DİZİLER, TOPLAMLAR VE MATRİSLER

DR. ZEYNEP BANU ÖZGER

İÇERİK

1. Seriler
2. Yineleme Bağıntıları
3. Toplamlar
4. Matrisler

SERİLER

- Diziler; sıralı listeleri temsil etmek için kullanılan ayrık bir yapıdır.
- n elemanlı bir dizi için;
  - a_n notasyonu n. sıradaki elemanı gösterir.
  - $\{a_n\}$ ise n elemanlı bir diziyi temsil eder.
- Örnek;
  - $\{a_n\}$ dizisi $a_n = \frac{1}{n}$ şeklinde tanımlanmışsa,
  - Dizinin elemanları: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ... şeklindedir.

SERİLER

- S=$\{s_n\}$ olmak üzere;
  - $s_n \leq s_{n+1} \rightarrow artan\ dizi(increasing)$
  - $s_n \geq s_{n+1}\ \rightarrow azalan\ dizidir(decreasing)$

SERİLER

- **Geometrik İlerleme;**
  - İlk terim (a) ve ortak oran (r) reel sayı olmak üzere;
    - $a, ar, ar^2, \ldots, ar^n$ şeklindeki dizilerdir.
    - f(x)=ar^x şeklinde temsil edilir.

  - Ör: $a_n = (\frac{1}{2})^n$ ve n= 0,1,2,3… ise
    - Dizinin elemanları: $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\}$

DİZGİ-KATAR (STRING)

- Sonlu elemanlardan oluşan bir küme üzerinde tanımlı düzenli dizilere **dizgi (string)** de denir.
- Ör: X={a,b,c} ise
  - S=bbaccc X kümesinde tanımlı bir stringdir.
  - S=b^2ac^3 şeklinde de gösterilir.
  - |S|=6
  - X^*= X kümesinde tanımlı, boş string (λ) dahil tüm alt stringler'dir
  - X^+= X kümesinde tanımlı, boş stringi içermeyen tüm alt stringler'dir
    - $X^+ = X^* - \lambda$
- 2 stringin birleşimi (concatenation), bu 2 stringin arka arkaya eklenmesi ile oluşur.
  - Ör: S=bbaccc ve N = caaba ise SN=bbacccaaba=$b^2ac^4a^2ba$'dır

SERİLER

- **Aritmetik İlerleme;**
  - İlk terim (a) ve ortak fark (d) reel sayı olmak üzere;
    - $a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd$ şeklindeki dizilerdir.
    - f(x)=dx+a şeklinde temsil edilir.
  - **Aritmetik dizilerde ardışık 2 terim arasındaki fark aynıdır. Buna ortak fark denir ve d ile temsil edilir.**
    - Ör: $-1+4n$ ve n=0,1,2,3…
      - İse dizinin elemanları: {-1,3,7,11…}

YİNELEME BAĞINTILARI

- Yineleme bağıntısı; bir $\{a_n\}$ dizisinde her bir elemanın kendinden bir veya daha fazla elemana bağlı bir denklem olarak ifade edilmesidir.

- **Ör:** Bir $\{a_n\}$ dizisi için yinelemeli bağıntı $a_n = a_{n-1} + 3$, n=1,2,3,… ve $a_0 = 2$ ise
  - $a_1 = a_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
  - $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$
  - $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$ ….

- **Özyinelemeli olarak tanımlanmış bir dizinin başlangıç koşulları, yineleme ilişkisinin geçerli olduğu ilk terimden önceki terimleri belirtir.**

YİNELEME BAĞINTILARI

Fibonacci Serisi:

- Başlangıç koşulları: $f_0 = 0\ ve\ f_1 = 1$ olmak üzere her bir terimin kendisinden önceki ardışık 2 terimin toplamı şeklinde ifade edildiği dizidir.
- Yineleme bağıntısı ile tanımlandığında;
  - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
- **Faktöriyel:**
  - Başlangıç koşulu $a_1 = 1$ olmak üzere n!=n(n-1)(n-2)…1 şeklinde kendisinden önceki n tane sayının birbiri ile çarpılması sonucu elde edilir.
  - Yineleme bağıntısı ile tanımlandığında;
    - $a_n = n(a_{n-1})$

YİNELEME BAĞINTILARI

- Yinelemeli bağıntıya göre
  - Dizinin her bir elemanının oluşturulması **1 iterasyondur**.
  - Dizinin oluşturulma işlemi 1. elemandan n. Elemana doğruysa **ileri değiştirme (forward substitution)**
  - N. Elemandan 1. elemana doğruysa **geri değiştirme (backward substitution)** denir.

Örnek:

$a_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots\}$ için yinelemeli bağıntı tanımlayın

- $a_n = \frac{1}{2^n}$

- $a_n = \{1,3,5,7,9 \dots\}$ için yinelemeli bağıntı tanımlayın
  - $a_n = a_{n-1} + 2$

- $a_n = \{1, -1, 1, -1, 1, -1 \dots\}$ için bir bağıntı tanımlayın
  - $a_n = -a_{n-1}{}^{n-1}$ veya -1^n

TOPLAMLAR

- Terimlerin toplamı:
- Sigma notasyonu
- $\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$
  - j=toplam işleminin indexi
  - n=üst sınır
  - m=alt sınır
- Örnek:$\sum_{i=1}^{5} 1 + n = (1 + 1) + (1 + 2) + (1 + 3) + (1 + 4) + (1 + 5)$

  =2+3+4+5+6=20
- Örnek:$\sum_{k=3}^{5} 3k = (3 * 3) + (3 * 4) + (3 * 5)$=9+12+15=36

Geometrik Seri

- Geometrik ilerlemenin terimlerin toplamında kullanılmasına **geometrik seri** denir.
- a ve r birer reel sayı ve r≠0 olmak üzere geometrik seri şöyle tanımlanır.
- $\sum_{j=0}^{n} ar^j \begin{cases} \frac{ar^{n+1}-a}{r-1} & if\ r \neq 1 \\ (n+1)a & if\ r = 1 \end{cases}$

ÇİFT TOPLAM

- Toplam işleminin iç içe kullanılmasıdır.
- Örnek;
  - $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij$
  - $=\sum_{i=1}^{4}(i+2i+3i)$
  - $=\sum_{i=1}^{4} 6i = 6+12+18+24 = 60$

TOPLAM ÖZELLİKLERİ

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \pm b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

TOPLAM

- *Yaygın kullanılan bazı toplamlar*

Sum	*Closed Form*
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \|x\| < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \|x\| < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

Küme Elemanlarının Toplamı

- Toplama fonksiyonu
  - Bir fonksiyonun tüm değerlerini veya
  - Bir kümedeki tüm değerleri toplamak için de kullanılabilir.
- $\sum_{s \in S} f(s)$ → S'nin tüm elemanları için f(s) değerlerinin toplamını verir.
- Örnek:
  - $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6$

MATRİSLER

- Matris; dikdörtgen şeklinde bir sayı dizisidir.
- m satır, n sütundan oluşan matrislere **mxn matris** denir.
- Satır ve sütun sayısı eşit olan matrislere **kare matris** denir.
- Örnek.
  - $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (3 x 2) matris

- Satır matris; tek satırdan oluşur. N sütun sayısı olmak üzere (1 x n) boyutundadır.
- Sütun matris; tek sütundan oluşur. N satır sayısı olmak üzere (1 x n) boyutundadır.
- Matris eşitliği; 2 matrisin karşılıklı elemanları eşitse, bu iki matris eşit matrislerdir

Matrislerde Toplama ve Çıkarma

- A ve B **aynı boyutta** 2 matris olmak üzere;
  - A ve B matrislerinin toplamı, A ve B matrislerinin karşılıklı elemanlarının toplanması ile elde edilir.
  - $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$
  - A ve B matrislerinin farkı, A ve B matrislerinin karşılıklı elemanlarının birbirinden çıkarılması ile elde edilir.
  - $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \end{bmatrix}$

Matrislerde Çarpma

- A; m x k boyutunda bir matris ve B'de k x n boyutunda bir matris olmak üzere, A ve B matrislerinin çarpımı satır sayısı kadar sütunların çarpılması ile oluşur.
  - Çarpma yapılabilmesi için; 1. matrisin sütun sayısının 2. matrisin satır sayısına eşit olması gerekir.

- $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3)+-1(5) & 2(-9)+-1(7) & 2(2)+-1(-6) \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) & 3(2)+4(-6) \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -25 & 10 \\ 29 & 1 & -18 \end{bmatrix}$$

Matrislerde Çarpma

- **Matris çarpma işleminde değişim kuralı yoktur.**
  - **Bu nedenle A*B≠B*A'dır**

- **m x k boyutunda bir matris ve k x n boyutunda bir matris çarpıldığında, sonuç m x n boyutunda olacaktır.**

Birim Matris

- n x n boyutunda bir matris olmak üzere;
  - Köşegen dışındaki tüm elemanlar 0
  - Köşegen=1 ise birim matristir.
  - I_n ile gösterilir.
- $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
- .

Devrik (Transpose) ve Simetrik Matris

- **Devrik matris;** Bir matrisin satırları ile sütunlarının yer değiştirmesi ile oluşur.
  - A (m x n) boyutunda bir matris olmak üzere, A matrisinin transpozu (n x m) boyutundadır.
  - A^t, A' şeklinde gösterilir
  - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
- Simetrik Matris; Bir matris transpozu ile aynı ise simetriktir.
  - A=A^t

Matris Özellikleri

A ve B aynı boyutta 2 matris olmak üzere;

- A+B=B+A →Değişme kanunu
- A+(B+C)=(A+B)+C
- λ(A+B)=λA+λB (λ bir sabit)

- A, B ve C matrisleri toplama ve çarpma için uyumlu olmak kaydıyla;
  - A(B+C)=AB+AC
  - (A+B)C=AC+BC
  - A(BC)=(AB)C

  - ${A^T}^T = A$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(AB)^T = B^T + A^T$

Sıfır-Bir Matris

- Bir matrisin tüm elemanları 0 veya 1 ise **sıfır bir matris** denir.
- $A \vee B \begin{cases} 1\ eğer\ a_1\ veya\ b_1 = 1 \\ 0, diğer\ durumlarda \end{cases}$ → Katılma (join)
- $A \wedge B \begin{cases} 1\ eğer\ a_1\ ve\ b_1 = 1 \\ 0, diğer\ durumlarda \end{cases}$ → Karşılama (meet)

Boole Çarpımı

- A: m x k boyutunda bir sıfır bir matris ve B k x n boyutunda bir sıfır bir matris ise
  - A ve B matrislerinin çarpımına **Boole Çarpımı** denir.
  - A o B ile gösterilir.
  - $c_{ij} = \left(a_{i1} \wedge b_{1j}\right) \vee \left(a_{i2} \wedge b_{2j}\right) \vee \cdots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$
- Matris çarpımı işlemi gibidir;
  - Farklı olarak çarpım yerine ‘and’ toplam yerine de ‘or’ işlemi gelir.

Boole Kuvveti

- A bir kare ve sıfır-bir matris ve r pozitif bir tamsayı olmak üzere
  - A matrisinin r. boole kuvveti
  - A^r ile gösterilir.
  - A matrisinin r defa kendisi ile boole çarpımı yapılması sonucu elde edilir.
  - $A^0 = I_n$,
  - $A^r = A \; o \; A \; o \; A \ldots A (r \; defa)$