

# Clase práctica

## ✨ Resolución en lógica de primer orden ✨

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Computación  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

12/11/2024

# Agenda

## Resolución General ✨

Repaso

Método de resolución

En lógica proposicional

En lógica de primer orden

Ejercicios

## Resolución lineal y SLD ✨

Resolución lineal

Motivación

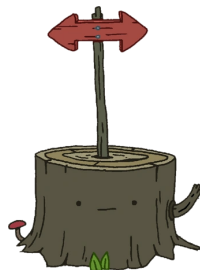
Cláusulas de Horn

Resolución SLD

Árbol de resolución

De Prolog a resolución

Ejemplo completo



## ¿Qué es?

- Procedimiento para determinar la **insatisfactibilidad** de una fórmula.
- Es útil como técnica de **demostración por refutación** (i.e., probar que  $\tau$  es válida mostrando que  $\neg\tau$  es insatisfactible).
- Consiste en la **aplicación sucesiva** de una regla de inferencia a un conjunto de cláusulas.

# Satisfactibilidad y validez

En general,

- Una *asignación* asocia variables a valores del dominio.
- Una fórmula  $\tau$  es **válida** sii toda asignación la hace verdadera.
- Una fórmula  $\tau$  es **satisfactible** sii alguna asignación la hace verdadera.

El siguiente hecho permite utilizar al método como técnica de demostración:

$\tau$  es válida sii  $\neg\tau$  es insatisfactible

# Cláusulas y FNC

El método trabaja con fórmulas en **forma normal conjuntiva**.

- Conjunción de disyunciones de literales, siendo un *literal* una fórmula atómica o su negación.
- Una *cláusula* es cada una de estas disyunciones de literales. Las representamos en notación de conjuntos.

Ejemplo:

$$\{\neg\text{menor}(X, Y), \text{menor}(c, Y)\}$$

representa la cláusula

$$\forall X. \forall Y. (\neg\text{menor}(X, Y) \vee \text{menor}(c, Y))$$

# Cláusulas y FNC

De esta manera, notamos a una fórmula en FNC como un conjunto de cláusulas. Este se entiende como la conjunción de todas ellas.

Por ejemplo, el conjunto que contiene a las cláusulas

- $\{\neg\text{menor}(X, Y), \text{menor}(c, Y)\}$
- $\{\text{impar}(Z), \text{mayor}(Z, w)\}$

representa la fórmula

$$\forall X. \forall Y. (\neg\text{menor}(X, Y) \vee \text{menor}(c, Y)) \wedge \forall Z. (\text{impar}(Z) \vee \text{mayor}(Z, w))$$

# Método de Resolución

## Repaso

### Estrategia

- Para demostrar que la fórmula  $\tau$  es universalmente válida  
Demostramos que  $\neg\tau$  es insatisfactible.
- Para demostrar que  $\tau$  se deduce de  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$   
Demostramos que  $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \neg\tau$  es insatisfactible.

### Esquema general

- Expresar la o las fórmulas como **cláusulas**.
- Aplicar sucesivamente un **paso de resolución** (generando nuevas cláusulas)...
- Hasta llegar a la cláusula vacía o concluir que no es posible llegar a ella.
- Importante: al aplicar resolución suelen presentarse varias opciones.  
**Conviene tener un plan.**

# La regla de resolución en el marco proposicional

$$\frac{\sigma_i = \{A_1, \dots, A_m, Q\} \quad \sigma_j = \{B_1, \dots, B_n, \neg Q\}}{\tau = \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}}$$

- A  $\tau$  se la llama **resolvente** (de  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$ )
- La regla se apoya en el hecho de que la siguiente proposición es una tautología:

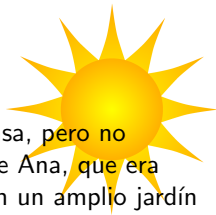
$$(\alpha \vee P) \wedge (\beta \vee \neg P) \Leftrightarrow (\alpha \vee P) \wedge (\beta \vee \neg P) \wedge (\alpha \vee \beta)$$

- El conjunto de cláusulas  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  es lógicamente equivalente a  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau\}$



# Ejemplo para entrar en calor

## Práctica 7 - Ejercicio 4



Un grupo de amigos quería juntarse a comer en una casa, pero no decidían en cuál. Prevalecían dos propuestas: la casa de Ana, que era cómoda y espaciosa, y la de Carlos, más chica pero con un amplio jardín y parrilla al aire libre. Finalmente acordaron basar su elección en el pronóstico del tiempo. Si anunciaban lluvia, se reunirían en la casa de Ana; y si no, en la de Carlos. (Desde ya, se juntarían en una sola casa.) Finalmente el grupo se juntó a comer en la casa de Ana, pero no llovió. Utilizar las siguientes proposiciones para demostrar - mediante el método de resolución - que el pronóstico se equivocó (anunció lluvia y no llovió, o viceversa).

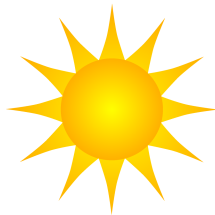
$P$  = "El pronóstico anunció lluvia."

$A$  = "El grupo se reúne en la casa de Ana."

$C$  = "El grupo se reúne en la casa de Carlos."

$L$  = "Llueve en el día de la reunión."

# Probémoslo



Tenemos...

1.  $P \Rightarrow A \rightsquigarrow \neg P \vee A$
2.  $\neg P \Rightarrow C \rightsquigarrow P \vee C$
3.  $\neg(A \wedge C) \rightsquigarrow \neg A \vee \neg C$
4.  $A$
5.  $\neg L$

Queremos ver que:

$$(P \wedge \neg L) \vee (\neg P \wedge L)$$

Negación:

$$\neg((P \wedge \neg L) \vee (\neg P \wedge L)) \rightsquigarrow (\neg P \vee L) \wedge (P \vee \neg L)$$

# Expresando las cláusulas como conjuntos

1.  $\{\neg P, A\}$
2.  $\{P, C\}$
3.  $\{\neg A, \neg C\}$
4.  $\{A\}$
5.  $\{\neg L\}$
6.  $\{\neg P, L\}$
7.  $\{P, \neg L\}$

De 6 y 2: 8.  $\{L, C\}$

De 8 y 3: 9.  $\{L, \neg A\}$

De 9 y 4: 10.  $\{L\}$

De 10 y 5:  $\square$



**Ayuda:** pensemos en lo que queremos demostrar y ¡hagamos un plan! Suponemos que el pronóstico no anunció lluvia o llovió...

# Pasaje a FNC

## Paso a paso

1. Eliminar implicación
2. Forma normal negada
3. Forma normal prenexa (opcional)
4. Forma normal de Skolem (dependencias = variables libres dentro del alcance del  $\exists$ )
5. Forma normal conjuntiva
6. Distribución de cuantificadores y renombre de variables

# La regla de resolución en primer orden

$$\frac{\sigma_i = \{A_1, \dots, A_m, P_1, \dots, P_k\} \quad \sigma_j = \{B_1, \dots, B_n, \neg Q_1, \dots, \neg Q_l\}}{\tau = S(\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\})}$$

- $S$  es el MGU de  $\{P_1 \stackrel{?}{=} \dots \stackrel{?}{=} P_k \stackrel{?}{=} Q_1 \stackrel{?}{=} \dots \stackrel{?}{=} Q_l\}$   
es decir,  $S(P_1) = \dots = S(P_k) = S(Q_1) = \dots = S(Q_l)$ .
- A  $\tau$  se la llama **resolvente** (de  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$ ).
- Cada paso de resolución **preserva satisfactibilidad** (Teorema de Herbrand-Skolem-Gödel).

# Resolución en lógica de primer orden

⚠ Cosas importantes para recordar<sup>1</sup> ⚠

- Al skolemizar, usar la misma constante o función si y sólo si la variable que estamos eliminando es **la misma** (nunca para otras, aun si tienen el mismo nombre).
- Para encontrar las dependencias, ver qué variables están libres dentro del alcance del  $\exists$  (sin contar la que se está eliminando).
- ¡No olvidarse de negar lo que se quiere demostrar! Y recordar que  $\neg((\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n) \Rightarrow \tau) = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \wedge \neg\tau$ .
- Antes de empezar a aplicar pasos de resolución, convencerse de que lo que se quiere demostrar es verdadero, y trazar un plan para demostrarlo (mentalmente o por escrito).
- Recordar bien cómo funciona la unificación, y sustituir siempre **variables** (ni funciones, ni constantes, ni predicados).

---

<sup>1</sup>Seguir las indicaciones de esta lista previene los errores más frecuentes en los parciales.

# Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

- Representar en forma clausal la siguiente información referida a conjuntos, pertenencia (predicado Pert) e inclusión (predicado Inc).
  - i  $\forall X. \forall Y. (\text{Inc}(X, Y) \Leftrightarrow \forall Z. (\text{Pert}(Z, X) \Rightarrow \text{Pert}(Z, Y)))$   
 $X$  está incluido en  $Y$  si y solo si cada elemento de  $X$  es un elemento de  $Y$ .
  - ii  $\forall X. \neg \text{Pert}(X, \emptyset)$   
Ningún elemento pertenece al vacío.
- Usar resolución para probar que el vacío está incluido en todo conjunto.
- Indicar justificando si la prueba realizada es SLD (volveremos sobre esto más adelante).

# Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

---

Cast.:  $X \subseteq Y$  si y solo si cada elemento de  $X$  es un elemento de  $Y$ .

1° o.:  $\forall X. \forall Y. (\text{Inc}(X, Y) \Leftrightarrow (\forall Z. (\text{Pert}(Z, X) \Rightarrow \text{Pert}(Z, Y))))$

Claus.:  $\{\neg \text{Inc}(X_1, Y_1), \neg \text{Pert}(Z_1, X_1), \text{Pert}(Z_1, Y_1)\}$   
 $\{\text{Inc}(X_2, Y_2), \text{Pert}(f(X_2, Y_2), X_2)\}$   
 $\{\text{Inc}(X_3, Y_3), \neg \text{Pert}(f(X_3, Y_3), Y_3)\}$

---

Cast.: Ningún elemento pertenece al vacío.

1° o.:  $\forall X. \neg \text{Pert}(X, \emptyset)$

Claus.:  $\{\neg \text{Pert}(X_4, \emptyset)\}$

---



## Ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

A partir de ellas, se desea demostrar que:

---

Cast.: El vacío está incluido en todo conjunto.

1° o.:  $\forall X. \text{Inc}(\emptyset, X)$

Neg.:  $\exists X. \neg \text{Inc}(\emptyset, X)$

Claus.:  $\{\neg \text{Inc}(\emptyset, c)\}$

---

# Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

---

Cast.:  $X \subseteq Y$  si y solo si cada elemento de  $X$  es un elemento de  $Y$ .

1° o.:  $\forall X. \forall Y. (\text{Inc}(X, Y) \Leftrightarrow (\forall Z. (\text{Pert}(Z, X) \Rightarrow \text{Pert}(Z, Y))))$

Claus.:  $\{\neg \text{Inc}(X_1, Y_1), \neg \text{Pert}(Z_1, X_1), \text{Pert}(Z_1, Y_1)\}$   
 $\{\text{Inc}(X_2, Y_2), \text{Pert}(f(X_2, Y_2), X_2)\}$   
 $\{\text{Inc}(X_3, Y_3), \neg \text{Pert}(f(X_3, Y_3), Y_3)\}$

---

Cast.: Ningún elemento pertenece al vacío.

1° o.:  $\forall X. \neg \text{Pert}(X, \emptyset)$

Claus.:  $\{\neg \text{Pert}(X_4, \emptyset)\}$

---

## Ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

A partir de ellas, se desea demostrar que:

---

Cast.: El vacío está incluido en todo conjunto.

1° o.:  $\forall X. \text{Inc}(\emptyset, X)$

Neg.:  $\exists X. \neg \text{Inc}(\emptyset, X)$

Claus.:  $\{\neg \text{Inc}(\emptyset, c)\}$

---

# Ejemplo (resolviendo)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

$$\frac{\{A_1, \dots, A_m, P_1, \dots, P_k\} \quad \{B_1, \dots, B_n, \neg Q_1, \dots, \neg Q_l\}}{S(\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\})}$$

donde  $S$  es el MGU de  $\{P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_l\}$ .

1.  $\{\neg \text{Inc}(X_1, Y_1), \neg \text{Pert}(Z_1, X_1), \text{Pert}(Z_1, Y_1)\}$
2.  $\{\text{Inc}(X_2, Y_2), \text{Pert}(f(X_2, Y_2), X_2)\}$
3.  $\{\text{Inc}(X_3, Y_3), \neg \text{Pert}(f(X_3, Y_3), Y_3)\}$
4.  $\{\neg \text{Pert}(X_4, \emptyset)\}$
5.  $\{\neg \text{Inc}(\emptyset, c)\}$
6. (2 y 5)  $\{\text{Pert}(f(\emptyset, c), \emptyset)\}$   $S = \{X_2 := \emptyset, Y_2 := c\}$
7. (6 y 4)  $\square$   $S = \{X_4 := f(\emptyset, c)\}$

## Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

Dadas las siguientes definiciones de Descendiente y Abuela a partir de la relación Madre:

- Los hijos son descendientes:

$$\forall X. \forall Y. (\text{Madre}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$$

- La relación de descendencia es transitiva:

$$\forall X. \forall Y. \forall Z. (\text{Descendiente}(X, Y) \wedge \text{Descendiente}(Y, Z) \Rightarrow \text{Descendiente}(X, Z))$$

- La abuela es madre de alguien que es madre de la nieta:

$$\forall X. \forall Y. (\text{Abuela}(X, Y) \Rightarrow \exists Z. (\text{Madre}(X, Z) \wedge \text{Madre}(Z, Y)))$$

Demostrar usando resolución general que los nietos son descendientes; es decir, que

$$\forall X. \forall Y. (\text{Abuela}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$$

Ayuda: tratar de aplicar el método a ciegas puede traer problemas.

Conviene tener en mente lo que se quiere demostrar.

# Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

---

Cast.: Los hijos son descendientes.

1° o.:  $\forall X. \forall Y. (\text{Madre}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$

Claus.:  $\{\neg \text{Madre}(X_1, Y_1), \text{Descendiente}(Y_1, X_1)\}$

---

Cast.: La relación de descendencia es transitiva.

1° o.:  $\forall X. \forall Y. \forall Z. (\text{Descendiente}(X, Y) \wedge \text{Descendiente}(Y, Z) \Rightarrow \text{Descendiente}(X, Z))$

Claus.:  $\{\neg \text{Descendiente}(X_2, Y_2), \neg \text{Descendiente}(Y_2, Z_2), \text{Descendiente}(X_2, Z_2)\}$

---

Cast.: La abuela es madre de alguien que es madre de la nieta.

1° o.:  $\forall X. \forall Y. (\text{Abuela}(X, Y) \Rightarrow \exists Z. (\text{Madre}(X, Z) \wedge \text{Madre}(Z, Y)))$

Claus.:  $\{\neg \text{Abuela}(X_3, Y_3), \text{Madre}(X_3, \text{medio}(X_3, Y_3))\}$   
 $\{\neg \text{Abuela}(X_4, Y_4), \text{Madre}(\text{medio}(X_4, Y_4), Y_4)\}$

---

# Otro ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

A partir de ellas, se desea demostrar que:

---

Cast.: Los nietos son descendientes

1° o.:  $\forall X. \forall Y. (Abuela(X, Y) \Rightarrow Descendiente(Y, X))$

Neg.:  $\exists X. \exists Y. (Abuela(X, Y) \wedge \neg Descendiente(Y, X))$

Claus.:  $\{Abuela(a, b)\}$   
 $\{\neg Descendiente(b, a)\}$

---

# Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

---

Cast.: Los hijos son descendientes.

1° o.:  $\forall X. \forall Y. (\text{Madre}(X, Y) \Rightarrow \text{Descendiente}(Y, X))$

Claus.:  $\{\neg \text{Madre}(X_1, Y_1), \text{Descendiente}(Y_1, X_1)\}$

---

Cast.: La relación de descendencia es transitiva.

1° o.:  $\forall X. \forall Y. \forall Z. (\text{Descendiente}(X, Y) \wedge \text{Descendiente}(Y, Z) \Rightarrow \text{Descendiente}(X, Z))$

Claus.:  $\{\neg \text{Descendiente}(X_2, Y_2), \neg \text{Descendiente}(Y_2, Z_2), \text{Descendiente}(X_2, Z_2)\}$

---

Cast.: La abuela es madre de alguien que es madre de la nieta.

1° o.:  $\forall X. \forall Y. (\text{Abuela}(X, Y) \Rightarrow \exists Z. (\text{Madre}(X, Z) \wedge \text{Madre}(Z, Y)))$

Claus.:  $\{\neg \text{Abuela}(X_3, Y_3), \text{Madre}(X_3, \text{medio}(X_3, Y_3))\}$   
 $\{\neg \text{Abuela}(X_4, Y_4), \text{Madre}(\text{medio}(X_4, Y_4), Y_4)\}$

---



# Otro ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

A partir de ellas, se desea demostrar que:

---

Cast.: Los nietos son descendientes

1° o.:  $\forall X. \forall Y. (Abuela(X, Y) \Rightarrow Descendiente(Y, X))$

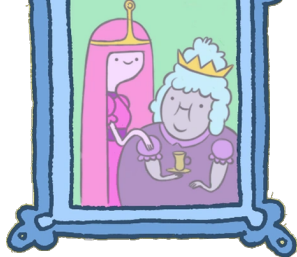
Neg.:  $\exists X. \exists Y. (Abuela(X, Y) \wedge \neg Descendiente(Y, X))$

Claus.:  $\{Abuela(a, b)\}$   
 $\{\neg Descendiente(b, a)\}$

---

# Otro ejemplo (resolviendo)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008



1.  $\{\neg \text{Madre}(X_1, Y_1), \text{Descendiente}(Y_1, X_1)\}$
2.  $\{\neg \text{Descendiente}(X_2, Y_2), \neg \text{Descendiente}(Y_2, Z_2), \text{Descendiente}(X_2, Z_2)\}$
3.  $\{\neg \text{Abuela}(X_3, Y_3), \text{Madre}(X_3, \text{medio}(X_3, Y_3))\}$
4.  $\{\neg \text{Abuela}(X_4, Y_4), \text{Madre}(\text{medio}(X_4, Y_4), Y_4)\}$
5.  $\{\text{Abuela}(a, b)\}$
6.  $\{\neg \text{Descendiente}(b, a)\}$

Resolvámoslo con nuestra herramienta.

## Resolución General ✨

- Repaso

- Método de resolución

- En lógica proposicional

- En lógica de primer orden

- Ejercicios

## Resolución lineal y SLD ✨

- Resolución lineal

- Motivación

- Cláusulas de Horn

- Resolución SLD

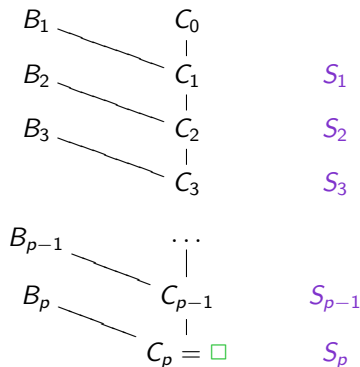
- Árbol de resolución

- De Prolog a resolución

- Ejemplo completo

# Cómo mantenernos en línea

Si un conjunto de cláusulas  $\mathcal{C}$  es insatisfactible, existe una secuencia de pasos de resolución *lineal* que lo refuta (prueba su insatisfactibilidad). Es decir, una secuencia de la forma:



donde  $C_0$  y cada  $B_i$  es un elemento de  $\mathcal{C}$  o algún  $C_j$  con  $j < i$ .

# Resolución SLD (*Selective Linear Definite*)

La resolución es cara, pero hay cupones de descuento...

- El método de resolución es completo, pero ineficiente.
- El espacio de búsqueda - inicialmente cuadrático - crece en cada paso.
- Resolución lineal reduce el espacio de búsqueda.
- Resolución SLD es lineal y (un poco) más eficiente, preservando completitud...

¡pero no puede aplicarse a cualquier conjunto de cláusulas!

# Cláusulas de Horn

- **Cláusula de Horn**

- ▶ Cláusula de la forma  $\forall X_1 \dots \forall X_m. C$  tal que la disyunción de literales  $C$  tiene **a lo sumo** un literal positivo.

- **Cláusula de definición** (“Definite Clause”)

- ▶ Cláusula de la forma  $\forall X_1 \dots \forall X_m. C$  tal que la disyunción de literales  $C$  tiene **exactamente** un literal positivo.

- Sea  $H = P \cup \{G\}$  un conjunto de cláusulas de Horn (con nombre de variables disjuntos) tal que

- ▶  $P$  conjunto de cláusulas de definición y
- ▶  $G$  una cláusula sin literales positivos.

- $H = P \cup \{G\}$  son las **cláusulas de entrada**.

- ▶  $P$  se conoce como el **programa o base de conocimientos** y
- ▶  $G$  el **goal, meta o cláusula objetivo**.

# Cláusulas de Horn



Cláusulas con a lo sumo un literal positivo.

- $\{P(X), P(Y), \neg Q(Y, Z)\}$
- $\{Q(e, Z)\}$  ✓  $\rightarrow$  cláusula de **definición** (*hecho*)
- $\{P(X), \neg P(e)\}$  ✓  $\rightarrow$  cláusula de **definición** (*regla*)
- $\{P(X), \neg P(e), Q(X, Y)\}$
- $\{P(X), \neg P(e), \neg Q(X, Y)\}$  ✓  $\rightarrow$  cláusula de **definición** (*regla*)
- $\{\neg P(X), \neg P(e), \neg Q(X, Y)\}$  ✓  $\rightarrow$  cláusula **objetivo**

⚠ No toda fórmula puede expresarse  
como una cláusula de Horn ⚠

$$\forall X.(P(X) \vee Q(X))$$

# Resolución SLD

Una secuencia de pasos de **resolución SLD** para un conjunto de cláusulas de Horn  $H$  es una secuencia

$$\langle N_0, N_1, \dots, N_p \rangle$$

de **cláusulas objetivo** que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1.  $N_0 \in H$  ( $N_0$  es la cláusula objetivo de  $H$ ).
2. *sigue en transparencia siguiente.*



# Resolución SLD

2. para todo  $N_i$  en la secuencia,  $0 < i < p$ , si  $N_i$  es

$$\{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_n\}$$

entonces hay alguna **cláusula de definición**  $C_i$  de la forma  $\{A, \neg B_1, \dots, \neg B_m\}$  en  $H$ , tal que  $A_k$  y  $A$  son unificables con MGU  $S$ , y  $N_{i+1}$  es  $\{S(\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \dots, \neg B_m, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_n)\}$ .

# Resolución SLD

Un caso particular de la resolución general.

- Cláusulas de Horn con **exactamente una** cláusula objetivo.
- Resolvemos la cláusula objetivo con una cláusula de definición.
- Eso nos da otra cláusula objetivo.
- Repetimos el proceso con esta nueva cláusula...
- Hasta llegar a la cláusula vacía.
- Si se busca un resultado, computamos la **sustitución respuesta** componiendo todas las sustituciones que fuimos realizando.

$$\frac{\overbrace{\{R, \neg B_1, \dots, \neg B_n\}}^{\text{definición}} \quad \overbrace{\{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_m\}}^{\text{objetivo}}}{\underbrace{S(\{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \dots, \neg B_n, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_m\})}_{\text{nuevo objetivo}}}$$

donde  $S$  es el MGU de  $\{R \stackrel{?}{=} A_k\}$ .

## Volviendo al primer ejercicio de LPO que resolvimos...

1.  $\{\neg \text{Inc}(X_1, Y_1), \neg \text{Pert}(Z_1, X_1), \text{Pert}(Z_1, Y_1)\}$
2.  $\{\text{Inc}(X_2, Y_2), \text{Pert}(f(X_2, Y_2), X_2)\}$
3.  $\{\text{Inc}(X_3, Y_3), \neg \text{Pert}(f(X_3, Y_3), Y_3)\}$
4.  $\{\neg \text{Pert}(X_4, \emptyset)\}$
5.  $\{\neg \text{Inc}(\emptyset, c)\}$
6. (2 y 5)  $\{\text{Pert}(f(\emptyset, c), \emptyset)\} \ S = \{X_2 := \emptyset, Y_2 := c\}$
7. (6 y 4)  $\square \ S = \{X_4 := f(\emptyset, c)\}$

¿Esto es SLD? ¿Por qué, o por qué no?

# Resolución SLD

## Ejemplo (computando una solución)

*“Los enemigos de mis enemigos son mis amigos.”*

1.  $\{\text{amigo}(A, B), \neg\text{enemigo}(A, C), \neg\text{enemigo}(C, B)\}$
2.  $\{\text{enemigo}(\text{Dulce Princesa}, \text{Rey Helado})\}$
3.  $\{\text{enemigo}(\text{Rey Helado}, \text{Ricardio})\}$
4.  $\{\text{enemigo}(\text{Rey Helado}, \text{Finn})\}$
5.  $\{\neg\text{amigo}(\text{Dulce Princesa}, X)\}$
6. (1 y 5)  $\{\neg\text{enemigo}(\text{Dulce Princesa}, C), \neg\text{enemigo}(C, B)\}$   
 $S_6 = \{A := \text{Dulce Princesa}, X := B\}$
7. (2 y 6)  $\{\neg\text{enemigo}(\text{Rey Helado}, B)\}$   
 $S_7 = \{C := \text{Rey Helado}\}$
8. (3 y 7)  $\square S_8 = \{B := \text{Ricardio}\}$   
 $S = S_8 \circ S_7 \circ S_6 =$   
 $\{A := \text{Dulce Princesa}, X := \text{Ricardio}, B := \text{Ricardio},$   
 $C := \text{Rey Helado}\}$

# Árbol de resolución

¡Es *lineal*!

- La resolución SLD es *lineal*: no hay vuelta atrás posible.
- Si el objetivo puede resolverse con más de una regla, elegir la correcta.
- Si hay más de una, elegir cualquiera.
- Si nos equivocamos, entonces lo que hicimos *no* es parte de la resolución SLD.
- Puede haber varias resoluciones SLD posibles.
- Prolog intenta buscar todas (resolución SLD + backtracking).

# Resolución SLD y Prolog

## Preguntas generales

- El mecanismo de búsqueda en la resolución SLD  
¿está determinado?
- ¿El método es completo?
- ¿Prolog usa resolución SLD? ¿Su método es completo?  
¿Está determinado?
- ¿Dónde está el problema (o la diferencia)?

# Resolución SLD y Prolog

El ejemplo anterior en Prolog

*“Los enemigos de mis enemigos son mis amigos.”*

$\{ \text{amigo}(A, B), \neg \text{enemigo}(A, C), \neg \text{enemigo}(C, B) \}$   
 $\{ \text{enemigo}(\text{Dulce Princesa}, \text{Rey Helado}) \}$   
 $\{ \text{enemigo}(\text{Rey Helado}, \text{Ricardio}) \}$   
 $\{ \text{enemigo}(\text{Rey Helado}, \text{Finn}) \}$

$\{ \neg \text{amigo}(\text{Dulce Princesa}, X) \}$

$\text{amigo}(A, B) :- \text{enemigo}(A, C), \text{enemigo}(C, B).$   
 $\text{enemigo}(\text{dulceprincesa}, \text{reyhelado}).$   
 $\text{enemigo}(\text{reyhelado}, \text{ricardio}).$   
 $\text{enemigo}(\text{reyhelado}, \text{finn}).$

$?- \text{amigo}(\text{dulceprincesa}, X).$

¿Cuál es la relación? ¿Cualquier ejemplo se puede traducir así?  
¿Qué hay que tener en cuenta?

## Resolución SLD y Prolog

Veamos ahora este ejemplo tomado de la práctica de Prolog:

1. `natural(0).`
2. `natural(suc(X)) :- natural(X).`
3. `menorOIgual(X, suc(Y)) :- menorOIgual(X, Y).`
4. `menorOIgual(X,X) :- natural(X).`

¿Qué pasa en Prolog si ejecutamos la consulta `menorOIgual(0,X)`?

¿Podremos encontrar la respuesta usando resolución?



# De Prolog a Resolución

Considerar las siguientes definiciones en prolog:

```
preorder(nil, []).
```

```
preorder(bin(I,R,D), [R|L]) :- append(LI,LD,L), preorder(I,LI),  
                                preorder(D,LD).
```

```
append([],YS,YS).
```

```
append([X|XS],YS,[X|L]) :- append(XS,YS,L).
```

- ¿Qué sucede al realizar la consulta  
?- preorder(bin(bin(nil,2,nil),1,nil),Lista).?
- Utilizar el método de resolución para encontrar la solución al problema. Para ello, convertir el programa a forma clausal.
- Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD, y justificar. En caso de ser SLD, ¿respeto el orden en que Prolog hubiera resuelto la consulta?

# Último ejercicio

2° parcial 1° Cuat. 2011

En este ejercicio usaremos el método de resolución para demostrar una propiedad de las relaciones binarias; a saber, que una relación no vacía no puede ser a la vez irreflexiva, simétrica y transitiva.

Para esto tomaremos una relación  $R$  y se demostrará que, si  $R$  satisface las tres propiedades mencionadas, entonces es vacía.

Dadas las siguientes definiciones:

1.  $R$  es **irreflexiva**:  $\forall X. \neg R(X, X)$
2.  $R$  es **simétrica**:  $\forall X. \forall Y. (R(X, Y) \Rightarrow R(Y, X))$
3.  $R$  es **transitiva**:  $\forall X. \forall Y. \forall Z. ((R(X, Y) \wedge R(Y, Z)) \Rightarrow R(X, Z))$
4.  $R$  es **vacía**:  $\forall X. \neg \exists Y. R(X, Y)$

Utilizando resolución, demostrar que sólo una relación vacía puede cumplir a la vez las propiedades 1 a 3. Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD (y justificar).

# Último ejercicio

2° parcial 1° Cuat. 2011

---

Cast.:  $R$  es irreflexiva.

1° o.:  $\forall X. \neg R(X, X)$

Claus.:  $\{\neg R(X_1, X_1)\}$

---

Cast.:  $R$  es simétrica

1° o.:  $\forall X. \forall Y. (R(X, Y) \Rightarrow R(Y, X))$

Claus.:  $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$

---

Cast.:  $R$  es transitiva.

1° o.:  $\forall X. \forall Y. \forall Z. ((R(X, Y) \wedge R(Y, Z)) \Rightarrow R(X, Z))$

Claus.:  $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$

---

# Último ejercicio (cont.)

2° parcial 1° Cuat. 2011

Se desea demostrar que:

---

Cast.:  $R$  es vacía:

1° o.:  $\forall X. \neg \exists Y. R(X, Y)$

Neg.:  $\exists X. \exists Y. R(X, Y)$

Claus.:  $\{R(a, b)\}$

---

# Último ejercicio (resolviendo)

2° parcial 1° Cuat. 2011

1.  $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2.  $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3.  $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4.  $\{R(a, b)\}$
5.  $(4 \text{ y } 2) \{R(b, a)\} \ S = \{X_2 := a, Y_2 := b\}$
6.  $(5 \text{ y } 3) \{\neg R(X_6, b), R(X_6, a)\} \ S = \{Y_3 := b, Z_3 := a\}$  renombrando  $X_3$  a  $X_6$
7.  $(6 \text{ y } 4) \{R(a, a)\} \ S = \{X_6 := a\}$
8.  $(7 \text{ y } 1) \ \square \ S = \{X_1 := a\}$

¿Esta demostración por resolución es SLD? ¿Por qué, o por qué no?

# Alternativa SLD

2° parcial 1° Cuat. 2011

1.  $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2.  $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3.  $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4.  $\{R(a, b)\}$
5.  $(1 \text{ y } 3) \{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\} \ S = \{X_3 := X_1, Z_3 := X_1\}$
6.  $(5 \text{ y } 4) \{\neg R(b, a)\} \ S = \{X_1 := a, Y_3 := b\}$
7.  $(6 \text{ y } 2) \{\neg R(a, b)\} \ S = \{X_2 := a, Y_2 := b\}$
8.  $(7 \text{ y } 4) \ \square \ S = \emptyset$

¿Es la única posible?

# Otra alternativa SLD (más corta)

2° parcial 1° Cuat. 2011

1.  $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2.  $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3.  $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4.  $\{R(a, b)\}$
5.  $(1 \text{ y } 3) \{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\} \text{ } S = \{X_3 := X_1, Z_3 := X_1\}$
6.  $(5 \text{ y } 2) \{\neg R(X_2, Y_2)\} \text{ } S = \{X_1 := X_2, Y_3 := Y_2\}$
7.  $(6 \text{ y } 4) \square \text{ } S = \{X_2 := a, Y_2 := b\}$

