

MANTIK VE ÖNERME

DR. ZEYNEP BANU ÖZGER



İÇERİK

1. Mantık
2. Önerme
3. Birleşik Önermeler
4. Önerme Denklikleri



MANTIK (LOGIC)

- Mantık; doğru çıkarımı elde etme çalışmasıdır.
- Mantık kuralları matematiksel ifadelerin anlamını belirtir.
 - Örneğin: Her n pozitif tamsayısı için, n 'yi aşmayan pozitif tamsayıların toplamı $n*(n + 1) / 2$ ' dir
- Mantık; tüm matematiksel ve otomatik akıl yürütmenin temelidir.
- Mantık kuralları matematiksel ifadelere kesin bir anlam vermektedir.
 - Bu kurallar, geçerli ve geçersiz matematiksel bağımsız değişkenleri ayırt etmek için kullanılır.
- Mantığın bilgisayar biliminde çok sayıda uygulaması vardır.
 - Bilgisayar devrelerinin tasarımı
 - Bilgisayar programlarının yapımı
 - Programların doğruluğunun doğrulanması gibi



ÖNERME (PROPOSITIONS)

- **Önerme**; Sonucu doğru (true/1) veya yanlış (false/0) olan ifadelere denir.
- Mantık önermelerin doğruluğunu kanıtlamak için kullanılır.
- Mantık; önermenin ne olduğu ile ilgilenmek yerine bazı kurallar koyar ve önermenin genel formunun geçerli olup olmadığını sınar.
- Örnek;
 - Ay dünyanın çevresinde döner.
 - Filler uçabilir.
 - $3+8=11$
- Beyan edici olmayan cümleler önerme değildir.
 - Saat kaç? → Önerme değil, çünkü öneri değil
 - Dikkatli oku!
 - $X+1=2$ → Önerme değil, çünkü x'in değerine göre veya yanlıştır.



Önerme Değişkenleri

- Önergeler i göstermek için p, q, r, s gibi küçük harfler kullanılır.
- Bir önermenin sonucu doğru ise **T/D**, yanlış ise **F/Y** olarak ifade edilir.
- Önergelerle ilgilenen mantık alanına **önerme mantığı (propositional logic)** denir.
- Örnek:
 - $p = \text{Ay dünyanın çevresinde dönebilir.}$
- Bir önermenin sonucuna **doğruluk değeri (truth value)** denir.
- Önermenin doğruluk değerini göstermek için denklik işareti (\equiv) kullanılır.



BİRLEŞİK ÖNERME

- Mantıksal işleçler (birleştiriciler/bağlaçlar) kullanılarak mevcut önermelerden oluşturulan yeni önermelere **birleşik önerme** denir.
- En çok kullanılan birleştiriciler;
 - Negation – DEĞİL (\neg)
 - Conjunction AND - VE (\wedge)
 - Inclusive Disjunction OR – DAHİLİ VEYA (\vee)
 - Exclusive Disjunction OR – HARİCİ VEYA ($\underline{\vee}$)
 - Implication (\rightarrow)
 - Double implication (\leftrightarrow)
- Önerme değişkenlerinin olası bütün değerleri için birleştirme sonucunu veren çizelgeye **doğruluk tablosu (truth table)** denir.
- n önerme sayısı ise, 2^n tane doğruluk sayısı vardır.



Değil Bağlacı

- Bir p önermesinin tersi: $\neg p$, $\sim p$, p' sembollerinden biri ile gösterilir.
- Mevcut önermenin tersi, değili olarak değerlendirilir.
- Örnek:
 - p =ay dünyanın çevresinde döner
 - $\neg p$ =ay dünyanın çevresinde dönmez
 - q =Vandana'nın akıllı telefonunun en az 32 GB bellek vardır.
 - $\neg q$ =Vandana'nın akıllı telefonunda en az 32GB bellek yoktur.
 - $\neg q$ =Vandana'nın akıllı telefonunda 32 GB'tan az bellek var.

Doğruluk Tablosu

p	$\neg p$
D	Y
Y	D



Ve (And) Bağlacı

- p ve q birer önerme olmak üzere; ve (and) bağlacı $(p \wedge q)$ veya $(p \text{ and } q)$ olarak gösterilir.
 - p ve q olarak okunur.
- Önermenin sonucunda 0 yani 'yanlış' sonucu baskındır.
 - Yani önermelerden en az 1'i 'yanlış' ise $p \wedge q$ sonucu da 'yanlış' olur.
- Ancak ve ancak her 2 önerme de doğru ise doğru sonucunu döndürür.
- Örnek
 - p =Güneş parlıyor
 - q =Yağmur yağıyor
 - $p \wedge q$ = Güneş parlıyor ve yağmur yağıyor

Doğruluk Tablosu		
p	q	$p \wedge q$
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y
D	D	D



Ve (And) Bağlacı

- $p \wedge q \equiv q \wedge p \rightarrow$ **Değişme Özelliği**
- $p \wedge p \equiv p \rightarrow$ **Özdeşlik yasası**
- $p \wedge \neg p \equiv 0$
- $p \wedge 1 \equiv p$
- $p \wedge 0 \equiv 0 \rightarrow$ **Baskınlık yasası**



Veya (OR) Bağlacı

- p ve q birer önerme olmak üzere; veya (or) bağlacı $(p \vee q)$ veya $(p \text{ or } q)$ olarak gösterilir.
 - p veya q olarak okunur.
- 1 (doğru) sonucu baskındır.
- Ancak ve ancak her 2 önerme de yanlış ise yanlış sonucunu döndürür.
- Örnek
 - p =Güneş parlıyor
 - q =Yağmur yağıyor
 - $p \vee q$ = Güneş parlıyor veya yağmur yağıyor
- Veya bağlacının özellikleri
 - $p \vee q \equiv q \vee p \rightarrow$ **Değişme özelliği**
 - $p \vee p \equiv p \rightarrow$ **Özdeşlik yasası**
 - $p \vee \neg p \equiv 1$
 - $p \vee 1 \equiv 1 \rightarrow$ **Baskınlık Yasası**
 - $p \vee 1 \equiv p$

Doğruluk Tablosu		
p	q	$p \vee q$
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y
D	D	D



- Dağılma Özellikleri

- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- Parantezi Kaldırma

- $p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$
- $p \vee (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$

- De Morgan Kuralları: 'Ve' ve 'Veya' lı bileşik önermelerin olumsuzlarını almak ile ilgilidir.

- $\neg \vee \equiv \wedge$
- $\neg \wedge \equiv \vee$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$



Harici Veya Bağlacı (XOR)

- p ve q birer önerme olmak üzere; harici veya (xor) bağlacı $(p \underline{\vee} q)$ veya $(p \text{ xor } q)$ olarak gösterilir.
 - 'p ya da q' şeklinde okunur.
- Önermelerden sadece biri doğru ise doğru sonucunu döndürür.
- Örnek
 - p =Yarın yüzmeye gideceğim
 - q =Yarın golf oynayacağım
 - $p \underline{\vee} q$ = Yarın ya yüzmeye gideceğim ya da golf oynayacağım
 - r =Adaylar 25 yaşın üzerinde olmalı
 - s =Adaylar en az 3 yıllık deneyimli olmalı.
 - $r \underline{\vee} s$ = Adaylar 25 yaşın üzerinde veya en az 3 yıl deneyimli olmalı.
 - Durumlardan ikisi de sağlanabileceğinden **dahili veya**. (Durumlar birbirini dışlamıyor)

Doğruluk Tablosu		
p	q	$p \underline{\vee} q$
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y
D	D	Y



Harici Veya Bağlacı (XOR)

- Özellikler:
 - $p \underline{\vee} q \equiv p \underline{\vee} p$ (Değişme özelliği vardır)
 - $p \underline{\vee} p \equiv 0$
 - $p \underline{\vee} \neg p \equiv 1$
 - $p \underline{\vee} 1 \equiv \neg p$
 - $p \underline{\vee} 0 \equiv p$



Koşullu Önerme (İse Bağlacı)

- p ve q birer önerme olmak üzere; koşullu önerme bağlacı ($p \rightarrow q$) veya (if p then q) olarak gösterilir.
 - p ise q olarak okunur.
- Burada p : öncül, q ise sonuçtur.
- p : önceki, q : sonraki önerme olarak adlandırılır.
- p (ilk önerme): hipotez, q (sonraki önerme): sonuçtur.
- p önermesi q için yeterli şart, q ise p için gerekli şarttır.
- Örnek:
 - p :kahvaltı yaparım
 - q : öğlen yemeği yemem
 - $p \rightarrow q$: Eğer kahvaltı yaparsam öğlen yemeği yemem
 - Hipotez (kahvaltı yaparsam) 'doğru' ise sonuç 'doğru' dur.
- Hipotez (ilk önerme) 'doğru' iken, sonucun (ikinci önerme) 'yanlış' olması mümkün olmayacağından $1 \rightarrow 0$ birleşik önermesinin sonucu 'yanlış' olur.

Doğruluk Tablosu

p	q	$p \rightarrow q$
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D
D	D	D



Koşullu Önerme (İse Bağlacı)

- $p \rightarrow q \not\equiv q \rightarrow p$ (**Değişme özelliği yoktur**)
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ (**İse li bileşik önermelerin olumsuzu alınmak istendiğinde veya ya dönüşür.**)
- $p \rightarrow p \equiv 1$
- $p \rightarrow \neg p \equiv \neg p$
- $p \rightarrow 1 \equiv 1$ (**Sonuç önermesi 'doğru' ise hipotez önermesi ne olursa olsun sonuç 'doğru' olur**)
- $p \rightarrow 0 \equiv \neg p$



Mantıksal Denklik

- 2 önermenin doğruluk tablosundaki değerleri aynı ise aralarında **mantıksal denklik (logical equivalence)** vardır denir.

Doğruluk Tablosu			
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
D	Y	Y	Y
Y	D	D	D
Y	Y	D	D
D	D	D	D



Koşullu Önermede Yer Değiştirme (Converse)

- $p \rightarrow q$ nun yer değiştirmiş hali $q \rightarrow p$ dir.
- Bu 2 önerme için mantıksal denklik yoktur.

Doğruluk Tablosu			
p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
D	Y	Y	D
Y	D	D	Y
Y	Y	D	D
D	D	D	D



Koşullu Önermenin Tersisi (Inverse)

- $p \rightarrow q$ nun tersi $\neg p \rightarrow \neg q$ 'dur
 - 2 önermenin de olumsuzu alınarak elde edilir.
- $\neg p \rightarrow \neg q$ önermesi $p \rightarrow q$ önermesinin olumsuzu değildir.



Koşullu Önermede Devrik Önerme (Karşıt Tersi Contrapositive)

- $p \rightarrow q$ nun devrik hali $\neg q \rightarrow \neg p$ dir.
- İki önerme hem yer değiştirir hem de olumsuzları alınır.
- $p \rightarrow q$ nun doğruluk değeri ile $\neg q \rightarrow \neg p$ nin doğruluk değeri aynıdır.

Doğruluk Tablosu			
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
D	Y	Y	Y
Y	D	D	D
Y	Y	D	D
D	D	D	D

Bu 2 önerme mantıksal olarak denktir



- Örnek: «Ev sahibi takım yağmur yağdığında kazanır»
 - p : yağmur yağıyor
 - q : Ev sahibi takım kazanır.
 - $p \rightarrow q$: Eğer yağmur yağıyorsa ev sahibi takım kazanır.
 - $\neg q \rightarrow \neg p$ (Contrapositive): Eğer ev sahibi takım kazanmadıysa yağmur yağmıyordur.
 - $q \rightarrow p$ (Converse) : Ev sahibi takım kazanırsa yağmur yağar.
 - $\neg p \rightarrow \neg q$ (Inverse): Eğer yağmur yağmıyorsa ev sahibi takım kazanamaz.

Sadece contrapositive ifade orijinal ile mantıksal olarak aynı anlamdadır



Çift Yönlü Önerme (Ancak ve Ancak Bağlacı Biconditionals)

- p ve q birer önerme olmak üzere; çift yönlü önerme bağlacı $(p \leftrightarrow q)$ veya (p if and only if q) olarak gösterilir.
- Farklı şekillerde ifade edilebilir.
 - p , q için gerekli ve yeterlidir.
 - p , yalnız ve ancak q ise.
- $p \leftrightarrow q$ ifadesi ancak $p \rightarrow q$ ve $q \rightarrow p$ ifadeleri doğru ise doğrudur.
 - Çünkü $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ veya
$$= \neg(p \vee q)$$
- Örnek: p : Uçağa binebilirsin, q : Bilet al
 - $p \leftrightarrow q =$ Ancak ve ancak bilet aldıysan uçağa binebilirsin.
 - p ve q 'nun ikisi de doğru veya ikisi de yanlış ise $p \leftrightarrow q$ sonucu doğru olur.

Doğruluk Tablosu		
p	q	$p \leftrightarrow q$
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D
D	D	D



Çift Yönlü Önerme (Ancak ve Ancak Bağlacı Biconditionals)

- Özellikler
 - $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$ (Değişme özelliği vardır)
 - $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
 - $p \leftrightarrow p \equiv 1$
 - $p \leftrightarrow \neg p \equiv 0$
 - $p \leftrightarrow 1 \equiv p$
 - $p \leftrightarrow 0 \equiv \neg p$



Birleşik Önermeler İçin Doğruluk Tablosu

- Önermelerin bağlaçlar ile birleştirilmesi sonucu oluşan önermelere **birleşik önerme** denir.
- Örnek: $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

Doğruluk Tablosu					
p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
D	D	Y	D	D	D
D	Y	D	D	Y	Y
Y	D	Y	Y	Y	D
Y	Y	D	D	Y	Y



- 2'den fazla önermenin doğruluk tablosu oluşturulabilir.
- n tane önerme varsa doğruluk tablosunda 2^n tane satır vardır.
- Örnek: $p \vee (q \wedge r)$

Doğruluk Tablosu				
p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
D	D	D	D	D
D	D	Y	Y	D
D	Y	D	Y	D
D	Y	Y	Y	D
Y	D	D	D	D
Y	D	Y	Y	Y
Y	Y	D	Y	Y
Y	Y	Y	Y	Y



Mantıksal Operatörlerde Öncelik

- Operatörlerin işleme önceliği parantez içine alınarak belirlenmemişse, aşağıdaki öncelik tablosuna göre değerlendirilir.

- Örnek:

- s: Ali gezmeye çıkar
- t: mehtap var
- u: kar yağıyor

s, t ve u önermelerine göre aşağıdaki birleşik önermeler ne anlama gelir?

- $t \wedge \neg u \rightarrow s$?
- $t \rightarrow (\neg u \rightarrow s)$?
- $\neg(s \leftrightarrow (u \vee t))$?
- $\neg s \leftrightarrow u \vee t$?

Operatör	Öncelik
\neg	1
\wedge	2
\vee	3
\rightarrow	4
\leftrightarrow	5



Önerme Mantığı Uygulamaları

1. Çeviri:

- Çevrilecek cümle, mantıksal önermeler ile ifade edilip analiz edilebilir.
- Örn: İnternete sadece bir bilgisayar bilimi bölümündeyseniz veya birinci sınıftan değilseniz kampüsten erişebilirsiniz.
 - a: İnternete kampüsten erişebilirsiniz.
 - b: Bilgisayar bilimi öğrencisisin.
 - c: Birinci sınıf öğrencisi.


$$a \rightarrow (b \vee \neg c)$$

2. Arama Motoru:

- Aranan ifade: «KSU bilgisayar»
- Mantıksal önerme KSU ve bilgisayar

3. Bilgisayar devresi tasarımı

4. Bilgisayar programları

5. Uzman sistem oluşturulması...



ÖNERME DENKLİKLERİ

- Bir birleşik öneri, kendisiyle aynı doğruluk değerine sahip başka önermeler ile ifade edilebilir.
- Bu işlem aynı problemin farklı şekillerde ifade edilmesini sağladığından önemlidir.
- Aynı doğruluk değerlerine sahip birleşik önermelere **mantıksal olarak eşdeğer (logically equivalent)** denir.



Totoloji (Tautology) – Tutarlılık

- Bir birleşik önermenin doğruluk değerleri tüm durumlar için «doğru» ise bu birleşik önermeye **totoloji** denir.
- Örnek: $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

Doğruluk Tablosu				
p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D
Y	D	D	Y	D
Y	Y	D	Y	D



Çelişki (Contradiction)

- Bir birleşik önermenin doğruluk değerleri tüm durumlar için «yanlış» ise bu birleşik önermeye **çelişki** denir.
- Örnek: $p \wedge (\neg p \wedge q)$

Doğruluk Tablosu				
p	q	$\neg p$	$(\neg p \wedge q)$	$p \wedge (\neg p \wedge q)$
D	D	Y	Y	Y
D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	Y
Y	Y	D	Y	Y



De Morgan Kuralları

- De Morgan kuralındaki birleşik önermeler birbirlerine mantıksal olarak eşittir.
- De Morgan kuralları bağlaçları ve ayrıştırıcıları nasıl negatif yapacağımızı tanımlar.
- Yasalar
 - ‘and’ ile bağlanmış birleşik bir önermenin değilinin, önermelerin ayrı ayrı değilinin veya ile bağlanması ile ve
 - veya ile bağlanmış birleşik bir önermenin değilinin, önermelerin ayrı ayrı değilinin and ile bağlanması ile elde edileceğini söyler.
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$



Mantıksal Eşdeğerlikler

Eşitlik	Açıklama
$p \wedge \mathbf{D} \equiv p$ $p \vee \mathbf{Y} \equiv p$	Özdeşlik Yasası (Identity laws)
$p \vee \mathbf{D} \equiv \mathbf{D}$ $p \wedge \mathbf{Y} \equiv \mathbf{Y}$	Baskınlık Yasası (Domination laws)
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent laws
$\neg(\neg p) \equiv p$	Çift Olumsuzluk Yasası (Double negation law)
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Değiştirilebilen Yasalar (Commutative laws)
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	İlişkisel Yasalar (Associative laws)
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Dağıtım Yasaları (Distributive laws)
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Negation laws



Açık Önerme

- Bir p önermesinin fonksiyon haline getirilmiş biçimine **açık önerme** denir.
- Bir p önermesi için açık önerme $P(x)$ ile ifade edilir.
- $P(x)$ ifadesi, x 'deki öneri fonksiyonunun değeri olarak nitelenir.
- x 'e bir değer atandığında, $P(x)$ bir öneri olur ve artık gerçek bir değeri vardır.
- x 'in alacağı değere göre $P(x)$ 'doğru' veya 'yanlış' şeklinde doğruluk değerine sahip olur.
- x bir değer almadan $P(x)$ için doğru veya yanlış diye değerlendirilemez.



AÇIK ÖNERME ÖRNEK

- $p(x): x+1 < 5$ olsun
 - $x=1 \rightarrow 1+1 < 5$ olur ve $P(1)$ 'in doğruluk değeri 1 olur.
 - $P(1) \equiv 1$
 - $X=5 \rightarrow 5+1 < 5$ yanlış bir önerme olduğundan $P(5)$ 'in doğruluk değeri 0 olur.
 - $P(5) \equiv 0$
- Ör: $p(x): x^2 - 9 = 0$ ise x 'in hangi değerleri için $p(x)$ 'in doğruluk değeri 1'dir?
 - $x=3$ veya $x=-3$ olması halinde $P(x) \equiv 1$ 'dir
- **Örnek:** $p(x): x+3 < 7$ önermesinin olumsuzu nedir?
 - $\neg p(x): x+3 \geq 7$ olur.

