KÜMELER VE KÜME İŞLEMLERİ

DR. ZEYNEP BANU ÖZGER

İÇERİK

1. Kümeler
2. Venn Diyagramları
3. Alt Küme
4. Cartesian Product
5. Küme İşlemleri
6. Genelleştirilmiş Birleşim ve Kesişim

KÜME

- Küme; nesneleri gruplandırmak için kullanılan yapılardır.
  - Ör: 1-10 arasındaki tek sayılar kümesi: X={1,3,5,7,9}
- Aynı kümedeki nesneler **genellikle** benzer özelliklerdedir.
- Ayrık matematikte, ayrık yapıların oluşturulmasında kullanılır
- Notasyon olarak genellikle;
  - Büyük harfler küme isimlerini,
  - Küçük harfler ise küme elemanlarını gösterir.
- Bir kümeyi tanımlarken,
  - Eğer küme sonlu ve gösterilebilir sayıda eleman içeriyorsa,
    - Ör: 9-20 arasındaki çift sayılar: {10,12,14,16,18}
  - Kümenin eleman sayısı listelenebilir sayıda değilse,
    - Ör: 10’dan büyük çift sayılar: $\{x \in Z^{+}, x \bmod 2 = 0 \ ve \ x > 10\}$

KÜME

- Matematikte tanımlı bazı kümeler:
  - Doğal sayılar: N={0,1,2,3,…}
  - Tam sayılar: Z={…,-2,-1, 0 ,1 ,2 ,3 …}
  - Pozitif tamsayılar: Z^+={1, 2, 3 … }
  - Reel sayılar: R
  - Pozitif reel sayılar: R^+
  - Komplex sayılar: Q

Bilgisayar bilimlerinde 'veri türü' kavramı da küme teorisi üzerine kuruludur

KÜME

- **Aralık notasyonu;**
  - x∈ $[a,b] \rightarrow a \leq x \leq b$ KAPALI ARALIK
  - x∈ $(a,b] \rightarrow a < x \leq b$
  - x∈ $[a,b) \rightarrow a \leq x < b$
  - x∈ $(a,b) \rightarrow a < x < b$ AÇIK ARALIK

KÜME EŞİTLİĞİ

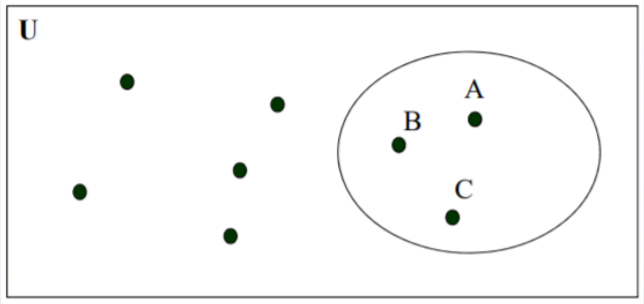
- Aynı elemanları içeren kümelere **eşit küme** denir.
  - Küme elemanlarının sıralaması aynı olmak zorunda değildir.
    - Ör: A={1, 3, 5} ve B={5, 3, 1} → A=B
  - Herhangi bir eleman birden fazla defa geçiyor olabilir:
    - Ör: A={1, 3, 5} ve B={1, 1, 1, 3, 5, 5} → A=B

KÜME

- **Özel Kümeler;**
  - **Boş küme;** Hiçbir elemanı olmayan kümelerdir. {} veya Ø ile gösterilir.
    - Örneğin; Karesi kendisinden küçük olan pozitif tamsayılar→ Boş küme
    - {Ø}= boş küme değildir. Tek elemanlı bir kümedir.
  - Evrensel Küme; Tüm nesnelerin bulunduğu kümedir. U / E ile gösterilir.

VEN DİYAGRAMLARI

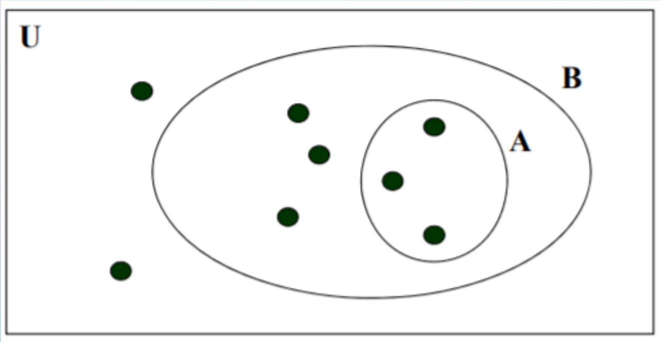
- Kümeleri görsel olarak ifade etmek için kullanılan şekillerdir.
- ‘V’ ile gösterilir.
- A= {A, B, C} ise



- Evrensel küme söz konusu olan objelere göre değişiklik gösterir.
  - Örneğin alfabedeki sesli harflerden oluşan kümeden bahsediyorsak,
    - A={a, e, ı, i, o, ö, u, ü} olur. A kümesinin evrensel kümesi ise alfabedeki 29 harfi de içerir.

ALT KÜME (SUBSET)

- Bir A kümesinin tüm elemanları aynı zamanda bir B kümesinin de elemanıysa A, B'nin alt kümesidir denir.
  - $\forall X (X \in A \rightarrow X \in B)$
- $A \subseteq$ B şeklinde gösterilir.
  - Örneğin; KSU Bilg. Müh öğrencileri kümesi, KSU öğrencileri kümesinin bir alt kümesidir.
- Bir A kümesinin bir B kümesinin alt kümesi olmadığını göstermek için, x ∈ A ve x ∉ B olacak şekilde bir karşıt örnek (counter example) gösterilmesi gerekir.
- A ve B kümeleri birbirine eşitse, her iki küme aynı zamanda diğerinin alt kümesidir.
  - $A \subseteq$ B
  - B ⊆ A



ALT KÜME (SUBSET)

- Boş küme (Ø) tüm kümelerin alt kümesidir.
- Boş olmayan her kümenin en az 2 alt kümesi vardır.
- **Öz alt Küme (Proper Set)**
  - Bir A kümesi bir B kümesinin alt kümesi ancak B kümesi A kümesinin alt kümesi değilse,
  - Yani A≠B ise A kümesi B kümesinin öz alt kümesidir denir.
  - $A \subset B$ şeklinde gösterilir.

KÜMENİN ELEMAN SAYISI (CARDINALITY)

- **Cardinality:**
  - S sonlu bir küme olmak üzere, S'in farklı elemanlarının sayısı o kümenin eleman sayısıdır.
  - |S| ile gösterilir.
  - Ör: A= {x|x>0, x<10, x mod 2=0}→ |A|=4
  - Ör: Z={3,3,3,1,1}→|Z|=2
  - Ör: S= {Ø, {Ø}, {Ø,{Ø}}}→|S|=3
  - Boş kümenin eleman sayısı (|Ø|) 0'dır.
- **Sonsuz (Infinite) Küme;** Sonlu sayıda elemanı olmayan kümelerdir.
  - Ör: Doğal sayılar kümesi
    - N={0, 1, 2, ….}

POWER SET

- Bir kümenin olası tüm alt kümelerine **power set** denir.
- S sonlu bir küme olmak üzere, S kümesinin power seti $\mathcal{P}(S)$ ile gösterilir.
- Ör: S={0, 1, 2} olmak üzere
  - $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$'dir
- Boş bir küme için power set;
  - 2 eleman olur.
    - $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. (Boş kümenin kendisi ve alt kümesi)

n elemanlı bir kümenin power setinin eleman sayısı 2^n'dir

CARTESIAN PRODUCTS

- n-Tuples;
  - Küme elemanları sırasızdır.
  - Bir kümenin elemanlarının sıralı olarak ifade edilmesine sıralı **n-tuples** denir.
    - Örneğin; Sıralı bir n-tüple:$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ise $a_1$kümenin 1. elemanı, a_n ise n. Elemanıdır.
  - 2 tane n tuple'ın eşit olması için **karşılıklı elemanlarının** aynı olması gerekir.
    - Örneğin; $n-tuple_1 = \{a, b\}$ ve $n-tuple_2 = \{c, d\}$ için
      - eğer a=c ve b=d ise $n-tuple_1 = n-tuple_2$ 'dir denir.

CARTESIAN PRODUCTS

- A ve B 2 küme olmak üzere, A ve B’nin cartesian product’ı A ve B’nin tüm sıralı çiftlerinin kümesidir.
  - A x B olarak gösterilir.
  - A x B={(a,b) | a ∈ A ∧ b ∈ B}
- Örneğin: A ve B 2 küme olmak üzere;
  - A:{1,2} ve B: {a,b,c} ise
  - AxB: {{1,a},{1,b},{1,c},{2,a},{2,b},{2,c}}’dir
  - BxA: {{a,1},{b,1},{c,1},{a,2},{b,2},{c,2}}’dir
- Bir cartesian product’ın eleman sayısı (cardinality), kümelerin eleman sayılarının çarpımıdır.
  - |AxB|=|A|*|B|

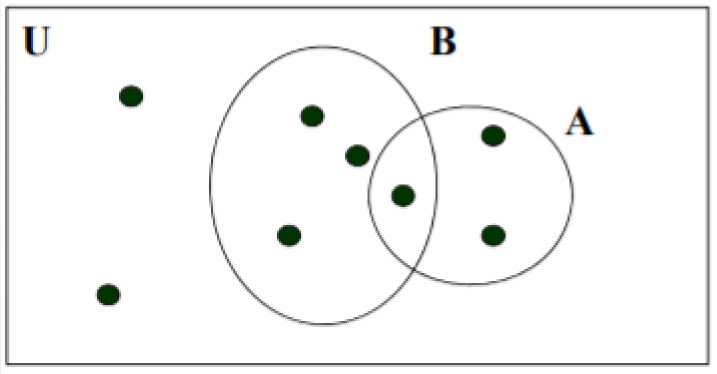
A veya B boş küme olmadığı sürece AxB≠BxA dır.

KÜME İŞLEMLERİ

- 2 veya daha fazla küme farklı kombinasyonlar ile bir araya getirilebilir.

BİRLEŞİM (UNION)

- A ve B 2 küme olmak üzere, A veya B’nin içerdiği elemanlardan oluşan kümeye A ve B kümelerinin birleşimi denir.
  - $A \cup B$ şeklinde gösterilir.
  - $A \cup B=\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

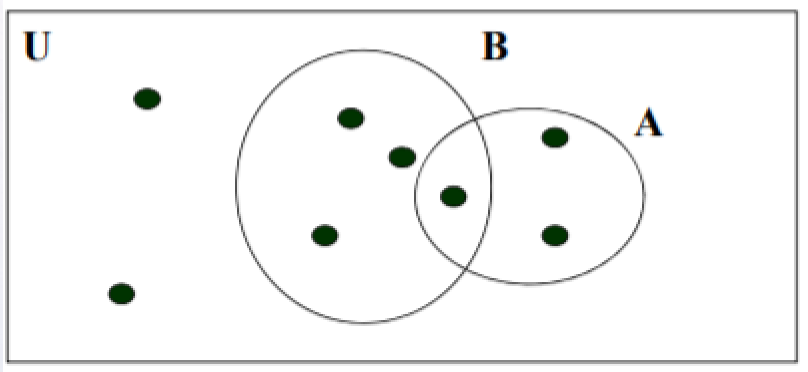


- $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$

- Örnek: A={1, 3, 5} ve B={1, 2, 3} ise
  - $A \cup B=\{1, 2, 3, 5\}$

KESİŞİM (INTERSECTION)

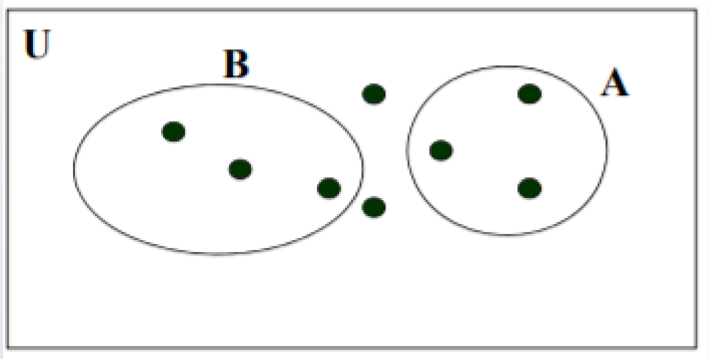
- A ve B 2 küme olmak üzere, A ve B’nin içerdiği elemanlardan oluşan kümeye A ve B kümelerinin kesişimi denir.
  - $A \cap B$ şeklinde gösterilir.
  - $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



- Örnek: $A=\{1, 3, 5\}$ ve $B=\{1, 2, 3\}$ ise
  - $A \cap B = \{1, 3\}$

AYRIK KÜME (DISJOINT SET)

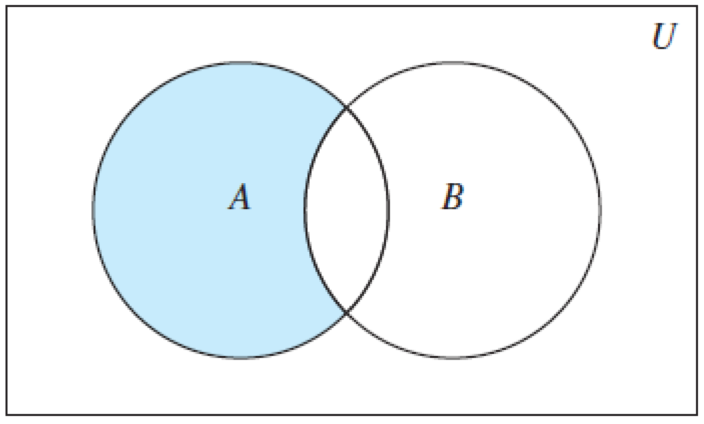
- A ve B 2 küme olmak üzere, A ve B kümelerinin kesişimi boş küme ise A ve B **ayrık kümelerdir** denir.



- Örnek: A={1, 2, 3, 6} ve B={4, 7, 8}
  - A∩B =Ø olduğundan A ve B ayrık kümelerdir.

İKİ KÜMENİN FARKI

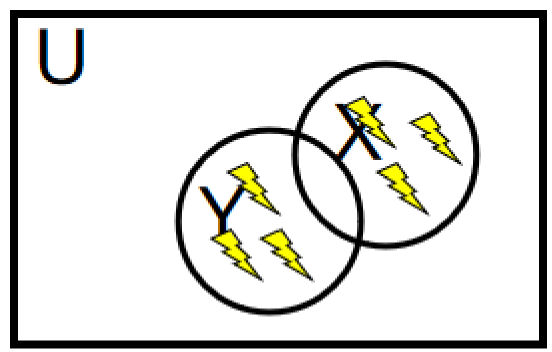
- A ve B 2 küme olmak üzere, A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlara
  - A kümesinin B'den farkı veya
  - B'nin A'ya göre tamamlayıcısı denir.
  - A-B vey A\B ile gösterilir.
  - A-B=$\{x | x \in A \wedge x \notin B\}$



- Örnek: A={1, 3, 5} ve B={1, 2, 3} ise
  - A∩B ={5}

Simetrik Fark

- A ve B 2 küme olmak üzere, 2 kümenin simetrik farkı; A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlar ve B kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanların birleşim kümesidir.
  - A-B ∪ B-A={x| x∈ $A \wedge x \notin B \vee$ x∈ $B \wedge x \notin A$}
  - XOR işlemi gibidir.



TÜMLEYEN

- U evrensel küme olmak üzere bir A kümesinin tümleyeni;
  - A'nın ^'ya göre tamamlayıcısıdır
  - $\bar{A}$ veya U-A ile gösterilir.
  - $\bar{A}$ ={x|x∈, $x \notin A$ }
- Örneğin;
  - A: 10'dan büyük pozitif tam sayılar ise
  - U: Tüm pozitif tam sayılardır.
  - $\bar{A}$ ={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} olur.

KÜME İŞLEMLERİNİN ÖZELLİKLERİ

Özdeşlik Yasası

- $A \cap U = A$
- $A \cup \emptyset = A$

Baskınlık yasası

- $A \cup U = U$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Etkisizlik Yasası

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Tamamlama (Complementation) Yasası

- $\bar{\bar{A}} = A$

KÜME İŞLEMLERİNİN ÖZELLİKLERİ

Değişim (Commutative) Yasası

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Birleşim (Associative) yasası

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Dağılma (Distributive) Yasası

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Morgan Kuralları

- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

KÜME İŞLEMLERİNİN ÖZELLİKLERİ

De Morgan Kuralları

- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

İçine alma (Absorption) Yasası

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

Tümleyen (Complement)

- $A \cup \bar{A} = U$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Genelleştirilmiş Birleşim ve Kesişim

$A_1, A_2, A_3,\ldots,A_n$ kümelerinin birleşimi

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup,\ldots,A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$A_1, A_2, A_3,\ldots,A_n$ kümelerinin kesişimi

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap,\ldots,A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$

BİLGİSAYARDA KÜME GÖSTERİMİ

- Küme elemanları bit dizileri ile temsil edilebilir.
- Örneğin;
  - A=[1,10] aralığında tek sayılar ve B=[1,10] aralığında çift sayılar olsun.
  - A ve B için evrensel küme: U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} dur.
  - Her bir elemanın bir bit ile temsil edildiği bir bit dizisinde
    - A=1010101010 ve B=0101010101
- Tümleyen:
  - A= 1010101010→$\bar{A}$=0101010101
- Birleşim:
  - $A \cup B = A \vee B = 1111111111$
- Kesişim:
  - $A \cap B = A \wedge B = 0000000000$