Nombres complexes : point de vue algébrique

Motivations

Étant donné que certaines équations polynomiales ‘a coefficients réels n’ont pas toujours de solution, on cherche ‘a construire un nouvel ensemble de nombres :

— contenant tous les nombres réels,

— muni de deux opérations prolongeant l’addition et la multiplication des nombres réels et ayant les mêmes règles de calculs,

— contenant un élément noté i tel que $i^2 = -1$,

— tout nombre z s’écrit de manière unique $z = a + ib$ o‘u a et b sont des réels.

Un tel ensemble existe, il s’agit de l’ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

I Ensemble des nombres complexes

Remarque : la notation $\sqrt{-1}$ n’est pas possible, car on devrait avoir $\sqrt{-1}^2 = -1$ et $\sqrt{-1}^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$.

I.1 Nombre i

Définition

On admet qu’il existe un nombre imaginaire (non réel) défini par $\mathrm{i}^2 = -1$.
L’ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l’ensemble des nombres $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels.

I.2 Forme algébrique

Vocabulaire et définitions :

- L’écriture $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels est appelée forme algébrique du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
- Dans ce cas, x est appelé la partie réelle de z et notée $\mathrm{Re}(z)$ et y la partie imaginaire de z et notée $\mathrm{Im}(z)$.
- z est réel si, et seulement si, $y = \mathrm{Im}(z) = 0$
- z est imaginaire pur si, et seulement si, $x = \mathrm{Re}(z) = 0$

I.3 Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan

Définition

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. À chaque nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on associe de manière unique le point $M(x\,;\ y)$ et réciproquement, à chaque point $M(x\,;\ y)$ correspond un unique nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
Ce nombre est appelé affixe de z (affixe est un mot féminin)

Remarques :

Tous les points de l'axe des abscisses $(O\,;\ \vec{u})$ ont une affixe z dite réelle car $Im(z) = 0$.
Tous les points de l'axe des ordonnées $(O\,;\ \vec{v})$ ont une affixe z dite imaginaire pure car $Re(z) = 0$.
Le point O a pour affixe 0 qui est à la fois réel et imaginaire pur.
Lorsque l'on associe les nombres complexes aux points d'un plan du repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on dit que l'on travaille dans le **plan complexe**.

Exemples :

1. Représenter les points A, B et C d'affixes respectives $-3 - i$, 2 et $3i$.
2. Soit G le point d'affixe $3 + 2i$. Soit E le point tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OG}$. Quelle est l'affixe de $\overrightarrow{CE}$?
3. Que remarque-t-on sur les affixes de deux points symétriques par rapport à O ?
4. Que remarque-t-on sur les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe $(O\,;\ \vec{u})$?
5. Que remarque-t-on sur les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe $(O\,;\ \vec{v})$?

Définition :

Deux nombres complexes sont dits égaux s'ils représentent le même point, c'est-à-dire s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

Remarque : un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes les deux nulles.

II Opérations sur les nombres complexes

Soient $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ deux nombres complexes, x, y, x' et y' réels.

II.1 Addition

$\boxed{z + z' = (x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + i(y + y')}$

Exemple : $(2 + 3\mathrm{i}) + (5 + 7\mathrm{i}) = 2 + 5 + 3\mathrm{i} + 7\mathrm{i} = \boxed{7 + 10\mathrm{i}}$

II.2 Soustraction

$\boxed{z - z' = (x + \mathrm{i}y) - (x' + \mathrm{i}y') = (x - x') + i(y - y')}$

II.3 Multiplication

$\boxed{zz' = (x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)}$

Exemple : Soient $z = 2 + 3\mathrm{i}$ et $z' = 7 + 2\mathrm{i}$.
Alors $zz' = (2+3\mathrm{i})(7+2\mathrm{i}) = 2\times 7 + 3\times 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i}\times 7 + 3\mathrm{i}\times 2\mathrm{i} = 14 + 4\mathrm{i} + 21\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2 = 14 + 25\mathrm{i} - 6 = 14 - 6 + 25\mathrm{i} = \boxed{8 + 25\mathrm{i}}$
(car $\mathrm{i}^2 = -1$).

II.4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition :

On appelle conjugué de z et on le note $\overline{z}$, le nombre défini par : $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

Exemples : $\overline{2 + 3\mathrm{i}} = 2 - 3\mathrm{i}$; $\overline{5 - 7\mathrm{i}} = 5 + 7\mathrm{i}$

Propriété

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
- $M(z)$ et $M'\left(\overline{z}\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels
- Si $z = x + \mathrm{i}y$, $z\overline{z} = x^2 + y^2$ (carré de partie réelle plus carré de la partie imaginaire)

II.5 Inverse

$\boxed{\text{Si } z \neq 0,\ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\mathrm{i}.}$

Remarques : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$.
On ne laisse pas de nombre complexe au dénominateur d'une fraction.

Exemple : $z = 2 + 3\mathrm{i}$; $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$;
$\overline{z} = \overline{2 + 3\mathrm{i}}$; $z\overline{z} = 2^2 + 3^2 = 13$.
Par conséquent : $\frac{1}{z} = \frac{2 - 3\mathrm{i}}{13} = \boxed{\frac{2}{13} - \frac{3}{13}\mathrm{i}}$.

II.6 Quotient de deux nombres complexes

$\boxed{\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'} \text{ et on applique la méthode précédente d'où : } \dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}}$

Exemple : $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{5+7\mathrm{i}} = \dfrac{(2+3\mathrm{i})(5-7\mathrm{i})}{5^2+7^2} = \dfrac{10-14\mathrm{i}+15\mathrm{i}-21\mathrm{i})2}{74} = \dfrac{10+21+\mathrm{i}}{74} = \dfrac{31+\mathrm{i}}{74} = \boxed{\dfrac{31}{74} + \dfrac{1}{74}\mathrm{i}}$

III Conjugué, et opérations

Propriétés :

Soient deux nombres complexes z et z'.

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

c) $\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

d) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

f) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

g) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Théorème :

Soit z un nombre complexe.

1. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
2. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

IV Équations du second degré

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c réels.

En utilisant la forme canonique, cette équation s'écrit : $\boxed{a\left[\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0}$, où $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a trois cas possibles :

- $\boxed{\text{Premier cas ; } \Delta > 0}$

On remarque que $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$; on obtient une identité remarquable, on factorise et on trouve (situation vue en Première) deux solutions **réelles** ; $\boxed{z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.

- Deuxième cas : $\Delta = 0$

  On retrouve de même qu'il y a une solution réelle double : $\boxed{z = -\dfrac{b}{2a}}$.

- Troisième cas : $\Delta < 0$

  Alors $\Delta = -(-\Delta) = \mathrm{i}^2 \times (-\Delta) = \left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2$ car $\Delta > 0$;
  on a alors $\left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2 = \mathrm{i}^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2 = (-1) \times (-\Delta) = \Delta$.
  Par conséquent :
  $$a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$
  $$= a\left(z-\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right).$$
  Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

  On obtient **deux solutions complexes conjuguées** : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}}$/

Résumé

Solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $(a\,;\,b\,;\,c) \in \mathbb{R}^3$:

- Si $\Delta > 0$, on a deux solutions **réelles** : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution **réelle double** : $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, on a deux solutions **complexes conjuguées** : $z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.