Mathématiques **Nom : ....** **TS 1, 2, 3 et 4**
Lycée Jean Calvin - Noyon Mardi 12 décembre 2017

Baccalauréat blanc n°2

Les calculatrices sont autorisées. Le barème prend en compte la rédaction, la qualité de l'expression et la présentation de la copie. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 :	/8
Exercice 2 :	/4
Exercice 3 :	/2
Exercice 4 :	/6
Total :	/20

Le sujet est à rendre avec la copie.
Durée : 3h - pas de sortie anticipée
La calculatrice doit être en mode examen.

Exercice 1. *(8 points)*
On considère la fonction f définie sur par : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

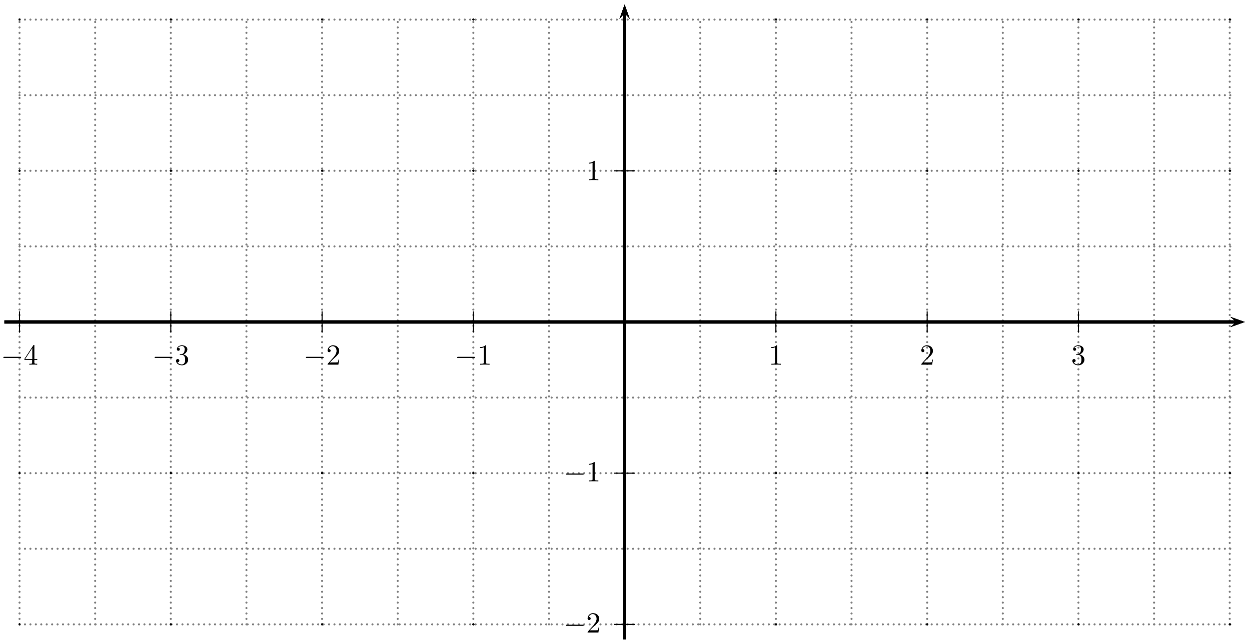
Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B - Étude de la fonction f.

1. (a) Vérifier que $f(x) = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1}$, puis en déduire les limites de la fonction en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.
   (b) Donner un encadrement de α à 10^{-2}.
   (c) L'équation $f(x) = 0,5$ admet-elle d'autres solutions dans $\mathbb{R}$? Justifier.
4. (a) Montrer que la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.
   (b) Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T). On pourra utiliser la partie A.
5. Tracer la droite (T), les asymptotes et l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.



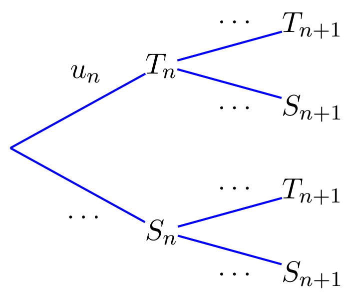
Exercice 2. *(4 points)* Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un sautoir pour plonger et d'un toboggan.
On a observé que :

- — lors de son premier passage, le manchot choisit l'un des deux équipements avec la même probabilité.
- — si le manchot a choisi le sautoir, alors il le choisit à nouveau au passage suivant avec une probabilité de 0,8.
- — si le manchot a choisi le toboggan, alors il le choisit à nouveau au passage suivant avec une probabilité de 0,3.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère l'événement S_n : « le manchot utilise le sautoir lors de son n-ième passage » et l'événement T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage ». On note $u_n = P(T_n)$.

1. (a) Montrer que $P(T_2) = 0,25$.

   (b) Compléter l'arbre ci-dessous :



   (c) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son terme initial.

   (b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n.

   (c) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 3. *(2 points)* Cet exercice est un **Vrai** / **Faux**. Pour chacune des trois affirmations suivantes, répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse. Toute réponse injustifiée ne sera pas prise en compte.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres 25 et $\dfrac{1}{3}$.

1. $P(X = 4) = 12\,650 \times \dfrac{2^{21}}{3^{25}}$.
2. $P(X \geqslant 1) = \dfrac{3^{25} - 2^{25}}{3^{25}}$.
3. $P(5 \leqslant X \leqslant 15) \approx 0,886$ à 10^{-3}.

Exercice 4. *(6 points)*
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n\left(1-u_n\right) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant 1-u_n \leqslant 1$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3\times 0,9^n$.
   (b) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
   Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il satisfasse cette exigence.

```
u ← 0,3
n ← 0
Tant que ... faire :
 |
 |
 |
Fin Tant que
Afficher ...
```

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06v_n\left(1-v_n\right) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite et on admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1}=\ell$. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell = 1,06\ell(1-\ell).$$

3. Déterminer ℓ.
   La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?