Resumen

En este documento se presentan las fórmulas de distancia entre el punto, la recta y el plano.

Álgebra I

Formulario de distancias

Andrés Miniguano T.
e-mail: andres.miniguano@epn.edu.ec

Milton Torres E.
e-mail: milton.torres@epn.edu.ec

6 de abril de 2017

Notación

En lo que sigue usaremos las letras del alfabeto $a, b, c, \ldots$ para un punto en el espacio con coordenadas dadas por índices; es decir

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Además, se usarán las letras del alfabeto griego para denotar escalares: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.
La única excepción a las reglas anteriores se dará con el vector

$$w = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

que indican los ejes horizontal, vertical y espacial.

Definiciones

- **Punto: Es cualquier elemento del espacio, el cual consiste en una tripleta ordenada de números reales; es decir, un elemento de R^3. Por ejemplo, si $a \in R^3$, entonces lo escribiremos como**

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

- **Recta: Dados dos puntos a y b, una recta con vector director a y vector constante b consiste en todos los puntos de la forma**

$$t\,a + b;$$

aquí t es un número real. A esta recta la notamos como

$$R : [\langle a \rangle + b].$$

- **Plano: Dados un punto a y un escalar α, un plano de vector normal a consiste en todos los puntos w que satisfacen $a \cdot w = a_1x + a_2y + a_3z = alpha$. Aquí $\cdot$ indica el producto punto entre a y w; y el plano se nota**

$$H : [\langle a, w \rangle = \alpha].$$

1 Formulario

1. **Distancia entre dos puntos:** Para dos puntos a y b, su distancia $dd(a,b)$ es la norma de su resta:
$$dd(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{a-b\cdot a-b} = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}.$$
2. **Distancia entre un punto y una recta:** La distancia entre un punto a y la recta $R:[\langle b\rangle + c]$ tiene dos fórmulas:
   - *Fórmula de proyección:*
$$dd\big(a,\, R:[\langle b\rangle + c]\big) = \left\|(a-c) - \frac{(a-c\cdot b}{\|b\|^2}b\right\|$$
   - *Fórmula del binormal:*
$$\mathrm{d}\left(a,\, R:[\langle b\rangle + c]\right) = \frac{\big\|(a-c)\times b\big\|}{\|b\|}$$
3. **Distancia entre un punto y un plano:** Si a es un punto y $H:[\langle b,x\rangle = \alpha]$ un plano, entonces:
$$\mathrm{d}\left(a,\, H:[\langle b,x\rangle=\alpha]\right) = \frac{a\cdot b-\alpha}{\|b\|}.$$
4. **Distancia entre dos rectas:** Si $R:[\langle a\rangle + c]$ y $S:[\langle b\rangle + d]$ son dos rectas, entonces tenemos dos casos:
   - *Rectas paralelas:*
$$\mathrm{d}\left(R:[\langle a\rangle + c],\, S:[\langle b\rangle + d]\right) = \frac{\big\|(c-d)\times a\big\|}{\|a\|}$$
   - *Rectas que se cruzan:*
$$\mathrm{d}\left(R:[\langle a\rangle + c],\, S:[\langle b\rangle + d]\right) = \frac{\big|\det(c-d,a,b)\big|}{\|a\times b\|}.$$
5. **Distancia entre una recta y un plano:** Para la recta $R:[\langle a\rangle + c]$ y el plano $H:[\langle b,w\rangle = \alpha]$, entonces necesariamente su distancia no se anula si son paralelos con:
$$\mathrm{d}\left(R:[\langle a\rangle + c], H:[\langle b,w\rangle=\alpha]\right) = \frac{c\cdot b-\alpha}{|b|}$$
6. **Distancia entre dos planos:** Finalmente para los planos $H:[\langle a,w\rangle = \alpha]$ e $I:[\langle b,w\rangle = \beta]$:
$$\mathrm{d}\left(H:[\langle a,w\rangle=\alpha], I:[\langle b,w\rangle=\beta]\right) = \frac{|\alpha-\beta|}{|a|} = \frac{|\alpha-\beta|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Nota

Las fórmulas anteriores se demuestran usando elementos del álgebra lineal y cálculo vectorial, puesto que en algunos casos basta plantear un problema de minimización, en otros sólo aplicar propiedades del determinante y proyecciones. Algo bastante interesante es que todas las fórmulas anteriores se basan en obtener la norma de un único elemento, dicho elemento viene dado por el siguiente teorema:

Teorema 1 (Proyección sobre un conjunto cerrado, convexo y no vacío)**.** *Sea $M \subseteq R^3$ un conjunto cerrado, convexo y no vacío; entonces para todo $a \in R^3$ existe un único $b \in M$ tal que*
$$\mathrm{d}(a,b) = \inf\big\{\, \mathrm{d}(a,c) : c \in M \big\};$$
a b se lo denomina la proyección de *a en M y se nota* $\operatorname{proy}_M a := b$.

Notemos que este teorema nos permite afirmar que siempre existe un punto que optimiza la distancia entre un conjunto y otro punto.