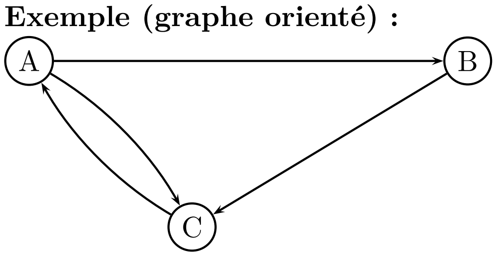
Ce graphe admet pour matrice d'adjacence :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet,
- le sommet A n'est pas relié à lui-même, donc il y a un « 0 » à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 1.
- les sommets A et B sont reliés, donc il y a un « 1 » à l'intersection de la ligne 1 et la colonne 2, ainsi qu'à l'intersection de la ligne et la colonne 1.
- etc.

Propriété : la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est nécessairement symétrique par rapport à sa diagonale principale(diagonale qui va du haut-gauche vers le bas-droit de la matrice).

Exemple (graphe orienté) :



Ce graphe admet pour matrice d'adjacence :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet,
- le sommet A n'est pas relié à lui-même, d'où le « 0 » à l'intersection de la ligne 1 et de la colonne 1.
- il y a un arc de A vers B, d'où le « 1 » à l'intersection de la ligne 1 et la colonne 1.
- il n'y a pas d'arc de B vers A, d'où le « 0 » à l'intersection de la ligne 2 et la colonne 1.
- etc.

2) Matrice de valuation d'un graphe pondéré

La matrice de valuation d'un graphe pondéré d'ordre n est la matrice (m_{ij}) telle que :
- m_{ij} est le poids de l'arête (ou arc) du sommet i au sommet j ;
- ∞ si aucune arête (ou arc) ne relie les sommets i et j.

Exemple : reprenons le graphe de l'exemple du livreur. Sa matrice de valuation est :

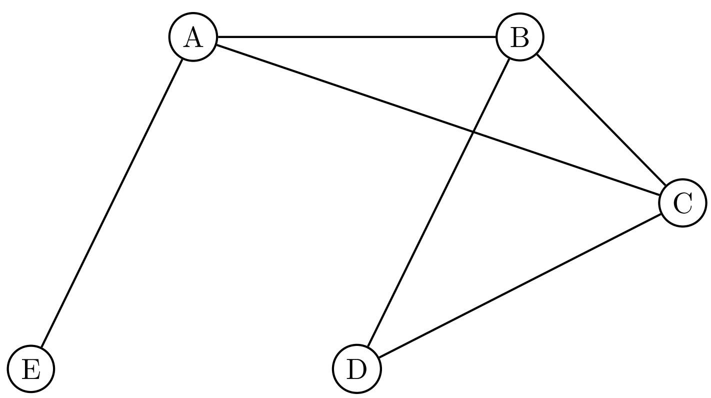
$$M = \begin{pmatrix} \infty & 1 & 17 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 15 & 13 & \infty & 8 \\ 19 & 14 & \infty & 15 & 11 & \infty \\ \infty & 15 & 12 & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 9 & 7 & \infty & 6 \\ \infty & 7 & \infty & \infty & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

IV Liste d'adjacence

1) Pour un graphe non pondéré

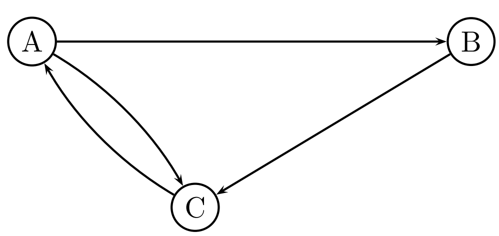
Une autre façon de représenter un graphe est d'utiliser un dictionnaire (ce qui sera utile pour encoder un graphe en Python) où les clés seront les sommets et leur valeurs sera la liste des sommets adjacents.

Exemple (graphe non orienté) :
Le graphe suivant :



peut être représenté de la façon suivante :
{A : [B , C , E] , B : [A , C , D] , C : [A , B , D] , D : [B , C] , E : [A] }

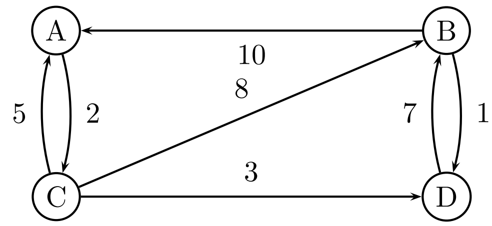
Exemple (graphe orienté) :
Le graphe suivant :



peut être représenté de la façon suivante :
{A : [B , C] , B : [C] , C : [A] }

2) Pour un graphe pondéré

On peut représenter un graphe pondéré à l'aide d'un dictionnaire dont les valeurs sont aussi des dictionnaires. Ainsi pour le graphe suivant,



une représentation possible est la suivante
G = { A : {C : 2} , B : {A : 10 , D : 1} , C : {A : 5 , B :8 , D :3} , D : {B :7} }

V Densité et choix de représentation

Définition : La densité d'un graphe est le rapport du nombre d'arêtes sur le nombre d'arêtes possibles.

Remarques :
- une densité nulle correspond à un graphe sans arêtes où tous les sommets sont isolés.
- une densité égale à 1 correspond à un graphe complet où chaque sommet est relié à tous les autres.

Exemple : pour un graphe simple non orienté à n sommets, chaque sommet ne peut être relié qu'à $n-1$ sommets au maximum (car le graphe est simple, donc il n'y a pas de boucle). Il y a donc $n(n-1)$ arêtes au maximum.
La densité du graphe est alors :

$$d = \frac{2 \times \text{nombre d'arêtes}}{n(n-1)}$$

En effet, si une arête est entre le sommet A et B, alors on compte deux fois cette arête dans le calcul de la densité (une pour A, et une pour B) car le graphe est non orienté.

Définition : graphe creux, graphe dense
- Un graphe à n sommets est creux si son nombre d'arêtes « est proche » de n.
- Un graphe à n sommets est dense si son nombre d'arêtes « est proche » de n^2.

Propriété
- Un graphe est dense si sa densité est « assez proche » de 1.
- Un graphe est creux si sa densité est « assez éloignée » de 1.

Remarque : la notion de graphe dense n'est pas une notion précise. Dans la pratique, on pourra considérer qu'un graphe est dense si densité est au moins égale à $0,75$.

L'utilisation du mode de représentation dépend de la densité du graphe. Pour un graphe dense on utilisera plutôt une matrice d'adjacence.