YÜKLEMLER VE NİCELEYİCİLER

DR. ZEYNEP BANU ÖZGER

İÇERİK

1. Tahmin
2. Niceleyiciler
3. Cümlelerin Mantıksal İfade Edilmesi
4. İç içe Niteleyiciler

TAHMİN-PREDICATES

- Bazı ifadeler değişkenler belirtilmediği sürece «doğru» veya «yanlış» olarak nitelendirilemez.
- Örnek:
  - x>3, x=y+3, x+y=z gibi
- ‘x>3’ ifadesi 2 kısımdan oluşmaktadır.
  - x, ifadenin öznesidir.
  - İkinci kısım ‘büyüktür 3’ ise predicate dir.
- P(x) ifadesi, x’deki öneri fonksiyonunun değeri olarak nitelenir.
  - P(x), p önermesinin fonksiyon haline getirilmiş biçimidir.

PREDICATES

- x=y+3 gibi birden fazla değişkeni olan ifadeler Q(x,y) gibi temsil edilir.
- Bu durumda;
  - Değişkenler: x ve y
  - Predicate: Q
- Örnek: A(c,n) için ifade: ‘c bilgisayarı n ağına bağlıdır’ olsun.
  - Örneğin ‘Math1’ bilgisayarı ‘kampus2’ ağına bağlandığında, A(math1,kampus2) ifadesi ‘doğru’ sonucunu üretir.

Önkoşullar Ve Son Koşullar

- Predicate'ler bilgisayar geçerli girdi verildiğinde doğru çıktıyı her zaman üretip üretmediğini test etmek için de kullanılır.
- Geçerli girdiyi tanımlayan ifadelere **önkoşul (precondition)** denir.
- Program çalıştığında çıktının yerine getirmesi gereken koşullara ise **son koşul (postcondition)** denir.
- Ön ve son koşulları tanımlamak için predicate'ler kullanılır.

NİCELEYİCİLER (QUANTIFIERS)

- P(x): bir öneri fonksiyonu.
  - Değişkenlere değer atandığında **önerme** olur.
  - Sonuçta; ‘doğru’ veya ‘yanlış’ şeklinde bir değeri olur.
- Niceleme; bir dizi öğe üzerinde hangi predicate’in doğru olduğunu ifade eder.
- 2 tür niceleyici vardır;
  - Universal (evrensel) niceleyici ($\forall$): Bir predicate in her değer için doğru olduğunu söyler.
  - Existential (varoluşsal) niceleyici ($\exists$): Predicate i doğru yapan kısıtlı değer vardır.
- Bir P(x) ifadesi için belirli bir D kümesindeki tüm x değerleri, P(x)’i bir önerme yapıyorsa;
  - D, x’in **ayrıntılı bilgi alanı (domain of discourse) dır**.

NİCELEYİCİLER (QUANTIFIERS)

- Örnek: P(n): $n^2 + 2n$ tek sayıdır.
  - D kümesi pozitif tam sayılardan oluşmak üzere;
    - İf n tek sayı then $n^2 + 2n$ tek sayı
    - If n çift sayı then $n^2 + 2n$ tek sayı değildir.

- Örnek: P(x): Sınıftakiler 20 yaşından büyüktür.
  - D kümesi sınıftaki öğrenciler ise,
  - Öğrencilerin bazıları önermeyi ‘doğru’, bazıları ise ‘yanlış’ yapar.

Evrensel (Universal) Niceleyici

- Bir P(x) ifadesi, D kümesindeki her x değeri için doğru ise,
  - ∀ x P(x),
  - for all x P(x),
  - for every x P(x) şeklinde yazılır.
- $\{x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n\}$ P(x) ifadesinin domaini ise,
  - Evremsel niceleyici ∀ x P(x) ‘and’ bağlacı ile eşdeğerdir.
  - Yani $\{P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)\}$
- Örnek: Domain x: x<=4 ve $x^2 < 10$ için ∀ x P(x) ifadesinin doğruluk değeri nedir?

∀ x P(x) = $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$

x=4 için $4^2 < 10$ ifadesi ‘yanlış’ olduğundan ∀ x P(x)’in doğruluk değeri de ‘yanlış’ dır

Karşı Örnek (Counter Example)

- $\forall$ x $\in$ D için P(x)'in değerini 'yanlış' yapan elemana **counter example** denir.
- Her x:x<=4 domaini için P(x): $x^2 < 10$ ise
  - x=4 için $x^2 = 16$ olacağından, x=4 P(x)'in sonucunu 'yanlış' yapar.
  - Yani 4 counter example'dır.

Varoluşsal (Existential) Niceleyici

- P (x)'in varoluşsal nicelendirmesi, “x’in bilgi alanında P (x)’i ‘doğru’ yapacak şekilde x öğesi vardır” önerisidir.
- P(x) önermesi, D kümesi içindeki en az bir x değeri için doğru olmalıdır.
- Varoluşsal Niteleyiciler;
  - ∃ x P(x),
  - There is an x such that P(x),
  - There is at least one x such that P(x) şeklinde yazılır.
- $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ P(x) ifadesinin domaini ise,
  - Varoluşsal niceleyici ∃ x P(x) ‘veya’ bağlacı ile eşdeğerdir.
  - Yani $\{P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)\}$

Varoluşsal (Existential) Niceleyici

- Örnek: Domain x: x<=4 ve $x^2 < 10$ için $\exists$ x P(x) ifadesinin doğruluk değeri nedir?

$\exists$ x P(x) = $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$

x=1 için $1^2 < 10$ ifadesi 'doğru' olduğundan $\exists$ x P(x)'in doğruluk değeri de 'doğru' olur

CÜMLELERİN MANTIKSAL İFADEYE ÇEVRİLMESİ

- Amaç, doğal dildeki cümleler için basit ve kullanışlı mantıksal ifadeler elde etmektir.
- Örneğin: ‘Bu sınıftaki her öğrenci matematik dersini aldı’ cümlesini predicate ve niteleyiciler ile ifade edersek:
  - Cümleyi şöyle ifade edersek;
    - Sınıftaki her x öğrencisi matematik dersini aldı.
    - Predicate: C(x)
    - Domain: Sınıftaki tüm öğrenciler → $\forall x \, C(x)$,
  - Cümle: ‘Sınıftaki bazı öğrenciler matematik dersini aldı’ olsaydı
    - $\exists x \, C(x)$ olurdu.

CÜMLELERİN MANTIKSAL İFADEYE ÇEVRİLMESİ

- Örnek: Bir insan bayan ve ebeveyn ise bu kişi birinin annesidir
  - F(x): x bir bayandır
  - P(x): x bir ebeveyndir.
  - M(x,y): x, y'nin annesidir.
  - Buna göre cümle mantıksal olarak şöyle ifade edilir.

CÜMLELERİN MANTIKSAL İFADEYE ÇEVRİLMESİ

- Örnek: Bir insan bayan ve ebeveyn ise bu kişi birinin annesidir
  - F(x): x bir bayandır
  - P(x): x bir ebeveyndir.
  - M(x,y): x, y'nin annesidir.
  - Buna göre cümle mantıksal olarak şöyle ifade edilir.
    - $\forall x((F(x) \land P(x)) \rightarrow \exists y\, M(x,y))$

Niceleyicilerin Tersi

- Örnek:
  - ‘Sınıftaki tüm öğrenciler matematik dersini aldı.’
    - Evrensel niceleyici
    - $\forall x P(x)$.
  - P(x): Sınıftaki x öğrencisi matematik dersini aldı.
    - Domain : Sınıftaki tüm öğrenciler
  - İfadenin tersi: ‘Sınıfta en az 1 öğrenci matematik dersini almadı’ olur.
    - $\exists x \neg P(x)$ şeklinde yazılır.
    - $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Niceleyicilerin Tersi

- Örnek:
  - Bu sınıfta matematik dersi almış en az bir öğrenci var.
    - Varoluşsal niceleyici
    - $\exists x P(x)$ şeklinde yazılır.
  - P(x): Sınıftaki x öğrencisi matematik dersini aldı.
  - İfadenin tersi;
    - Sınıfta matematik dersini almış bir öğrenci olması söz konusu değil veya
    - Bu sınıftaki her öğrenci matematik almamıştır.
    - $\forall x \neg P(x)$ olarak ifade edilir.
  - Bu durumda;
    - $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Niceleyiciler İçin De Morgan Kanunları

$\neg(\forall X \;\; P(X)) \rightarrow \exists X \; \neg P(X)$

$\neg \; (\exists x \;\; P(x)) \rightarrow \forall x \; \neg P(x)$

İÇ İÇE NİCELEYİCİLER

- Bir niceleyici diğerinin alanı içindeyse, bunlara **iç içe niceleyiciler** denir.
  - Ör: $\forall x\ \exists y(x + y = 0)$

Eşitlik	Açıklama
$\forall x \forall y(x + y = y + x)$	Tüm x ve y reel sayıları için x+y=y+x dir
$\forall x \exists y(x + y = 0)$	Tüm x ve bazı y reel sayıları için x+y=0 dır.
$\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z)$	Tüm reel x, y ve z sayıları için (x+(y+z))=((x+y)+z) dir
$\forall x \exists y P(x, y)$	Her x için P(x,y)'yi 'doğru' yapan en az 1 y değeri vardır.
$\exists x \forall y P(x, y)$	Her y için P(x,y) yi 'doğru' yapan bir x vardır.

İÇ İÇE NİCELEYİCİLER

Örnek: ‘İki pozitif tam sayının toplamı her zaman pozitiftir.’ Cümlesini mantıksal olarak ifade edersek:

- Her iki tamsayı için, eğer bu tamsayıların her ikisi de pozitifse, bu tamsayıların toplamı pozitiftir.
- Bahsi geçen sayılar x ve y olursa,
  - x ve y pozitif ise x+y pozitiftir denir.
- Mantıksal ifade edersek;
  - Domain tüm sayılardır.
    - $\forall x \forall y((x > 0) \land (y > 0) \rightarrow (x + y > 0))$
  - Domain pozitif sayılar olarak kısıtlandığında
    - $\forall x \forall y\ (x + y > 0)$ olarak ifade edilebilir

İÇ İÇE NİCELEYİCİLER

Örnek: $\forall x(c(x) \vee \exists y\,(c(y) \wedge f(x, y)))$ ifadesi için doğal dil cümlesini yazmak istersek.

- C(x): x’in bilgisayarı vardır.
- F(x,y): x ve y arkadaştır.
- Domain: okuldaki tüm öğrenciler
- Okuldaki her x öğrencisinin, bilgisayarı vardır veya okuldan bilgisayarı olan bir y öğrencisi ile arkadaştır.

İSPAT (PROOF)

- Matematiksel bir ifadenin gerçekliğinin belirlenmesine **ispat** denir.
- Matematiksel bir ifade farklı bileşenler içerir.
  - Tanımlanmamış terimler
  - Aksiyomlar
  - Tanımlar
  - Teoremler
  - İspatlar
- Terim tanımlamanın sonsuz bir tanım dizisine dönüşmemesi için bazı terimler tanımlanmamış olarak bırakılır. Bunlara **tanımlanmamış terim** denir.

İSPAT (PROOF)

- İspat yapmaksızın doğru kabul edilen önermelere **aksiyom** denir.
- Aksiyomların doğruluğu veya yanlışlığından söz edilemez.
- **Tanım;** Yeni bir kavram oluşturmak için önceden kabul edilmiş kavramlar ve tanımlanmamış terimlerden bir önerme oluşturmaktır.
- **Teorem;** Önceden ispatlanmış teoremleri, aksiyomları, tanımlamaları kullanarak ve p nin doğru olduğunu farz ederek doğruluğu önerilebilen $p \rightarrow q$ formundaki önermelerdir.
- **Lemma;** Büyük bir teoremi ispatlamak için kullanılan daha küçük teoremlerdir.
- **Corollary (Sonuç);** bir başka teoremin mantıksal sonucu ile diğer bir teoremin ispatlanmasıdır

İspat Çeşitleri

- 2 tür ispat vardır;
  - **Doğrudan ispat;**
    - $p \rightarrow q$ ispatlanmış teorem, aksiyom ve p önermesinin doğruluğunu kabul ederek çözüme ulaşmaktır.
  - **Dolaylı ispat;**
    - Yani $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ dir.
    - Bir önermenin ters pozitifi ispat edildiğinde, önermenin kendisi de ispat edilmiş olur.

DOĞRUDAN İSPAT ÖRNEK

- 2 rasyonel sayının toplamının rasyonel bir sayı olduğunu doğrudan ispat ile ispatlayın
  - a ve b birer rasyonel sayı ise;
    - $a = \frac{x}{y}, \qquad x, y \in Z, \qquad y \neq 0$ dır
    - $b = \frac{z}{t}, \qquad z, t \in Z, \qquad t \neq 0$ dır
    - $a + b = \frac{x}{y} + \frac{z}{t}, \qquad yt \neq 0, \quad yt \in Z, \qquad xk + zy \in \mathrm{Z}$ olacaktır
    - Yani a+b de bir rasyonel sayıdır.

DOLAYLI İSPAT ÖRNEK

- 3n+2 tek sayı ise n'in de tek sayı olduğunu dolaylı ispat yöntemiyle ispatlayınız.
  - p→q ≡ ⌐q→⌐p dir.
  - p:3n+2 tek sayıdır
  - q=n tek sayıdır
  - Karşıt tersi: n çift sayı ise 3n+2 çift sayıdır
  - $n = 2x, x \in Z$
    - $3n + 2 = 3 * 2x + 2 = 6x + 2 = 2 * (3x + 1)$
    - $k \in Z \; olmak \text{ üzere } k = 3x + 1 \rightarrow 3n + 2 = 2k$