יום שלישי 27.3.21

מקרא:
- הוכחה
- דוגמה
- משפט
- טענה
- הגדרה

אלגוריתמים
שבוע 5 - תרגול 5

מסילת הרכבת

בבעיה זו אנו מרכיבים מסילה באורך L מתוך מלאי חלקים שברשותנו. לכל חלק נתון מחיר, אורך וסוגי חיבור מימין ומשמאל אשר קובעים אילו חלקים יכולים להופיע לפניו ואחריו. האופטימיזציה מתבצעת על מחיר המסילה.

הנחה: המלאי מכיל רק סוגי חלקים מסוימים, אך ישנו מספר בלתי מוגבל של חלקים מכל סוג.

קלט:

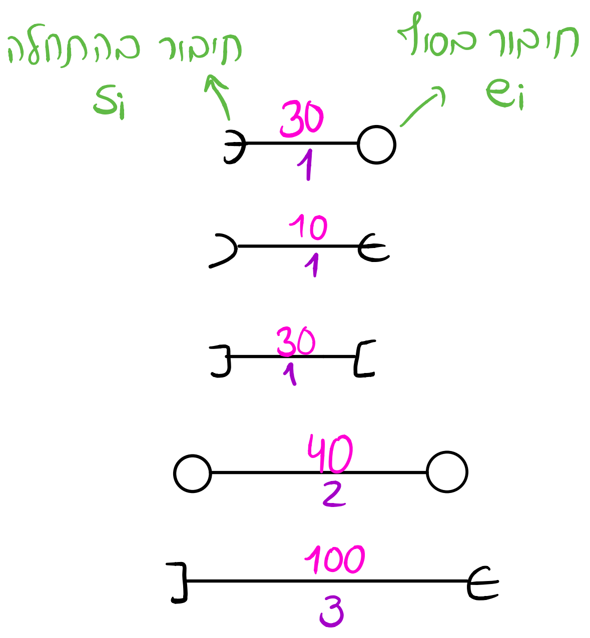
$L\in\mathbb{N}$ - אורך המסלול

K - סוגי החיבורים

N - סוגי חלקים, כאשר לכל $1\le i\le N$ ישנם:
1. $l_i\in\mathbb{N}$ - אורך החלק
2. $p_i\in\mathbb{N}$ - מחיר החלק
3. שני סוגי חיבורים: סוג חיבור בתחילת החלק (משמאל) - $s_i\in K$
   סוג חיבור בסוף החלק (מימין) - $e_i\in K$

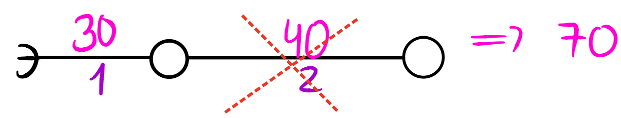
פלט: המחיר המינימלי עבור מסילה חוקית באורך L, כאשר מסילה חוקית היא מסילה שבה חלק i מופיע מימין לחלק j אמ"מ $e_j=s_i$.

דוגמה:



p_i - מחיר

l_i - אורך



$|K|=4 \qquad L=3$

$N=5 \qquad K=\{\ni, \bigcirc, <, [\}$

אבחנה: אם מורידים חלק אחד מהפתרון האופטימלי i, נקבל פתרון אופטימלי מאורך $L-l_i$, שנגמר בחיבור s_i (או e_{i-1}).

נלבן על פי הסכמה:

תתי בעיות: עבור $0 \le l \le L$ ועבור $k \in K$ נמצא את מחיר המסילה הכי זול
מסילה באורך l שנגמרת ב-K.

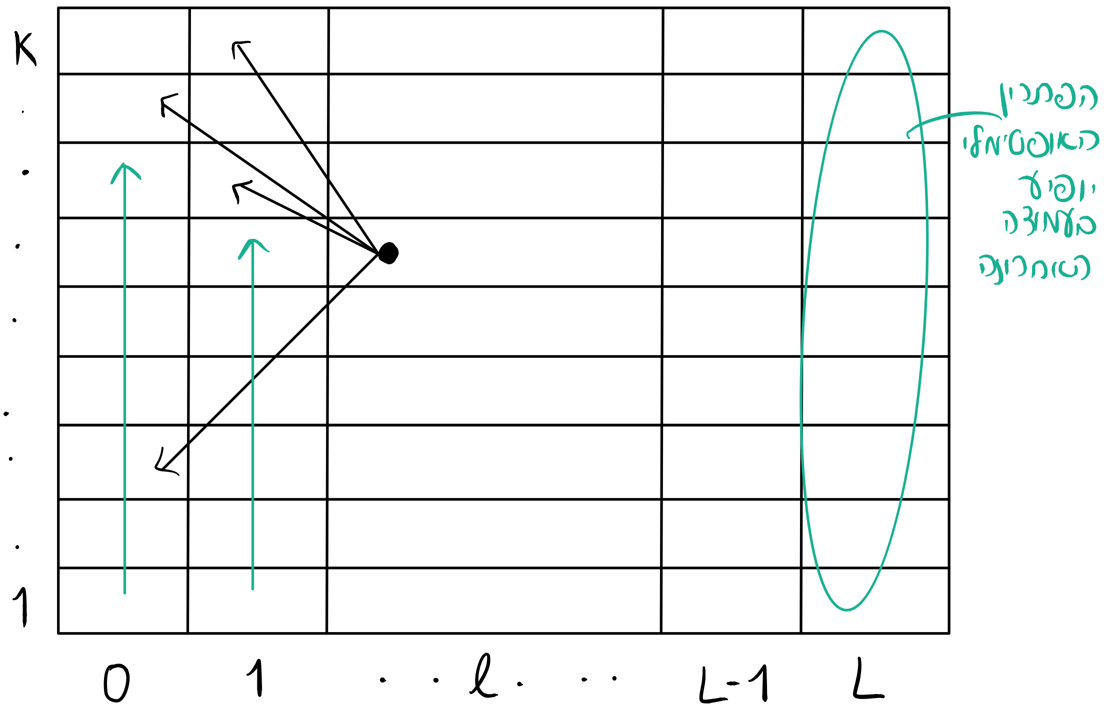
נוסחה רקורסיבית:

$$\underbrace{f(\overset{\text{אורך}}{l},\overset{\text{חיבור}}{K})}_{\text{המחיר המינימלי למסילה באורך } l \text{ שנגמרת בחיבור ימני מסוג } K.} = \begin{cases} 0 & l=0 \\ \min\limits_{\substack{1\le i\le N \\ e_i=K \\ l_i\le l}} \Big(\underbrace{f(l-l_i, s_i)}_{\text{מחיר המסילה עד החלק הזה}} + \underbrace{p_i}_{\text{התוספת של החלק}} \Big) & l>0 \end{cases}$$

ונוסיף $\min(\emptyset)=\infty$
על מנת שהנוסחה
תהיה מוגדרת היטב

ה-min בנוסחת הרקורסיה בודק מהי האפשרות הטובה ביותר עבור הצעד האחרון ע"י כך שעבור כל צעד אפשרי (כל חלק שמסתיים בחיבור K) הוא בודק את המחיר שיתקבל במידה ובנינו את המסילה עד לחלק הזה בצורה אופטימלית.

בניית טבלה: נגדיר טבלה $K \times (L+1)$

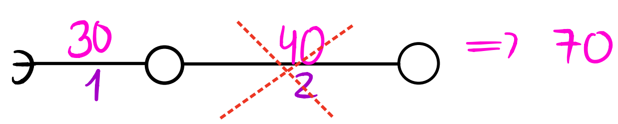


נמלא כל עמודה מלמטה למעלה ואז עמודות משמאל לימין.

חילוץ הפתרון: נחזיר מינימום של העמודה האחרונה, $\min_{1\le k\le K}\{M[k,L]\}$

ℓ	0	30	60	90
C	0	∞	∞	∞
O	0	30	40	70
∋	0	10	∞	100
	0	1	2	3

נבצע את המילוי של הדוגמה:



כי עוברים על ה-מצבי בכל תא

זמן ריצה: גודל טבלה $O(L\cdot K)$ + מילוי כל תא $O(N)$ ⇐ סה"כ $O(L\cdot K\cdot N)$

* לא פולינומיאלי בגודל הקלט, בגלל שאורך המסילה נתון לנו ע"י $\log L$.

לכן הוא **פסאודו-פולינומיאלי**.

הוכחת נכונות:

נוכיח באינדוקציה על סדר מילוי הטבלה.

בסיס: $l=0$, המסילה באורך 0 לכן לבנייתה עלה 0 ובתאים אלו הערך אכן 0.

הנחה: נניח כי כל התאים מולאו נכון, לכל $l'<l$ ולכל $k'<k$.

צעד: נסתכל על תא $[l,k]$ ונוכיח כי יש מסילה באורך l המסתיימת בחיבור מסוג k.

אם רשום בתא ה- $[l,k]$: ∞ אז המינימום על הקבוצה ריקה ולכן אין מסילה.

קיום: המינימום לא ∞. לכן יש חלק i' שעבורו רשום $f(l-l_{i'}, s_{i'})+p_{i'}$ מהנחת האינדוקציה היא נגמרת ב-$s_{i'}$, נוסיף אליה את i' ונקבל את הדרוש.

אופטימליות: נניח בשלילה שיש מסילה זולה יותר. נסמן את החלק האחרון בה ב-i''. המסילה עד אליה נגמרת ב-$s_{i''}$. נסמן את המחיר: $\underbrace{f(l-l_{i''}, s_{i''})}_{\text{עד החלק האחרון}} + p_{i''}$.

המסילה הזו עונה על התנאים של המינימום שלקחנו, והאלגוריתם לא לקח אותה, וזה בסתירה לכך שהוא בוחר מסילה מינימלית.

All-Shortest Paths

קלט: $G=(V,E)$ גרף מכוון — מניחים שאין מעגלים שליליים

$w: E \to \mathbb{R}$ פונקציית משקל לאו דווקא חיובית

פלט: מטריצה A בגודל $|V| \times |V|$ $(n \times n)$

כך ש-$A[i,j]$ מכילה את המרחק הכי קל מ-V_i ל-V_j.

ננסה לפתור באמצעות תכנות דינמי:

תתי בעיות:

ניסיון ראשון:

לכל $1 \le i \le n$ ולכל $1 \le j \le n$ נמצא מסלול קצר ביותר מ-V_i ל-V_j

לא יעבוד ☹

הסיבות שבגללן זה לא יעבוד: 1. זו הבעיה המקורית.

2. ישנן תתי בעיות הטניות יותר וגדולות יותר.

נעזר באובחנה שתעזור לנו בהמשך:

אובחנה: (בעלת - פורד)

המסלול הקצר ביותר מ-V_i ל-V_j הוא המסלול הקצר מ-V_i ל-V_k ועוד הצלע (V_k,V_j)

וכעת, ע"י שימוש באובחנה זו ננסח מחדש את תתי הבעיות:

ניסיון שני:

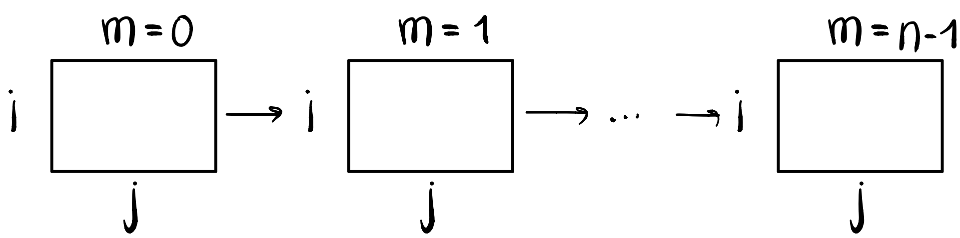
לכל $1 \le i \le n$ ולכל $1 \le j \le n$ ולכל $0 \le m \le n-1$ נמצא את המסלול הקל ביותר

בין V_i ל-V_j שמשתמש בלכל היותר m צלעות.

נוסחת רקורסיה:

$$f(i,j,m)=\begin{cases}\infty & i\neq j,\ m=0\\ 0 & i=j,\ m=0\\ \min\limits_{\substack{v_k\in V\\ (v_k,v_j)\in E\\ v_k \text{ שכן של } v_j}}\left(f(i,k,m-1)+w(v_k,v_j)\right) & \text{else}\end{cases}$$

טבלה: נגדיר טבלה בגודל $n\times n\times m$ ונמלא טבלה-טבלה עבור m עולה,
כאשר סדר המילוי בתוך טבלה לא משנה.



זמן ריצה: גודל טבלה $O(V^3)$ + מילוי כל תא $O(V)$ $\Leftarrow$ סה"כ $O(V^4)$
כאשר נגדיר מעבר על שכנים כלומר נקבל $O(V^2\cdot E)$

אבחנה: (פלויד-וורשל)
כל תת מסלול של המסלול הקצר ביותר שנקח, והוא המסלול הקצר ביותר בין שני הקודקודים בקצוות שלו. לכן אם נקח קודקוד ביניים v_k בדרך מ-v_i ל-v_j, לכן המסלול הקצר ביותר מ-v_i ל-v_j יהיה המסלול הקצר ביותר מ-v_i ל-v_k ועוד המסלול הקצר ביותר מ-v_k ל-v_j.

תתי בעיות: נמספר את הקודקודים $v_1,\dots,v_n$ לכל $1\le i\le n$ ולכל $1\le j\le n$ ולכל $1\le k\le n$ נמצא את המסלול הקצר ביותר מ-v_i ל-v_j המשתמש לכל היותר בקודקודים $(v_1,\dots,v_k)$.

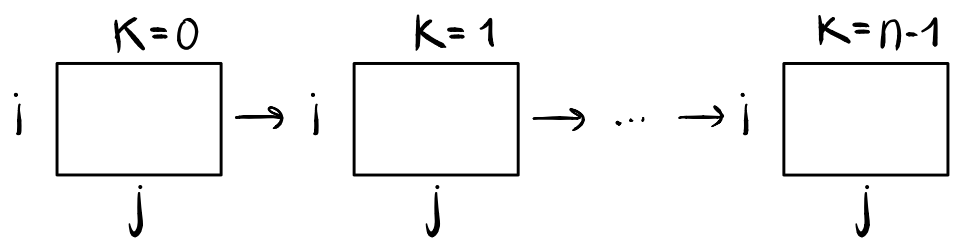
נוסחת רקורסיה:

$$f(i,j,0) = \begin{cases} w(v_i,v_j) & i\neq j \wedge (v_i,v_j)\in E \\ \infty & i\neq j \wedge (v_i,v_j)\notin E \\ 0 & i=j \end{cases}$$

המקרה הכללי:

$$f(i,j,k) = \min\left\{\overbrace{f(i,j,k-1)}^{\text{לא במסלול } v_k},\ \overbrace{f(i,k,k-1)+f(k,j,k-1)}^{\text{במסלול } v_k}\right\}$$

טבלה: כמו המקרה הקודם



זמן ריצה:

גודל הטבלה $O(V^3)$ ומילוי כל תא $O(1)$ $\Leftarrow$ סה"כ $O(V^3)$

הוכחת נכונות:

נוכיח באינדוקציה על סדר מילוי הטבלה.

בסיס: $K=0$, נשתמש בקודקודים מהקבוצה הריקה, לכן משקל המסלול הקצר ביותר שעובר מכל קודקודים הוא 0 אם $i=j$ ו-$w(V_i,V_j)$ אחרת.

הנחה: נניח כי כל התאים מולאו נכון, לכל i',j' ולכל $K'<K$ מתקיים כי התא i',j',K' מכיל את משקל המסלול הקצר ביותר אשר מכיל קודקודים מ-$(V_1,\dots,V_{K'})$

צעד: נסתכל על התאו ה- i,j,k ונוכיח כי הוא מכיל את משקל המסלול הקצר ביותר מ- v_i ל- v_j המשתמש רק בקודקודים מ- $(v_1,\ldots,v_k)$.

מקרה א': $v_k \in (v_i \to v_j)$

במקרה כזה, ניתן לחלק את המסלול לשניים: $v_i \to v_k$ ו- $v_k \to v_j$ ואז אורך המסלול (בהסתמך על הנוסחה) הוא:

$f(i,j,k) = f(i,k,k-1) + f(k,j,k-1)$ וזה בדיוק מה שהאלג' מחזיר.

מקרה ב': $v_k \notin (v_i \to v_j)$

אם כך, v_k אינו במסלול ולכן $f(i,j,k) = f(i,j,k-1)$.

והמסלול $f(i,j,k-1)$ קצר ביותר מהנחת האינדוקציה. כלומר, המסלול הקצר ביותר בתוספת האפשרות לשימוש ב- v_k הינו המסלול הקצר ביותר גם ללא התוספת שלו, וזה מה שהאלג' מחזיר, כנדרש.

יום שלישי 4.5.21

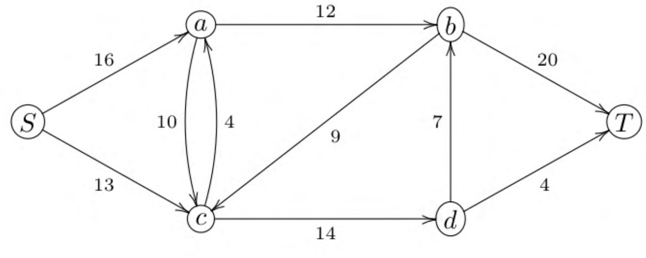
מקרא:
דוגמה -
הוכחה -
טענה -
משפט -
הגדרה -

אלגוריתמים
שבוע 6 - תרגול 6

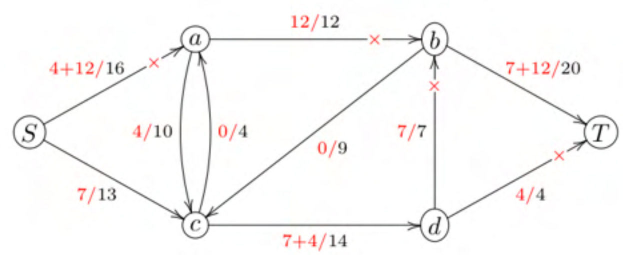
רשתות זרימה

נתונה רשת "צינורות" המוגדרת כגרף מכוון בו לכל צלע יש קיבולת ושני קודקודים s שמ"ייצר" חומר ו-t ש"סופג" חומר. מטרתנו להעביר כמה שיותר חומר מ-s ל-t. כאשר המגבלה היא שלא ניתן להעביר בצינור יותר מהקיבולת שלו. ולכל קודקוד חוץ מ-{s,t}, כמות החומר הנכנסת שווה ליוצאת.

דוגמה:



נגדיר את הזרימה באדום:



בדוגמה הזו אנו מעבירים 23 יחידות חומר מ-s ל-t. כאשר סימנו ב-X כל צינור שמגיע לרוויה.

הגדרות

הגדרה: רשת זרימה היא חמישיה (V,E,C,S,t) כאשר:

1) $G=(V,A)$ גרף סופי מכוון
2) $C:A\to\mathbb{R}^+$ פונקציית קיבול
3) $S\in V$ הוא צומת מקור
4) $t\in V$ הוא צומת בור

הנחה: אין קשתות שנכנסות ל-S ואין קשתות שיוצאות מ-t.

הגדרה: זרימה חוקית ברשת זרימה היא פונקציה $f:E\to\mathbb{R}^+$ המקיימת שני אילוצים:

(1) שימור הזרימה - לכל קודקוד $v\in V\setminus\{s,t\}$ מתקיים: $\sum_{a=(v,u)\in A} f(a)=\sum_{a=(u,v)\in A} f(a)$

על קודקוד כמות הזרימה הנכנסת = כמות הזרימה היוצאת.

(2) שימור אילוצי הקיבול - לכל $a\in A$: $0\le f(a)\le c(a)$

הגדרה: בהינתן זרימה f ברשת (G,C,S,t) הערך (שטף) של f, שנסמן $|f|$, הוא:

הזרימה שיוצאת מהמקור $\sum_{e=(s,u)\in E} f(e) = |f|$

טענה: הערך שווה לסך כל הזרימה שנכנסת אל הבור t, כלומר: $|f| = \sum_{e=(v,t)\in E} f(e)$

בעיית הזרימה:

קלט: רשת זרימה $N=(V,E,C,S,t)$

פלט: זרימה חוקית f עבור N, כך שהערך $|f|$ מקסימלי.

הערות:

1. זוהי בעיית אופטימיזציה. פתרון חוקי הוא זרימה f שחוקית לרשת N.
2. הפתרון האופטימלי לא בהכרח יחיד.
3. בכל רשת יש לפחות זרימה חוקית אחת. (זרימת האפס)
4. הערך חסום מלמעלה ע"י הקיבול בחתך שיוצא מ-s.
5. אם נבנה רשת צינורות ונזרים בה מים, נקבל פתרון אופט' לבעיה.
   זהו אלג' אפשרי, אבל לא פשוט ולא ניתן להרחבה.

בהרצאה ראינו שני פתרונות אפשריים:

1. FF - Ford-Fulkerson - עובד ב-$O(|E|\cdot|f^*|)$ כאשר f^* זרימה אופט' כלשהי.
2. EK - נראה בהמשך - עובד ב-$O(|V|\cdot|E|^2)$
   מחזיר פתרון בשלמים אם קיים כזה.

שימושים:

1. מציאת התאמה מקסימלית בגרף דו-צדדי:

קלט: גרף דו-צדדי לא מכוון $G=(L,R,E)$

פלט: התאמה מקסימלית ב-G (קבוצת צלעות)

נגדיר רשת זרימה $N=(V',E',c,s,t)$ כאשר:

א. $V'=L\cup R\cup\{s,t\}$

ב. נסמן ב-$\vec{E}$ את קשתות הגרף המקורי מכוונות מ-L ל-R.

ג. $E_L=(s,v)$ $\forall v\in L$ - נחבר כל קודקוד ב-L ל-s

$E_R=(v,t)$ $\forall v\in R$ - נחבר כל קודקוד ב-R ל-t

ד. נסמן $E'=\vec{E}\cup E_L\cup E_R$

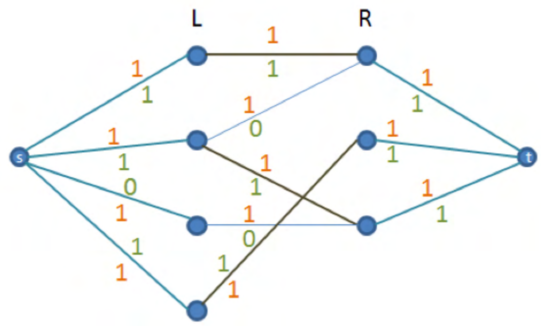
ה. נקבע $\forall e\in E'$ $c(e)=1$

נריץ על הרשת הנ"ל את אלגוריתם EK למציאת זרימה מקסימלית.

נסמן ב-f את הזרימה שחזרה.

נשים לב ש-f זרימה בשלמים ולכן $f(e)\in\{0,1\}$. נחזיר את ההתאמה:

$M=\{e\in \vec{E} \mid f(e)=1\}$



הוכחת נכונות:

הוכחת חוקיות: נניח בשלילה ש-M לא התאמה. אם כך, קיים קודקוד $x\in L\cup R$ שיש לו 2 צלעות ב-M שנוגע בו. נחלק למקרים: בגלל אילוץ הקיבול בצלע (s,x)

1. אם $x\in L$ אזי יכולה לצאת ממנו זרימה בגודל 1 לכל היותר. בסתירה לכך שיש 2 צלעות ב-$\vec{E}$ עם $f(e)=1$ וגם שתיהן נוגעות ב-x.
2. אם $x\in R$ - אותו דבר בדיוק, בגלל אילוץ הקיבול בצלע (x,t).

הוכחת אופטימליות: נניח בשלילה ש-M לא מקסימלית. אזי קיימת התאמה M' עם $|M'|>|M|$. נוכיח 2 דברים: 1. קיימת זרימה f' עם $|f'|=|M'|$

2. $|M|=|f|$

הוכחת 1

תהי M' התאמה. נסמן $L'\subseteq L$ הקודקודים מ-L ש-M' נוגעת בהם.

ו- $R'\subseteq R$ הקודקודים מ-R ש-M' נוגעת בהם.

נגדיר זרימה באופן הבא:

$$f'(e)=\begin{cases}1 & e\in\{(s,u)\mid u\in L'\}\cup M'\cup\{(u,t)\mid u\in R'\}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

f' חוקית: קיבול ברור כי $c(e)=1$, שימור הזרימה מתקיים כי M' התאמה.

$$|f'|=\sum_{u\in L} f'(s,u)=\sum_{u\in L'} 1=|L'|=|M'|$$

ולכן קיימת f' עם $|f'|=|M'|$.

__הוכחת 2.__

$$|f|=\sum_{v\in L} f(s,v)\overset{\text{שימור הזרימה של }L}{=}\sum_{(u,v)\in\vec{E}} f(u,v)\overset{\text{עברנו לסכום רק צלעות שונות מ-0}}{=}\sum_{\substack{(u,v)\in\vec{E}\\ f(u,v)=1}} 1=|M|$$

ולכן $|f'|=|M'|>|M|=|f|$ בסתירה לאופטימליות EK.

__בעיית הסוכנים:__

n סוכני מודיעין נמצאים ב-n ערים באמריקה $(d_1,\dots,d_n)$.
רוצים להעביר אותם ל-n ערים באסיה $(c_1,\dots,c_n)$.
אין טיסות ישירות, אלא רק דרך ערים באירופה $(e_1,\dots,e_n)$.
בכל עיר באירופה יכולים לשהות בו-זמנית לא יותר מ-k סוכנים.
בהינתן קווי הטיסות מאמריקה לאירופה $A=\{(d_i,e_j)\mid 1\le i,j\le n\}$
וקווי הטיסות מאירופה לאסיה $B=\{(e_i,c_j)\mid 1\le i,j\le n\}$
האם ניתן להעביר את כל הסוכנים לאסיה כך שבכל c_i יהיה סוכן אחד?

* כל הטיסות ממריאות ונוחתות באותו הזמן.

1. נגדיר רשת זרימה באופן הבא:

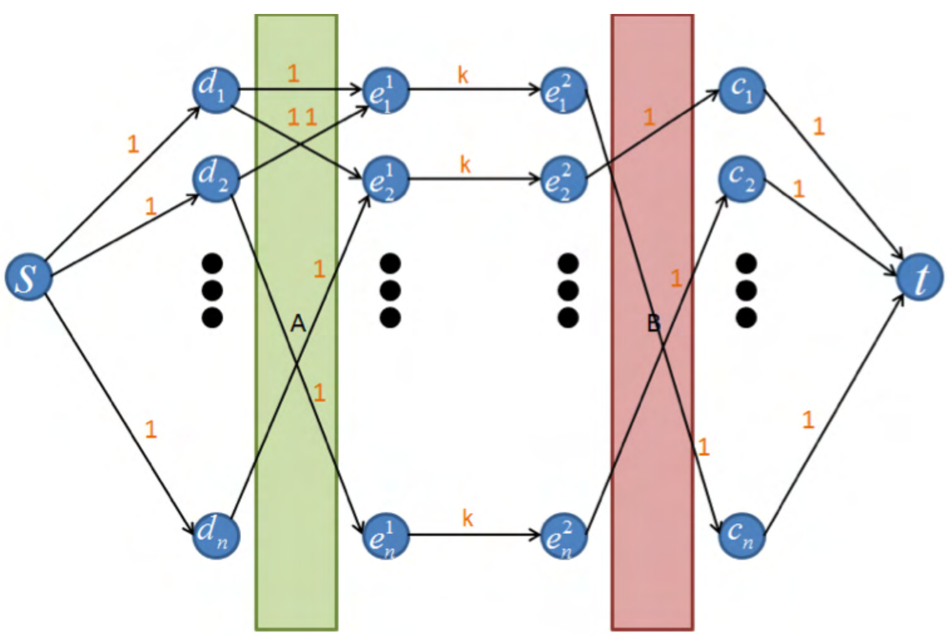
1. נשכפל את $(e_1,..,e_n)$ כך שיהיו 2 קבוצות $(e_1^1,..,e_n^1)$ ו-$(e_1^2,..,e_n^2)$
2. נגדיר: $i=1,2$ $\quad V=\{d_1,..,d_n\}\cup\{e_1^i,..,e_n^i\}\cup\{c_1,..,c_n\}\cup\{s,t\}$
3. נגדיר
   - $E_d=\{(s,d_i)\mid 1\le i\le n\}$
   - $E_e=\{(e_i^1,e_i^2)\mid 1\le i\le n\}$
   - $E_c=\{(c_i,t)\mid 1\le i\le n\}$
   - $E^1=\{(d_i,e_j^1)\mid (d_i,e_j)\in A\}$
   - $E^2=\{(e_i^2,c_j)\mid (e_i,c_j)\in B\}$

   ולבסוף $E=E_d\cup E^1\cup E_e\cup E^2\cup E_c$
4. נגדיר קיבול:

$$C(e)=\begin{cases}1 & e\in E\setminus E_e\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

2. נריץ EK על N, נסמן זרימה מקסימלית ב-f.
3. נחזיר כן אם"ם $|f|=n$

רשת הזרימה תראה כך:



הוכחת נכונות: — אין אופטימליות כי מדובר בבעיית הכרעה.

צ"ל שהערך המקסימלי ב-N הוא $|f|=n$ אמ"מ ניתן להעביר את הסוכנים לפי השיוך בבעיה.

נוכיח את שני הכיוונים מכיוון שאנו מחזירים כן אמ"מ מצאנו ש-$|f|=n$.

$\Rightarrow$ נניח שניתן להעביר את הסוכנים. נקח את תכנית ההעברה, נבנה מההעברה זרימה f ב-N ונוכיח:
1. f חוקית
2. $|f|$ מקסימלי
3. $|f|=n$.

נגדיר את f כך: לכל צלע מהצורה $(c_i,t) \cup (s,d_i)$ נזרים 1.

לכל צלע מהצורה (e_i^1,e_2^1) נזרים כמספר הסוכנים שעוברים בעיר ה-i באירופה.

לכל צלע מהצורה $(d_i,e_j^1) \cup (e_i^2,c_i)$ נזרים 1 אמ"מ הסוכן מ-d_i עובר דרך e_j או הסוכן שמסיים ב-c_i ועובר ב-e_j. כל השאר $f(e)=0$.

נוכיח ש-f מקיימת את.

1. קל לראות כי לכל d_i יוצאת ונכנסת יחידת זרימה 1 ולכל c_i יוצאת ונכנסת יחידת זרימה 1 ולכל $e=(e_i^1,e_i^2)$ עוברת זרימה כמס' הסוכנים שעוברים ב-e.
2. f מקס' כי כל קשת שיוצאת מ-S רוויה, אזי לא ניתן להזרים יותר חומר.
3. לכל $1\le i\le n$ מתקיים $f(s,d_i)=1$ לכן $|f| = \sum_{w|(s,w)\in E} f(s,w) = \sum_{i=1}^{n} f(s,w) = n$.

$\Leftarrow$ נניח ש-$|f|=n$. בגלל של הקיבולים שלמים קיימת זרימה בשלמים עם ערך n. נסמן אותה ב-f.

מובטח לנו שלכל $e\in A\cup B$ (לפי הסיבה כנ"ל) מתקיים $f(e)\in\{0,1\}$.

נסתכל על אוסף הצלעות $\{e\in A\cup B \mid f(e)=1\}$. נגדיר העברה של הסוכנים: לכל i,j אם $f(d_i,e_j^1)=1$ אז הסוכן מ-d_i יעבור ל-e_j. לכל j,K אם $f(e_j^2,c_K)=1$ אז אחד הסוכנים שמועבר ל-e_j, יועבר ל-c_K.

1. $|f|=n$ ולכן $f(s,d_i)=1$ לכל $i\in[n]$.
משימור החומר עבור קודקודי d_i, נקבל שכל סוכן מועבר לעיר אחת באירופה.
2. משימור הזרימה עבור c_j נקבל שבכל עיר באסיה ישנו סוכן אחד בסיום ההעברה ($f(c_j,t)=1$).
3. משימור הזרימה עבור e_j מתקיים שלכל j:

$$\sum_{i=1}^{n} f(d_i,e_j^1)=f(e_j^1,e_j^2)\le K$$

כלומר, ישנם לכל היותר K סוכנים שעוברים דרך העיר e_j. □

יום שלישי 11.5.21

מקרא:
הוכחה - דוגמה -
משפט - טענה -
הגדרה -

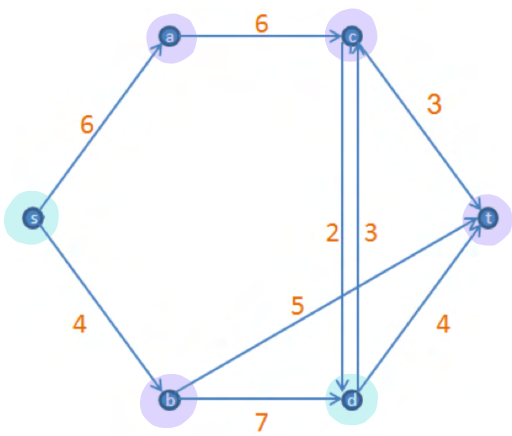
אלגוריתמים
שבוע 7 - תרגול 7
חתכים ברשתות זרימה

הגדרות:

נניח רשת זרימה N וזרימה חוקית f.

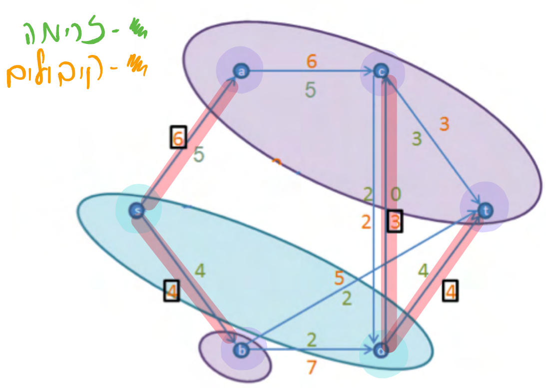
ערך של הזרימה יהיה: $|f|=\sum_{u:(s,u)\in E} f(s,u)$, סכום הזרימה שיוצאת מהמקור.

חתך: נחלק את הרשת ל-2 קבוצות קודקודים זרות $S\cup T=V$ ו-$S\cap T=\emptyset$ כך ש- $s\in S, t\in T$ והחתך הוא: $\{(u,v)\in E \mid u\in S, v\in T\}$



דוגמה:
נסתכל על החתך $(\{s,d\},\{a,b,c,d\})$

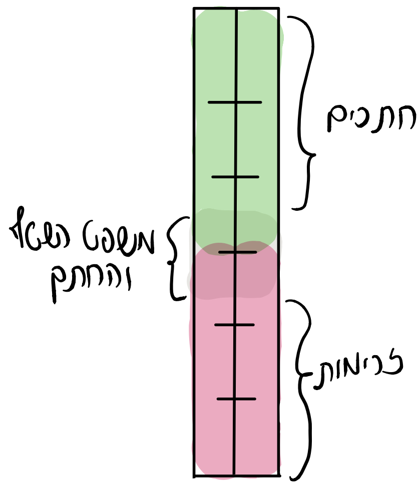
קיבול של חתך: בהינתן חתך S,T, קיבולו יהיה: $C(S,T)=\sum_{(u,v)\in S\times T} c(u,v)$
כאשר $(u,v)\notin E$, $c(u,v)=0$.



בדוגמה שלנו, הקיבול של החתך הוא:
$C(\{s,d\},\{a,b,c,d\}) = 4+6+4+3=17$

טענה: לכל זרימה חוקית f, ולכל חתך S,T מתקיים $|f|\le C(S,T)$.

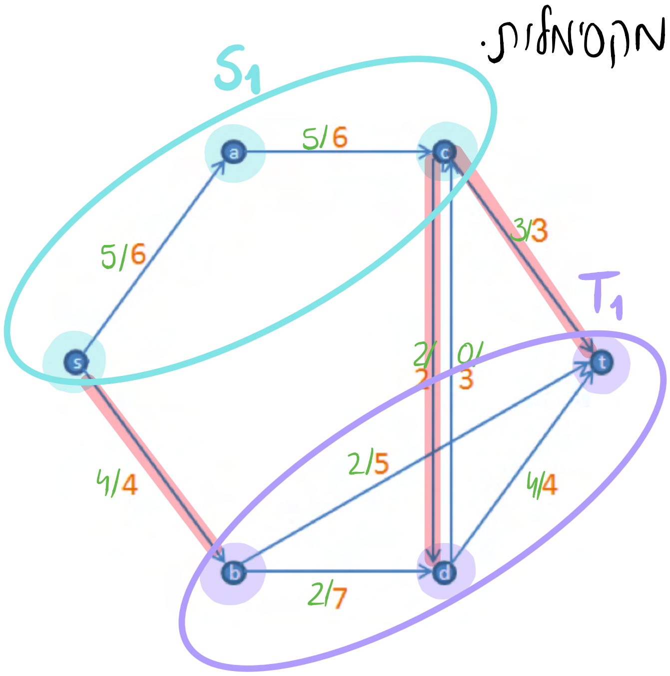
משמעות הטענה: קבוצת כל החתכים חוסמת מלמעלה את קבוצת השטפים של כל הזרימות החוקיות. משפט השטף והחתך מוסיף על טענה זו ומראה כי יש נק' מפגש בין שתי הקבוצות.



מסקנה: אם מצאנו זרימה f וחתך S,T כך ש- $|f|=C(S,T)$. אז מתקיים ש- f זרימת מקסימום וגם S,T חתך מינימום.

הוכחה: נניח בשלילה כי f לא מקסימלית, אז ישנה f' כך ש: $|f|<|f'|$ אז $C(S,T)=|f|<|f'|$ בסתירה לטענה.

נשתמש במסקנה כדי להוכיח שהזרימה הבאה מקסימלית.
נקח את החתך $(S_1,T_1)=(\{a,s,c\},\{b,d,t\})$
ונשים לב כי $C(S_1,T_1)=4+2+3=9$ הוא
קיבול החתך המינימלי בגרף. ובהתאמה
$|f|=4+2+3=9$ הזרימה בגלל שטף מקסימלי.



כל זה מובילות אותנו למשפט הבא:

משפט השטף והחתך - Max Flow Min Cut

קיימים זרימה f וחתך (S,T) כך ש- $|f|=c(S,T)$.

בעקבות משפט זה, ע"י הפעלת EK ניתן לחלץ חתך מינימלי

שימושים לחתך מינימלי ברשת זרימה

1. מציאת דרגת הקשירות של הגרף

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון. נסמן ב- $C(G)$ את המספר המינימלי של צלעות אשר הסרתן מהגרף הופכות אותו ללא קשיר.

כלומר, מס' הקשתות המינימלי שנצטרך להוריד על מנת להפוך את הגרף הקשיר לשני רכיבי קשירות שונים. נרצה למצוא את $C(G)$ עבור גרף G.

אלגוריתם:

1. נגדיר קבוצת קודקודים V (מגרף G) את הקשתות בגרף המקורי נשכפל בשני הכיוונים (על מנת להפוך את הגרף למכוון) ונסמן $\vec{E}$.
נגדיר קיבול $c(e)=1$ לכל $e\in\vec{E}$. נגדיר מקור $s\in V$ שרירותי:
2. לכל $t\neq s\in V$ נמצא חתך מינימלי ברשת בעזרת זרימה מקסימלית על הרשת $N=(V,\vec{E},s,t)$ ונסמן את הקיבולת שלו ב- C_t.
3. נחזיר את $\min_{t\neq s}\{C_t\}$.

נוכיח את נכונות האלגוריתם, כלומר ש- $C(G)=\min_{t\neq s}\{C_t\}$ בהוכחת:

טענה: $\min_{t\neq s}\{C_t\}\geq C(G)$

הוכחה: מכך שלכל $e\in\vec{E}$ מתקיים $c(e)=1$, לכל חתך (S,T) מתקיים שהקיבול שלו שווה למספר הצלעות שבו. בנוסף, מהגדרת חתך, הסרת כל צלעות החתך מפרידה את הגרף לשני רכיבי קשירות. לכן לכל $t\neq s$ מתקיים

$C_t \leq C(G)$ ולכן בפרט $\min_{t \neq s}\{C_t\} \geq C(G)$.

טענה: $\min_{t \neq s}\{C_t\} \leq C(G)$

הוכחה: מהגדרת $C(G)$, קיימת קבוצה $E' \subseteq E$ בגודל $C(G)$ אשר הסרתה מהגרף המקורי מפרידה אותו לשני רכיבי קשירות (שניים בהכרח, ממינימליות $C(G)$). נסמן ב-S את קבוצת הקודקודים ששייכת לרכיב הקשירות המתאים ל-$s \in V$ ונסמן $T = V \setminus S$.

יהי $t_0 \in T$. כל צלע בין S ל-T, בגרף המקורי (הלא מכוון), נמצאות בהכרח בקבוצה E', אחרת הסרת E' לא הייתה מפרידה את הגרף לשני רכיבי קשירות לכן, מספר הצלעות בגרף המקורי בין S ל-T קטן או שווה ל-$|E'|$.

ברשת הזרימה (V, E, c, s, t_0), מספר הצלעות המכוונות מ-S ל-T שווה למספר הצלעות הלא מכוונות בין S ל-T בגרף המקורי, ולכן קטן שווה מ-$|E'|$.

לכן, קיבול החתך (S, T) קטן או שווה ל-$|E'| = C(G)$.

כלומר, $C(G) \geq C_{t_0} = C(S,T)$ ולכן בפרט $\min_{t \neq s}\{C_t\} \leq C_{t_0} \leq C(G)$.

לכן מסה"כ קיבלנו כי $\min_{t \neq s}\{C_t\} = C(G)$.

ניתוח זמן ריצה: בנינו $O(|V|)$ רשתות זרימה, כאשר בכל אחת מס' הקודקודים כגרף המקורי, ופי 2 צלעות מהגרף המקורי.

1. בניית כל רשת - $O(|E|)$
2. מציאת חתך מינימלי בכל רשת (הרצת EK) - $O(|V||E|^2)$

לכן מסה"כ נקבל $O(|V|^2|E|^2)$.

2. בעיית המשקיעים והשחקנים

<u>קלט:</u> $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ קבוצת שחקנים, לכל שחקן משכורת s_i.

$B=\{b_1,\dots,b_n\}$ קבוצת משקיעים

לכל משקיע b_i נתונה קבוצה $A_i\subseteq A$ של השחקנים שהוא אוהב

ואם כל השחקנים ב-A_i ישחקו בסרט הוא ישקיע סכום d_i.

<u>פלט:</u> תתי קבוצות $A'\subseteq A$ ו-$B'\subseteq B$

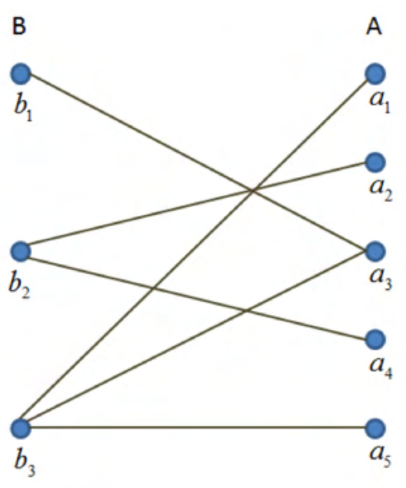
נגדיר: <u>חוקיות:</u> לכל $b_i\in B'$ מתקיים ש- $A_i\subseteq A'$

<u>אופטימליות:</u> הרווח של A',B' מקסימלי, כאשר הרווח מוגדר:

$$P(A',B')=\sum_{b_i\in B'} d_i-\sum_{a_i\in A'} s_i$$

<u>דוגמה:</u>

כאשר $n=5$ ו-$k=3$, והמשכורות הן אלו: $(s_1,\dots,s_5)=(70,150,200,80,100)$



משקיע	שחקנים שבהם הוא מעוניין	מוכן להשקיע
b_1	$A_1=\{a_3\}$	100
b_2	$A_2=\{a_2,a_4\}$	200
b_3	$A_3=\{a_1,a_3,a_5\}$	300

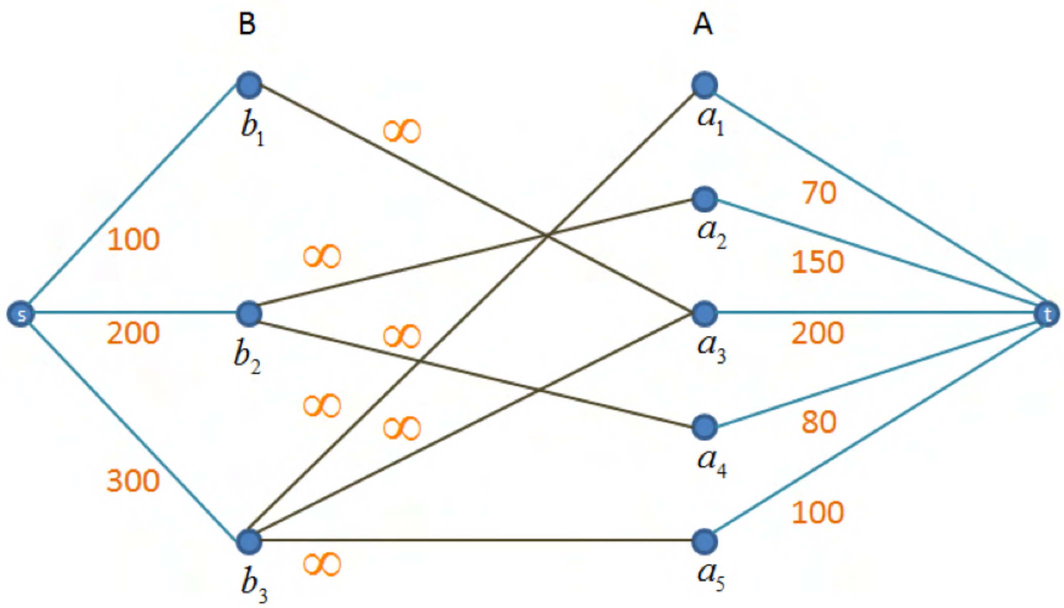
<u>אלגוריתם:</u>

1. נבנה רשת זרימה כך:

* $V=\{s,t\}\cup A\cup B$
* $E=\{(s,b_i)\mid b_i\in B\}\cup\{(b_i,a_j)\mid a_j\in A_i\}\cup\{(a_i,t\mid a_i\in A\}$
*

$$c(v,u)=\begin{cases} d_i & u=s,\ v\in B \\ \infty & u=b_i\in B,\ v\in A_i \\ s_i & u\in A_i,\ v=t \end{cases}$$

הרשת תראה כך:



2. נמצא חתך מינימלי ברשת, נסמנו (S,T)
3. נגדיר $A'=S\cap A$ ו-$B'=S\cap B$ ונחזיר את A',B'.

<u>הוכחת נכונות</u>: נגדיר התאמה חח"ע ועל בין קבוצות A',B' של משקיעים ושחקנים (לאו דווקא חוקיות) לבין חתכים ברשת שבנינו:

* בהינתן חתך (S,T) נגדיר $A'=S\cap A$ ו-$B'=S\cap B$.
* בהינתן $A'\subseteq A$ ו-$B'\subseteq B$ נגדיר את החתך: $S=\{s\}\cup A'\cup B'$ ו- $T=V\setminus S$.

<u>טענה</u>: יהיו (S,T) חתך ו-A',B' קבוצות המתאימות לו (לפי ההתאמה הנ"ל) אזי מתקיים A',B' חוקיות $\Leftrightarrow$ $c(S,T)$ סופי!

<u>הוכחה</u>: $c(S,T)$ סופי $\Leftrightarrow$ אין צלעות מקיבול ∞ שחוצות את (S,T) $\Leftrightarrow$ לכל $b_i\in B$ מתקיים $A_i\subseteq A$ $\Leftrightarrow$ A',B' חוקיות.

טענה: יהי (S,T) חתך מקיבול סופי ו-A',B' קבוצות חוקיות המתאימות לו.
אזי מתקיים $C(S,T)=D-P(A',B')$ כאשר D הוא קבוע שלא תלוי בחתך או ב-A',B'.

הוכחה:

$$C(S,T) \overset{*}{=} \sum_{b_i\in B} C(s,b_i) + \sum_{a_i\in A'} C(a_i,t) = \sum_{b_i\notin B} d_i + \sum_{a_i\in A'} s_i =$$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i - \sum_{b_i\in B} d_i + \sum_{a_i\in A'} s_i = \sum_{i=1}^{k} d_i - \left(\sum_{b_i\in B} d_i - \sum_{a_i\in A'} s_i\right) = \sum_{i=1}^{k} d_i - P(A',B')$$

כאשר $*$ נובע מכך שאין צלעות מהצורה (b_i,a_j) בחתך, שכן החתך מקיבול סופי ו-$D=\sum_{i=1}^{k} d_i$.

כעת נוכיח את הנכונות על פי הטענות:

חוקיות: הקבוצות A',B' מתאימות לחתך מינימלי, וחתך מינימלי ברשת כזו הוא בהכרח מקיבול סופי (כי קיים חתך מקיבול סופי, למשל $(\{s\},V\setminus\{s\})$).
ומכאן, לפי הטענה הראשונה - A',B' חוקיות.

אופטימליות: נניח בשלילה שיש A'',B'' חוקיות כך ש-$P(A'',B'')>P(A',B')$.
יהי (S'',T'') החתך המתאים ל-A'',B'', לפי ההתאמה שהגדרנו. ומכאן ש:
$C(S'',T'') \overset{*}{=} D-P(A'',B'') \overset{*}{<} D-P(A',B') = C(S,T)$ כאשר $*$ נובע מהטענה השנייה.
וזו מסתירה למינימליות של (S,T). ולכן $P(A',B')$ אכן מקסימלי!

זמן ריצה: בנינו רשת שבה $V=O(n+K)$ ו-$E=O(nK)$ ולכן:

1. בניית הרשת עולה $O(n\cdot K)$
2. מציאת חתך מינימלי עפ"י E-K הוא $O(|E|^2|V|)$ ומצאנו $O(n^2K^2(n+K))$ (<u>חשוב להמיר</u>)
3. הגדרת הקבוצות A' ו-B': $O(n+K)$

סה"כ קיבלנו $O(n^2K^2(n+K))$

11.5.21 יום שלישי

מקרא:
דוגמה - ● הוכחה - ●
טענה - ● משפט - ●
הגדרה - ●

אלגוריתמים
שבוע 8 - תרגול 8

תכנון ליניארי

<u>הגדרה</u>: בעיית אופטימיזציה תקרא בעיית תכנון ליניארי (LP) אם ניתן לכתוב אותה בצורה הבאה:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$$
$$s.t \quad Ax \le b,\ x \ge 0$$

כאשר x וקטור של n משתנים ממשיים $c \in \mathbb{R}^n$-ו $b \in \mathbb{R}^m$ ו- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

<u>הערות</u>: 1. הצורה הנ"ל נקראת "הצורה הסטנדרטית" לבעיית LP. ישנן צורות שונות ששקולות לצורה הסט' (נראה בתרגול).

2. אי השיוויונים $Ax \le b$ ו- $x \ge 0$ מוגדרים כאי שיוויון לכל קואור' בנפרד (element-wise).

3. כוהי בעיית אופט' קלאסית כמו שראינו עד כה בקורס. קבוצת הפתרונות החוקיים הם הוקטורים $x \in \mathbb{R}^n$ המקיימים את m אי-השיוויונים $Ax \le b$, ואנו מחפשים את הפתרון החוקי עבורו $c^T x$ מקסימלי.

4. ניתן להגדיר את בעיית התכנון הליניארי גם כבעיית מינימיזציה:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \\ s.t\ Ax \le b,\ x \ge 0 \end{array} \right.$$
ע"י שינוי סימן ב- A, b, c.

<u>הגדרה</u>: יהי וקטור $a \in \mathbb{R}^n$ וסקלר $b \in \mathbb{R}$

הקבוצה $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$ נקראת על-מישור Hyperplane

הקבוצה $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \le b\}$ נקראת חצי-מרחב Half Space

<u>הגדרה</u>: קבוצת נקודות ב- $\mathbb{R}^n$ שניתן לתאר בצורה $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ כאשר $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ו- $b \in \mathbb{R}^m$ נקראת פוליהדרון.

נשים לב, שקבוצת הפתרונות לבעיית תכנון לינארי היא פוליהדרון, הבנוי מחיתוך של $m+n$ חצאי מרחבים (כאשר m נובע מהדרישה ש- $Ax\le b$ ו-n נובע מהדרישה ש- $x\ge 0$)

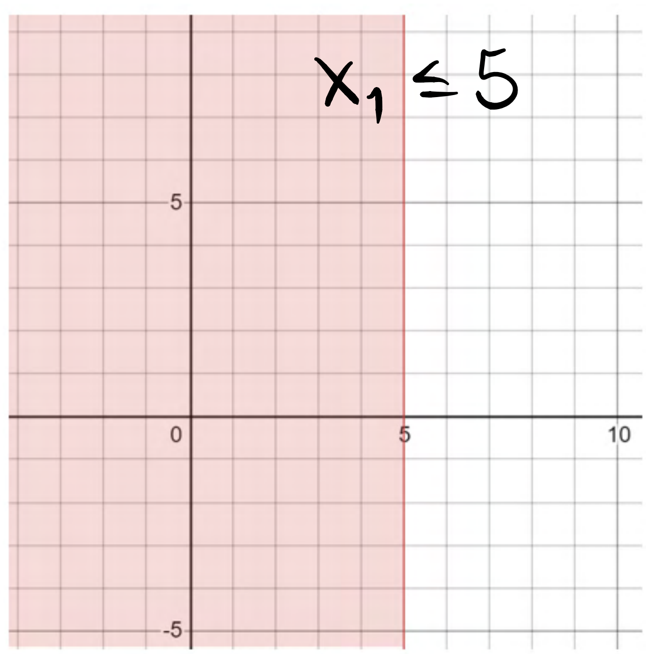
דוגמה:

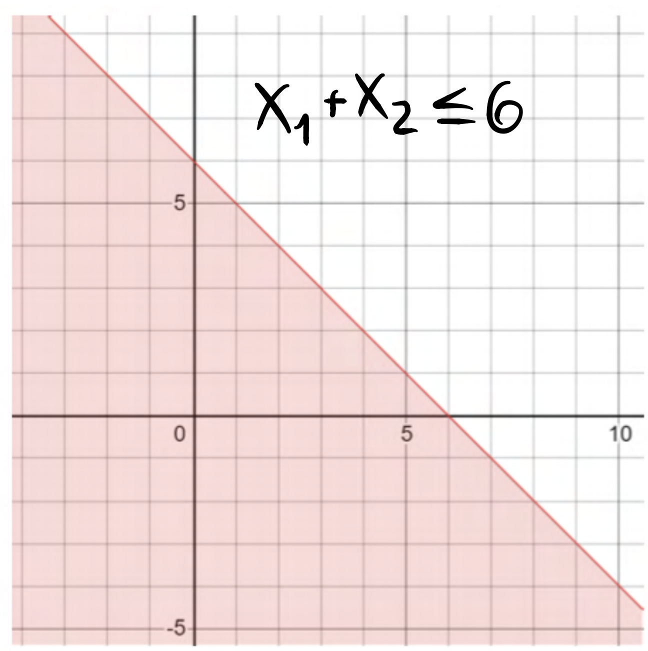
נניח $x\in\mathbb{R}^2$, ו- A,b,c מוגדרים להיות

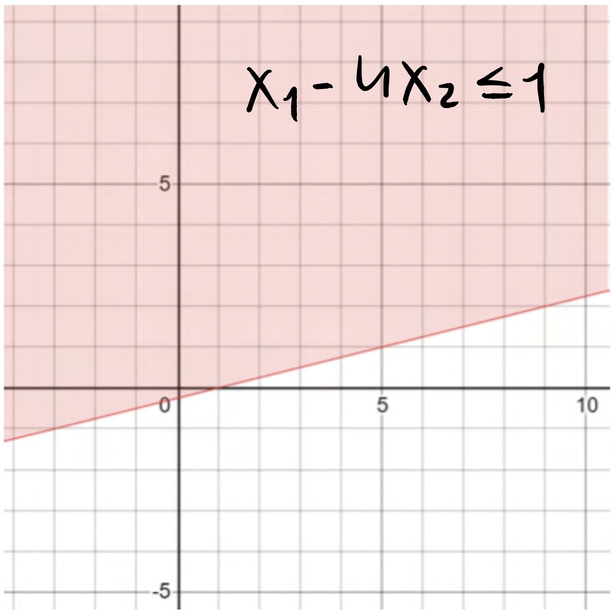
$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ -2 & 2\\ 1 & -4\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}6\\5\\4\\1\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

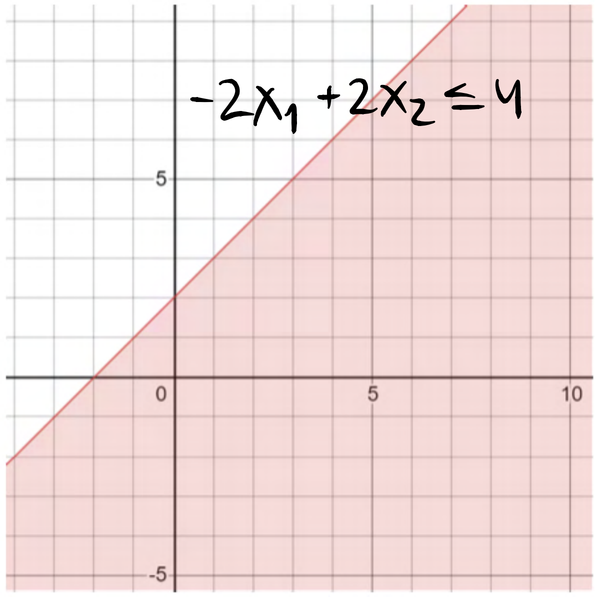
נפרק את המטריצה והווקטור ל-4 אי שוויונים:

$$Ax\le b \iff \begin{cases} x_1+x_2\le 6\\ x_1\le 5\\ -2x_1+2x_2\le 4\\ x_1-4x_2\le 1\end{cases}$$

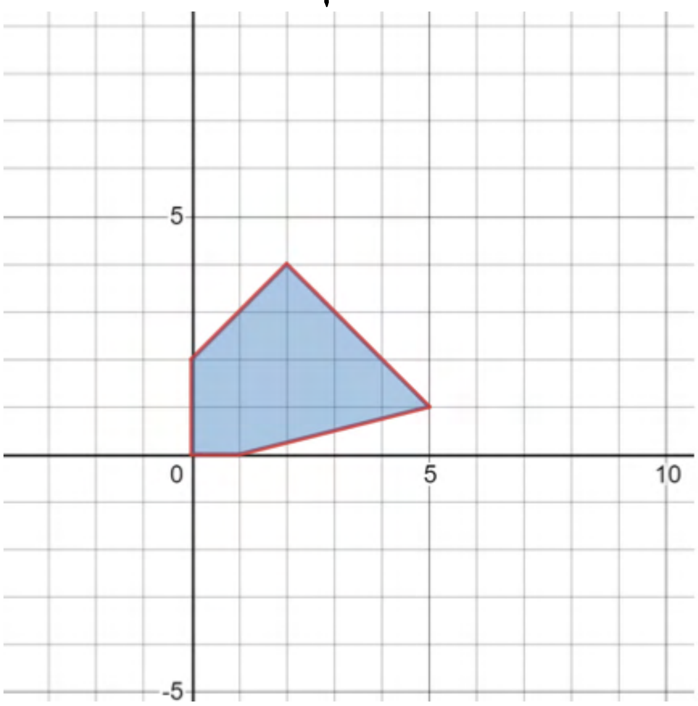








כאשר נסתכל על החיתוך של כולם יחד עם הדרישה ש-
$x_1,x_2\ge 0$ נקבל את הפוליהדרון:



מתוך קבוצה זו, אנו מחפשים את הוקטור $X=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}$ הממקסם את $C^TX=3X_1-X_2$
כלומר, נחפש את $\max\limits_{x_1,x_2}\{3x_1-x_2\}$, ניתן לראות ש- $X_1=5,\ X_2=1$
ממקסמות את הביטוי!

פתרון בעיות לבעיית תכנון ליניארי

ידועים מס' אלג' שפותרים את בעיית התכנון הליניארי בזמן פולינומי בגודל הקלט $(m+n)$. עם זאת, בקורס לא נראה אלג' כזה. אנו נניח שנתונה לנו קופסה שחורה שפותרת בעיות LP בזמן פולינומי ב-$m+n$.

בעיית התרמיל השברי כבעיית תכנון ליניארי

<u>תזכורת:</u> נתונים n פריטים שלכל אחד משקל w_i וערך v_i, נחפש וקטור $x\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $x_i\le 1$ וגם $\sum w_i x_i \le W$ המקסם את $\sum v_i x_i$.

x_i מבטא כמה "לקחנו" מהפריט ה-i

ובאופן שקול:

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$\text{s.t} \quad \underbrace{\sum w_i x_i \le W}_{Ax\le b}, \ \underbrace{0\le x_i \le 1}_{x\ge 0}$$

נרצה להגדיר את הבעיה כבעיית LP ולכן ננסה להגדיר את A,b,c:

$$A=\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ & & I_n & \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} W \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

<u>שאלה:</u> האם ניתן לפתור את בעיית התרמיל השלם?

- לא, היינו צריכים להוסיף אילוצים: $x_i\in\mathbb{Z}$.

לבעיה כזו קוראים תכנון ליניארי בשלמים - ILP.

הגדרה: בעית אופטימיזציה תקרא ILP אם ניתן לכתוב אותה כך:

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x$$

$$\text{s.t } Ax\le b,\ x\ge 0,\ x\in\mathbb{Z}$$

חלק גדול מהבעיות שמעניינות אותנו ניתנות להצגה ב- ILP.

לצערנו, מסתבר ש- ILP היא בעיה NP-קשה.

(סימנו d במקום c שבבעיות LP כדי לא להתבלבל עם הקיבול)

שטף מקסימלי כבעיית תכנון לינארי

בהינתן רשת זרימה $N=(V,E,c,s,t)$, נסמן לכל $(i,j)\in E$, $c_{i,j}$ הקיבול של (i,j). באופן דומה $f_{i,j}$ הזרימה של (i,j). נשים לב שאנו רוצים למקסם את $\sum_{(s,i)\in E} 1\cdot f_{s,i}$. נחפש $x\in\mathbb{R}^{|E|}$ ונגדיר את פונקציית המטרה להיות $\max_f d^T x$

ובאופן שקול: $\max_{f\in\mathbb{R}^{|E|}} \sum_{(s,i)\in E} 1\cdot f_{s,i}$, או באופן מטריציוני $\max_f d^T x$:

כאשר $x=\begin{bmatrix} | \\ f_{i,j} \\ | \end{bmatrix}$ ו- $d_{i,j}=\mathbb{1}[i=s]$

אילוצים:

נרשום את <u>אילוץ הקיבול</u>: נדרוש שלכל (i,j): $f_{i,j}\le c_{i,j}$

נדרוש גם $f_{ij}\ge 0$ (מהדרישה ש- $x\ge 0$)

ואת <u>אילוץ שימור החומר</u> נכתוב כך:

$$\forall i\in V/\{s,t\}\ \sum_{j\in V} f_{ji}=\sum_{j\in V} f_{ji} \iff \forall i\in V/\{s,t\}\ \sum_{j\in V} f_{ji}-\sum_{j\in V} f_{ji}=0$$

בעיה: LP דורש אי-שוויונים וכאן יש לנו שוויון.

פתרון $a=0 \iff a\le 0 \wedge a\ge 0 \iff a\le 0 \wedge -a\le 0$

לכן במקרה שלנו, שימור החומר יתורגם לאילוצים:

1 $\sum_{j\in V} f_{ij} - \sum_{j\in V} f_{ji} \le 0$

$\forall i\in V/\{s,t\}$

2 $\sum_{j\in V} f_{ji} - \sum_{j\in V} f_{ij} \le 0$

שלב שני - בעיה דומה

נתבונן בבעיה דומה, מה באו לידי ביטוי רק האילוץ השני של שימור החומר: 2 $\sum_{j\in V} f_{ji} - \sum_{j\in V} f_{ij} \le 0$, כלומר - נסיר את האילוץ הראשון.

נטען כעת שהערך המקסימלי של זרימה בבעיה זו שווה לערך זרימה מקסימלי בבעיה המקורית.

למה? - אם נסתכל שוב על 2: $\sum_{j\in V} f_{ji} \le \sum_{j\in V} f_{ij}$ $\forall i\in V/\{s,t\}$

כלומר, סכום הזרימה בצלעות הנכנסות ל-i תהיה לכל היותר סכום הזרימה בצלעות היוצאות מ-i. המשמעות היא שברשת זו אנו מאפשרים לקודקודים לייצר עוד חומר יש מאין (טומנים לא הגיוני פיזיקלית) אך לא משנה את ערך הזרימה - שמוגדר ע"י הצלעות היוצאות מ-s.

תחת הנחה זו, בהינתן פתרון לבעיה הנוכחית, ניתן לחזור בקלות לבעיה המקורית כאשר לכל קודקוד שלא עומד בעקרון שימור החומר, נקטין את הזרימה באחת (או יותר) הצלעות היוצאות ממנו. ומכיון, ניתן להפטר מאילוצים מהצורה: 1 $\sum_{j\in V} f_{ij} - \sum_{j\in V} f_{ji} \le 0$ ולקבל בעיה שקולה.

* השינוי הנה יוצר למן ריצה קצר יותר ברמה הפרקטית (אסימפטוטית לא).

בעיית הזרימה הסטנדרטית:

אנו מחפשים את:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^{|E|}} d^T x$$
$$s.t \quad Ax \le b \, , \, x \ge 0$$

כאשר:

$$A = \begin{bmatrix} I_{|E|} \\ \hdashline M \in \mathbb{R}^{2(|V|-2) \times |E|} \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} | \\ c_{ij} \\ | \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} | \\ c_{ij} \\ | \end{matrix}}\right\} |E| \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} 2(|V|-2) \end{matrix}$$

מטריצה המייצגת את האילוצים של שימור החומר

$$d_{ij} = \mathbb{1}[i=s]$$

נגדיר את M:

$$M_{\ell,k} = \begin{cases} +1 & \exists u \in V \quad k=(u,\ell) \in E \\ -1 & \exists u \in V \quad k=(\ell,u) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ו-X יהיה המזרימה:

$$X = \begin{bmatrix} | \\ f_{ij} \\ | \end{bmatrix}$$

זמן ריצה: נסמן ב-$f(m+n)$ את זמן הריצה של פתרון בעיית LP עם $m+n$ אילוצים.

- הגדרת d עולה $O(|E|)$.
- הגדרת b עולה $O(|V|+|E|)$
- הגדרת A עולה $O(|E|\cdot|V|)$
- פתרון LP עולה $O(f(|E|+|V|))$

סך הכל:

$O(|E|\cdot|V| + f(|E|+|V|))$.

משולש = קליקה בגודל 3

בעיית הסרת המשולשים

<u>קלט:</u> גרף לא מכוון $G=(V,E)$

<u>פלט:</u> תת קבוצה מינימלית של צלעות $S\subseteq E$ שהסרתן תשאיר גרף $G'=(V,E/S)$ ללא משולשים.

*זו בעיה NP-קשה.

ILP

נציג בעיה זו כבעיית תכנון לינארי בשלמים:
נגדיר וקטור משתנים $x\in\{0,1\}^{|E|}$ המציין לכל צלע e, האם היא מקבוצת הצלעות S או לא.
נסמן $x_e=1$ אם $e\in S$ ו- $x_e=0$ אם $e\notin S$.
*באופן כזה, נשים לב ש- $|S|=\sum_{e\in E} x_e$ ולכן נגדיר את פונקציית המטרה להיות המינימום של סכום זה.
נדרוש לכל משולש ב-G, שלפחות אחת הצלעות בו מקיימת $x_e=1$, כלומר נסירה - המשולש "נשבר".

בסה"כ נקבל את התכנית הלינארית הבאה:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^{|E|}} \sum_{e\in E} x_e$$

$$\forall u,v,w\in V \quad s.t \quad (u,v),(v,w),(w,u)\in E$$

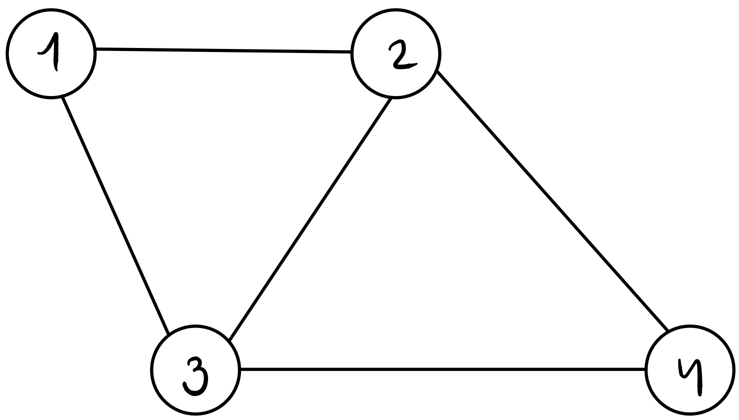
$$x_{(u,v)}+x_{(v,w)}+x_{(w,u)}\geq 1$$

$$\forall e\in E \quad x_e\in\{0,1\}$$

$$\forall e\in E \quad x[e]\in\mathbb{Z}$$

*על מנת לפתור אותה נראה בהמשך שיטה באמצעות אלגוריתמי קירוב.

דוגמה לזיווג בעלות כלו:



$$x \in \mathbb{R}^5$$

$$c = \mathbb{1}^5$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (1,2) & (1,3) & (3,4) & (3,2) & (2,4) \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & -I & & \\ & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{כמות משולשים} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} |E| \end{matrix}$$