בעיית שיבוץ קטעים ממושקלים

נתונים n קטעים על הישר הממשי $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ כאשר $I_j = (a_j, b_j)$.
נתונים גם משקלים לקטעים, נסמנם $w_1, w_2, \dots, w_n$.
אנו רוצים למצוא קבוצת קטעים לא חופפים שמשקלה <u>מקסימלי</u>.

רעיון: נניח שהקטעים ממוינים לפי זמן הסיום $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$.
לכל j, נתבונן בבעיה של קטעים עד לנק' זו. מדובר בבעיה של קטעים מהקבוצה $\{I_1, \dots, I_j\}$.

נגדיר את:

$$S_j = \boxed{\text{שיבוץ של קטעים מ-}\{I_1,\dots,I_j\}\text{ שמשקלו מקסימלי}}$$

המטרה שלנו היא לחשב את S_n.
נסמן $j_i = \arg\max\{b_j \ \text{s.t}\ b_j \le a_i\}$

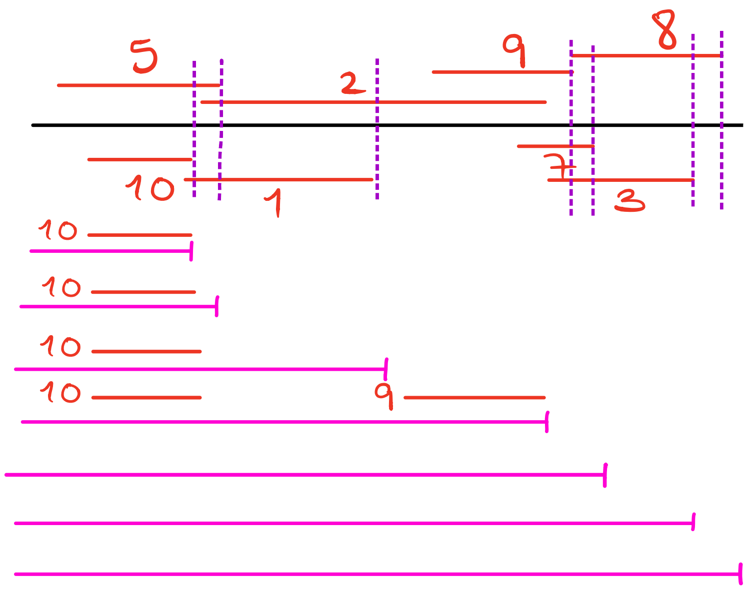
$$S_1 = \{I_1\} \qquad S_i = \begin{cases} \{I_i\} \cup S_{j_i} & w(S_{j_i}) + w(i) \ge w(S_{j_i - 1}) \\ S_{i-1} & \text{else} \end{cases}$$

יום ראשון 25.4.21

מקרא:
- דוגמה -
- הוכחה -
- טענה -
- משפט -
- הגדרה -

אלגוריתמים
שבוע 5 - הרצאה 10
תכנון דינמי

דוגמה לבעיית שיבוץ קטעים ממושקלים



מרחק עריכה

קלט: שתי מחרוזות x ו-y מעל א"ב Σ

פלט: המספר המזערי של פעולות עריכה (הוספת אות, מחיקת אות, החלפת אות באות אחרת) אשר דרושות על מנת להפוך את x ל-y.

דוגמאות

1. מילה שגויה: הצתעצות ← הצ~~ת~~טעצות ← הצטעצעות

 החלפה, הוספה

 מילה מתוקנת: הצטעצעות

תיקון אוטומטי בווטסאפ

בעיית אופטימיזציה: מצא סדרה מינימלית של פעולות עריכה שתעביר את המילה השגויה למילה מתוקנת

השוואות DNA

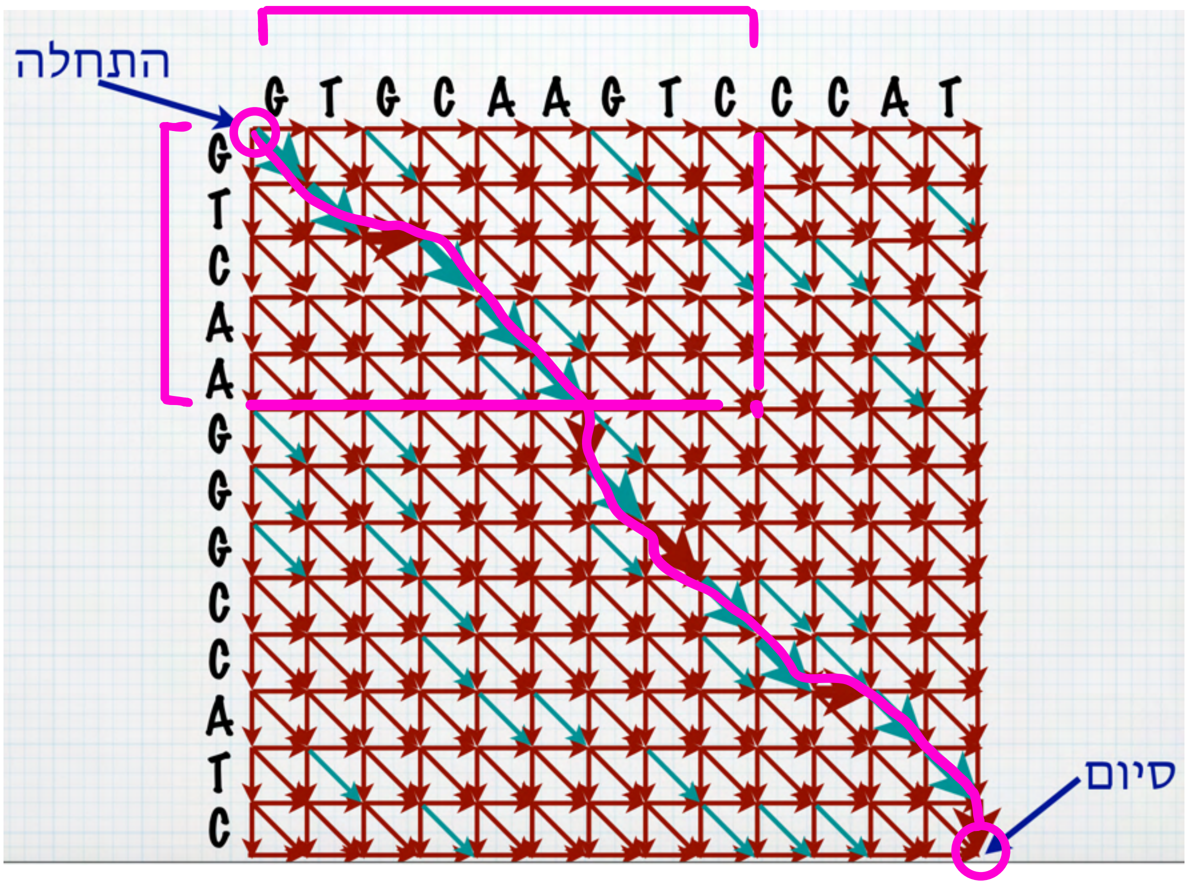
2

דנ"א של אדם: GTGCAAGTCCCAT ⟵ GTGCAAGGTCCCATC

(מחיקה, הוספה, החלפה G, מחיקה, הוספה)

דנ"א של שימפנזה: GTCAAGGGCCATC

הצגה בעזרת גרף:



המטרה: למצוא את המסלול הקל ביותר מנק' ההתחלה לנק' הסיום. אם נקודה מחוברת למחרוזת למעלה X ולמחרוזת משמאל Y, אז נסתכל על מס' הפעולות לפי הפעולות המינימלית שנצטרך לבצע על מנת להגיע מ-X ל-Y.

סימונים:

צלע ימינה - מחיקה

צלע למטה - הוספה

צלע אלכסונית - החלפה בין שתי אותיות (אם זו אותה אות נסמן אלכסונית ירוקה).

חץ אדום - פעולה שעולה 1

חץ ירוק - פעולה שעולה 0

יום שלישי 27.4.21

מקרא:

- הוכחה
- דוגמה
- משפט
- טענה
- הגדרה

אלגוריתמים
שבוע 5 - הרצאה 11
תכנון דינמי

הגדרת הגרף:

המחרוזת החדשה   המחרוזת ההתחלתית

$G=(V,E)$, $|X|=m$, $|Y|=n$

$V=\{0,1,\dots,m\}\times\{0,1,\dots,n\}$

כאשר ב-$\{0,1,\dots,m\}$ מוכלת רישא של המחרוזת X וב-$\{0,1,\dots,n\}$ מוכלת רישא של המחרוזת Y.

$$E=\{((i,j),(i+1,j)) \mid 0\le i\le m \wedge 0\le j\le n\}\ \cup$$ מחיקות

$$\{((i,j),(i,j+1)) \mid 0\le i\le m \wedge 0\le j\le n\}\ \cup$$ הוספות

$$\{((i,j),(i+1,j+1)) \mid 0\le i\le m \wedge 0\le j\le n\}$$ החלפות

* הצלעות המאוזנות והמאונכות תמיד עולות 1 והאלכסוניות עולות 1 אם בוצעה החלפה אמיתית של אות באות אחרת ואז החלפה ריקה כמו 'G' עם 'G' שתעלה 0.

* כל צלע כזו מתקדמת באחת המחרוזות או בשתיהן ולכן אורך מקסימלי של מסלול כזה הוא $m+n$. כל מסלול כזה מתאים לסדרת פעולות לדרכה X-ל Y.

האלגוריתם של דייקסטרה: מספר הצמתים הוא $(m+1)\times(n+1)$ ומספר הצלעות הוא באותו סדר גודל של מספר הצמתים, כי לכל היותר ישנן 3 צלעות מכל נקודה.
לכן דייקסטרה יעבוד כאן בזמן ריצה של $O(nm\log(nm))$.

האלגוריתם שלנו לפתרון הבעיה:

נחזיק טבלה D כך שהערך ה-$D[i,j]$ הוא המשקל המינימלי מ-$(0,0)$ ל-(i,j).
נחשב את המרחקים של כל הקודקודים בגרף מקודקוד התחלתי.
כאן, בניגוד לדייקסטרה, ישנו סדר שבו נעבור על הקודקודים.
ניתן למלא את הערכים לפי שורות או לפי עמודות כי לכל נקודה יש 3 צלעות שמהן אפשר להגיע אליה והן מעליה או מימינה.
בצורה כזו, אם נלך לפי סדר השורות ועל כל שורה נעבור משמאל לימין, חישוב כל ערך יסתמך על ערכים שכבר חישבנו + זמן קבוע.

האלגוריתם:

Edit_Distance(x,m,y,n):

1. for $i=1$ to m: $D[i,0]=i$ // אתחול העמודה הראשונה
2. for $j=1$ to n: $D[0,j]=j$ // אתחול השורה הראשונה
3. for $i=1$ to m:
4. for j to n:
5. $D[i,j]=\min\{D[i-1,j]+1,\ D[i,j-1]+1,\ D[i-1,j-1]+\underbrace{[X_i\neq Y_j]}_{\text{אינדיקטור}}\}$
6. return $D[m,n]$

הסבר על שורה 5 ובחירת המינימום:

$D[i-1,j]+1$ - מסתכלים על הנק' מעל, ומוסיפים את האות ה-i.

$D[i,j-1]+1$ - מסתכלים על אותה שורה, על המקום הקודם ומורידים את האות ה-j.

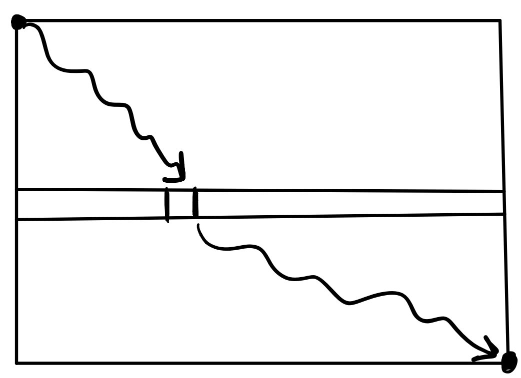
$D[i-1,j-1]+[X_i \neq Y_j]$ - מסתכלים בעמודה הקודמת ובשורה הקודמת (אלכסון) ומוסיפים 1 אם מתבצעת החלפה אמיתית ו-0 אחרת.

האיבר האחרון, $D[m,n]$ ייתן לנו בדיוק את האורך של הדרך הכי קצרה לביצוע המשימה.

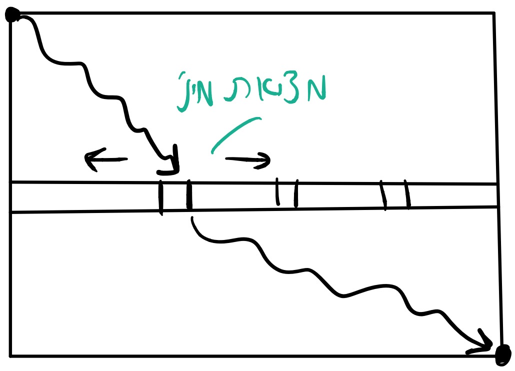
סיבוכיות זמן ומקום:

תהיה $O(n \cdot m)$, כאשר ניתן לשפר ע"י שמירת השורה שמעל הפתרון שלנו.
אומנם כך שמרנו את הפעולות שעשינו בדרך זו, אך יכולנו לעשות זאת ע"י שמירה של טבלה נוספת ששומרת מאיפה הגענו בכל שלב, מסיבוכיות מקום של $O(mn)$.

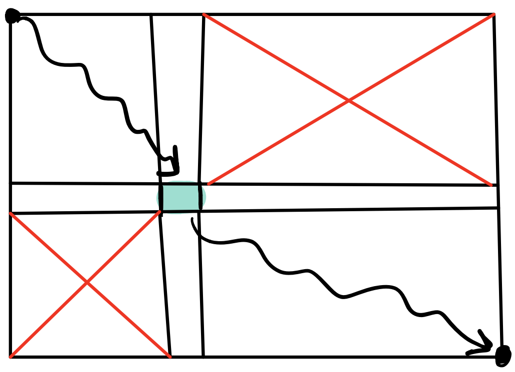
ניתן לשפר את זה ל-$O(\min\{m,n\})$ באופן הבא:
נחשב את הטבלה מההתחלה עד השורה האמצעית ב-$O(m)$,
לאחר מכן נחשב מהשורה האמצעית לסוף (עוד $O(m)$).



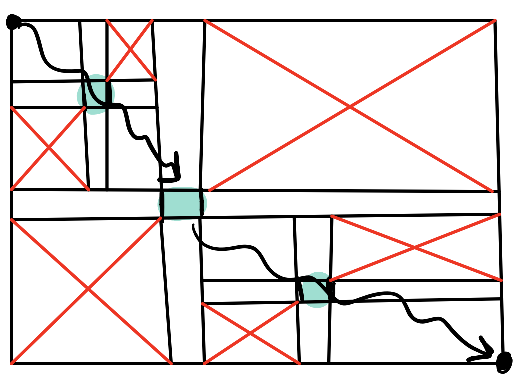
כעת נמצא את המרחק המינימלי מבין כל המסלולים שנפגשים בשורה האמצעית תוך מעבר עליה.



לאחר מציאתה, ניתן לפסול את המיקומים בהם המסלול בטוח לא עובר בהם.



ולכן ניתן כעת להסתכל על חלק הקטן יותר בטבלה. במילוי הטבלה "שימנו" ב- $O(mn)$ וכעת ישלנו 2 טבלאות ששטחן קטן בחצי מהטבלה הקודמת, נמשיך באופן כזה כך ששטח הטבלה ממשיך לרדת בחצי:



סיבוכיות הזמן לא תשתנה, אך סיבוכיות המקום כן, כי איננו שומרים את השורה מההתחלה ואז איבר בודד בה ולכן ניתן לזרוק חצי ממנה וכן הלאה..

מצבנו כיום ביחס לזמן הריצה של האלגוריתם

אם הא'-ב' אינו חסום אז הזמן המיטבי שנוכל להשיג כיום.
אם הא'-ב' הוא סופי, אז אפשר לשפר לזמן לוגריתמי כי נארוז את הביטים במילה באורך $\log(n)$ ואז נניח שפעולות חשבון על מספר לוגריתמי של ביטים הוא $O(1)$ - אך זה אינו פתרון פורמלי מדויק.

הוכחת נכונות האלגוריתם

נוכיח באינדוקציה על סדר החישוב של איברי D, שלכל i,j בתחום, הערך $D[i,j]$ הוא המשקל המינימלי של מסלול מ-$(0,0)$ עד (i,j).

<u>בסיס</u>: האתחול מבטיח נכונות עבור הזוגות (i,j) כאשר $i=0$ או $j=0$, יש רק מסלול אחד שמוביל לעמודה או לשורה הראשונה.

<u>צעד</u>: כל מסלול ל-(i,j) חייב לעבור דרך אחד הצמתים $(i-1,j)$ או $(i,j-1)$ או $(i-1,j-1)$ ומסלול כזה, עד הצומת הקודם אכן מסלול מינימלי מה"א. להוסיף את הקשת הנוספת ועלותה לכל אחת מהאפשרויות מבטיח שגם $D[i,j]$ מינימלי כי רישא של מסלול קל ביותר חייב להיות קל ביותר.

שידוך מושלם בגרף דו-צדדי

נתון גרף סופי, לא מכוון ודו-צדדי $G=(V,E)$.
<u>קבוצת הקודקודים</u>: $V \cup U$ כך ש- $U \cap V = \emptyset$
<u>קבוצת הקשתות</u>: E כך שלכל $e \in E$ $|e \cap U|=1$ וגם $|e \cap V|=1$.

<u>הגדרות</u>:

* עבור $u \in U$, $N(u)$ הוא קבוצת שכני u.
* אם $U' \subseteq U$ אז $N(U')=\bigcup_{u \in U'} N(u)$.

* שידוך ב-G היא קבוצת קשתות $M \subseteq E$ כך שכל צומת של G נוגעת לכל היותר קשת אחת מ-M. (הקבוצה הריקה היא שידוך).

* שידוך M ״יקרא״ שידוך מושלם אמ״ם $|U|=|M|$, כי M נוגעת בכל הקודקודים ב-U וכל הקשתות הן רק בין U ל-V אז נוגעת בכל הקודקודים ב-V (אם הם באותו גודל).

<u>משפט Hall</u>

בגרף G ישנו שידוך מושלם אמ״ם לכל $U' \subseteq U$ מתקיים $|U'| \leq |N(U')|$.

בשביל הוכחת המשפט נגדיר הגדרה חדשה:
<u>הגדרה</u>: בהינתן M, מסלול פשוט שבו הקשתות לסירוגין מ-M ו-E/M ״יקרא״ מסלול מתחלף.

הוכחה:

כיוון ראשון הוא טריוויאלי, אם נניח שקיים ב-G שידוך מושלם M, אז לכל צומת $u\in U$ קיים $M(u)\in V$ ש-u משודך לו וכל ה-$M(u)$ האלו שונים זה מזה (כל צומת בצד שמאל משודך לצומת אחר בצד ימין).
כלומר, לכל $u,u'\in U$ שעבורם $u\neq u'$ גם $M(u)\neq M(u')$. תהי $U'\subseteq U$.
הקבוצה $\{M(u) \mid u\in U'\}$ מוכלת ב-$N(U')$ ולכן מתקיים:
$|U'| = |\{M(u)\mid u\in U'\}| \le |N(U')|$ כנדרש.

הכיוון השני מורכב יותר. נניח ש-M הוא שידוך מקסימלי ב-G, כלומר, אין שידוך גדול ממנו. נניח ש-M לא שידוך מושלם, אך לכל $U'\subseteq U$ מתקיים $|U'|\le|N(U')|$. בפרט, אנו מניחים שקיים $u\in U$ שאיננו משודך.

נמשיך את ההוכחה בשיעור הבא...

יום ראשון 2.5.21

מקרא:
דוגמה -
הוכחה -
טענה -
משפט -
הגדרה -

אלגוריתמים
שבוע 6 - הרצאה 12
שידוכים ורשתות זרימה

תזכורת:

משפט Hall

בגרף G ישנו שידוך מושלם אמ"מ לכל $U' \subseteq U$ מתקיים $|U'| \le |N(U')|$.

הוכחה:

כיוון ראשון הוא טריוויאלי, אם נניח שקיים ב-G שידוך מושלם M, אז לכל צומת $u \in U$ קיים $M(u) \in V$ ש-u משודך לו וכל ה-$M(u)$ האלו שונים כה מכה (לכל צומת בצד שמאל משודך צומת אחר בצד ימין). כלומר, לכל $u,u' \in U$ לפורים $u \neq u'$ גם $M(u) \neq M(u')$. תהי $U' \subseteq U$. הקבוצה $\{M(u) \mid u \in U'\}$ מוכלת ב-$N(U')$ ולכן מתקיים:
$|U'| = |\{M(u) \mid u \in U'\}| \le |N(U')|$ כנדרש.

הכיוון השני מורכב יותר. נניח ש-M הוא שידוך מקסימלי ב-G, כלומר, אין שידוך גדול ממנו. נניח ש-M לא שידוך מושלם, אך לכל $U' \subseteq U$ מתקיים $|U'| \le |N(U')|$. בפרט, אני מניחים שקיים $u \in U$ שאינו משודך.

המשך ההוכחה של משפט Hall:

u צומת לא משודך

כעת נתבונן באוסף המסלולים המתחלפים ש-u הוא קצה אחד שלהם. u בהכרח באחד הקצוות, אחרת היה משודך.

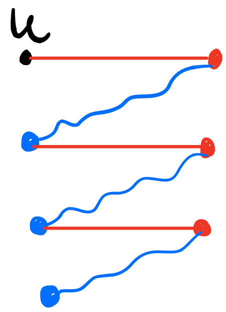
נסמן ב-U' את צמתי U (כולל u) שמשתתפים במסלולים
מתחלפים אלו. נסמן ב-V' את קבוצת הצמתים ב-V שמשתתפים
באוסף כזה. עפ"י הנחת המקסימליות של M, לא ייתכן מסלול מתחלף
שלא ניתן להאריכו ושקצהו השני ב-V' (כי אם יש מסלול כזה, אז זה
דרך מסלול מאורך אי זוגי) כי אז יש בו יותר קשתות לא ב-M
מאשר ב-M וניתן להגדיל את השידוך M ע"י החלפה, בסתירה להנחה.

להוריד את הכחולות ולהוסיף את האדומות

מקרא צבעים:

- לא בשידוך

- בשידוך



כל הצמתים האדומים משודכים
אחרת M לא היה מקסימום

מסקנה: כל צמתי V' משודכים לצמתים ב-U'.

ובנוסף שכל צמתי $U'\setminus\{u\}$ משודכים לצמתי V' וכל צומת שמשודך לצומת
ב-V' נמצא ב-U' לכן נוכל להסיק: $|V'|=|U'/u|$ אז $|V'|<|U'|$.
יהי $x\in U'$, אם קיים $y\in V'$ עבורו $\{x,y\}\in E$ אזי יש מסלול מתחלף
שמגיע מ-u ל-x (כי $x\in U'$) מסלול כזה מסתיים בקשת בשידוך.
הקשת $\{x,y\}\notin M$. אבל אז ניתן להאריך את המסלול באמצעות קשת $\{x,y\}$
וזו סתירה להגדרה של V' (כי V' מכיל את כל הצמתים שיש מסלול מתחלף
אליהם, ומצאנו צומת שלא שם).

מסקנה: $N(U')\subseteq V'$

ובפרט קיבלנו שהקבוצה U' מפרה את התנאי של משפט Hall, כי
$|U'|>|V'|\geq|N(U')|$, בסתירה. ולכן נקבל ש-M אכן שידוך מושלם.

□

האספקט האלגוריתמי של משפט הול

משפט Hall מרמז על אלגוריתם למציאת שידוך מושלם.
האלגוריתם מקבל כקלט גרף דו-צדדי ומחזיר שידוך מושלם או $U' \subseteq U$
עבורה $|U'| > |N(U')|$ (כאשר אין שידוך מושלם).

הרעיון של האלגוריתם:

1. נתחיל משידוך M ריק : $M \leftarrow \emptyset$
2. בכל איטרציה נגדיל את M באחד.
3. אם כל $u \in U$ משודך, M שידוך מושלם.
4. אם קיים $u \in U$ שאינו משודך, נמצא את U' ו-V' ע"י פרוצדורה דמוית BFS.

הפרוצדורה

G גרף דו-צדדי ולכן אין קשת בין שני צמתים באותה שכבה.
u נמצא בשכבה 0 (השכבות הזוגיות בצד שמאל, אי-זוגיות בצד ימין).
אם מגיעים לצומת y בשכבה אי-זוגית ואין המשך לשכבה הבאה,
אז מצאנו מסלול מתחלף מקסימלי מ-u ל-y וזה מאפשר את הגדלת M ב-1.
אם אין y כזה, אז הצמתים בשכבות האי-זוגיות הם כל השכנים של הצמתים
בשכבות הזוגיות. מכיוון שלכל הצמתים בשכבות האי-זוגיות יש המשך,
הם משודכים לצמתים בשכבות הזוגיות ולכן מספר הצמתים בשכבות
הזוגיות, הקבוצה U, גדול ממספר הצמתים בשכבות האי-זוגיות, הקבוצה
V וזה מפר את תנאי משפט Hall.

יום שלישי 4.5.21

מקרא:
דוגמה - ● הוכחה - ●
טענה - ● משפט - ●
הגדרה - ●

אלגוריתמים
שבוע 6 - הרצאה 13
שידוכים ורשתות זרימה

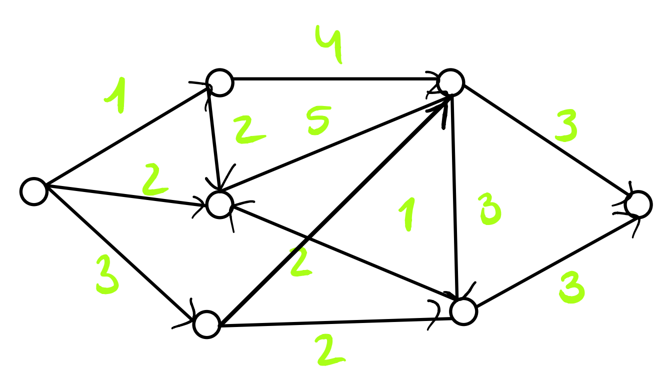
סיבוכיות הזמן: מבצעים לכל היותר $|U|$ איטרציות של הגדלת M.
נסמן ב-n את מספר הצמתים וב-m את מספר הקשתות. $n \geq |U|$
בכל איטרציה כי הרצה של פרוצדורה דמויית BFS שעולה $O(m+n)$
ולכן סה"כ סיבוכיות הזמן עבור האלג' תהיה $O(mn+n^2)$ פעולות אריתמטיות.
סיבוכיות המקום: $O(m+n)$ תאי זיכרון (בנוסף לקלט).

זרימה ברשתות

הגדרה: רשת זרימה היא רביעיה (G,C,s,t) ומה:
1) $G=(V,A)$ גרף סופי מכוון
2) $C:A\rightarrow \mathbb{N}$ פונקציית קיבול
3) $s\in V$ הוא צומת מקור
4) $t\in V$ הוא צומת בור

הרשת משמשת להעברת זרימה מ-s ל-t דרך קשתות הגרף

דוגמה:



הגדרה: זרימה ברשת (G,C,s,t) הוא פונקציה $f: A\to\mathbb{R}$ שמקיימת:

(1) שימור הזרימה – לכל קודקוד $v\in V\setminus\{s,t\}$ מתקיים: $\sum_{a=(v,u)\in A} f(a) = \sum_{a=(u,v)\in A} f(a)$

לכל קודקוד כמות הזרימה הנכנסת = כמות הזרימה היוצאת.

(2) שימור אילוצי הקיבול – לכל $a\in A$: $0\le f(a)\le c(a)$

הגדרה: בהינתן זרימה f ברשת (G,C,s,t) הערך של f, שנסמן $|f|$, הוא:

$$|f| = \sum_{a=(s,v)\in A} f(a) - \sum_{a=(v,s)\in A} f(a)$$

הזרימה שיוצאת מהמקור – הזרימה שנכנסת למקור

מסקנה:

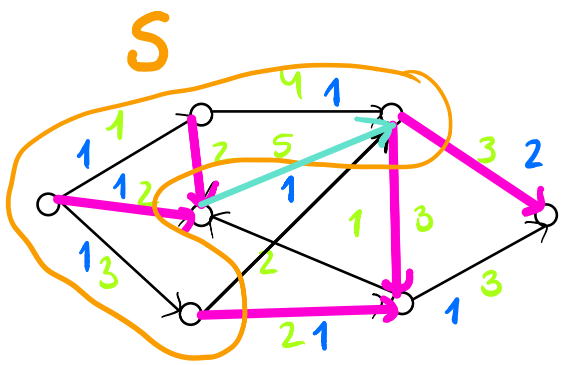
$$|f| = \sum_{a=(v,t)\in A} f(a) - \sum_{a=(t,v)\in A} f(a)$$

הזרימה שנכנסת לבור – הזרימה שיוצאת מהבור

עבור קבוצת קשתות $B\subseteq A$ נגדיר את הקיבול של B כך: $C(B)=\sum_{a\in B} c(a)$

הגדרה: קבוצת קשתות $B\subseteq A$ תיקרא חתך s-t אם״ם קיימת קבוצת צמתים $S\subseteq V\setminus\{t\}$ כך ש-$s\in S$ עבורה B היא קבוצת הקשתות שיוצאות מ-S.

דוגמה:



הקשתות ב-B: הן הקשתות שיוצאות מ-S אך הקצה שלהם לא ב-S.

קיבולים

הקשתות B': הן הקשתות שנכנסות ל-S.

טענה: לכל חתך s-t, B, מתקיים: $|f| = \overbrace{\sum_{a\in B} f(a) - \sum_{a\in B'} f(a)}^{\text{הזרימה נטו על החתך}}$

בדוגמה ניתן לראות ש- $\sum_{a\in B} f(a) = 4$ ו- $\sum_{a\in B'} f(a) = 1$ לכן $|f|=3$.

טענה: לכל חתך s-t, B, ולכל זרימה f ברשת מתקיים: $|f| \le c(B)$.

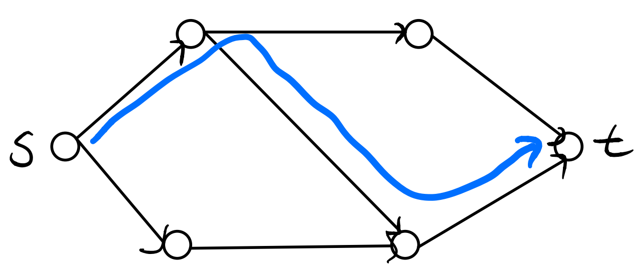
הוכחה: נשים לב שמתקיים: $|f| \underset{\text{עפ"י הטענה הקודמת}}{\le} \sum_{a\in B} f(a) \underset{\text{אילוצי קיבול}}{\le} \sum_{a\in B} c(a) \underset{\text{הגדרה}}{=} c(B)$

רשת שיורית

הגדרה: נתונה רשת זרימה $N=(G,c,s,t)$, נתונה זרימה f ב- N.
רוצים להגדיר רשת $N_f=(G_f,c_f,s,t)$ שמתארת את "המקום" שנותר ברשת להעביר עוד זרימה.

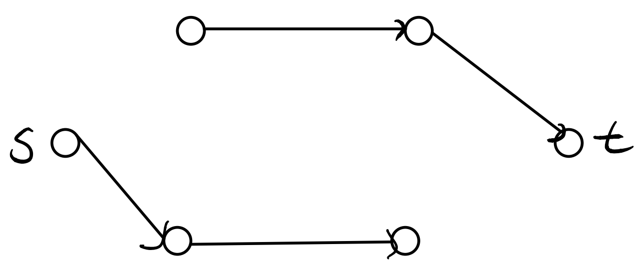
ניסיון: נגדיר $G_f=G$ ו- $\forall a\in A$ $c_f(a)=c(a)-f(a)$

לדוגמה:



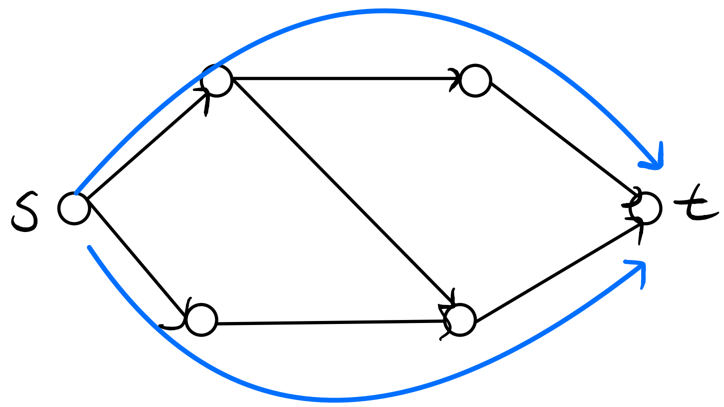
$f(a)=1$

כל הקיבולים 1

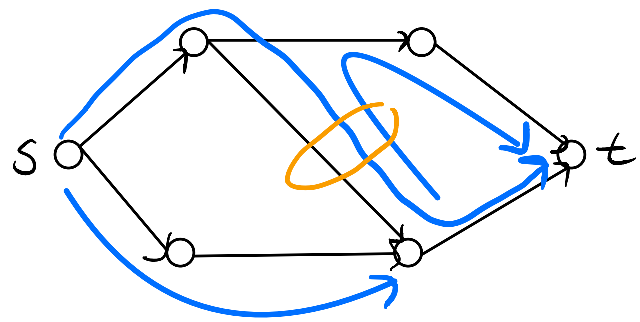


ברשת זו לא ניתן להעביר עוד זרימה כי אין מסלול בין s ל- t.

לעומת זאת, על הרשת המקורית ניתן להעביר עוד זרימה אם נקח שני מסלולים אחרים:

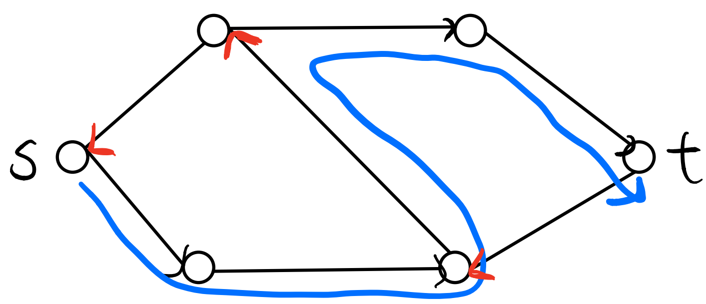


וכעת נתקן את הזרימה ע"י זה שנחזיר את המסלול שלנו אחורה,
וננתב מחדש באופן שניתן יהיה להכניס זרימה נוספת:



על מנת לבטל זרימה נוכל להשתמש ברעיון של רשת שיורית,
נוכל להכניס קשתות הפוכות לציון הקשתות הקודמות שעליהן העברנו
זרימה ובאופן זה להעביר זרימה נוספת:

$G_f =$



כעת המסלול הכחול מורכב מסכום שתי הזרימות העדיפות מבין אלו שציירנו.

הגדרה:

הרשת השיורית $N_f=(G_f,C_f,s,t)$ מקיימת:

* $V(G_f)=V(G)$
* $A(G_f)=\{(u,v)\in A \mid f(u,v)<c(u,v)\}\cup\{(v,u)\in A \mid f(u,v)>0\}$

בכל פעם שנעבור קשת (u,v) עם זרימה חיובית, מופיעה קשת הפוכה (v,u)

* עבור $\{(u,v)\in A \mid f(u,v)<c(u,v)\}$ נגדיר:

$$C_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)>0$$

* עבור $\{(v,u)\in A \mid f(u,v)>0\}$ נגדיר: $C_f(v,u)=f(u,v)$

כלומר, אם העברתי זרימה ב-(u,v) אז הקיבולת של (v,u) תהיה שווה לזרימה.

הגדרה: אם f זרימה ב-N ו-f' זרימה ב-N_f אז $f+f'$ היא זרימה ב-N שמוגדרת ע"י:

$$(f+f')(u,v)=f(u,v)+f'(u,v)-f'(v,u)$$

את שימור הזרימה נשאיר כתרגיל.

$f+f'$, הזרימה החדשה, מקיימת את שימור אילוצי הקיבול:

אנו יודעים ש- $f'(v,u)\le C_f(v,u)=f(u,v)$ ומכאן נובע ש:

$$(f+f')(u,v)\ge 0$$

ובנוסף מתקיים:

$$(f+f')(u,v)=f(u,v)+f'(u,v)-f'(u,v)\le f(u,v)+C_f(u,v)=$$
$$f(u,v)+c(u,v)-f(u,v)=c(u,v)$$

לכן סה"כ $0\le(f+f')(u,v)\le c(u,v)$ כנדרש.

* בנוסף, מתקיים: $|f+f'|=|f|+|f'|$

הסבר אינטואיטיבי לרשת שיורית: הרשת השיורית הינו בעצם גרף מכוון שצמתיו הם צמתי רשת הזרימה המקורית, ויש בו קשת בין כל זוג צמתים שעבורו $C_f(u,v)>0$. כלומר, הגרף מייצג את כל המקומות שבהם ניתן להעביר עוד זרימה.

בעיה:

אנו רוצים לחשב זרימת מקסימום f_{max} ב-N (כלומר, זרימה שערכה $|f_{max}|$ הוא מירבי).

רעיון טבעי לפתרון מתוך הדברים שראינו עד כה:

שיטת Ford-Fulkerson

נתחיל מזרימה f שערכה 0 על כל קשת (נניח זרימה חוקית).

נפעיל את האיטרציה הבאה:

1. נחשב את N_f.
2. נמצא ב-N_f מסלול מכוון מ-s ל-t (מסלול כזה נותן לנו נתיב להעביר עליו זרימה). מסלול p כזה נקרא <u>מסלול משפר</u>.
3. נגדיר:

$$f'(u,v)=\begin{cases}\min\limits_{a\in p} C_f(a) & (u,v)\in p\\ 0 & (u,v)\notin p\end{cases}$$

4. נחליף את f ב-$f+f'$.

<u>תנאי הסיום</u>: ב-N_f אין מסלול מכוון מ-s ל-t.

משפט: בסיום, f היא זרימת מקסימום.

יום ראשון 9.5.21

מקרא:
דוגמה - ● הוכחה - ●
טענה - ● משפט - ●
הגדרה - ●

אלגוריתמים
שבוע 7 - הרצאה 14
כיסוי בצמתים, תכנון ליניארי, משקול כפלי

תזכורת משיעור שעבר:

שיטת Ford-Fulkerson

נתחיל מזרימה f שערכה 0 על כל קשת (זוהי זרימה חוקית).
נפעל את האיטרציה הבאה:

1. נחשב את N_f.
2. נמצא ב-N_f מסלול מכוון מ-s ל-t (מסלול כזה נותן לנו נתיב להעביר עוד לאורך רוני איך על זרימה f'). מסלול p כזה נקרא **מסלול משפר**.
3. נגדיר:
$$f'(u,v) = \begin{cases} \min\limits_{a\in p} C_f(a) & (u,v)\in p \\ 0 & (u,v)\notin p \end{cases}$$
4. נחליף את f ב-$f+f'$.

תנאי הסיום: ב-N_f אין מסלול מכוון מ-s ל-t.

משפט: נניח שהרצה של FF מגיעה לסיומה אחרי מס' סופי של איטרציות ותהי f הזרימה שחושבה בסיום הריצה. אזי f זרימת מקסימום ברשת הקלט N.

הוכחה: נסמן ב-S את קבוצת הצמתים שיש עבורם ב-N_f (הרשת השיורית עם הזרימה מסוף) מסלול מ-s אליהם. בפרט: $s\in S$ ו-$t\notin S$.
לכן, הקבוצה $B=\{(u,v)\in A(G) \mid u\in S \wedge v\notin S\}$ הוא חתך s-t.

מדובר בסכום הקשתות ב-G שיוצאות מהקבוצה S (ומסתיימות מחוץ ל-S)

נסמן $B'=\{(v,u)\in A(G) \mid u\in S \wedge v\notin S\}$, מדובר בסכום הקשתות ב-G שנכנסות ל-S (ולא יוצאות מ-S).

נשים לב כי $B\subseteq A(G)$ וגם $B\cap A(G_f)=\emptyset$, אחרת קיימת צלע $(u,v)\in B\cap A(G_f)$ כך ש- $u\in S$ ו- $v\notin S$. כלומר, יש מסלול ב- N_f מ-S ל-u, וגם אין מסלול מ-S ל-V ב- N_f. וזו סתירה, כי $(u,v)\in A(G_f)$. ולכן חייב להתקיים:

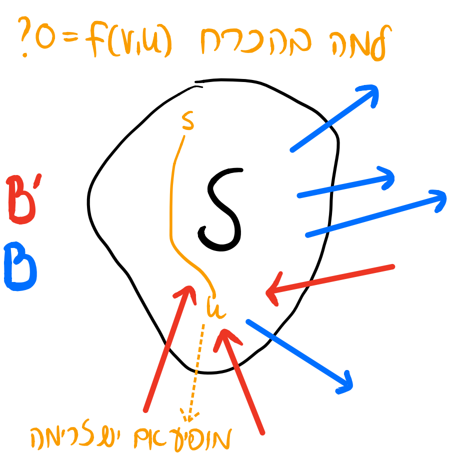
לכל $(u,v)\in B$, $f(u,v)=c(u,v)$ - אלו בדיוק הקשתות שאנו מאבדים מ-G ל- G_f.

נתבונן בקשת $(v,u)\in B'$, אז $u\in S$ ו- $v\notin S$ ולכן חייב להתקיים (בדומה לטיעון לעיל) ש- $(u,v)\notin A(G_f)$. לכן חייב להתקיים $f(v,u)=0$ (אחרת, (u,v) הייתה מופיעה ברשת השיורית N_f).

$$|f|=\sum_{(u,v)\in B} f(u,v)-\sum_{(v,u)\in B'} f(v,u)=\sum_{(u,v)\in B} c(u,v)-0=c(B)\geq |g|$$

לכל זרימה חוקית g. בפרט, זה נכון עבור g שהיא זרימת מקסימום.

הוכחנו שהזרימה הבנויה, f, בסוף הריצה, בעלת ערך ששווה לערך קיבול של איזשהו חתך ולכן בפרט ערך מקסימום. מכאן ניתן להסיק:



<u>מסקנה</u>: B חתך בעל קיבול מינימלי!

<u>מסקנה</u>: זרימת מקסימום = קיבול חתך s-t מינימלי!

המסקנות נובעות מכך שאם היה חתך עם קיבול קטן יותר, הוא היה חוסם את הקיבול של f.

כמה איטרציות נצטרך לבצע כדי להגיע ל-f האופטימלית?

מניחים שהקיבולים ברשת הקלט, N, הם מספרים שלמים. אחרת, השיטה לא תעבוד.

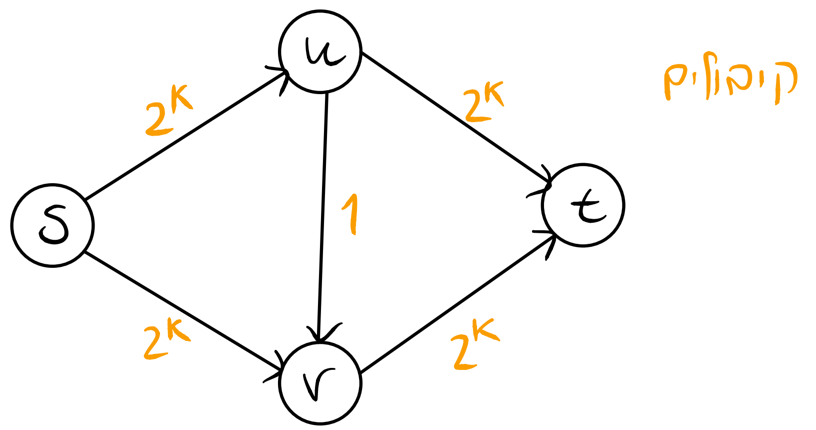
הגדרה: זרימה f נקראת **זרימה בשלמים** אם הערך שלה על כל קשת הוא מספר שלם.

טענה: אם הקיבולים שלמים, אז בכל שלב בריצת שיטת FF הזרימה היא בשלמים.
כי החישובים בשיטה זו הם על מס' שלמים.

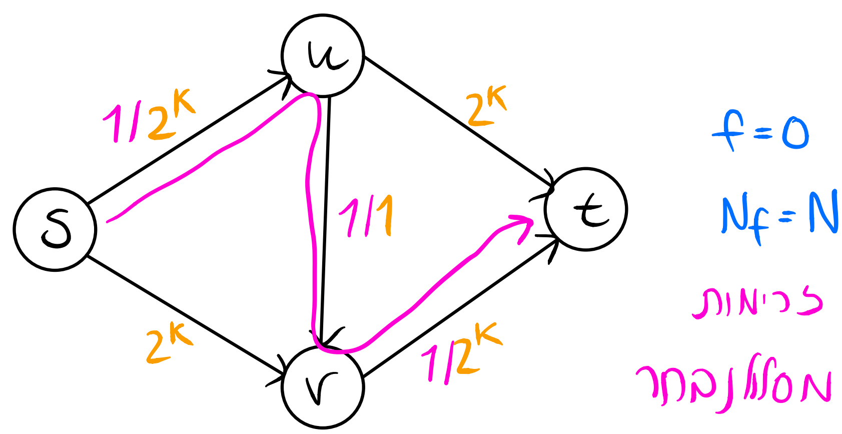
מסקנה: בכל איטרציה הזרימה גדלה ב-1 לפחות.
אם נסמן את זרימת המקסימום ב-f^* אזי מספר האיטרציות חסום ע"י $|f^*|$.

ישנה בעיה מהותית בשיטת FF, נדגים אותה כעת:

גודל הקלט הוא $O(K)$

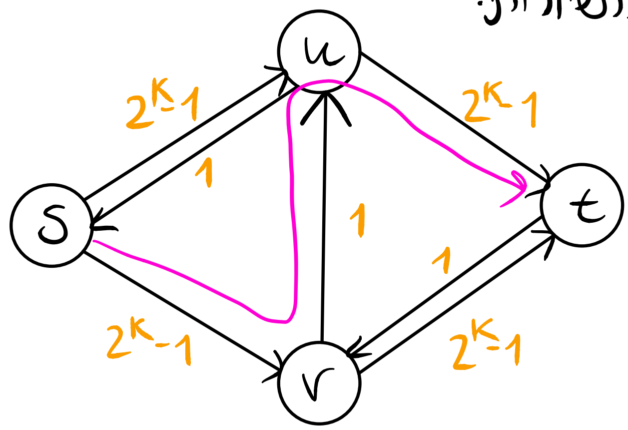


נוכל להעביר במסלול זה זרימה של 1



הרשת השיורית:

כעת נקבל מסלול כזה.



וניתן להמשיך ככה 2^K איטרציות, כך שבכל איטרציה נגדיל את הזרימה ב-1,
ולכן זרימת מקסימום תהיה כמו $2\cdot 2^K$, וזה גם מספר האיטרציות שנקבל.

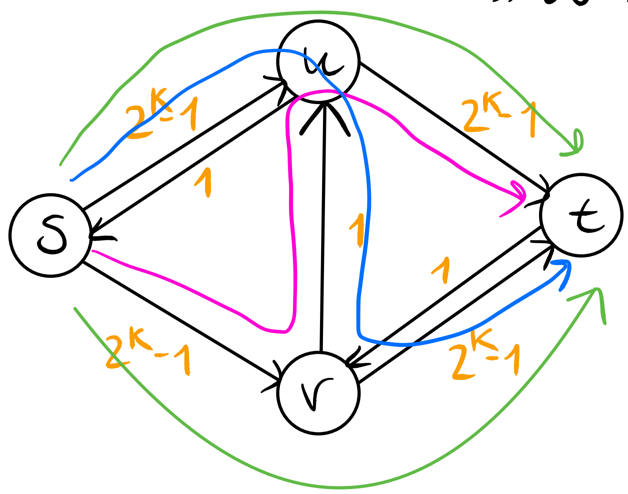
יום שלישי 11.5.21

מקרא:
- הוכחה
- דוגמה
- משפט
- טענה
- הגדרה

אלגוריתמים
שבוע 7 - הרצאה 15
כיסוי בצמתים, תכנון ליניארי, משקול כפלי

המשך הדוגמה מהשיעור שעבר:

האיטרציה הבאה:



זרימת המקסימום היא $2\cdot 2^k$ ובהתאמה גם מספר האיטרציות הוא כזה,
וגודל הקלט הוא $O(k)$ לכן השיטה לא פולינומית בגודל הקלט.
וזה נובע מהאופן בו אנחנו בוחרים את המסלול המשפר.

האלגוריתם של Edmonds-Karp

ממשאת שיטת Ford-Fulkerson באופן הבא:
ברשת השיורית נמצא מסלול משפר שמס' הקשתות בו מינימלי.
נשתמש באלגוריתם BFS החל מ-s, ונעצור כשנגיע ל-t כלומר שמצאנו מסלול משפר.

<u>הסיבוכיות:</u> m מספר הקשתות ברשת המקורית
n מספר הצמתים
נקבל $O(m+n)$

ברשת השיורית יש לכל היותר 2m קשתות

משפט: נדרשות $O(mn)$ איטרציות.

מסקנה: אלגוריתם EK מוצא זרימת מקסימום בזמן $O(m^2n)$ פעולות אריתמטיות.
(בהנחה ש-m הוא לפחות $n-1$, שכן ניתן מההנחה ש הרשת קשירה.)

<u>אבחנה</u>: בכל פעם שנבצע שיפור לזרימה - נעלמת קשת.
אך באותה מידה - הוא יכולה לחזור ולכן לא ניתן לחסום את כמות האיטרציות במספר הקשתות. אך ניתן לחסום את מס' הפעמים שקשת יכולה להיעלם במס' הצמתים. וזה הרעיון להוכחה.

הוכחה: עבור גרף H נסמן ב- d_H את פונקציית המרחק בין קודקודי H:

$$\boxed{d_H(u,v) = \text{מספר הקשתות במסלול קצר ביותר מ-}u\text{ ל-}v}$$

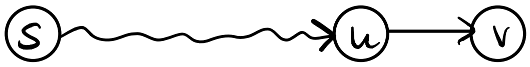
נתבונן בזרימה כלשהי f_0 שחושבה במהלך ריצת האלגוריתם.
תהי $f_1 = f_0 + f_0'$ (היא תוספת הזרימה שחושבה באיטרציה)
וכו הזרימה אחרי השיפור ברשת N_{f_0}.
יהי $v \in V$ נוכיח באינדוקציה על $d_{H_{f_1}}(s,v)$ ← המרחק מ-s ל-v ברשת השיורית שנוצרת מהעברת הזרימה f_1

טענה: $d_{H_{f_0}}(s,v) \le d_{H_{f_1}}(s,v)$.

כלומר, ככל שהאלג' מתקדם - הצמתים "מתרחקים" מ-s. נוכיח באינדוקציה:

בסיס: $d_{H_{f_1}}(s,v) = 0$ כלומר $s = v$. בוודאי $d_{H_{f_1}}(s,s) = 0 = d_{H_{f_1}}(s,s)$ ולכן מתקיימת הטענה

טענה 3: נתבונן במסלול קצר ביותר p, מ-s ל-v בגרף H_{f_1}. מספר הקשתות
במסלול כזה הוא בדיוק $d_{H_{f_1}}(s,v)$.

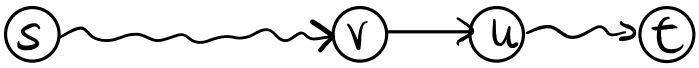


תהי (u,v) הקשת האחרונה ב-p.

עפ"י הנ"ל $d_{H_{f_0}}(s,u) \le d_{H_{f_1}}(s,u)$, ① אם הקשת (u,v) קיימת ב-H_{f_0} אז:

$$d_{H_{f_0}}(s,v) \le d_{H_{f_0}}(s,u)+1 \le d_{H_{f_1}}(s,u)+1 = d_{H_{f_1}}(s,v)$$

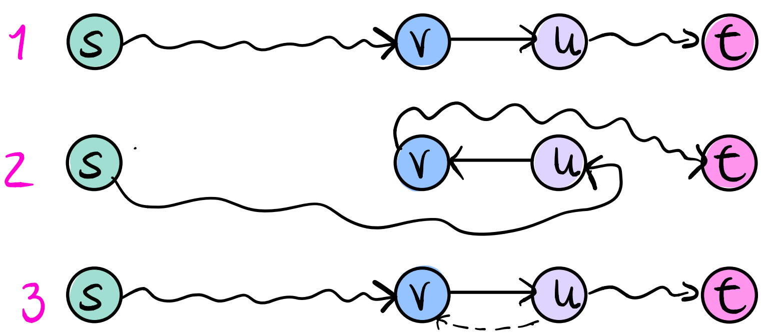
② אם הקשת (u,v) לא נמצאת ב-H_{f_0}, והיא כן ב-H_{f_1}, אז בהכרח (v,u)
נמצאת ב-H_{f_0}. ו-f_0' מעביר עליה זרימה. אם כך, הקשת נמצאת על מסלול קצר
ביותר מ-s ל-t (על פי אופן פעולת האלג') ולכן $d_{H_{f_0}}(s,u) = d_{H_{f_0}}(s,v)+1$



אם כך,

$$d_{H_{f_0}}(s,v) = d_{H_{f_0}}(s,u)-1 \overset{\text{הנ"ל}}{\le} d_{H_{f_1}}(s,u)-1 \le d_{H_{f_1}}(s,v)-2$$

ניתן להסיק דבר נוסף מההוכחה: אם הקשת (u,v) הייתה באיטרציה כלשהי קשת שיורית
במהלך ריצת האלגוריתם ואז נעלמה:



בין השלבים 1 ו-2 $d(s,v)$ גדל ב-2 לפחות.
כלומר, בין שתי הופעות עוקבות של הקשת (u,v) שבראשונה היא נעלמה, $d(s,v)$ גדל
ב-2 לפחות. (כל עוד אפשר להגיע מ-s ל-u והקשת (u,v) קיימת.)
$d(s,v) \le n-1$ תמיד. ולכן הקשת יכולה להיעלם ולהופיע שוב לא יותר מ-$\frac{n-2}{2}$ פעמים.

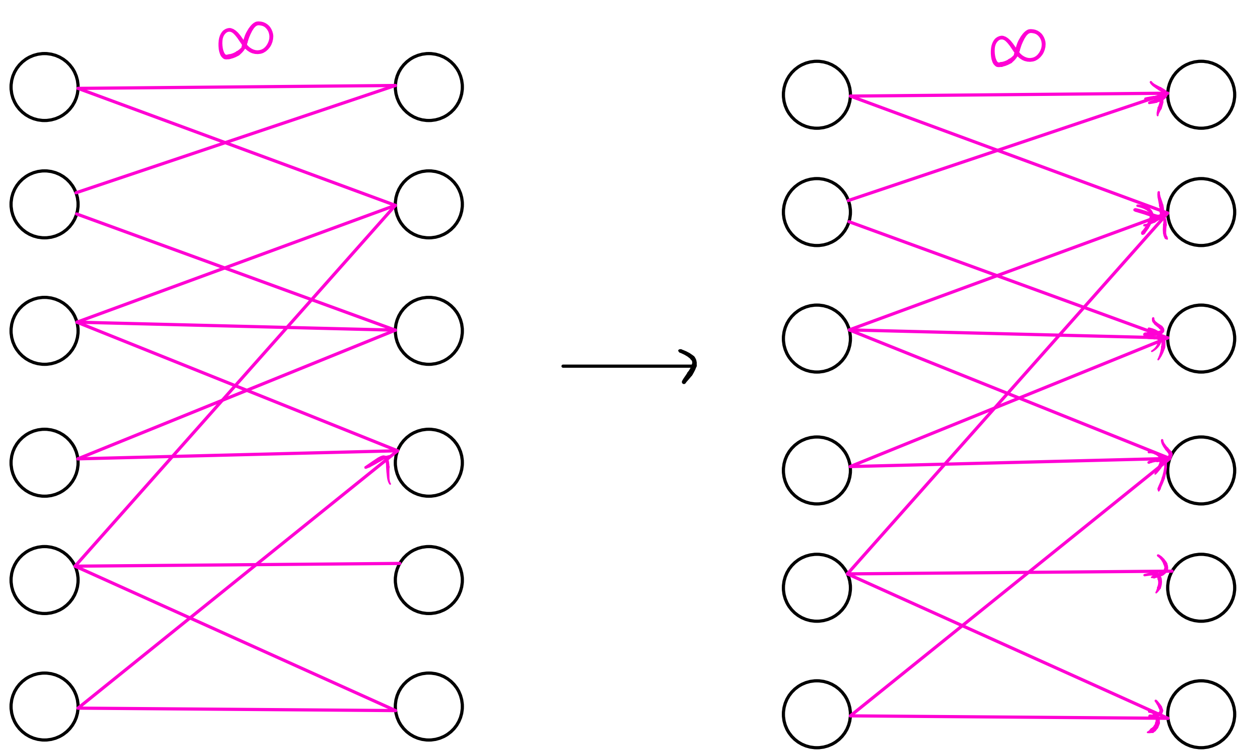
לכן, מס' הפעמים שהקשת (u,v) יכולה להיות צוואר בקבוק לשיפור הזרימה,
הוא לכל היותר מס' הפעמים $\frac{n}{2}$
בכל איטרציה יש לפחות קשת אחת שהיא צוואר בקבוק לשיפור הזרימה,
וכל קשת יכולה להיות צוואר בקבוק $\frac{n}{2}$ פעמים לכל היותר. ולכן בסה"כ
מס' האיטרציות הוא לכל היותר $2m\cdot\frac{n}{2}=mn$.

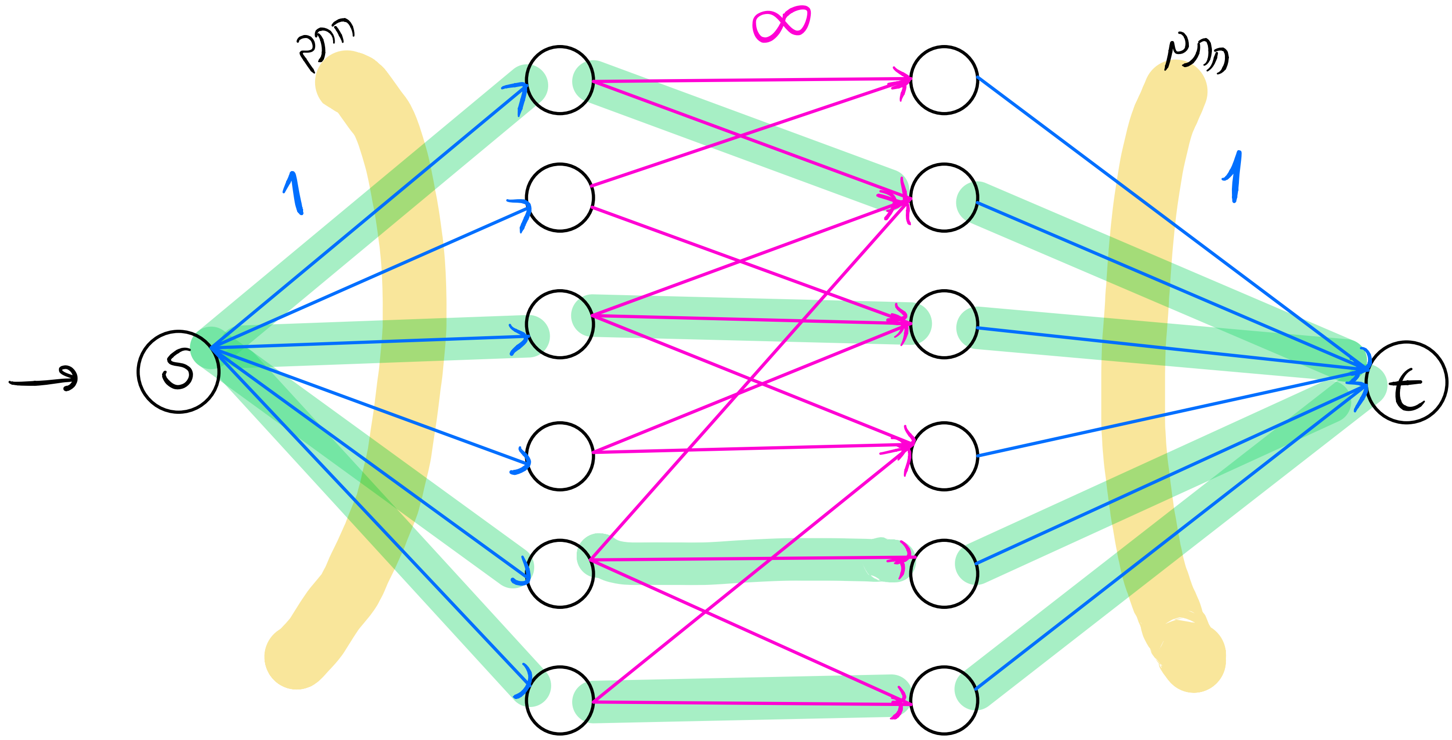
מסקנה: האלגוריתם EK רץ בזמן פולינומי ($O(m^2n)$ פעולות אריתמטיות.

סיבוכיות המקום: $O(m+n)$ תאי זכרון בנוסף לקלט.

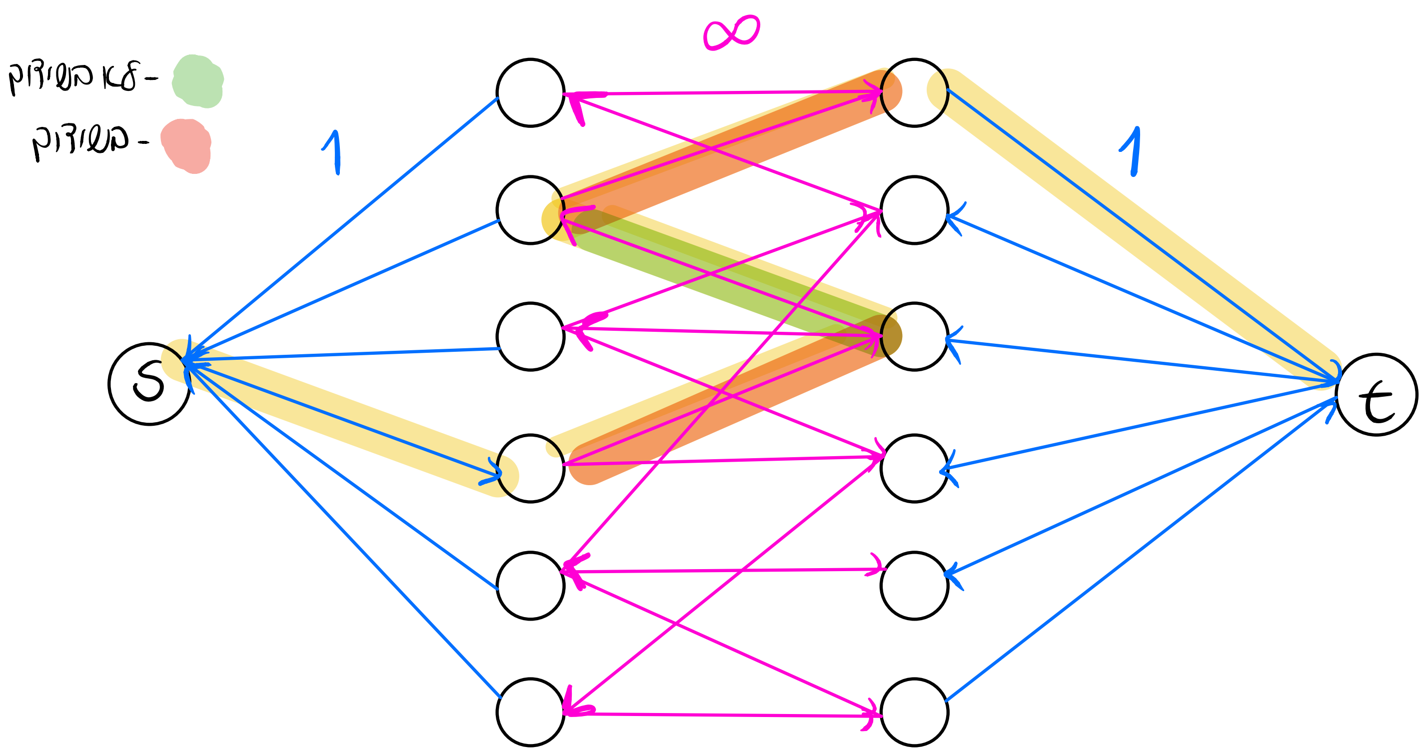
שידוך מקסימום בגרף דו-צדדי:

נראה שבעיה זו היא למעשה מקרה פרטי של בעיית הזרימה.
נראה רדוקציה מבעיית השידוך הנ"ל לבעיית הזרימה ונתרגם כך את
פתרון בעיית הזרימה לפתרון בעיית השידוך.





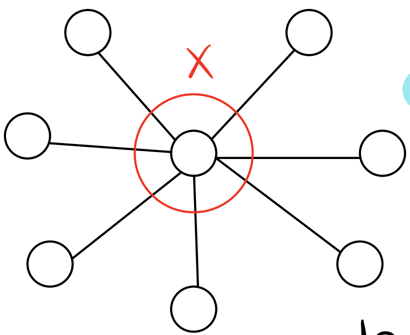
נמצא ברשת זרימת מקסימום בשלמים.
הזרימה ע"ג הקשתות הורודות היא בהכרח 0 או 1 (לכל קשת) ואוסף הקשתות
שיש עליהן זרימה של 1 הוא בהכרח שידוך. גודל הזרימה = גודל השידוך.
לכל שידוך קיימת ברשת זרימה שגודלה שווה לו.
לכן לזרימת מקסימום מתאים שידוך מקסימום.



כיסוי בצמתים

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. קבוצה $X\subseteq V$ נקראת כיסוי בצמתים של G אם"ם לכל $e\in E$ מתקיים: $e\cap X\neq\emptyset$

דוגמה:



מסקנה: $V\setminus X$ היא קבוצה בלתי תלויה ב-G.

קבוצת צמתים I היא בלתי תלויה אם לכל $e\in E$, $|e\cap I|\leq 1$.

מכאן: הבעיה של מציאת כיסוי בצמתים בעל גודל מינימלי שקולה לבעיה של מציאת קבוצה בלתי תלויה בעלת גודל מקסימלי.

יום שלישי 18.5.21

מקרא:
הוכחה - , דוגמה -
משפט - , טענה -
הגדרה -

אלגוריתמים
שבוע 8 - הרצאה 16
כיסוי בצמתים, תכנון לינארי, משקול כפלי

כיסוי בצמתים

נניח בהתחלה ש-G הוא גרף דו-צדדי. נסמן $G=(V_L,V_R,E)$ ולכל $e\in E$
$|e\cap V_L|=|e\cap V_R|=1$

האלגוריתם של König

יהי $M\subseteq E$ שידוך מקסימום ב-G. נסמן ב-Z את קבוצת הצמתים הבאה:
Z מכילה את כל הצמתים ב-V_L שאינם משודכים.
בנוסף Z מכילה את כל הצמתים שניתן להגיע אליהם מצומת לא משודך ב-V_L דרך מסלול מתחלף.

ניתן למצוא את S ע"י BFS

נגדיר קבוצה נוספת S באופן הבא: $S=\underbrace{\{V_L\setminus Z\}}_{\text{רק המשודכים ב-}V_L}\cup\{V_R\cap Z\}$

טענה: הקבוצה S היא כיסוי בצמתים שגודלו מינימלי.

הוכחה: תחילה נוכיח שמדובר בכיסוי בצמתים. תהי $e=\{x,y\}$ קשת כלשהי ונניח בה"כ ש-$x\in V_L$ ו-$y\in V_R$. ישנן כמה אפשרויות:

א) $x\in S \Leftarrow x\notin Z$

ב) $x\in Z$, שוב ישנן 2 אפשרויות:

1) x לא משודך: $e\notin M$ ולכן אפשר להגיע ל-y דרך מסלול מתחלף ולכן $y\in Z$ ולכן $y\in S$.

2) x משודך: לכן הגענו ל-x דרך מסלול מתחלף מצומת לא משודך ב-V_L.

* אם $e\in M$ אז בהכרח הגענו ל-x דרך e ולכן $y\in S \Leftarrow y\notin Z$.

* אם $e\in M$ אז אפשר להאריך את המסלול המתחיל ב-x ע"י הוספת e
ולכן יש מסלול מתחיל ב-y לכן $y\in Z \Rightarrow y\in S$.

אם כך, S הוא בוודאי כיסוי בצמתים. כל כיסוי בצמתים גודלו לפחות $|M|$.
זה נכון מכיוון שעבור כל קשת $e\in M$ לפחות קצה אחד של e בכיסוי וכל הקשתות
האלו שונות זה מזה. לכן $|S|\geq|M|$

כעת נוכיח שהכיסוי אכן מינימלי, כלומר ש-$|S|=|M|$, לכן נראה ש-$|S|\leq|M|$.
ראשית, כל צומת x ב-$Z\setminus V_L$ חייב להיות משודך, כי Z מכילה את כל הצמתים
הלא משודכים ב-V_L. תהי y הצומת המשודכת ל-x ב-M.
נניח בשלילה ש-$y\in Z$. אבל אז קיים מסלול מתחיל מצומת
לא משודך ב-V_L ל-y ובתוספת הקשת $\{x,y\}\in M$ זה מסלול מתחיל ל-x.
כלומר $x\in Z$ בניגוד להנחה. המסקנה היא ש-$y\notin Z$ ולכן $y\notin S$.
כמו כן, כל צומת y ב-$Z\cap V_R$ משודך. אחרת, המסלול המתחיל מצומת לא
משודך ב-V_L ל-y הוא מסלול משפר שידוך וזו סתירה למקסימליות של M.
לפי הטענה שהוכחנו קודם לגבי צד שמאל, לא ייתכן שהצמתים עבור
$\{x,y\}\in M$ נמצאות ב-S. לכן כל צומת ב-S ניתן לשייך חח"ע לקשת ב-M
ולכן $|S|\leq|M|$.
לכן $|S|=|M|$ ומכאן שהוא כיסוי בצמתים מינימלי. בנוסף, קיבלנו מסקנה נחמדה:

<u>מסקנה:</u> הגודל של כיסוי בצמתים מינימלי = הגודל של שידוך מקסימום. (בגרף דו"צ)

האלגוריתם וסיבוכיות

וקיימים אלג' יעילים יותר

שלב 1: נחשב שידוך מקסימום M. אנו מכירים אלג' לכך שלוקח $O(mn)$ פעולות

כאשר m = מספר הקשתות, n = מספר הצמתים.

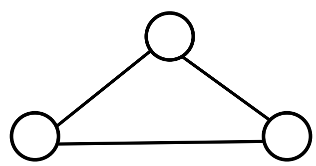
שלב 2: נמצא את הקבוצה Z. כזה דורש פרוצדורה במו"ת BFS: $O(m+n)$ פעולות

שלב 3: חישוב S, מעבר על כל הצמתים $O(n)$ פעולות

סיבוכיות מקום: $O(m+n)$

מה קורה בגרף כללי?

בגרף ככה השידוך והכיסוי לא בהכרח זהים בגודלם



גודל שידוך מקסימום: 1

גודל כיסוי מינימום: 2

קיימים אלגוריתמים פולינומיים למצוא שידוך מקסימום בגרף כללי, אך הם לא פשוטים.

קל למצוא שידוך שלא ניתן להרחבה. נבחר קשת, נסיר את כל הקשתות שיש להם קודקוד משותף איתה ונחזור על התהליך עד שלא נותרות קשתות.

טענה: יהי M שידוך שלא ניתן להרחבה. אזי $S = \{x \in V \mid \exists e \in M,\ x \in e\}$

(כל הקצוות של כל קשת) הוא כיסוי בצמתים. שידוך מקסימום | כי לקחנו מכל קצה בשידוך

נשים לב כי: $|S| = 2|M| \leq 2|M_{max}|$

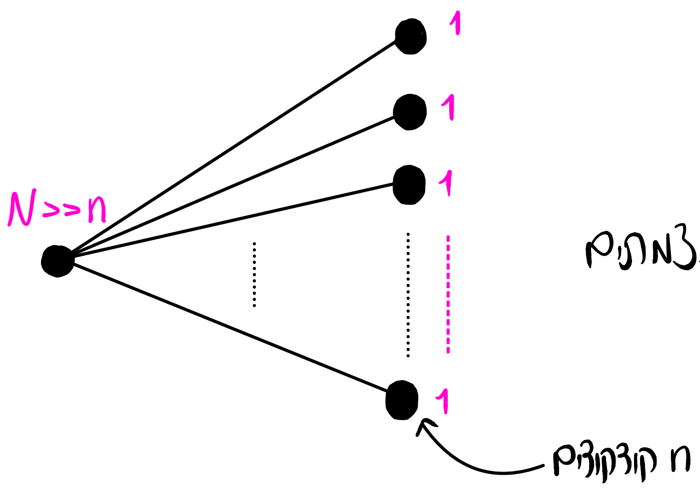
כלומר S הוא כיסוי בצמתים שגודלו לכל היותר פי 2 מהאופטימום.

מה הסיבוכיות? $O(m+n)$ פעולות וגם מקום.

המקרה הממושקל

נתון גרף סופי לא מכוון $G=(V,E)$ ונתונה פונקציית משקל חיובית $W: V\to\mathbb{N}$

אנו חפצים למצוא כיסוי בצמתים קל ביותר.



דוגמה

שידוך מקסימום פה הוא מגודל 1,

וכיסוי מינימום פה מכיל כמעט את כל הצמתים

אלגוריתם לחישוב כיסוי בצמתים קל

כשמשהו מובן y_{uv} יהיה "הכסף" שהקשת מחזיקה

עבור כל קשת $e=\{u,v\}\in E$ נחזיק משתנה עזר y_{uv}.

אתחול: לכל קשת $\{u,v\}\in E$ נקבע $y_{u,v}=0$

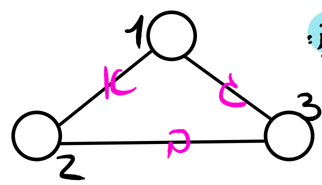
נעבור על כל הקשתות בסדר כלשהו ועבור קשת $\{u,v\}\in E$ נעדכן באופן הבא:

$$y_{u,v}=\min\{W(u)-\sum_{S:\{u,s\}\in E} y_{us},\ W(v)-\sum_{S:\{s,v\}\in E} y_{sv}\}$$

בסיום "חלוקת הכסף" נגדיר $S=\{u \mid w(u)=\sum_{v:\{u,v\}\in E} y_{uv}\}$ ופלט האלגוריתם הוא S.

($\le w(u)$)

דוגמה:

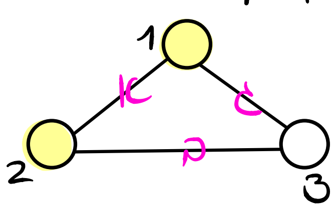


$y_{א}=1$

$y_{ב}=\min\{2-1,3\}=1$

$y_{ג}=\min\{1-1,3-1\}=0$

לכן ניתן לקנות את הצמתים:



$S=\{1,2\}$

הערה: סיבוכיות הזמן והמקום $O(m+n)$

יום ראשון 23.5.21

מקרא:
- הוכחה
- דוגמה
- משפט
- טענה
- הגדרה

אלגוריתמים
שבוע 9 - הרצאה 17
כיסוי בצמתים, תכנון ליניארי, משקול כפלי

בשיעור הקודם ראינו אלגוריתם לחישוב כיסוי בצמתים (קל):

אלגוריתם לחישוב כיסוי בצמתים קל

כשמישהו מוכן משלם y_{uv} זהו "הכסף" שהקשת מחזיקה

עבור כל קשת $e=\{u,v\}\in E$ נחזיק משתנה עזר y_{uv}.

אתחול: לכל קשת $\{u,v\}\in E$ נקבע $y_{u,v}=0$

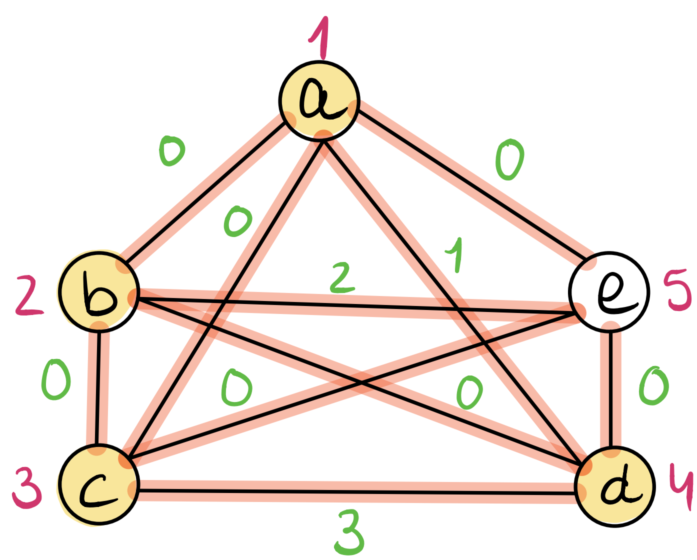
נעבור על כל הקשתות בסדר כלשהו ועבור קשת $\{u,v\}\in E$ נעדכן באופן הבא:

$$y_{u,v}=\min\Big\{w(u)-\sum_{s:\{u,s\}\in E} y_{us}\ ,\ w(v)-\sum_{s:\{s,v\}\in E} y_{sv}\Big\}$$

בסיום "חלוקת הכסף" נגדיר $S=\{u \mid w(u)=\underbrace{\sum_{v:\{u,v\}\in E} y_{uv}}_{\le w(u)}\}$ ופלט האלגוריתם הוא S.

נראה דוגמת הרצה

צמת הדוק -



במקרה הזה ישנה קליקה בגודל 5, והפתרון האופטימלי הוא 4.

$y_{cd}=3$ $\quad y_{de}=0$ $\quad y_{ae}=0$ $\quad y_{ce}=0$

$y_{ad}=1$ $\quad y_{bd}=0$ $\quad y_{bc}=0$

$y_{be}=2$ $\quad y_{ac}=0$ $\quad y_{ab}=0$

סה"כ 3 צלעות קיבלו יותר מ-0

טענה: אם S הוא התוצאה של האלגוריתם אזי S הוא כיסוי בצמתים של G.

הוכחה:

בכל מהלך ריצת האלגוריתם מתקיים לכל צומת u: $\sum_{s:(u,s)\in E} y_{us} \le w_u$

נתבונן בצעד שבו עוברים על קשת $\{u,v\}$.

ולאחר שעברנו על קשת $\{u,v\}$ לפחות צומת אחד שלה יהיה בפתרון:

העדכון של y_{uv} מבטיח שיתקיים: (1) $\sum_{s:(u,s)\in E} y_{us} \le w_u$

או

(2) $\sum_{s:(s,v)\in E} y_{sv} \le w_v$

ומכיוון שיתקיים: $|S\cap\{u,v\}| \ge 1$ (הסכומים הללו רק עולים ולא יורדים)

לכן $\{u,v\}$ מכוסה ע"י S, וזה נכון לכל קשת כי האלג' עובר על כולן.

טענה: בסיום ריצת האלגוריתם, עבור הפתרון שהוא מחשב S, מתקיים:

$$\boxed{\sum_{u\in S} w_u \le 2\sum_{v:(u,v)\in E} y_{uv}}$$

הוכחה:

כמה פעמים y_{uv} מופיע

$$\sum_{u\in S} w_u = \sum_{u\in S}\underbrace{\sum_{v:(u,v)\in E} y_{uv}}_{u\in S \Rightarrow w_u} = \sum_{(u,v)\in E} y_{uv}\cdot |S\cap\{u,v\}| \le 2\sum_{(u,v)\in E} y_{uv}$$

לכל היותר $|\{u,v\}|=2$

טענה: בסיום ריצת האלגוריתם מתקיים:

$$\boxed{\sum_{(u,v)\in E} y_{uv} \le \text{משקל כיסוי בצמתים קל ביותר}}$$

מסקנה: האלגוריתם שלנו מחשב 2-קירוב לבעיית כיסוי בצמתים ממושקל.

הוכחה: נסמן ב-z_{opt} את המשקל של פתרון אופטימלי לבעיית הכיסוי הממושקלת.
נתבונן בהצבה של ערכים $x_u \in \{0,1\}$ כאשר $\{u \in V \mid x_u = 1\}$ הינו פתרון אופטימלי לבעיה.

$$z_{opt} = \min\left\{\sum_{u \in V} w_u x_u \;\middle|\; \forall u \in V,\ x_u \in \{0,1\} \wedge \forall \{u,v\} \in E,\ x_u + x_v \geq 1\right\}$$

נגדיר ערך אחר, כאשר אנו מוותרים על הדרישה ש-$x_u \in \{0,1\}$:

$$z^* = \min\left\{\sum_{u \in V} w_u x_u \;\middle|\; \forall u \in V\ \ x_u \geq 0 \wedge \forall \{u,v\} \in E,\ x_u + x_v \geq 1\right\}$$

ניתן להסיק מכאן ש- $z^* \leq z_{opt}$ (כי פעולת המינימום מתבצעת על קבוצה גדולה יותר)
כלומר, התחום שעליו מבצעים אופטימיזציה בחישוב z^* מכיל את התחום שעליו מבצעים אופטימיזציה עבור z_{opt}.

טענת עזר: נניח ש-$y: E \to \mathbb{R}$ מקיימת:
(1) $y_{uv} \geq 0 \quad \forall \{u,v\} \in E$
(2) $\sum_{v:(u,v) \in E} y_{uv} \leq w_u \quad \forall u \in V$

אזי: $\sum_{(u,v) \in E} y_{uv} \leq z^*$

הוכחת טענת העזר: תהי $x: V \to \mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת:
1) $\forall u \in V \quad x_u \geq 0$
2) $\forall \{u,v\} \in E \quad x_u + x_v \geq 1$

אזי:

$$\sum_{(u,v) \in E} y_{uv} \leq \sum_{(u,v) \in E} y_{uv}(x_u + x_v) \overset{\text{שינוי סדר סכימה}}{=} \sum_{u \in V} x_u \underbrace{\sum_{v \mid (u,v) \in E} y_{uv}}_{\leq w_u} \leq \sum_{u \in V} w_u x_u$$

בפרט, זה נכון עבור x שקובע את z^*.

מטענת העזר נובע: $\sum_{(u,v) \in E} y_{uv} \leq z^* \leq z_{opt}$

יום שלישי 25.5.21

מקרא:
- דוגמה
- הוכחה
- טענה
- משפט
- הגדרה

אלגוריתמים
שבוע 9 - הרצאה 18
כיסוי בצמתים, תכנון לינארי, משקול כפלי

נזכר בהגדרת z^* מההרצאה הקודמת:

$$z^* = \min\left\{\sum_{u\in V} w_u x_u \;\middle|\; \forall u\in V\ \ x_u\geq 0 \wedge \forall\{u,v\}\in E,\ x_u+x_v\geq 1\right\}$$

נגדיר עוד ערך, נסמנו u^*:

$$u^* = \max\left\{\sum_{(u,v)\in E} y_{uv} \;\middle|\; \forall v\in V,\ \sum_{u|(u,v)\in E} y_{uv}\leq w(v) \wedge y\geq 0\right\}$$

לכן סה"כ הוכחנו ש- $u^*\leq z^*$

הגדרה: למצוא אופטימום (מינימום/מקסימום) של פונקציה לינארית של המשתנים בתחום שמוגדר ע"י מערכת אי-שוויונים לינאריים.

תכנון לינארי

המשוואות נקראות ביחד תכנית לינארית. התכניות לחישוב z^* ו-u^* הן דואליות ומתקיים $z^* = u^*$.

קיים אלגוריתם יעיל (פולינומי) לחישוב הפתרון של כל תכנית לינארית (עם מקדמים רציונליים).

בעזרת תכניות לינאריות אפשר לפתור הרבה בעיות שימושיות.