Baccalauréat blanc n°4

Les calculatrices sont autorisées. Le barème prend en compte la rédaction, la qualité de l'expression et la présentation de la copie. Le barème est donné à titre indicatif.

Le sujet est à rendre avec la copie.
Durée : 4h - pas de sortie anticipée

Exercice 1 (obl) :	/5
Exercice 2 (spé) :	/5
Exercice 3 :	/4
Exercice 4 :	/5
Exercice 5 :	/6
Total :	/20

Exercice 1. *(5 points)*
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
   Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
   Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à $0,6$.
   Affirmation n° 1 : « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

2. Une entreprise dispose d'un stock de guirlandes électriques. On sait que 40 % des guirlandes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B.
   Un quart des guirlandes provenant du fournisseur A et un tiers des guirlandes provenant du fournisseur B peuvent être utilisées uniquement en intérieur pour des raisons de sécurité. Les autres guirlandes peuvent être utilisées aussi bien en intérieur qu'en extérieur.
   Une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur est vendue 5 € et une guirlande pouvant être utilisée uniquement en intérieur est vendue 3 €.
   On choisit une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur.
   Affirmation n° 2 : « Il y a autant de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B ».
   Affirmation n° 3 : « La vente d'un lot de 15 guirlandes rapportera en moyenne 66 € à l'entreprise. »

3. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B.
   Affirmation n° 4 : « Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. »

4. 80 personnes s'apprêtent à passer un portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les 80 personnes de ce groupe.
   Chaque personne qui fait sonner le portique est contrôlée par la douane.
   Affirmation n° 5 : « La probabilité qu'il y ait entre 5 et 10 personnes qui fassent sonner le portique, arrondie à 10^{-3} près, est 0,008. C'est-à-dire : $P(5 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0,008$ ».

Exercice 2. *(5 points)*
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
   Affirmation nº 1 : « Les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9+2k\ ;\ 13+3k)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. »
2. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :
   $$a = 3n + 1 \text{ et } b = 2n + 3.$$
   Affirmation nº 2 : « Le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7. »
3. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :
   $$a = 2n^2 + 7n + 21 \text{ et } b = 2n + 2.$$
   Affirmation nº 3 : « Pour tout entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et $n + 17$. »
4. On considère la matrice carrée d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Affirmation nº 4 : « Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. »
5. On considère les matrices carrées d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.
   Affirmation nº 5 : « Il n'existe pas deux réels a et b vérifiant : $C = aA + bB$. »

Exercice 3. *(4 points)*
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M d'affixe z est dit invariant par f lorsqu'il est confondu avec le point d'affixe $f(z)$, c'est-à-dire que $z = f(z)$.
   (a) Calculer $f\left(3 + i\sqrt{2}\right)$. Le point M d'affixe $3 + i\sqrt{2}$ est-il invariant par f ?
   (b) Démontrer qu'il existe deux points invariants par f. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
   Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' d'affixe $f(z)$ associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 4. *(5 points)*
Commun à tous les candidats

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :
— entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
— entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 554

   Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,520$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1\,520$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3 000
Tant que ...
      n ← ...
      u ← ...
Fin de Tant que
```

   La notation « ← » correspond à une affectation de valeur,
   ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture. Justifier.

Exercice 5. *(6 points)*
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\left(\ln x\right)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.
2. (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

   (b) En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\ln(x)\big(2 - \ln(x)\big)}{x^2}.$$

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.
   (c) Justifier que le tableau de variations de la fonction f est celui donné ci-dessous.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. (a) Démontrer que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{(\ln(x))^3}{3}$ est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (c) Interpréter graphiquement le résultat.