Санкт-Петербургский политехнический университет
Институт компьютерных наук и технологий

М О Д Е Л И Р О В А Н И Е С И С Т Е М У П Р А В Л Е Н И Я

VII СЕМЕСТР

Лектор: *Ерофеев Сергей Анатольевич*

Автор: *Шкалин Кирилл*

осень 2022

Содержание

1 Лекция от 3.9.2022. Введение в моделирование.

1.1 Введение в программно ореиентированное моделирование. Знакомство с терминами.

Под **моделированием** понимается замещение объекта исследования на определенный образ, в необходимой мере передающий св-во объекта т.е. модель и проведения эксперемента над этой моделью.

Набор данных (входные, выходные, функция связи).

`разные модели:`

- `структурная схема (состав)`
- `функциональная схема (состав + параметры)`

Эксперемент — вычесления (на вход подаем данные, смотрим результат).

Выходные данные такого вычислительного эксперемента считаются **расчетными характеристиками объекта** исследования.

Чтобы переложить исследования на компьютер наобходимо какой-то мере раскрыть изучаемый процесс, а именно определить множество параметров и обозначить их взаимосвязь, где под параметрами понимаются величина, позволяющие адекватно (в должной мере) передать механизм протекания процесса в реальном объекте.

Сформированная таким образом модель (раскрыли параметры) должна бать формализована т.е. описана на формальном языке (логика + математика), объективность синтаксиса которого делаем это описание безусловно понятным и однозначно трактуемым. (Без хаоса)

Формально информационная модель, переведенная на язык математических переменных и соотношений - **математическая модель**. Не всем объектам и явлениям можно сопоставить формально информационные модели. Напрмер: динамическая труба, завихрения, турбулентность.

На ряду с компьютерным моделированием выполняется физическое моделирование, в рамках которого исследования выполяются не в виртуальном, а в материальном мире на системе, которая эквивалентна изучаемому объекту с точностью до полного или частичного воспроизведения физических свойств.

1. Например работа системы энергоснабжениям города моделируют с пом специальной электрической схемы. Модель + тестовый комплекс.
2. А информацию об аэродинамических свойствах летательного аппарата получают из результатов продуваемой модели а аэродинамической трубе.

Иногда ставятся смешанные/полунатурные эксперименты, в которых части объекта заменяются аппаратным аналогом (дешевым), к которому подсоединяются вычислительные устройства, иммитирующие работу остальной части объекта на уровне отработки ее математического образа.

Синхронизация двух составляющих такого рода смешанной модели выполяется с помощью различного рода согласующих устройств (ЦАП/АЦП).

Смешанные эксперименты часто проводят для ПО (стиральные машины)

Для дальнейшего изложения целесообразно дать математической модели более строгое определение, как набор охарактеризущих объект **переменных состояния** и соотношений между ними. (При поиске уравнений учитываются промежуточные переменные.)

В конечном итоге расчет математической модели сводится к разрешению уравнения или системы уравнений аналитическим или численным методом. Методы: метод Гаусса.

Изложение схемы расчетов выходных параметров модели по ее входным данным в виде алгоритма с привязкой к конкретному методу решения называется **алгоритмической моделью**.

Реализация алгоритмической модели на конкретном языке программирования называется **алгоритмическим процессом**.

2 Лекция от 10.9.2022. Моделирование систем управления.

2.1 Современные требования программного и моделирования.

Интенсивное развитие средств визуализации и ООП, а также соответствующего программного обеспечения позволяет программистам создавать среду в рамках которой:

1. Предлагается исчерпывающий набор инструметнов, который позволяет любому пользователю любому самостоятельо создать адекватный визуальный образ модели и объекта в формально информационном формате с навязываемом указанием всех необходимых входных данных.

2. Ведется автоматический контроль, как отдельных компонентов, так и всей модели с проверкой корректности и полноценности данных (вводимых), что позволяет при любой квалификации пользователя принимать к расчету только заведомо корректные и полноценные модели.

3. Обеспечивается дружественная информационная поддержка пользователя с описанием технологии моделирования, например, во встроенной справке. Выдаче сообщений об ошибке, их описанием и указанием способа их устранения, выводом соответствующих подсказок.
   `Справка для 3-й работы в формате .chm. Инструмент - [MS HTML Workshop]`

4. Автоматически формируется и расчитывается математическая модель на основе данной формально информационной модели.

5. На основе результатов расчета математической модели автоматически воссоздаются основные и сопутствующие выходные характеристики.

6. Выполняется визуализация выходных характеристик в количественно-качественном формате.

Реализация пунктов 1–3 относится к среде создания и редактирования визуальных образов модели (т.е. препроцессору). Пункт 4 относится к расчетному модулю (т.е. процессору). Пункты 5–6 относятся к среде визуализации результатов расчета и выходных характеристик (т.е. постпроцессору).

2.2 Что такое алгоритм?

Алгоритм — это конечный набор правил однозначно раскрывающих содержание и последовательность выполнения операций для решения поставленной задачи.

Алгоритмическая модель и **алгоритмический процесс**. Свойства:

1. Дискретность. Четкая последовательность отдельных действий. Действия должны быть связаны причинно следственными связями.

2. Понятность и однозначность (детерменированность). Все действия и их порядок должны быть однозначно понятны.

3. Последовательность и содержание операций в алгоритмическом процессе должны полностью соответствовать описанию в алгоритмической моделе.

4. Результативность или конечность. Алгоритм должен выполняться за конечное число шагов, каждый маршрут должен заканчиваться выводом результата.

5. Адекватность и правильность. Алгоритм должен адекватно реализовывать реальный процесс.

6. Массовость. Алгоритм должен быть применим ко всему множеству входных данных.

7. Сложность и ресурсоемкость.
`Ресурсоемкость - количественный показатель требуемой памяти и времени. Сложность - порядок зависимотси времени и памяти необходимых для выполнения алгоритма от его размерности. T(N) - временная сложность; O(N) - пространственная сложность. Сложность сама по себе не дает определить ни время, ни объем необходимые для работы алгоритма. А позволяет только лишь оценить увеличение этих показателей по мере роста размерности.`

2.3 Типы моделей

Типы моделей:

1. **Феноменологические** и **абстрактные**. Феноменологические привязаные к процессу (локальные). Абстрактные воспроизводят систему с учетом ее внутренней структуры и расширяют класс решаемых задач.

2. **Активные** и **пассивные**. Активные взаимодействуют с пользователем.

3. **Статические** и **динамические**. Статические описывают процессы без развития.

4. **Дискретные** и **непрерывные**. Дискретные изменяют состояние состояние переменных скачком.

5. **Детерменированные** и **стохастичесие**. Если между входными воздействиямии, переменными состояния и выходными сигналами есть однозначное соответствие для каждого момента, то модель детерменированная. Если модель стохастическая, то применяется только статистический подход. И При этом изменения состояния объекта и выходных стостояний задается в виде вероятностных распределений.

6. **Функциональные** и **объектные**. Если описание исходит из поведения системы, то модель построена по функциональному признаку. Если описание объекта отделено от описания другого объекта и поведение системы вытекает из свойств другого объекта, то это объектная модель.

`Класс - сочетание или множество объектов обладающих идентичными свойствами (атрибутами) и эквивалентными операциями (методами).`

3 Лекция от 17.09.22

Изучить LTI Viewer (Linear analysis)

3.1 Разработка САПр'а КОПРАС

Этапы разработки КОПРАС версии 6.4

1. Подбор информации по существующим аналогам.
2. Составление ТЗ.
   (a) Четкая спецификация данных и переменных (типы и диапазоны).
   (b) Все функции.
   (c) Шаблон интерфейса.
3. Согласование и утверждение ТЗ.
4. Поиск литературы.
5. Изучение и анализ литературы.
6. Разработка алгоритмов и интерфейса.
7. Реализация программ.
8. Ввод программ пакета.
9. Тестирование и откладка программ пакета.
   Тестирование выполняется на нескольких уровнях
   (a) Модульное тестирование.
   (b) Интеграционное тестирование.
   (c) Системное тестирование (black box).
10. Доработка алгоритмов.
11. Комлексная отладка пакета.
12. Составление и оформление документации.
13. Разработка и оформление технико-экономического обоснования.
14. Анализ НИР на соответствие требования охраны труда и техники безопасности.
15. Утверждение отчета по НИР.

[1] САПр - система автоматического проектирования

К САПр систем автоматического управления предъявляется ряд специифических требований. Принципы:

- Информационного единства.
- Системного единства.
- Совместимости.
- Комплексности
- Включения
- Развития
- Стандартизации

Первые четыре принципа диктуют связность и согласованность системы САП на ряду с ее целостностью. Принцип **стандартизации** подразумевает универсализацию и типизацию компонентов с целью инвариантности к объектам исследования и специфике предметной области. Принцип **Стандартизации** не всегда возможно и удается соблюсти в связи с возможным локализованным характером приложения.

3.2 Математическая модель как каркас САПр

Отправной точкой САПр является математическая модель процесса, протекающего в объекте исследования при определенном на него воздействии. Рассмотрим элементы САПр.

Функциональный каркас и интерфейсная оболочка препроцессора подбираются с учетом набора и характера тех параметров, часть из которых должна, а часть может быть представлена в качестве входных данных объекта для расчета соответствующей математической модели в процессоре. Параметры первой части относятся к обязательным или опорным. А параметры второй части относятся к необязательным или дополнительным. Кроме того при проектировании препроцессоар надо исходить из представительного и в этих пределах максимально возможного набора входных данных с учетом их характера.

Например АБС. АБС состоит из датчиков скорости вращения колес и блока управления с гидравлическим модулятором. Все датчики однотипные и работают по принципу электромагнитной индукции (`Знать уравнение Максвела и закон Фарадея`). К колесу подсоединен ротор, движение которого возле датчика наводит в его обмотке электрический сигнал с частотой пропорциональной частоте вращения колеса. Блок управления обрабатывает сигналы от датчиков на всех четырех колесах. Если скорость вращения колеса опускается ниже определенного предела колесо считается заблокированным. При наличии признака блокировки колеса блок управления незамедлительно посылает сигнал гидравлическому модулятору, электромагнитные клапаны которого контролируют давление жидкости в тормозной магистрале. (`Знать, что такое клапан (это заслонка), тормозная магистраль (система труб, по которым течет тормозная жидкость), шток, рабочий томрозной цилиндр`) В ответ на этот сигнал клапаны ограничивают или прекращают подачу тормозной жидкости на рабочий тормозной цилиндр колеса с признаком блокировки. Если этого обратного воздействия недостаточно, и блок управления не перестает сигнализировать о

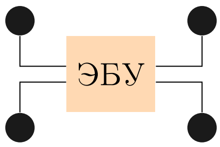


Рис. 1: Антиблокировочная система.

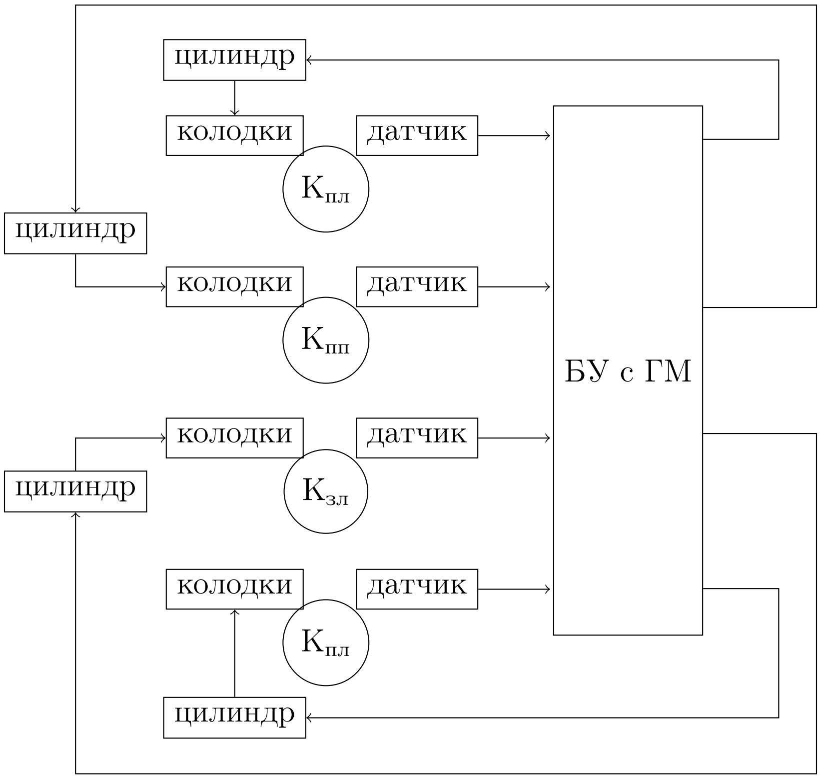


Рис. 2: "Структурная схема АБС"

блокировке, то клапан направляет тормозную жидкость в отводной тракт (снижает давление в рабочем цилиндре). Это ослабляет прижим тормозных колодок к диску колеса, и оно растормаживается. Все эти операции выполняются со скоростью до 15 циклов в секунду. Это позволяет избежать блокировки колес или движения юзом, которая влечет за собой падение управляемости и риск заноса. Кроме того АБС перераспределяет усилие торможения на всех четырех колесах во избежание заноса автомобиля при попадании колес одной оси на покрытия с разным коэффициентом сцепления.

В соответствии с этой схемой модель АБС должна включать в себя четыре однотипных контура управления колесами (по одному на колесо). В каждом из таких контуров должны быть такие звенья, как колесо, датчик скорости вращения колеса, блок управления с гидравлическим модулятором, а также рабочий тормозной цилиндр (далее просто цилиндр) и колодки для передачи обратной связи на колесо. `Знать, что такое электромагнитная индукция`

Рачсетная схема закладываемая в процессор разрабатвывается с учетом специфики расчета математической модели. Как алгоритмическая модель так и структура хранения и обмена данными подбирается исходя из того, какие именно выходные данные необходимо получить на основе входных и какие методы нужно применить или нужно разработать для этого. Функциональная оснощенность постпроцессора (среда построения основных характеристик и визуализации) зависит от особенности представления выходных характеристик, в том числе их пространственно-временного распределения. Если пространственное распределение расчетной велечины принципиально трехмерно, то есть относится к класу 3D, и не сводится к классу 2D или 2D½, то необходима визуализация на 3D уровне. Если при этом на 3D визуализацию в рамках постпроцессора накладывается аналитическая неразделимость пространственной и временной зависимостей расчетной характеристики нередко применяется цветовое кодирование, позволяющее цветом передать изменение велечины во времени и пространстве.

$$(x-1)^2 \sin(\omega t)$$
$$(x \sin(\omega t) + x \cos(\omega t)) x^2$$

Математическая модель является своего рода каркасом, тогда как такие компоненты САПр препроцессор, процессор и постпроцессор является оболочками этого каркаса, обеспечивающими программную реализацию адекватной алгоритмической модели и диалог с пользователем в своего рода буфере, предназначенном для ввода данных модели и представления расчетных характеристик модели в количественно-качественном виде.

4 Лекция от 24.09.22

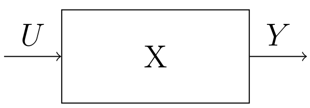
4.1 Математическое моделирование в составе системного исследования

Для решения сложных проблем обычно применяют системное исследование, которое включает в себя следующие этапы решения проблемы:

1. Изучение предметной области.
2. Выявление и формулирование проблемы.
3. Математическая (формальная) постановка проблемы (формализация постановки).
   `Надо понять какие алгоритмы необходимы`
4. Математическое моделирование исследуемых объектов и процессов.
5. Статистическая обработка результатов моделирования.
6. Формулирование альтернативных решений.
7. Оценка альтернативных решений.
8. Формулирование выводов и предложений по решению проблемы.
9. Математическая модель, как результат системного исследования, в обобщенном дискретном по времени виде представляет собой набор соотношений:

$$
\begin{aligned}
Y(t_n) &= F[U(t_n), X(t_n)] \\
X(t_{n+1}) &= G[U(t_n), X(t_n)] \\
U(t_{n+1}) &= H[U(t_n), X(t_n)]
\end{aligned}
$$

$U(t_n), U(t_{n+1})$ — множествео входных параметров в смежные моменты времени.
$X(t_n), X(t_{n+1})$ — множество переменных состояния в смежные моменты времени.
$Y(t_n)$ — Множество выходных параметров.



$$
\begin{aligned}
X(t_{n+1}) &= AX(t_n) + BU(t_n) \\
Y(t_n) &= CX(t_n) + DU(t_n) \\
\dot{X} &= AX + BU \\
Y &= CX + DV
\end{aligned}
$$

4.2 Проектирование математической модели

Для составления математической модели в одной их описаных форм необходимо:

1. Описание целевой функции системы с обозначением входных и выходных величин, а также показатель ее качества.

2. Описание конфигурации (состава) системы с представлением ее компонентов, их взаимосвязи, придаваемых величин, а также граничных и начальных условий, в которые поставлены компоненты и вся система в целом.

3. Определение физического характера каждого из компонентов или всей системы в целом, если все ее компоненты идентичны с физической точки зрения по протекающим в них процессам.

4. Изыскания для компонентов или всей системы в целом тех уравнений, которые в соответствии с определенным в пункте 3 физическим характером обобщенно или локально, но обязательно адекватно и полноценно описывает преобразование входных величин в выходные.

5. Локализация (конкретизация) уравнений состояния каждого компонента системы или всей системы в целом с учетом конфигурации описанной в пункте 2 и при необходимости переход от дифференциальной формы этих уравнений к матричной. Кроме того модель должна быть представительной в контексте адекватной передачи нужных свойств объекта, а также необходимо совпадение выходных параметров модели и объекта с определенной точностью. Точность конечного результата зависит как, от изначальной погрешности математической модели связанной с применяемыми методами, так и от погрешности, которую вносят алгоритмическая модель и алгоритмический процесс.

Таким образом, математическая модель должна быть спроектирована так, чтобы соответствующая алгоритмическая модель выдержала определенные требования к показателям качества. Оптимальная математическая модель предобуславливает возможность своей алгоритмизации и реализации на ЭВМ с минимально погрешность и минимальными затратами на разработку.

5 Лекция от 1.10.22

5.1 Изоморфизм математического описания различных физических процессов

$m\frac{dv}{dt} = P$	v	P	m	Гибкость k	механическое сопротивление f
$J\frac{d\omega}{dt} = M$	ω	M	J	k	вращ. сопротивление f
$i = C\frac{dU}{dt}$ $U = L\frac{di}{dt}$ U = Ri	U	i	C	L	R
$S\frac{dh}{dt} = Q$	h	Q	S	Q_i	Q_r
$G\frac{dU}{dt} = W$	U	W	G		
$V\frac{d\eta}{dt} = G$	h	G	V		

5.2 Проектирование математической модели для уточнения параметров орбиты спутника

У космического аппарата есть следующие параметры (`Погуглить и знать`):

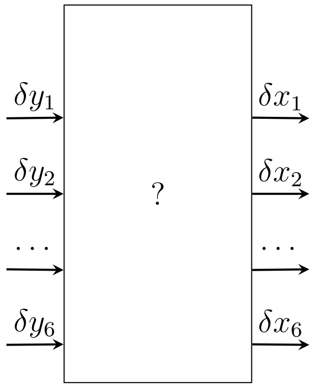
1. Наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора.
2. Долгота восходящего угла орбиты.
3. Аргумент перегея — угловое расстояние перцентра орбиты от ее восходящего угла.
4. Фокальный параметр арбиты.
5. Экцентриситет орбиты.
6. Время пролета перецентра.

Какие параметры можно измерить:

1. Дальность от станции наблюдения до спутника.
2. Азимут от станции наблюдения до спутника.
3. Угол места в точке стояния от станции наблюдения.
4. Высота спутника над уровнем океана.
5. Скорость.
6. Время в момент изменения орбиты.

Обобщенные параметры мы обозначаем через игреки (y). Нас будет интересовать следующая функциональная зависимость:

$$y_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_6, t)$$



Введем разности. δy_i — разница между измеренным значением и расчетным значением $\delta y_i = y_i^{\text{изм}} - y_i^{\text{Р}}$. $\delta x_j = x_j^{(\text{искомое})} - x_j^{(\text{расчетное})}$.

`TODO вставить фото схемы`

$$\delta y_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2}\delta x_2 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_6}\delta x_6$$

В результате получает уравнение:

$$\delta Y = A\delta X$$

Где A — опорная матрица из разных частных производных. С учетом ошибок измерения и прогнозирования ξ_i данное уравнение представляет в уточненном виде:

$$\xi_i = \delta Y - A\delta X$$

Наша задача состоит в том, чтобы используя это соотношение, надо найти наиболее правдоподобные поправки расчетных параметров орбиты. Согласно методу наименьших квадратов, наиболее правдоподобными являются те значения δy_j, которые обращают в минимум сумму квадратов ошибок измеряемых значений y_i.

$$S = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (\sum_{j=1}^{6} A_{ij}\delta x_j - \delta y_i)^2$$

$$S = \bar{\xi}^T \xi$$

$$S = (\delta Y - A\delta X)^T(\delta Y - A\delta X)$$

$$S = \delta Y^T \delta Y - 2\delta X^T A^T \delta Y + \delta X^T A^T A \delta X$$

$$\frac{\partial S}{\partial X} = -2A^T\delta Y + 2A^2 A\delta X = 0$$

$$(A^T A)\delta X = A^T \delta Y$$

5.3 Переход от дифференциальных уравнений к переменным состояния

В общем виде уравнение связывающее вход и выход одномерного объекта выглядит следующим образом:

$$\Psi(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n)}, u, \dot{u}, \ddot{u}, \ldots, u^{(m)}, t) = 0$$

Если сводим к линейным ДУ, то:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Если выходной сигнал однозначно определяется начальными условиями и заданным входным сигналом, то можем выразить старшую производную.

$$y^{(n)} = F(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n-1)}, u, \dot{u}, \ldots, u^{(m)}) \tag{1}$$

2 случая

1. Производная от входного сигнала не входит в правую часть уравнений 1.
   Выводятся:
$$\begin{aligned} &x_1 = y \\ &x_2 = \dot{y} \\ &x_3 = \ddot{y} \\ &\ldots \\ &x_{n-1} = y^{(n-1)} \\ &x_n = y^{(n)} \end{aligned} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u, t) \\ y = x_1 \end{cases}$$
$$\ddot{y} + \dot{y} + y = u$$
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

2. Производная от входного сигнала присутствует в правой части уравнения. Если входодной сигнал заранее известен и задан, то описанная выше процедура остается в силе:
$$\begin{cases} \ddot{y} + \dot{y} + y = u \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 + a\cos(t) \\ y = x_1 \end{cases}$$

Если входной сигнал не известен заранее, то в качестве переменной состояния можно выбрать производную старшего порядка от входного сигнала и ввести ее в вектор переменных состояния.

6 Лекция от 8.10.2022

6.1 Переход от передаточной функции к переменным состояния

Передатоная функция в общем виде.

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} = \frac{(2)}{(1)}$$

6.1.1 Метод фазовых переменных (метод прямого программироавния)

$$\frac{U(p)}{(1)} = \frac{Y(p)}{(2)} = X(p)$$

$$\begin{cases} (1) \cdot X(p) = U(p) \\ (2) \cdot X(p) = Y(p) \end{cases} \Bigg| \, p^n X(p) = \frac{1}{a_n}[U(p) - a_{n-1}p^{n-1}X(p) - \cdots - a_1 p X(p) - a_0 X(p)$$

Если начальное условие $\neq 0$, обратное преобразование Лапласа, абсцисса сходимости

$$X^{(n)} = \frac{1}{a_n}[u - a_{n-1}x^{(n-1)} - \cdots - a_1\dot{x} - a_0 x]$$

Введем переменные состояния: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \ddot{x}$, $\ldots$, $x_{n-1} = x^{(n-2)}$, $x_n = x^{(n-1)}$ Перепишем в полуматричном виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = \dfrac{1}{a_n}[u - a_{n-1}x_n - \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1] \\ y = b_m x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + b_1\dot{x} + b_0 x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{-a_2}{a_n} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + B\bar{U}$$

6.1.2 Метод полюсов (параллельного программирования)

При отсутствии кратных полюсов передаточная функция раскладывается на дроби типа $\frac{A_i}{p-\lambda_i}$. A_i — вычеты; λ_i — полюса.

$$A_i = (p - \lambda_i)W(p)\big|_{p=\lambda_i}$$

$$X_i(p) = \frac{U(p)}{p - \lambda_i} \qquad \text{Во временной области: } \dot{x}_i = \lambda_i x_i + u$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad Y = CX = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \end{pmatrix} \cdot X$$

Пример:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u + 4\dot{u}$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1 + 4p}{p^2 + 3p + 2} = \frac{7}{p+2} - \frac{3}{p+1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = 7x_1 - 3x_2 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 7 & -3 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Кратные полюса

$$W(p) = \frac{A_i}{(p - \lambda_i)^k} + \frac{A_2}{(p - \lambda_i)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{p - \lambda_i} + \cdots + \frac{A_n}{p - \lambda_n}$$

Где λ_i — корень кратности k

$$\begin{aligned} x_k(p) &= \frac{U(p)}{p - \lambda_i} \\ x_{k-1}(p) &= \frac{x_k(p)}{p - \lambda_i} \\ &\vdots \\ x_1(p) &= \frac{x_2(p)}{p - \lambda_i} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_k &= \lambda_i x_k + u \\ \dot{x}_{k-1} &= \lambda_i x_{k-1} + x_k \\ &\vdots \\ \dot{x}_1 &= \lambda_i x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Везде учитываем нулевое начальное условие. Если начальное условие $\neq 0$ формулы видоизменяются

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & & & & & \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & & & & & \\ \vdots & 0 & \lambda_i & 1 & \dots & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda_i & 1 & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda_i & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{k+1} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u$$

Пример:

$$W(p) = \frac{p}{(p+1)^2(p+2)} = \frac{-1}{(p+1)^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{-2}{p+2}$$

Числители — вычеты

$$A_1 = \left.\frac{(p+1)^2 p}{(p+1)^2(p+2)}\right|_{p=-1} = \frac{-1}{-1+2} = -1$$

$$A_2 = \left.\frac{(p+2) p}{(p+1)^2(p+2)}\right|_{p=-2} = \frac{-2}{(-2+1)^2} = -2$$

Так как сумма двух вычетов (A_2 и A_3) двукратном полюсе $= 0$, то $A_3 = 2$

Формула вычетов:

$$A_i = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dp^{i-1}}\left.\left[(p-\lambda_i)^k W(p)\right]\right|_{p=\lambda_i}, \text{ где } i = \overline{1 \dots k}$$
$$A_j = \left.(p-\lambda_j)\, W(p)\right|_{p=\lambda_i}, \text{ где } j = \overline{k+1 \dots n}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} U \\ Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} X \end{cases}$$

При комплексно-сопряженных полюсах есть возможность формировать модель состояний только с вещественными элементами.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a+jb & 0 \\ 0 & a-jb \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Замена переменных: $Z = MX,\ X = M^{-1}Z$

$$\begin{cases} Z = MAM^{-1}Z + MBU \\ Y = CM^{-1}Z \end{cases} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot Z + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u \\ Y = CM^{-1}Z \end{cases}$$

6.2 Переход от уравнения состояний к передаточной функции

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \qquad \text{Нулевые начальные условия}$$

$$\begin{cases} pX = AX + BU \\ \ \ Y = CX + DU \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} X &= (pE - A)^{-1}BU \\ Y &= [C(pE-A)^{-1}B + D]U \end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ \ y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot u \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} p\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} U \\ \ Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{X} \end{cases}$$

$$(pE - A) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1 & 2 \\ 0 & p+2 \end{pmatrix}$$

$$(pE - A)^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \cdot \begin{pmatrix} p+2 & 2 \\ 0 & p+1 \end{pmatrix} \quad ?$$

$$x = (pE - A)^{-1} \cdot BU = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \cdot \begin{bmatrix} p+2 & -2 \\ 0 & p+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot U = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \cdot \begin{pmatrix} p \\ p+1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{U}{(p+1)(p+2)}$$

$$W(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

7 Лекция от 15.10.2022

Алгебраический контур — это такая часть цепи, в которой выходной сигнал блока в последствии попадает на вход этого блока (зацикливание).

Блоки:

- Осцилограф — *Scope*: параметры (*min, max, label, sample time* `Если (−1) -- наследование шага квантования из предыдущей части системы единицы измерения.`, *limit data prints to last).* Signal and ports — количество портов.

- Цифровой дисплей — *display*: параметры — типы (*long*) и т.д.)
- *Floating Scope* — множество сигналов в одном месте.
- *Model Lineariser* (переходная характеристика, годограф Найквиста) — время регулирования, перерегулирования.