

Práctica N° 5 - Inferencia de tipos

Aclaraciones:

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

Gramáticas a tener en cuenta:

■ Términos **anotados**

$$M ::= x \mid \lambda x:\sigma.M \mid M M \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \\ \mid \text{zero} \mid \text{succ}(M) \mid \text{pred}(M) \mid \text{isZero}(M) \mid \mu x:\sigma.M$$

Donde la letra x representa un *nombre de variable* arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado $\mathfrak{X} = \{w, w_1, w_2, \dots, x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots, f, f_1, f_2, \dots\}$

■ Términos **sin anotaciones**

$$U ::= x \mid \lambda x.U \mid U U \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } U \text{ then } U \text{ else } U \mid \text{zero} \mid \text{succ}(U) \mid \text{pred}(U) \mid \text{isZero}(U) \mid \mu x.U$$

■ Tipos

$$\tau ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \tau \rightarrow \tau \mid X_n$$

Donde n es un número natural, de tal modo que X_n representa una *variable de tipos* arbitraria tomada de un conjunto $\mathfrak{T} = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$.

Nota: también podemos referirnos a las variables de tipos como *incógnitas*.

Ejercicio 1

Determinar qué expresiones son sintácticamente válidas y, para las que lo sean, indicar a qué gramática pertenecen (tipos, términos anotados o términos sin anotaciones).

- | | |
|---|--|
| I. $\lambda x:\text{Bool}.\text{succ}(x)$ | V. X_1 |
| II. $\lambda x.\text{isZero}(x)$ | VI. $X_1 \rightarrow (\text{Bool} \rightarrow X_2)$ |
| III. $X_1 \rightarrow \sigma$ | VII. $\lambda x: X_1 \rightarrow X_2. \text{if zero then True else zero succ(True)}$ |
| IV. $\text{erase}(f y)$ | VIII. $\text{erase}(\lambda f: \text{Bool} \rightarrow \text{s}.\lambda y: \text{Bool}.f y)$ |

Ejercicio 2

Determinar el resultado de aplicar la sustitución S a las siguientes expresiones

- | | |
|--|---|
| I. $S = \{X_1 := \text{Nat}\}$ | $S(\{x: X_1 \rightarrow \text{Bool}\})$ |
| II. $S = \{X_1 := X_2 \rightarrow X_3, X_4 := \text{Bool}\}$ | $S(\{x: X_4 \rightarrow \text{Bool}\}) \vdash S(\lambda x: X_1 \rightarrow \text{Bool}.x): S(\text{Nat} \rightarrow X_2)$ |

Ejercicio 3

Unir con flechas los tipos que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* (“most general unifier”).

$X_1 \rightarrow X_2$	Nat	$X_2 \rightarrow \text{Bool}$	$X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5$
X_1	$\text{Nat} \rightarrow \text{Bool}$	$(\text{Nat} \rightarrow X_2) \rightarrow \text{Bool}$	$\text{Nat} \rightarrow X_2 \rightarrow \text{Bool}$

Ejercicio 4

Decidir, utilizando el método del árbol, cuáles de las siguientes expresiones son tipables. Mostrar qué reglas y sustituciones se aplican en cada paso y justificar por qué no son tipables aquéllas que fallan.

- | | |
|--|--|
| I. $\lambda z. \text{if } z \text{ then zero else succ}(\text{zero})$ | V. $\text{if True then } (\lambda x. \text{zero})\text{zero else } (\lambda x. \text{zero})\text{False}$ |
| II. $\lambda y. \text{succ}((\lambda x. x) y)$ | VI. $(\lambda f. \text{if True then } f\text{zero else } f \text{ False}) (\lambda x. \text{zero})$ |
| III. $\lambda x. \text{if isZero}(x) \text{ then } x \text{ else (if } x \text{ then } x \text{ else } x)$ | VII. $\lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } z \text{ then } y \text{ else succ}(x)$ |
| IV. $\lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then } y \text{ else succ}(\text{zero})$ | |

Ejercicio 5 ★

Utilizando el árbol de inferencia, inferir el tipo de las siguientes expresiones o demostrar que no son tipables. En cada paso donde se realice una unificación, mostrar el conjunto de ecuaciones a unificar y la sustitución obtenida como resultado de la misma.

- | | |
|--|---|
| ■ $\lambda x. \lambda y. \lambda z. z x y z$ | ■ $\lambda x. (\lambda x. x)$ |
| ■ $\lambda x. x (w (\lambda y. w y))$ | ■ $\lambda x. (\lambda y. y)x$ |
| ■ $\lambda x. \lambda y. xy$ | ■ $(\lambda z. \lambda x. x (z (\lambda y. z))) \text{ True}$ |
| ■ $\lambda x. \lambda y. yx$ | |

Ejercicio 6 (Números de Church)

Indicar tipos σ y τ apropiados de modo que los términos de la forma $\lambda y : \sigma. \lambda x : \tau. y^n(x)$ resulten tipables para todo n natural. El par (σ, τ) debe ser el mismo para todos los términos. Observar si tienen todos el mismo tipo. Notación: $M^0(N) = N, M^{n+1}(N) = M(M^n(N))$. *Sugerencia:* empezar haciendo inferencia para $n = 2$ – es decir, calcular $\mathbb{W}(\lambda y. \lambda x. y(yx))$ – y generalizar el resultado.

Ejercicio 7

- Utilizar el algoritmo de inferencia sobre la siguiente expresión: $\lambda y. (x y) (\lambda z. x_2)$
- Una vez calculado, demostrar (utilizando chequeo de tipos) que el juicio encontrado es correcto.
- ¿Qué ocurriría si x_2 fuera x ?

Ejercicio 8

Tener en cuenta el tipo de los pares definido como: $\tau ::= \dots \mid \tau \times \tau$

Con expresiones nuevas definidas como: $M ::= \dots \mid \langle M, M \rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$

Y las siguientes reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \sigma} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \tau}$$

Se extiende el algoritmo \mathbb{W} con las siguientes reglas:

$\mathbb{W}(\langle U_1, U_2 \rangle) \stackrel{def}{=} ST_1 \cup ST_2 \vdash S\langle M, N \rangle : S(\sigma \times \tau)$
donde:

- $\mathbb{W}(U_1) = \Gamma_1 \vdash M : \sigma$
- $\mathbb{W}(U_2) = \Gamma_1 \vdash N : \tau$
- $S = \text{mgu } \{\rho \stackrel{?}{=} \phi \mid x : \rho \in \Gamma_1 \wedge x : \phi \in \Gamma_2\}$

$\mathbb{W}(\pi_1(U)) \stackrel{def}{=} ST \vdash S\pi_1(M) : S\sigma$
donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \vdash M : \rho$
- $S = \text{mgu } \{\rho \stackrel{?}{=} \sigma \times \tau\}$

$\mathbb{W}(\pi_2(U)) \stackrel{def}{=} ST \vdash S\pi_2(M) : S\tau$
donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \vdash M : \rho$
- $S = \text{mgu } \{\rho \stackrel{?}{=} \sigma \times \tau\}$

- I. Tipar la expresión $(\lambda f. \langle f, \underline{2} \rangle) (\lambda x. x \ \underline{1})$ utilizando la versión extendida del algoritmo.
- II. Intentar tipar la siguiente expresión utilizando la versión extendida del algoritmo.
 $(\lambda f. \langle f \ \underline{2}, f \ \text{True} \rangle) (\lambda x. x)$
Mostrar en qué punto el algoritmo falla y por qué motivo.

Ejercicio 9 ★

Se extienden el Cálculo Lambda y algoritmo de inferencia para soportar uniones disjuntas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tau &::= \dots \mid \tau + \tau \\ M &::= \dots \mid \text{left}_\tau(M) \mid \text{right}_\tau(M) \mid \text{case } M \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow M \end{aligned}$$

$$\mathbb{W}(\text{left}(U)) \stackrel{def}{=} \Gamma \vdash \text{left}_X(M) : \sigma + X$$

donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \vdash M : \sigma$
- X variable fresca.

$$\mathbb{W}(\text{right}(U)) \stackrel{def}{=} \Gamma \vdash \text{right}_X(M) : X + \tau$$

donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma \vdash M : \tau$
- X variable fresca.

$$\mathbb{W}(\text{case } U_1 \text{ of left}(x) \rightsquigarrow U_2 \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow U_3) \stackrel{def}{=} ST_1 \cup ST_{2'} \cup ST_{3'} \vdash S(\text{case } M_1 \text{ of left}(x) \rightsquigarrow M_2 \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow M_3) : S\tau_2$$

donde:

- $\mathbb{W}(U_1) = \Gamma_1 \vdash M_1 : \tau_1$
- $\mathbb{W}(U_2) = \Gamma_2 \vdash M_2 : \tau_2$
- $\mathbb{W}(U_3) = \Gamma_3 \vdash M_3 : \tau_3$
- $\tau_x = \begin{cases} \alpha \text{ si } x : \alpha \in \Gamma_2 \\ \text{Variable fresca en otro caso} \end{cases}$
- $\tau_y = \begin{cases} \beta \text{ si } y : \beta \in \Gamma_3 \\ \text{Variable fresca en otro caso} \end{cases}$
- $\Gamma_{2'} = \Gamma_2 \ominus \{x\}$
- $\Gamma_{3'} = \Gamma_3 \ominus \{y\}$
- $S = \text{mgu } (\{\tau_1 \stackrel{?}{=} \tau_x + \tau_y, \tau_2 \stackrel{?}{=} \tau_3\} \cup \{\rho \stackrel{?}{=} \sigma \mid z : \rho \in \Gamma_i \wedge z : \sigma \in \Gamma_j \wedge i, j \in \{1, 2', 3'\}\})$

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

- I. $\text{case left}(\underline{1}) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow \text{True}$
- II. $\text{case right}(z) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$
- III. $\text{case right}(\text{zero}) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$
- IV. $\text{case } x \text{ of left}(x) \rightsquigarrow \text{isZero}(x) \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$
- V. $\text{case left}(z) \text{ of left}(x) \rightsquigarrow z \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$
- VI. $\text{case } z \text{ of left}(x) \rightsquigarrow z \parallel \text{right}(y) \rightsquigarrow y$

Ejercicio 10

Se extienden el Cálculo Lambda y algoritmo de inferencia para soportar listas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tau &::= \dots \mid [\tau] \\ M &::= \dots \mid []_\tau \mid M :: M \mid \text{foldr } M \text{ base} \hookrightarrow M; \text{rec}(h, r) \hookrightarrow M \end{aligned}$$

$$\mathbb{W}([]) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \vdash []_X : [X] \quad \text{con } X \text{ variable fresca}$$

$$\mathbb{W}(U :: V) \stackrel{\text{def}}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \vdash S(M :: N) : S\tau$$

donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \vdash M : \sigma$
- $\mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \vdash N : \tau$
- $S = \text{mgu}(\{\tau \stackrel{?}{=} [\sigma]\} \cup \{\rho \stackrel{?}{=} \phi \mid x : \rho \in \Gamma_1 \wedge x : \phi \in \Gamma_2\})$

$$\mathbb{W}(\text{foldr } U \text{ base} \hookrightarrow V; \text{rec}(h, r) \hookrightarrow W) \stackrel{\text{def}}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \cup S\Gamma_{3'} \vdash S(\text{foldr } M \text{ base} \hookrightarrow N; \text{rec}(h, r) \hookrightarrow O) : S\sigma_2$$

donde:

- $\mathbb{W}(U) = \Gamma_1 \vdash M : \sigma_1$
- $\mathbb{W}(V) = \Gamma_2 \vdash N : \sigma_2$
- $\mathbb{W}(W) = \Gamma_3 \vdash O : \sigma_3$
- $\Gamma_{3'} = \Gamma_3 \ominus \{h, r\}$
- $S = \text{mgu}(\{\sigma_1 \stackrel{?}{=} [\tau_h], \sigma_2 \stackrel{?}{=} \sigma_3, \sigma_3 \stackrel{?}{=} \tau_r\} \cup \{\rho \stackrel{?}{=} \sigma \mid x : \rho \in \Gamma_i \wedge x : \sigma \in \Gamma_j \wedge i, j \in \{1, 2, 3'\}\})$
- $\tau_h = \begin{cases} \alpha & \text{si } h : \alpha \in \Gamma_3, \\ \text{variable fresca} & \text{si no} \end{cases}$
- $\tau_r = \begin{cases} \beta & \text{si } r : \beta \in \Gamma_3, \\ \text{variable fresca} & \text{si no} \end{cases}$

Utilizando esta extensión del algoritmo, encontrar los juicios de tipado más generales para los siguientes términos o indicar por qué no es posible:

- I. $\text{foldr } x :: [] \text{ base} \hookrightarrow []; \text{rec}(h, r) \hookrightarrow \text{isZero}(h) :: r$
- II. $\text{foldr } (\lambda x. \text{succ}(x)) :: [] \text{ base} \hookrightarrow []; \text{rec}(x, r) \hookrightarrow \text{if } p \text{ then } x :: r \text{ else } r$
- III. $\text{foldr } x \text{ base} \hookrightarrow x; \text{rec}(h, r) \hookrightarrow \text{isZero}(h) :: r$
- IV. $\text{foldr } x \text{ base} \hookrightarrow \text{True}; \text{rec}(h, x) \hookrightarrow x$