Inferencia de Tipos

Paradigmas (de Lenguajes) de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

18 de octubre de 2024

Inferencia de tipos

Motivación

Dada una expresión: ¿Tiene tipo? ¿Cuál es el tipo? ¿Es el más general? ¿Qué necesitamos saber del contexto?

Introducción

¿Tiene tipo? ¿Cuál es el tipo? ¿Es el más general?
¿Qué necesitamos saber del contexto?

- $(\lambda x.\, \mathit{isZero}(x))\ \mathit{true}$
- $\lambda x.\, \mathit{succ}(x)$
- $\lambda x.\, \mathit{succ}(y)$
- $\emptyset \vartriangleright \lambda x : \mathit{Nat}.\, x : \mathit{Nat} \to \mathit{Nat}$
- $\emptyset \vartriangleright \lambda x : X_1.\, x : X_1 \to X_1$

Introducción

Generalidad

¿Qué significa ser el juicio *más general*? Que todos los juicios derivables para $\lambda x.\, x$ son instancias de $\emptyset \,\triangleright\, \lambda x : X_1.\, x : X_1 \to X_1$. Por ejemplo:

- $\emptyset \,\triangleright\, \lambda x : \mathit{Nat}.\, x : \mathit{Nat} \to \mathit{Nat}$
- $\emptyset \,\triangleright\, \lambda x : \mathit{Bool}.\, x : \mathit{Bool} \to \mathit{Bool}$
- $\{y : \mathit{Bool}\} \,\triangleright\, \lambda x : X_2 \to \mathit{Nat}.\, x : (X_2 \to \mathit{Nat}) \to X_2 \to \mathit{Nat}$
- $\ldots$

Ejemplos a ojo

Inferir el juicio de tipado de las siguientes expresiones:

1. $\lambda x.\, y$
2. $f\ true$
3. $\mathrm{iszero}(x)$

Algoritmo de Martelli Montanari

Determinar el resultado de aplicar el algoritmo MGU sobre las siguientes ecuaciones:

1. $\mathtt{MGU}\{X_2 \to X_1 \to \mathsf{Bool} \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\}$
2. $\mathtt{MGU}\{(X_2 \to X_1) \to \mathsf{Nat} \stackrel{?}{=} X_2 \to X_3\}$
3. $\mathtt{MGU}\{X_1 \to \mathsf{Bool} \stackrel{?}{=} \mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool}, X_2 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_1\}$
4. $\mathtt{MGU}\{X_1 \to X_2 \stackrel{?}{=} X_3 \to X_4, X_3 \stackrel{?}{=} X_2 \to X_1\}$

Algoritmo de inferencia

¿Qué tipo tienen las siguientes expresiones?

1. $\lambda f.\, \lambda x.\, f(f\ x)$
2. $x\ (\lambda x.\ \mathsf{succ}(x))$
3. $\lambda x.\, x\ y\ x$

Algoritmo de inferencia

¿Qué tipo tienen las siguientes expresiones?

1. $\mathbb{W}(\lambda f.\, \lambda x.\, f(f\ x))$
2. $\mathbb{W}(x\,(\lambda x.\ \mathsf{succ}(x)))$
3. $\mathbb{W}(\lambda x.\, x\ y\ x)$

Algoritmo de inferencia

Ejercicio

Dada la siguiente extensión al conjunto de términos para el cálculo λ con listas:

$$M ::= \dots | map_{\sigma,\tau} | foldr_{\sigma,\tau}$$

La modificación al sistema de tipos es la introducción de dos axiomas de tipado para $map_{\sigma,\tau}$ y $foldr_{\sigma,\tau}$:

$$\mathbb{W}(map) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \triangleright map_{X_1,X_2} : (X_1 \to X_2) \to [X_1] \to [X_2]$$

$$\mathbb{W}(foldr) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \triangleright foldr_{X_1,X_2} : (X_1 \to X_2 \to X_2) \to X_2 \to [X_1] \to X_2$$

siendo X_1 y X_2 variables de tipo frescas. Se asumen dadas las extensiones correspondientes para `Erase` y `mgu`. Usar el algoritmo $\mathbb{W}()$ con esta nueva extensión para tipar la siguiente expresión:

$$foldr\ map$$

Algoritmo de inferencia

$$\mathbb{W}(\mathit{foldr}\ \mathit{map}) = ??$$

$$\mathbb{W}(\mathit{foldr}) = \emptyset \triangleright \mathit{foldr}_{X_3,X_4} : (X_3 \to X_4 \to X_4) \to X_4 \to [X_3] \to X_4$$
$$\mathbb{W}(\mathit{map}) = \emptyset \triangleright \mathit{map}_{X_1,X_2} : (X_1 \to X_2) \to [X_1] \to [X_2]$$

$$S = MGU\{(X_3 \to X_4 \to X_4) \to X_4 \to [X_3] \to X_4 \stackrel{?}{=} ((X_1 \to X_2) \to [X_1] \to [X_2]) \to X_5\}$$

$$\longmapsto^1 \{X_3 \to X_4 \to X_4 \stackrel{?}{=} (X_1 \to X_2) \to [X_1] \to [X_2],\ X_4 \to [X_3] \to X_4 \stackrel{?}{=} X_5\}$$

$$\longmapsto^1 \{X_3 \stackrel{?}{=} X_1 \to X_2,\ X_4 \to X_4 \stackrel{?}{=} [X_1] \to [X_2],\ X_4 \to [X_3] \to X_4 \stackrel{?}{=} X_5\}$$

$$\longmapsto^4 \{X_4 \to X_4 \stackrel{?}{=} [X_1] \to [X_2],\ X_4 \to [X_1 \to X_2] \to X_4 \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_1 \to X_2 / X_3\}$$

$$\longmapsto^1 \{X_4 \stackrel{?}{=} [X_1],\ X_4 \stackrel{?}{=} [X_2],\ X_4 \to [X_1 \to X_2] \to X_4 \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_1 \to X_2 / X_3\}$$

$$\longmapsto^4 \{[X_1] \stackrel{?}{=} [X_2],\ [X_1] \to [X_1 \to X_2] \to [X_1] \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{[X_1] / X_4\} \circ \{X_1 \to X_2 / X_3\}$$

$$\longmapsto^1 \{X_1 \stackrel{?}{=} X_2,\ [X_1] \to [X_1 \to X_2] \to [X_1] \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{[X_1] / X_4\} \circ \{X_1 \to X_2 / X_3\}$$

$$\longmapsto^4 \{[X_2] \to [X_2 \to X_2] \to [X_2] \stackrel{?}{=} X_5\} \mid \{X_2 / X_1\} \circ \{[X_1] / X_4\} \circ \{X_1 \to X_2 / X_3\}$$

$$\longmapsto^3 \{X_5 \stackrel{?}{=} [X_2] \to [X_2 \to X_2] \to [X_2]\} \mid \{X_2 / X_1\} \circ \{[X_1] / X_4\} \circ \{X_1 \to X_2 / X_3\}$$

$$\longmapsto^4 \{\} \mid \{[X_2] \to [X_2 \to X_2] \to [X_2] / X_5\} \circ \{X_2 / X_1\} \circ \{[X_1] / X_4\} \circ \{X_1 \to X_2 / X_3\}$$

Algoritmo de inferencia

$$\mathbb{W}(\mathit{foldr}\ \mathit{map}) = \emptyset \rhd \mathit{foldr}_{X_2 \to X_2, [X_2]}\ \mathit{map}_{X_2, X_2} : [X_2] \to [X_2 \to X_2] \to [X_2]$$

$$\mathbb{W}(\mathit{foldr}) = \emptyset \rhd \mathit{foldr}_{X_3, X_4} : (X_3 \to X_4 \to X_4) \to X_4 \to [X_3] \to X_4$$
$$\mathbb{W}(\mathit{map}) \ = \emptyset \rhd \mathit{map}_{X_1, X_2} : (X_1 \to X_2) \to [X_1] \to [X_2]$$

$$S = MGU\{(X_3 \to X_4 \to X_4) \to X_4 \to [X_3] \to X_4 \doteq ((X_1 \to X_2) \to [X_1] \to [X_2]) \to X_5\}$$
$$= \{X_2 \to X_2 \,/X_3,\ [X_2] \,/X_4,\ X_2 \,/X_1,\ [X_2] \to [X_2 \to X_2] \to [X_2] \,/X_5\}$$

Extensión del algoritmo de inferencia

Listas

$$\sigma ::= \ldots \mid [\sigma]$$

$$M, N, O ::= \ldots \mid [\,]_\sigma \mid M :: N \mid \mathit{Case}\ M\ \mathit{of}\ [\,] \rightsquigarrow N\ ; h :: t \rightsquigarrow O$$

$$\frac{}{\Gamma \triangleright [\,]_\sigma\ : [\sigma]} \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \Gamma \triangleright N : [\sigma]}{\Gamma \triangleright M :: N : [\sigma]}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : [\sigma] \quad \Gamma \triangleright N : \tau \quad \Gamma \cup \{h : \sigma, t : [\sigma]\} \triangleright O : \tau}{\Gamma \triangleright \mathit{Case}\ M\ \mathit{of}\ [\,] \rightsquigarrow N\ ; h :: t \rightsquigarrow O : \tau}$$

Extensión del algoritmo de inferencia

$\mathbb{W}([\,]) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \triangleright [\,]_X : [X]$ con X variable fresca

$\mathbb{W}(U :: V) \stackrel{\text{def}}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \triangleright S(M :: N) : S\tau$

$\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \triangleright M : \sigma$

$\mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \triangleright N : \tau$

$S = MGU\{\tau \stackrel{?}{=} [\sigma]\} \cup \{\sigma_1 \stackrel{?}{=} \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_1, x : \sigma_2 \in \Gamma_2\}$

Extensión del algoritmo de inferencia

$\mathbb{W}([\,]) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \rhd [\,]_X : [X]$ con X variable fresca

$\mathbb{W}(U :: V) \stackrel{\text{def}}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \rhd S(M :: N) : S\tau$

$\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \rhd M : \sigma$

$\mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \rhd N : \tau$

$S = MGU\{\tau \stackrel{?}{=} [\sigma]\} \cup \{\sigma_1 \stackrel{?}{=} \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_1, x : \sigma_2 \in \Gamma_2\}$

$\mathbb{W}(\mathit{Case}\ U\ \mathit{of}\ [\,] \leadsto V\ ; h :: t \leadsto W) \stackrel{\text{def}}{=}$

$S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_{3'} \rhd S\,(\mathit{Case}\ M\ \mathit{of}\ [\,] \leadsto N\ ; h :: t \leadsto O) : S\tau$

$\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \rhd M : \sigma \qquad \mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \rhd N : \tau \qquad \mathbb{W}(W) = \Gamma_3 \rhd O : \rho$

$\tau_h = \begin{cases} \alpha \text{ si } h : \alpha \in \Gamma_3, \\ \text{var fresca si no} \end{cases} \qquad \tau_t = \begin{cases} \beta \text{ si } t : \beta \in \Gamma_3, \\ \text{var fresca si no} \end{cases}$

$\Gamma_{3'} = \Gamma_3 \ominus \{h, t\}$

$S = MGU(\{\sigma \stackrel{?}{=} [\tau_h],\ \rho \stackrel{?}{=} \tau,\ \tau_t \stackrel{?}{=} \sigma\} \cup \{\sigma_1 \stackrel{?}{=} \sigma_2 \mid x : \sigma_1 \in \Gamma_i,\ x : \sigma_2 \in \Gamma_j,\ i, j \in \{1, 2, 3'\}\})$

Dar el tipo de: $\mathit{Case}\ \text{succ}(0) :: x\ \mathit{of}\ [\,] \leadsto x\ ; x :: y \leadsto \text{succ}(x) :: [\,]$

Extensión del algoritmo de inferencia

Listas por comprensión

$$M ::= \ldots \mid [\ M \mid x \leftarrow M, M\ ]$$

Consideremos el Cálculo Lambda extendido con las listas por comprensión vistas en la práctica 4.

La regla de tipado es la siguiente:

$$\frac{\Gamma \cup \{x : \sigma\} \ \triangleright M : \tau \quad \Gamma \triangleright N : [\sigma] \quad \Gamma \cup \{x : \sigma\} \ \triangleright \ O : \mathsf{Bool}}{\Gamma \triangleright [\ M \mid x \leftarrow N, O\ ] : \ [\tau]}$$

Extensión del algoritmo de inferencia

Listas por Comprensión

$$\mathbb{W}([\ U \mid x \leftarrow V, W\ ]) \stackrel{\text{def}}{=} S\Gamma_{1'} \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_{3'}\ \triangleright S\,([\ M \mid X \leftarrow N, O\ ]) : S[\sigma_1]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{W}(U) &= \Gamma_1 \triangleright M : \sigma_1 \\
\mathbb{W}(V) &= \Gamma_2 \triangleright N : \sigma_2 \\
\mathbb{W}(W) &= \Gamma_3 \triangleright O : \sigma_3
\end{aligned}$$

$$\tau_{x1} = \begin{cases} \alpha \text{ si } x : \alpha \in \Gamma_1, \\ \text{var fresca si no} \end{cases} \qquad \tau_{x2} = \begin{cases} \beta \text{ si } x : \beta \in \Gamma_3, \\ \text{var fresca si no} \end{cases}$$

$$\Gamma_{1'} = \Gamma_1 \ominus \{x\} \qquad \Gamma_{3'} = \Gamma_3 \ominus \{x\}$$

$$\begin{aligned}
S = MGU(&\{\tau_{x1} \stackrel{?}{=} \tau_{x2},\ \sigma_2 \stackrel{?}{=} [\tau_{x1}],\ \sigma_3 \stackrel{?}{=} \text{Bool}\} \\
&\cup \{\rho_1 \stackrel{?}{=} \rho_2 \mid y : \rho_1 \in \Gamma_i,\ y : \rho_2 \in \Gamma_j,\ i, j \in \{1', 2, 3'\}\})
\end{aligned}$$

Dar el tipo de: $[\ \text{if } x \text{ then } \underline{0} \text{ else } \underline{1} \mid x \leftarrow \mathit{false} :: \text{iszero}(x) :: [\ ], \mathit{true}\ ]$

Fin

¿¿¿¿¿¿Preguntas??????