# BOOLE CEBRİ

DR. ZEYNEP BANU ÖZGER

# BOOLE CEBRİ

- **Bilgisayar ve diğer elektronik cihazlardaki devrelerin 2 farklı durumu vardır; 0 veya 1.**

- **Bir devrenin çalışması, bir girdi için bir çıkış değeri üreten boolean bir fonksiyon olarak tanımlanabilir.**

- **Bir devre kurmanın ilk adımı Boole işlevini Boole cebirinin temel işlemleri kullanılarak oluşturulan bir ifade ile göstermektir.**

# BOOLE CEBRİ

- Bilgisayarlar ve elektronik devreler ikili sayı sistemini kullanır.
- İkili sistemde; sayılar 0 ve 1'dir.
- Boole cebrinde işlem ve kurallar {0,1} kümesi ile tanımlanır.
- Bir boole cebri; sınırlı, dağılma özellikli, her öğenin bir tümleyeni olan bir kafes yapısıdır.
- Yaygın olarak 3 işlem kullanılır; tümleyen alma, mantıksal toplama ve mantıksal çarpma.
- Mantıksal toplama= OR işlemine, mantıksal çarpma =AND

# BOOLEAN İŞLEMLER

- **Tümleyen Alma**
  - Complement alma.
  - Üst çizgi veya ¬ ile gösterilir.
  - $\overline{1}$=0 ve $\overline{0}$=1
- **Mantıksal Toplama;**
  - OR, ‘+’ veya ∨ ile gösterilir
  - 1+1=1, 1+0=1, 0+1=1, 0+0=0
- **Mantıksal Çarpma;**
  - AND, ‘·’ veya ∧ ile gösterilir.
  - $1 \cdot 1 = 1,\ 1 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot 1 = 0,\ 0 \cdot 0 = 0$

# BOOLEAN İŞLEMLER

- Örnek:
  - $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} = ?$
    - $1 \cdot 0$=0
    - 0+1=1
    - $\overline{(0+1)} = 0$
    - 0+0=0
- Boole cebri denklikleri birleşik önerme ile de ifade edilebilir.
  - $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} = 1 \Rightarrow (T \ \wedge F) \vee \neg(T \vee F) \equiv F$

# BOOLEAN İFADELER VE FONKSİYONLAR

- Bir B kümesinin elemanları {0,1} olmak üzere,
  - bir x değişkeni sadece B kümesinden değer alıyorsa, x değişkenine **mantıksal değişken** denir.
- $B^n = \{x_1, x_2, .., x_n | x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$ olmak üzere,
  - $f: B^n \longrightarrow B$ şeklinde tanımlı bir fonksiyona **n. dereceden mantıksal fonksiyon** denir.
- Mantıksal fonksiyonların değişkenler ve mantıksal işlemler ile gösterilmesine
  - **Boolean ifadeler (Boolean expressions)** denir.

# BOOLEAN İFADELER VE FONKSİYONLAR

- Örneğin F(x,y)=x$\bar{y}$ boolean bir fonksiyon olsun.
    - {0,1} kümesinden değer alır.
    - 2. dereceden mantıksal bir fonksiyondur.
    - Olası değerler; F(1,1)=0, F(1,0)=1, F(0,1)=0 ve F(0,0)=0 olur.
    - Tablo gösterimi;

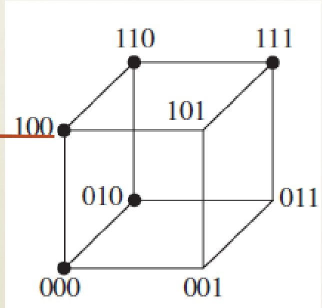
| $x$ | $y$ | $F(x,y)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

# BOOLEAN İFADELER VE FONKSİYONLAR

- **Örnek:** F(x,y,z)=xy+$\bar{z}$ boolean bir fonksiyon olsun. $(B^3)$

| x | y | z | xy | $\bar{z}$ | xy+$\bar{z}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

- **n-cube.**




Fonksiyon sonucu 1 olan köşeler

# BOOLEAN İFADELER VE FONKSİYONLAR

- $b_1, b_2, .., b_n \in B$ olmak üzere n değişkenli F ve G mantıksal ifadeleri **ancak ve ancak**
  - $F(b_1, b_2, .., b_n) = G(b_1, b_2, .., b_n)$ **durumunda eşdeğerdir.**
- **Yani aynı fonksiyonu temsil eden 2 farklı mantıksal ifadeye eşdeğer denir.**
- Örneğin; F(x,y)=xy+0 ve G(x,y)=xy·1 fonksiyonları eşdeğerdir.
- Bir mantıksal fonksiyonun tümleyeni (complement):
  - $\bar{F}(x_1, x_2, .., x_n) = \overline{F(x_1, x_2, .., x_n)}$
- F ve G n. Dereceden mantıksal fonksiyonlar olmak üzere;
  - Mantıksal toplam (F+G)=$(F + G)(x_1, x_2, .., x_n)$=$F(x_1, x_2, .., x_n)$+G$(x_1, x_2, .., x_n)$
  - Mantıksal çarpım: (FG)=$(FG)(x_1, x_2, .., x_n)$=$F(x_1, x_2, .., x_n)$G$(x_1, x_2, .., x_n)$

# BOOLEAN İFADELER VE FONKSİYONLAR

- 2. dereceden bir F fonksiyonunun elemanları ile 16 farklı mantıksal fonksiyon elde edilebilir.

| $x$ | $y$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ | $F_{15}$ | $F_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

- n. dereceden bir mantıksal fonksiyondan $2^{2^n}$ farklı mantıksal fonksiyon elde edilebilir.
-

| *Degree* | *Number* |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 16 |
| 3 | 256 |
| 4 | 65,536 |
| 5 | 4,294,967,296 |
| 6 | 18,446,744,073,709,551,616 |

# BOOLE CEBRİNİN ÖZELLİKLERİ

| | |
|---|---|
| Çift Eşlenik | • $\bar{\bar{x}} = x$ |
| Idempotence | • x+x=x<br>• x·x=x |
| Etkisiz Eleman | • x+0=x<br>• x· 1=x |
| Baskınlık | • x+1=1<br>• x·0=0 |
| Değişme | • x+y=y+x<br>• x·y=y·x |

# BOOLE CEBRİNİN ÖZELLİKLERİ

## Birleşme
- x+(y+z)=(x+y)+z
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

## Dağılma
- x+yz=(x+y)(x+z)
- x(y+z)=xy+xz

## De Morgan
- $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
- $\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$

## Birim Özelliği
## Sıfır Özelliği
- x+$\bar{x}$=1
- x· $\bar{x}$=0

## Absorption
- x+(xy)=x
- x(x+y)=x

# DUALİTE PRENSİBİ

- Boolean bir ifadenin duali,
  - toplam ve çarpımların birbirleri ile
  - 0 ve 1'leri de birbirleri ile yer değiştirmesi ile elde edilir.
- $F^d$ ile gösterilir.
- Örnek:
  - x(y+0) →x+(y·1)'dir
  - $\bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} + z)$ →$(\bar{x} + 0) \cdot (\bar{y} \cdot z)$

- Boole cebri binary operatörler ile de gösterilebilir.

  - Baskınlık yasası: $\begin{cases} x \vee 0 = x \\ x \wedge 1 = x \end{cases}$

  - Tümleyen yasası: $\begin{cases} x \vee \bar{x} = 1 \\ x \wedge \bar{x} = 0 \end{cases}$

  - Birleşme yasası: $\begin{cases} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \end{cases}$

  - Değişme yasası: $\begin{cases} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{cases}$

  - Dağılma yasası: $\begin{cases} x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{cases}$

# MANTIKSAL FONKSİYONLARIN GÖSTERİMİ

- **Mantıksal bir fonksiyon;**
  - **$\cdot$, + ve tümleyen işleçleri ile mantıksal bir ifadeye dönüştürülebilir.**
  - **İndirgenerek daha küçük değişken kümeleri ile temsil edilebilir.**
- Amaç, mantıksal fonksiyonu ifade edecek mantıksal ifadenin bulunmasıdır.
- **Örneğin,** F(x,y,z) ve G(x,y,z) fonksiyonlarının değerleri tabloda verilmiştir. Buna göre
  - F fonksiyonu mantıksal çarpım işlemi ile ifade edilebilir.
    - $x \cdot \bar{y} \cdot z$.
  - G fonksiyonu 2 mantıksal çarpımın toplamı ile elde edilebilir.
    - $xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$.

| $x$ | $y$ | $z$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# MANTIKSAL FONKSİYONLARIN GÖSTERİMİ

- Bir **sabit (literal)** bir mantıksal değişken veya onun tümleyenidir.
- **Minterm** ; $y_i = x_i \; veya \; y_i = \overline{x_i}$ olmak üzere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mantıksal değişkenlerinin mantıksal çarpımıdır $(y_1 y_2 .. y_n)$
- Yani bir minterm n sabitin çarpımıdır.
- Bir minterm'ün değerinin 1 olabilmesi için tüm sabitlerin değerinin 1 olması gerekir.
- Örneğin; $x_1 = x_3 = 0 \; ve \; x_2 = x_4 = x_5 = 1$ olmak üzere değeri 1 olan minterm:
  - $\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5$
- $x_1, x_2\,, x_3$ gibi 3 değişken için 8 farklı minterm vardır.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1x_2x_3$ | $x_1x_2\bar{x}_3$ | $x_1\bar{x}_2x_3$ | $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ |
| $\bar{x}_1x_2x_3$ | $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3.$ |

# MANTIKSAL FONKSİYONLARIN GÖSTERİMİ

- Minterm bitlerle de ifade edilebilir:
    - Örneğin; $m_{10110} = x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^1 x_5^0 = x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5}$

- Bir fonksiyonun mintermlerin toplamı ile ifade edilmesine **çarpımların kanonik toplam formu (sum of products expansion)** veya **ayıran normal form (disjunctive normal form)** denir.

- Mantıksal bir fonksiyonu çarpımların toplamı şeklinde ifade edebilmenin 2 yolu vardır.
    - Boole cebrinin özellikleri
    - Tablo.

# MANTIKSAL FONKSİYONLARIN GÖSTERİMİ

- **Örnek:** F(x,y,z)=(x+y)$\bar{z}$ ifadesini genişletilmiş çarpımlar toplamı olarak ifade ediniz.
  - F fonksiyonu 3 durumda 1 değerini almıştır:
    - x=y=1 ve z=0→xy$\bar{z}$
    - x=1 ve y=z=0→x$\bar{y}\bar{z}$
    - x=z=0 ve y=1→ $\bar{x}y\bar{z}$
    - xy$\bar{z}$+x$\bar{y}\bar{z}$+$\bar{x}y\bar{z}$

| x | y | z | x+y | $\bar{z}$ | (x+y) · $\bar{z}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

# MANTIKSAL FONKSİYONLARIN GÖSTERİMİ

- **Örnek:** $x_1x_2(x_1+x_3)$ şeklindeki mantıksal ifadeyi disjunctive normal form ile yazarsak:

| | | |
|---|---|---|
| $x_1x_2(x_1+x_3) =$ | $x_1x_2x_1 + x_1x_2x_3$ | Dağılma özelliği |
| | $x_1x_1x_2 + x_1x_2x_3$ | Değişme Özelliği |
| | $x_1x_2 + x_1x_2x_3$ | Idempotence özelliği |
| | $x_1x_21 + x_1x_2x_3$ | Etkisiz eleman özelliği |
| | $x_1x_2(x_3+\overline{x_3}) + x_1x_2x_3$ | Değişme özelliği |
| | $x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2x_3$ | Dağılma Özelliği |
| | $x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3}$ | Değişme ve idempotence |

# MINTERM ÖRNEK

- **Örnek:** $f(x_1 x_2) = x_1 + x_2$ mantıksal fonksiyonunun disjunctive normal form ile yazarsak:

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1 x_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

$$f(x_1, x_2) = 0\bar{x}_1\bar{x}_2 + 1\bar{x}_1 x_2 + 1 x_1\bar{x}_2 + 1 x_1 x_2$$

$$= \bar{x}_1 x_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1 x_2$$

# MANTIKSAL FONKSİYONLARIN GÖSTERİMİ

- Mantıksal bir fonksiyon için mantıksal ifade,
  - Mantıksal toplamların çarpımı ile de elde edilebilir.
  - Bu işleme conjuntive normal form veya toplamların kanonik çarpım formu (product-of-sums expansion) de denir.
- Mantıksal $x_1, x_2, .., x_n$ değişkenlerinin maxtermi $y_1 + y_2 + .. + y_n$ toplamıdır.
- $y_i = x_i$ veya $y_i = \overline{x_i}$'dir.
- $y_1 + y_2 + .. + y_n$ maxtermi ancak ve ancak her bir $y_i$'nin değeri 0 ise 0 sonucunu verir.
- Maxtermler bitlerle de ifade edilebilir.
  - Örneğin:$m_{10110} = x_1^1 + x_2^0 + x_3^1 + x_4^1 + x_5^0 = x_1 + \overline{x_2} + x_3 + x_4 + \overline{x_5}$

# MANTIKSAL FONKSİYONLARIN GÖSTERİMİ

- **Örnek:** $f(x_1, x_2) = x_1(x_1 + x_2)$ mantıksal fonksiyonunu conjunctive normal formda yazarsak;

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 + x_2$ | $x_1(x_1 + x_2)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

→ Fonksiyon sonucunu 0 yapan değişken değerleri;

→ $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2$

→ $x_1 = 0\ ve\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + \overline{x_2}$

→ $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)(x_1 + \overline{x_2})$

**Conjunctive**

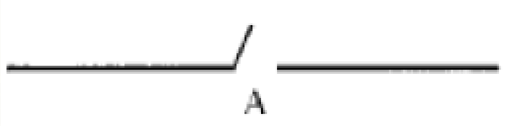
**formda 0 değerini verenler göz önüne alınır.**

# MINTERM vs MAXTERM

| Minterm | Maxterm |
|---|---|
| • Çarpımların toplam<br>• Disjunctive normal form<br>• Fonksiyon sonucunu 1 yapan | • Toplamların çarpımı<br>• Conjunctive normal form<br>• Fonksiyon sonucunu 0 yapan |

# ANAHTAR DEVRELERİ

- Anahtarın 2 durumu vardır: açık ve kapalı.
- Bir veya daha fazla anahtar içeren devrelere anahtar devresi denir.




- Anahtar devreleri bağlama şekline göre 2 şekilde gerçeklenebilir:
  1. Seri bağlama
  2. Paralel bağlama

# Seri Bağlama

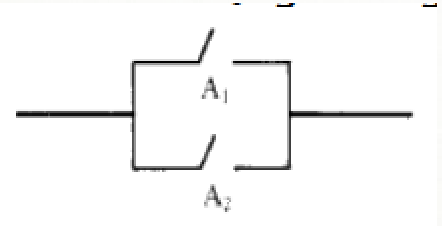
- Anahtarlar ard arda bağlanır


- Akımın ilerleyebilmesi için hattaki tüm anahtarların kapalı olması gerekir.
- Mantıksal çarpım (and) işlemi gibidir.
- $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1, x_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# Paralel Bağlama

- Anahtarlar paralel bağlı.



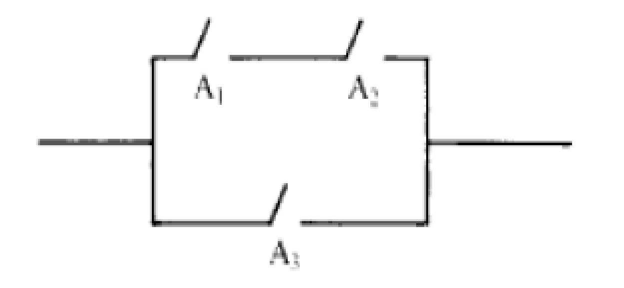

- Anahtarlardan en az biri açık olmalı.
- Mantıksal toplam (or) işlemi gibidir.
- $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

| $x_1$ | $x_2$ | $g(x_1, x_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

- n tane anahtardan oluşan bir devre için olası durumlar $x_1, x_2, .. x_n$ şeklinde n tane mantıksal durum ile ifade edilir.
    - $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonu ile gösterilir.
    - Bu fonksiyona **anahtarlama fonksiyonu** denir.

# ANAHTAR DEVRELERİ

- **Örnek:** Aşağıdaki devreyi ifade eden anahtarlama fonksiyonunu yazın.




- $x_1, x_2, x_3$ sırasıyla anahtarlar.
- $f(x_1, x_2) \rightarrow A_1\ ve\ A_2,\ f(x_3) \rightarrow A_3$ anahtarının durumunu gösteren fonksiyonlardır.
  - $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$
  - $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) + f(x_3)$
  - $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_3$

# MANTIKSAL KAPILAR

- Temel devre elemanlarına **kapı (gate)** denir.
- **Hafıza içermeyen bu devrelere kombinatoryel devre (combinational circuit) veya kapı ağları (gating networks) denir.**
- Kombinatöryel devrelerin oluşturulmasında kullanılan 3 kapı türü vardır;
  - NOT kapısı
  - AND kapısı
  - OR kapısı

# MANTIKSAL KAPILAR

## NOT

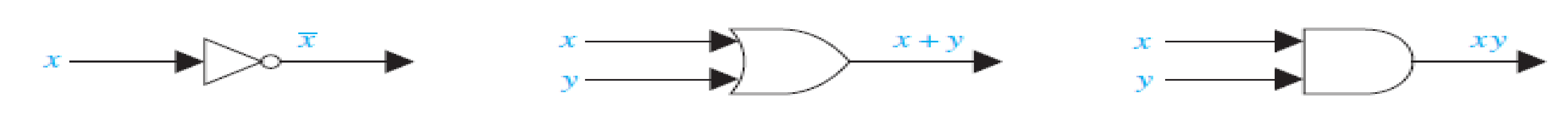
- Girdisi mantıksal bir değişkendir.
- Çıktısı; girdinin tümleyenidir.

## OR

- Girdisi, 2 veya daha fazla mantıksal değişkendir.
- Çıktısı, girdilerin mantıksal toplamıdır.

## AND

- Girdisi, 2 veya daha fazla mantıksal değişkendir.
- Çıktısı, girdilerin mantıksal çarpımıdır.



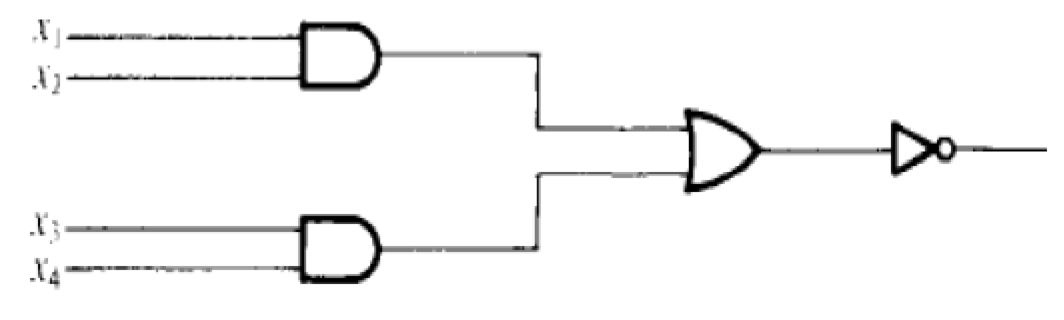

| $x$ | $z$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $x_1$ | $x_2$ | $z$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $x_1$ | $x_2$ | $z$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# MANTIKSAL KAPILAR

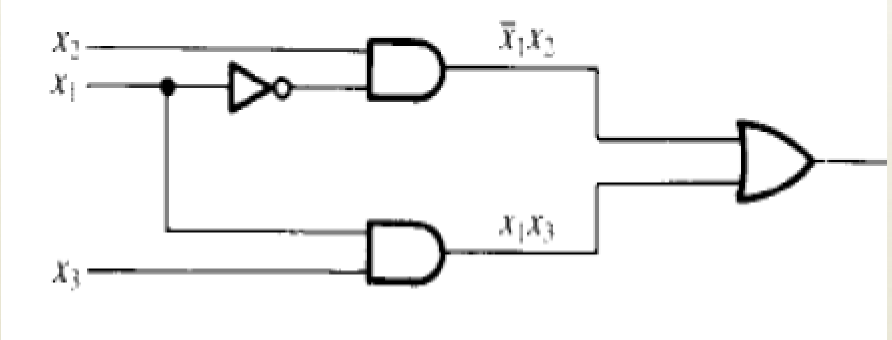
- **Örnek;** Aşağıdaki devrenin mantıksal ifadesini yazın:




$$f_1(x_1,x_2) = x_1x_2$$
$$f_2(x_3,x_4) = x_3x_4$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = f_1(x_1,x_2)+f_2(x_3,x_4)$$
$$f_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)}$$
$$f\left(x_1,x_2,x_{3,}x_4\right) = \overline{x_1x_2 + x_3x_4}$$

- **Örnek:** Aşağıdaki mantıksal ifadenin devresini çizin:

- $\overline{x_1}x_2 + x_1x_3$



# MANTIKSAL İFADELERİN SADELEŞTİRİLMESİ

- Bir kombinasyonel devrenin verimliliği, içerdiği kapıların sayısına ve düzenine bağlıdır.
- Mantıksal devrelerdeki eleman sayılarının, aynı işlemi yapacak şekilde, minimize edilmesi bir mühendislik problemidir.
- Örneğin: $F(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z$;

$$=(y + \bar{y})(xz)$$

$$=1 \cdot (xz) = xz$$

- Mantıksal ifadelerin indirgenmesi için 2 temel yöntem kullanılır:
  1. Karnaugh haritaları
  2. Quine-McCluskey Yöntemi

# MANTIKSAL İFADELERİN SADELEŞTİRİLMESİ

- 1960'ların başına kadar tek bileşenlerdi.
- En az sayıda kapının kullanılması= maliyeti azaltmak
- 1960'ların ortalarında, kapıları tek bir yonga üzerinde birleştirilebilir oldu.
- Bu yongalar ile düşük maliyetle daha karmaşık entegreler
- İndirgeme→ daha fazla devrenin aynı chip üzerinde bulunabilmesi
- Böylece devrelerin, outputu üretme süresi kısalmaktadır.

# MANTIKSAL İFADELERİN SADELEŞTİRİLMESİ

- Bir mantıksal ifadenin sadeleştirilmiş hali aşağıdaki kriterleri sağlamalıdır.
  1. Çarpımların toplamı.
  2. Daha az sayıda denk bir mantıksal ifade bulunmamalıdır.
  3. Aynı sayıda terime sahip olmalıdır.
- **Bir mantıksal ifade yukardaki kriterleri sağlıyorsa minimal formdadır.**
- Minimal formlar tek değildir.
- Minimal formu elde ederken;
  - Disjunctive normal form ile başla
  - Terimlerin sayısının azalt.
  - Değişkenlerin sayısını azalt.

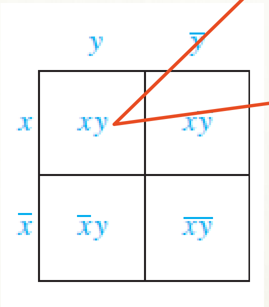
# Karnaugh Haritası Yöntemi

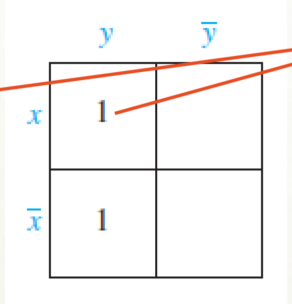
- Mintermlere eşdeğer olan en kısa ifade hesaplanır.
- Giriş değerlerinin alabileceği olası değerler bir tabloda gösterilir,
  - Çıkış olanlara 1 yazılır.
  - Bu tabloya K-Map denir.
- 1'ler arasında komşuluk incelemesi ile sadeleştirilir.
- Farklı sayıda mantıksal değişken= farklı harita
  - Örneğin; 2 mantıksal değişken içeren bir fonksiyonda 4 olası minterm vardır.
- Mantıksal ifadenin içerdiği minterm için hücre değeri 1'dir.
- Bir değişkenin farklı mintermleri temsil ediyorsa, bu hücrelere bitişik/komşu (adjacent) denir.

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | $xy$ | $x\bar{y}$ |
| $\bar{x}$ | $\bar{x}y$ | $\bar{x}\bar{y}$ |

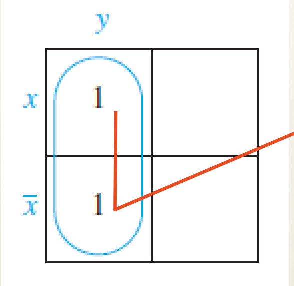
# Karnaugh Haritası Yöntemi

- **Örnek:** $f(x, y) = xy + \bar{x}y$




mintermün hücre değeri 1 yapılır




‘komşu hücre oluşmuştur.

# Karnaugh Haritası Yöntemi

- **Örnek:** $f(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}y$

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | | 1 |
| $\bar{x}$ | 1 | |

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | | 1 |
| $\bar{x}$ | 1 | |

Bitişik hücre bulunmadığından daha fazla sadeleştirilememiştir.
$x\bar{y} + \bar{x}y$

- **Örnek:** $f(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | | 1 |
| $\bar{x}$ | 1 | 1 |

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | | 1 |
| $\bar{x}$ | 1 | 1 |

sadeleştirildiğinde
$\bar{x} + \bar{y}$ elde edilir

# Karnaugh Haritası Yöntemi

- Fonksiyon 3 değişkenli → K-Map 8 hücreli dikdörtgendir.
- 3 değişken için olası 8 minterm.
- Bir sabit, farklı mintermler ile temsil ediliyorsa bu hücreler komşu hücredir.

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $xyz$ | $xy\bar{z}$ | $x\bar{y}\bar{z}$ | $x\bar{y}z$ |
| $\bar{x}$ | $\bar{x}yz$ | $\bar{x}y\bar{z}$ | $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{x}\bar{y}z$ |

# Karnaugh Haritası Yöntemi

- **Örnek:** $f(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | | 1 | 1 | |
| $\bar{x}$ | 1 | | 1 | |

x ve $\bar{z}$, y ve $\bar{y}$ için sabit kalmıştır.
$\bar{y}$ ve $\bar{z}$, x ve $\bar{x}$ için sabit kalmıştır.

$$x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$$

- **Örnek:** $f(x,y,z) = x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | 1 | 1 |
| $\bar{x}$ | 1 | | 1 | 1 |

sabit olan tek değişken $\bar{y}$'dir.

$$\bar{y} + \bar{x}z$$

Dikdörtgen katlanarak silindir şeklinde temsil edildiğinde bu 2 hücre komşu olacaktır.

# Karnaugh Haritası Yöntemi

- 4 değişkenli bir fonksiyon →K-Map haritası 4x4 bir matris.
- 16 olası minterm içerir.
- 2 hücrenin, temsil ettikleri mintermler, sadece 1 değişken için farklıysa bu 2 hücre komşudur.
- Komşuluk bloğu ne kadar fazla ise, sadeleştirme o kadar iyi.

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $wx$ | $wxyz$ | $wxy\bar{z}$ | $wx\bar{y}\bar{z}$ | $wx\bar{y}z$ |
| $w\bar{x}$ | $w\bar{x}yz$ | $w\bar{x}y\bar{z}$ | $w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | $w\bar{x}\bar{y}z$ |
| $\bar{w}\bar{x}$ | $\bar{w}\bar{x}yz$ | $\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$ | $\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$ |
| $\bar{w}x$ | $\bar{w}xyz$ | $\bar{w}xy\bar{z}$ | $\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{w}x\bar{y}z$ |

# Karnaugh Haritası Yöntemi

- **Örnek**: $wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z}$

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $wx$ | 1 | 1 | 1 | |
| $w\bar{x}$ | 1 | | 1 | 1 |
| $\bar{w}\bar{x}$ | 1 | 1 | | |
| $\bar{w}x$ | | | | 1 |

$wyz + wx\bar{z} + w\bar{x}\bar{y} + \bar{w}\bar{x}y + \bar{w}x\bar{y}z$

Farklı bloklama farklı çözüm.

- **Örnek**: $wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $wx$ | | | 1 | |
| $w\bar{x}$ | 1 | 1 | 1 | |
| $\bar{w}\bar{x}$ | | 1 | 1 | |
| $\bar{w}x$ | | | 1 | |

$w\bar{x}y + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}$

# Karnaugh Haritası Yöntemi

- **Örnek**: $wxy\bar{z} + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}xyz + \bar{w}xy\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $wx$ | | 1 | 1 | |
| $w\bar{x}$ | 1 | 1 | 1 | |
| $\bar{w}\bar{x}$ | | 1 | 1 | |
| $\bar{w}x$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$w\bar{x}y + \bar{z} + \bar{w}x$$

- K-Map'deki;
  - İkili bir komşuluk mintermdeki terim sayısını 1 azaltır.
  - 4'lü bir komşulu mintermdeki terim sayısını 2 azaltır.
  - 8'li bir komşuluk ise 3 azaltır.
  - Genellersek $2^n$ tane komşu 1, terim sayısını n azaltır

# Karnaugh Haritası Yöntemi

- n, mantıksal fonksiyondaki değişken sayısı olmak üzere;
  - n değişkenli bir mantıksal fonksiyon için oluşturulacak K-Map;
    - $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ satır, $2^{\lceil n/2 \rceil}$ sütundan oluşur.
    - Ve toplamda $2^n$ hücre içerir.
- K-Map'lerde en üst ve alt satırda ile en soldaki ve en sağdaki sütuna karşılık gelen hücreler bitişik kabul edilir.

# Quine-McCluskey Yöntemi

- K-Map'de değişken sayısı arttıkça haritayı oluşturmak karmaşıklaşır.
- Çok değişkenli mantıksal denklemlerde, Quine-McCluskey yöntemi
- Mintermler, en fazla 1 içeren dizilere göre sıralanır.
- 1'ler şöyle gösterilir.

| *Minterm* | *Bit String* | *Number of 1s* |
|---|---|---|
| $xyz$ | 111 | 3 |
| $x\overline{y}z$ | 101 | 2 |
| $\overline{x}yz$ | 011 | 2 |
| $\overline{x}\,\overline{y}z$ | 001 | 1 |
| $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ | 000 | 0 |

# Quine-McCluskey Yöntemi

- **Örnek:** $xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

1. Bit stringlerle ifade edilir.

| | |
|---|---|
| $xyz$ | 111 |
| $x\bar{y}z$ | 101 |
| $\bar{x}yz$ | 011 |
| $\bar{x}\bar{y}z$ | 001 |
| $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | 000 |

2. Bit dizileri içerdikleri 1'lerin sayısına göre gruplanır.
   - Gruplama en az 1 sabitte değişiklik gösteren mintermlere göre yapılır.

| | | |
|---|---|---|
| (1,2) | $xz$ | 1–1 |
| (1,3) | $yz$ | –11 |
| (2,4) | $\bar{y}z$ | –01 |
| (3,4) | $\bar{x}z$ | 0–1 |
| (4,5) | $\bar{x}\bar{y}$ | 00– |

# Quine-McCluskey Yöntemi

3. 2. adımda elde edilen mintermler tekrar ortak bir sabitte gruplanmaya çalışılır.

| | | |
|---|---|---|
| (1,2,3,4) | $z$ | $--1$ |

4. Bu indirgeme işlemi, indirgeme yapılamaz oluncaya kadar devam eder.
5. İndirgenemeyen terimler mantıksal toplam ile birleştirilir.
    - $z + \bar{x}\bar{y}$

- **Bir minterm birden fazla grupta bulunabilir.**

# Quine-McCluskey Yöntemi

- **Örnek:** $wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}xyz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$

1. Bit dizisi:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $wxy\bar{z}$ | 1110 | 3 |
| 2 | $w\bar{x}yz$ | 1011 | 3 |
| 3 | $\bar{w}xyz$ | 0111 | 3 |
| 4 | $w\bar{x}y\bar{z}$ | 1010 | 2 |
| 5 | $\bar{w}x\bar{y}z$ | 0101 | 2 |
| 6 | $\bar{w}\bar{x}yz$ | 0011 | 2 |
| 7 | $\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$ | 0001 | 1 |

2. Gruplama.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $wxy\bar{z}$ | 1110 | (1,4) | $wy\bar{z}$ | 1–10 |
| $w\bar{x}yz$ | 1011 | (2,4) | $w\bar{x}y$ | 101– |
| $\bar{w}xyz$ | 0111 | (2,6) | $\bar{x}yz$ | –011 |
| $w\bar{x}y\bar{z}$ | 1010 | (3,5) | $\bar{w}xz$ | 01–1 |
| $\bar{w}x\bar{y}z$ | 0101 | (3,6) | $\bar{w}yz$ | 0–11 |
| $\bar{w}\bar{x}yz$ | 0011 | (5,7) | $\bar{w}\bar{y}z$ | 0–01 |
| $\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$ | 0001 | (6,7) | $\bar{w}\bar{x}z$ | 00–1 |

# Quine-McCluskey Yöntemi

3. 2. defa gruplandığında;

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $wxy\bar{z}$ | 1110 | (1,4) | $wy\bar{z}$ | 1–10 | (3,5,6,7) | $\bar{w}z$ | 0––1 |
| $w\bar{x}yz$ | 1011 | (2,4) | $w\bar{x}y$ | 101– | | | |
| $\bar{w}xyz$ | 0111 | (2,6) | $\bar{x}yz$ | –011 | | | |
| $w\bar{x}y\bar{z}$ | 1010 | (3,5) | $\bar{w}xz$ | 01–1 | | | |
| $\bar{w}x\bar{y}z$ | 0101 | (3,6) | $\bar{w}yz$ | 0–11 | | | |
| $\bar{w}\bar{x}yz$ | 0011 | (5,7) | $\bar{w}\bar{y}z$ | 0–01 | | | |
| $\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$ | 0001 | (6,7) | $\bar{w}\bar{x}z$ | 00–1 | | | |

4. $\bar{w}z + wy\bar{\bar{z}} + w\bar{x}y$ veya $\bar{w}z + wy\bar{z} + \bar{x}yz$