FONKSİYONLAR

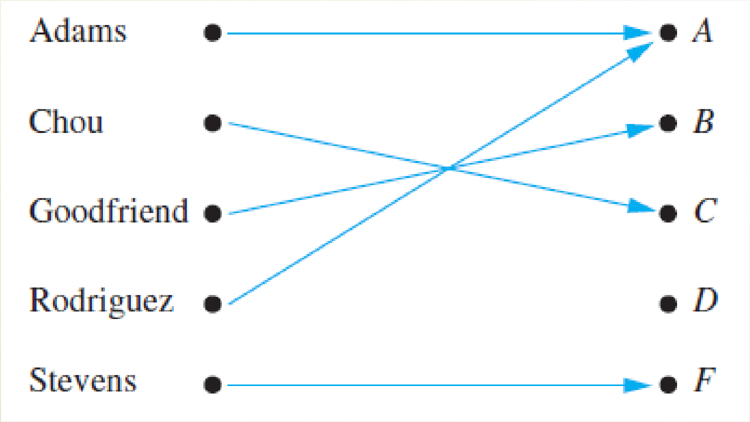
DR. ZEYNEP BANU ÖZGER

İÇERİK

1. Fonksiyonlar
2. Birebir Fonksiyonlar
3. Örten Fonksiyonlar
4. Bijective Fonksiyonlar
5. Ters Fonksiyon
6. Fonksiyonların Bileşkesi

FONKSİYONLAR

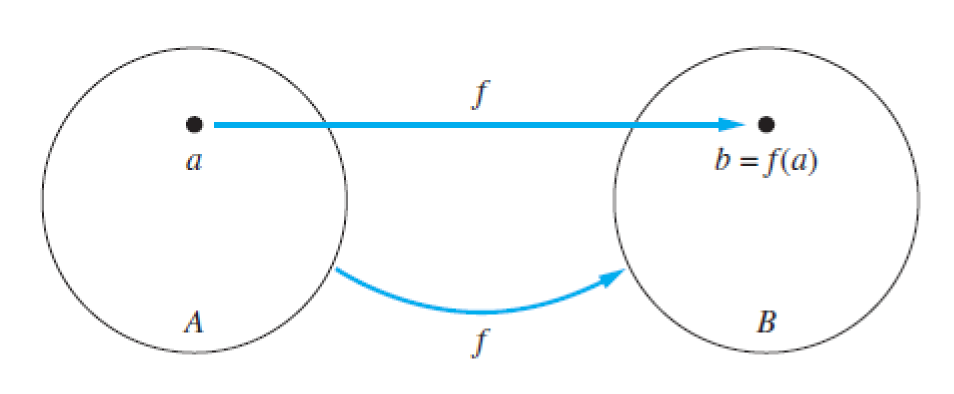
- A ve B boş olmayan 2 küme olmak üzere, A'dan B'ye tanımlanmış bir f fonksiyonu, B'nin her bir elemanının A'nın bir elemanına atanmasıdır.
  - f(a)=b şeklinde tanımlanır.



- Fonksiyonlar formüller ile gösterilebilir.
  - f(x)=x+1 gibi

FONKSİYONLAR

- f; A’dan B’ye bir fonksiyon olmak üzere,
  - A’ya f fonksiyonunun tanım kümesi; **domain**,
  - B’ye de f’nin değer kümesi; **range** denir.
- f(a)=b ise; b’ye a’nın **görüntüsü (image),** a’ya da b’nin **öngörüntüsü (preimage)** denir.



Bir Fonksiyonun Tanım Ve Değer Kümesi Değiştirildiğinde Farklı Bir Fonksiyon Elde Edilir.

FONKSİYONLAR

- Fonksiyonlar tanım kümesinden, değer kümesine eşleştirmedir.
  - f:D→R
    - D:domain ve x∈D
    - R:range ve f(x) ∈R
- D’deki her bir eleman için benzersiz şekilde tanımlanmış bir f(x) elemanı vardır.
- $f_1$ve f_2 2 fonksiyon olmak üzere; $f_1 + f_2$ ve $f_1\ f_2$ de birer fonksiyondur.
  - Ör: $f_1 = x^2$ ve $f_2 = x - x^2$ ise
    - $f_1 + f_2 = x^2 + x - x^2$
    - $f_1\ f_2 = x^2(x - x^2)$

FONKSİYONLAR

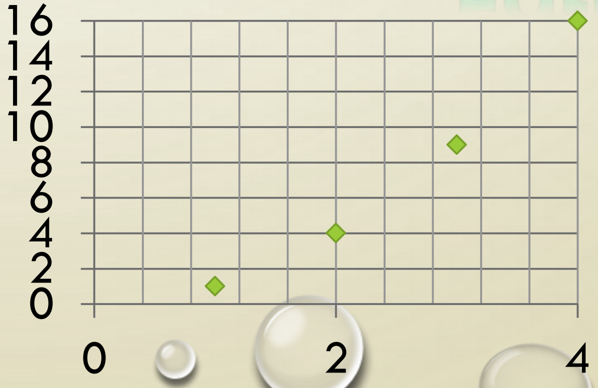
- Bir fonksiyon;
  - Formülle;
  - Doğruluk tablosuyla,
  - Grafikle veya
  - Kelimelerle gösterilebilir.

FONKSİYONLAR

- Örneğin;
- {(-2, 3), {4, 5), (6, -5), (-2, 3)}, şeklinde tanımlı bir bağıntı için;
  - Tanım kümesi; {-2,4,6} ve değer kümesi: {3,5,-5} dir
- f:Z→Z ve f(n)=3n
  - Tanım kümesi; tamsayılar.
  - Değer kümesi; tamsayılar
- h:{1,2,3,4}→N fonksiyonu için
  - doğruluk tablosu ile gösterim;

x	1	2	3	4
$h(x)$	3	6	9	12

Grafik ile gösterim



Grafik Gösteriminde Eğri Kullanılmaz

ÖRNEK

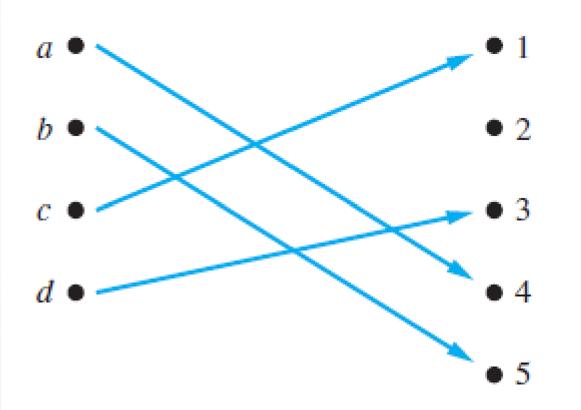
- f:{1,2,3,4,5}→R
  - f(0)=0
  - f(1)=1
  - f(2)=4
  - f(3)=9
  - f(4)=16
  - f(5)=25
  - f fonksiyonu nedir?

  - $f(x) = x^2$

Bire Bir (One to One-Injective) Fonksiyonlar

- f:X→Y olmak üzere;

Tanım Kümesindeki Her Bir Değerin Değer Kümesindeki Farklı Bir Karşılığı Var İse Fonksiyon Birebir Dir.



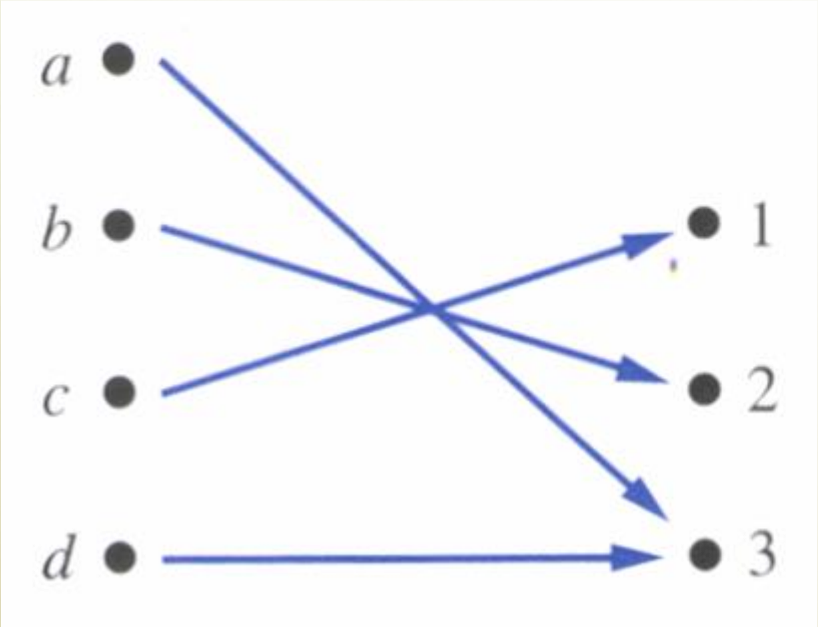
Bire Bir (One to One) Fonksiyonlar

- Örnek;
  - Tanım ve değer kümesi tamsayılar olmak üzere
  - f(x)=x^2 bire bir fonksiyon mudur?
    - f(1)=1
    - f(-1)=1

Tanım Kümesindeki Farklı Değerler İçin Değer Kümesinde Aynı Değere Eşleştiğinden Birebir Değildir.

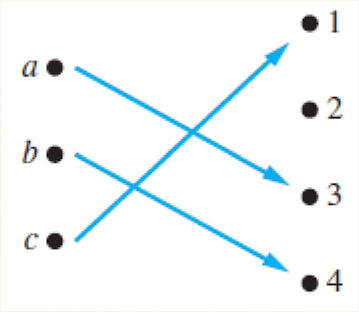
ÖRTEN (ONTO-Surjective) FONKSİYONLAR

- f: X→Y bir fonksiyon olmak üzere,
  - Y kümesindeki her bir eleman için X kümesinde en az bir eleman varsa f **örten** fonksiyondur.
- Niceleyiciler ile tanımlarsa;
  - $\forall y \exists x (f(x) = y)$

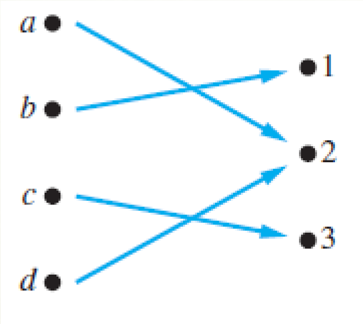


Örnek

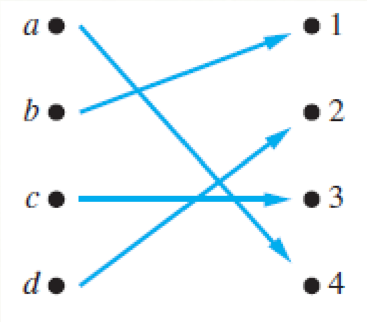
- Birebir? Örten?



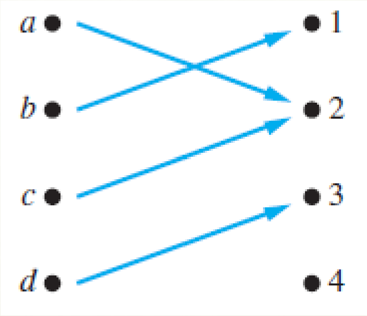
Birebir ama
Örten değil



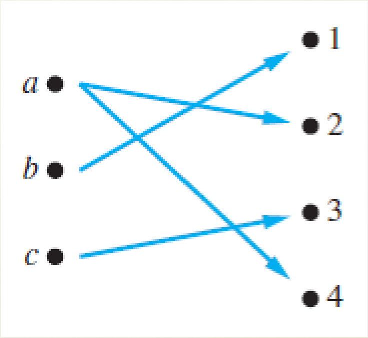
Örten ama
Birebir değil



Birebir
ve örten



Birebir veya
örten değil



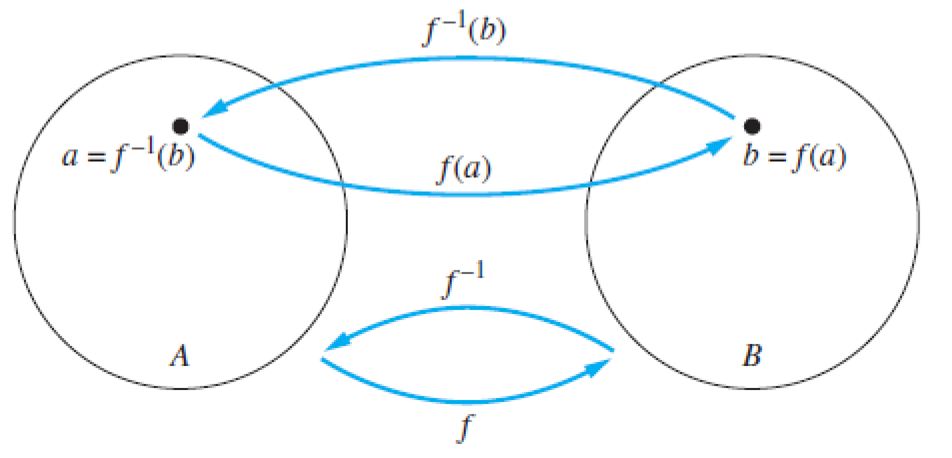
Fonksiyon değil

BIJECTIVE FONKSİYONLAR

- f:X→Y bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonu hem birebir hem de örten ise f bijective bir fonksiyondur.
  - Birebir olma şartı;
    - Tanım kümesinde ki her bir değer, değer kümesindeki tek bir değere eşlenecek.
  - Örten olma şartı;
    - Değer kümesindeki her bir değer için, tanım kümesinde bir karşılık olacak.
- Bijective ise;
  - f(x)=y ise
  - Farklı x değerleri için aynı y sonucunu üretmeyecek,
  - Her bir y değeri için bir f(x) fonksiyonu olacak

TERS (INVERSE) FONKSİYON

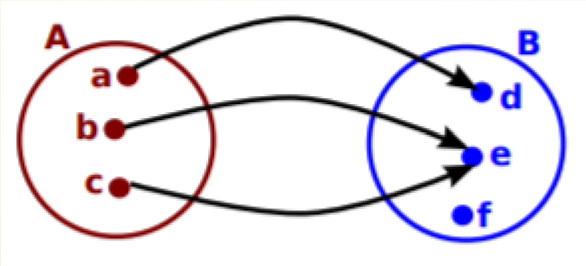
- f(x)=y bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun tersi;
  - f^{-1} ile gösterilir.
  - f(x)=y → f^{-1}(y)=x dir.
- Her fonksiyonun tersi bir fonksiyon değildir.
- Her bijective fonksiyonun tersi de bir fonksiyondur.



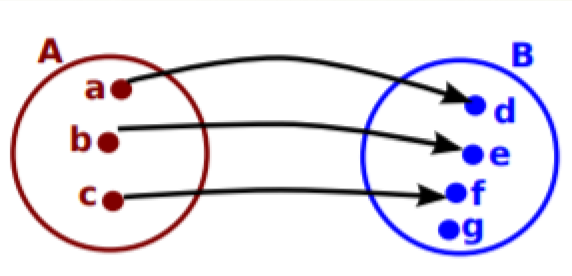
NEDEN?

TERS (INVERSE) FONKSİYON

- Bir f fonksiyonu birebir değilse,
- Tersi bir fonksiyon olamaz.



- Bir f fonksiyonu örten değilse,
- Tersi bir fonksiyon olamaz.



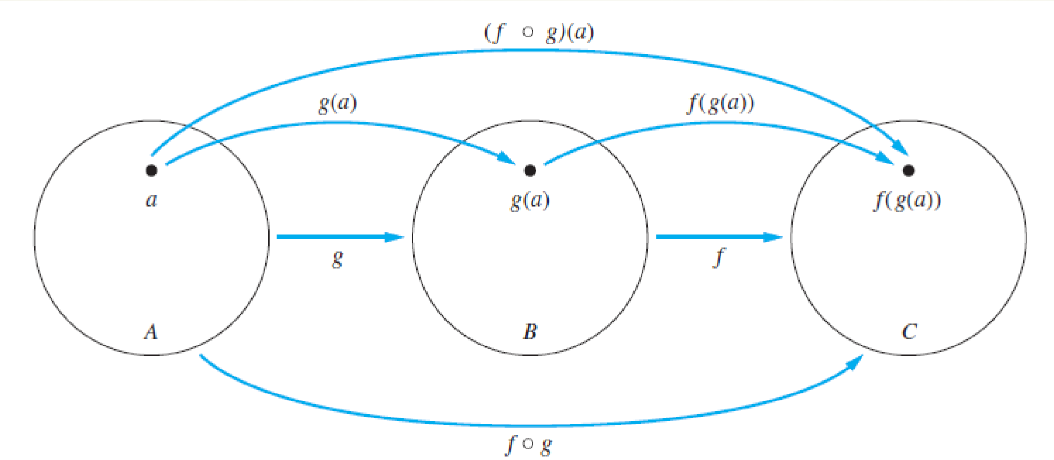
ÖRNEK

- f, {a, b, c} → {1,2,3}'e
  - f(a) = 2,f(b) = 3 ve f(c) = 1 olacak şekilde bir fonksiyon olsun.
  - f'nin tersi alınabilir mi? Eğer tersi alınabilirse tersi nedir?

- Birebir eşleme olduğu için alınabilir.
- f^{-1} (1) = c, f^{-1} (2) = a ve f^{-1}(3) = b'dir.

FONKSİYONLARIN BİLEŞKESİ

- g: A→B ve f: B→C olmak üzere f ve g fonksiyonlarının bileşkesi;
  - f o g ile gösterilir ve
  - (f o g) (a)=f(g(a)) şeklinde tanımlanır.
- Örneğin;
  - f(x)=3x+5 ve g(x)=$x^2 - 1$ ise
  - (f o g) (x)=f(g(x))=3*($x^2 - 1$)+5



FONKSİYONLARIN BİLEŞKESİ

- Fonksiyon bileşkesinin birleşim özelliği vardır;
  - f o (g o h)= (f o g) o h
- Fonksiyon bileşkesinin değişim özelliği yoktur.
  - f o g ≠ g o h

Fonksiyonun Tersinin Bileşkesi

- Bir fonksiyonun
  - Kendisiyle tersinin veya
  - Tersiyle kendisinin bileşkesi birim fonksiyonu verir.