§1.3-1.4　事件的概率与古典概型

- 随机事件的频率
- 概率的统计定义
- 概率的公理化定义
- 古典概型（等可能概型）

1. 随机事件的频率

随机事件在一次试验中是否发生是不确定的，我们可以用大量重复试验来研究该事件发生的可能性大小。

仅从事件出现的次数不能确切地描述该事件出现的可能性的大小，还应该考虑该事件出现次数在试验总次数中所占的百分比。

例如：掷一枚硬币100次，事件A=“正面朝上”发生了61次。

“正面朝上”的次数与总的试验次数之比为：

$$\underbrace{\frac{61}{100}}_{\text{频数}}=\underbrace{0.61}_{\text{频率}}$$

1. 随机事件的频率

设在相同的条件下，进行了n次试验，事件A发生的次数 n_A 称为事件A发生的频数，

比值 $\dfrac{n_A}{n}$ 称为事件A发生的频率，记作$f_n(A)$

频率具有如下性质：

$(1)\ 0 \le f_n(A) \le 1$　　　$(2)\ f_n(\varnothing)=0;\ f_n(S)=1$

(3) 设事件A, B互不相容，

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$

互斥事件的和事件的频率等于频率的和

1. 随机事件的频率

设在相同的条件下，进行了n次试验，事件A发生的次数 n_A 称为事件A发生的频数，

比值 $\dfrac{n_A}{n}$ 称为事件A发生的频率，记作$f_n(A)$

频率具有如下性质：

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$

(2) $f_n(\varnothing)=0$; $f_n(S)=1$

(3)若$A_1, A_2, \cdots A_k$两两互斥，

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

（有限可加性）

(4)若$A \subset B$,则$f_n(A) \le f_n(B)$

频率越大的事件发生越频繁，该事件在一次试验中发生的可能性就大。反之亦然。因次，我们可以考虑用频率来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小.

例如：

掷硬币n次，观察正面（H）出现的次数 $n(H)$

波动幅度：1.0−0.2=0.8

$n=5$	
$n(H)$	$f_n(H)$
2	0.4
3	0.6
1	0.2
5	$\boxed{1.0}$
1	$\boxed{0.2}$
2	0.4
4	0.8
2	0.4
3	0.6
3	0.6

$n = 50$	
$n(H)$	$f_n(H)$
22	0.44
25	0.50
21	0.42
25	0.50
24	0.48
21	0.42
18	0.36
24	0.48
27	0.54
31	0.62

波动幅度：0.62−0.36=0.26

$n = 500$	
$n(H)$	$f_n(H)$
251	0.502
249	0.498
256	0.512
253	0.506
251	0.502
246	0.492
244	0.488
258	0.516
262	0.524
247	0.494

波动幅度：0.524−0.488=0.036

历史上一些试验结果

试验者	试验次数	正面朝上的次数	正面朝上的频率
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

当重复试验的次数n逐渐增大时，“正面朝上”频率越来越接近0.5，呈现出一种稳定性。

概率

这种频率稳定性就是所谓的统计规律性。

2.概率的统计定义

:

在相同条件下，独立地重复进行n次试验，事件A发生的频率稳定地在某一常数p附近摆动，且随n越大，摆动的幅度越小，则称p为事件A的概率. 记为$P(A)$.

注：(1) 事件的概率是先于试验存在的，不受试验次数左右，且在每次试验(只要条件相同)中是一致的.

(2) 该定义 优点：直观易懂

缺点：粗糙模糊，不便使用

3.概率的公理化定义(苏联 柯尔莫哥洛夫)

设E是随机试验, S是它的样本空间, 对于E的任一事件A对应一个实数$P(A)$, 称为事件A的概率,其中集合函数P(.)满足下列条件:

(1)非负性: $P(A)\geq 0$

(2)规范性: $P(S)=1$

(3)可列可加性: 若$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$两两互斥,

则$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

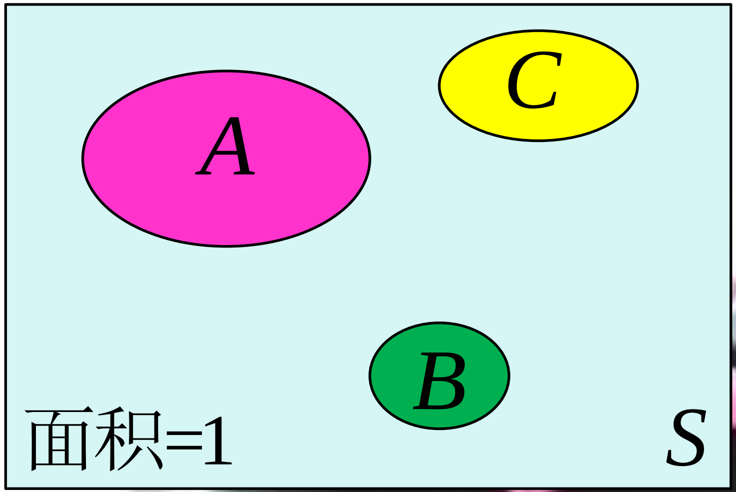
概率的几何解释：

我们可以用面积直观地解释概率：

$P(S)=$矩形区域S的面积=1

$P(A)=$图形A面积

则$P(A),P(B),P(C)$满足以上三个条件



3.概率的一些重要性质：

性质1: $P(\varnothing)=0$

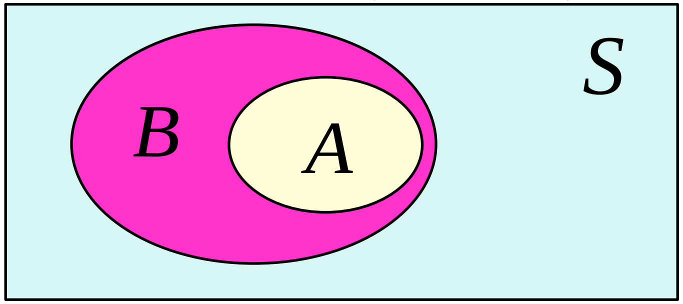
性质2:(有限可加性)若$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互斥，

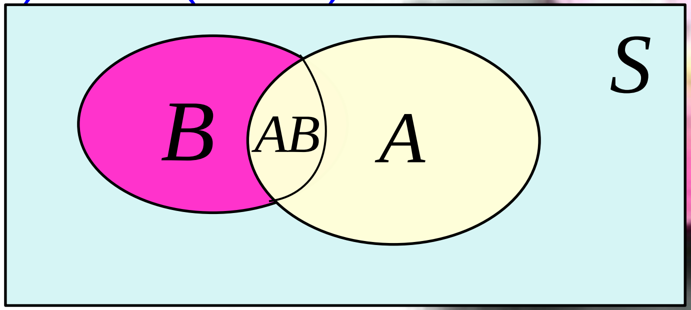
则$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$

性质3: 若事件$A \subset B$，则$P(B) \geq P(A)$

且$P(B-A)=P(B)-P(A)$

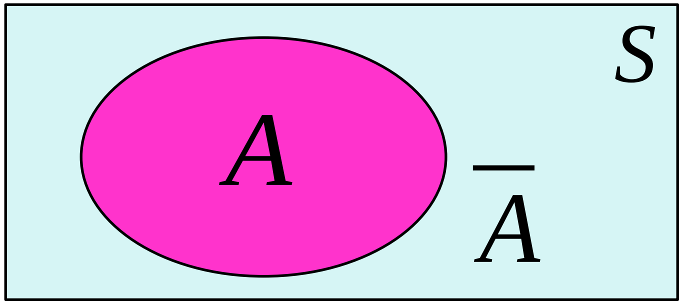
一般地，$P(B-A)=P(B)-P(AB)$





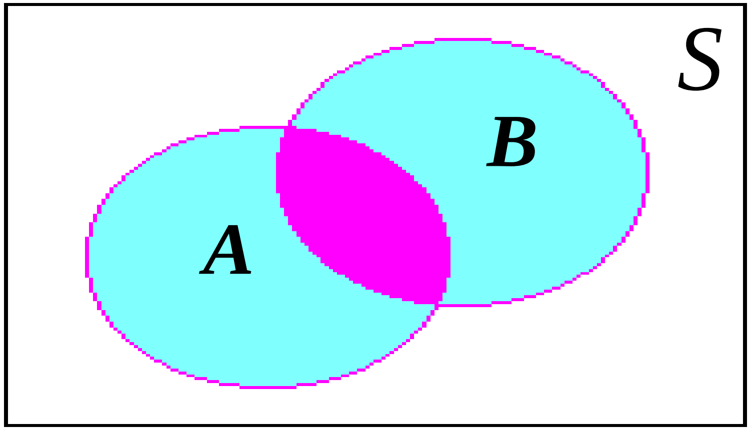
3.概率的一些重要性质：

性质4：逆事件的概率$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$



性质5：（加法公式）对任意两个事件A, B，有

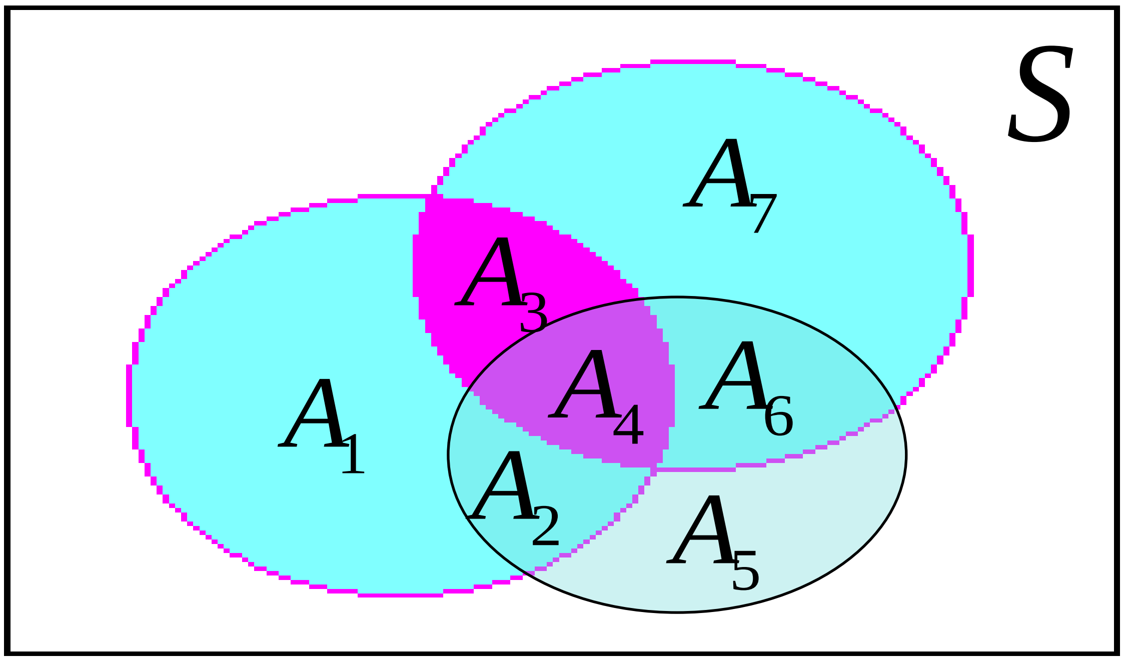
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



3.概率的一些重要性质:

对任意三个事件A, B, C有

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$



例题

例1：设A，B是两个随机事件，且$P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{1}{2}$，

求下列三种情况下$P(B\overline{A})$的概率。

(1) A和B互斥　　(2) $A\subset B$　　(3) $P(AB)=\frac{1}{9}$

解：(1) $P(B\overline{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}$

(2) $P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

(3) $P(B\overline{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}=\frac{7}{18}$

例2：设A，B，C 是三个随机事件, 且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\quad P(AB)=P(BC)=0,$$

$P(AC)=\frac{1}{8}$, 求A，B，C 至少有一个发生的概率。

解：

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)\\&\quad-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

4.古典概型（等可能概型）

如果一个随机试验满足:

(1) 样本空间中的元素只有有限个;

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

这种试验称为等可能概型.(古典概型)

例如:掷一颗骰子,观察出现的点数.

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$, 每个点数出现的可能性都相同.

4.古典概型（等可能概型）

计算公式: 设$S=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, 由等可能性知

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\ldots=P(\{e_n\})=1/n,$$

若事件 A包含k个基本事件,

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P\left(\left\{e_{i_j}\right\}\right)=\frac{k}{n}$$

$$=\frac{\text{A中的基本事件数}}{\text{S中的基本事件总数}} \qquad (1)$$

例题

例1:将一枚均匀的硬币抛两次，设A_1 =“至少一次出现反面”，A_2 =“恰有一次出现反面”，求A_1, A_2的概率。

解：$S=\{HH, HT, TH, TT\}$

$A_1=\{HT, TH, TT\}$　　$A_2=\{HT, TH\}$

则$P(A_1)=\frac{3}{4}, P(A_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

例2:有20件产品，其中5件是次品，现在从产品中任取一件检验，求恰为正品的概率。

解:设A=“抽检的一件恰为正品”, S的样本点数为20，A的样本点数为15，因此

$$P(A)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}.$$

古典概型概率的计算步骤:

(1) 选取适当的样本空间S, 使它满足有限等可能的要求, 且把事件A表示成S的某个子集.

(2) 计算样本点总数n及事件A包含的样本点数k.

(3) 用下列公式计算.

$$P=\frac{k}{n}$$

古典概率问题的常用方法:

加法原理:

完成一件工作, 有m类方法, 而第1类方法有n_1种方法, 第2类方法有n_2种方法,…,第m类方法有n_m种方法, 任选一种此工作就完成, 那么完成这项工作共有$N=n_1+n_2+\ldots+n_m$种不同的方法.

乘法原理:

完成一件工作, 需要m个步骤, 而第1步有n_1种方法, 第2步有n_2种方法,…,第m步有n_m种方法, 依次完成这m步时这项工作才完成, 那么完成这项工作共有$N=n_1\times n_2\times\ldots\times n_m$种不同的方法.

古典概率问题的常用方法：

有重复排列:

从n个不同的元素中，有放回的取出m个元素排成一列。共有 n^m 种排列.

无重复排列:

从n个不同的元素中，无放回的取出m个元素排成一列。共有P_n^m 种排列.

组合:

从n个不同的元素中，取出m个元素（不考虑顺序的排列）的组合，共有C_n^m 种.

例3. 袋中装有4只白球和2只红球.

从袋中摸球两次,每次任取一球.有两种方式:

(a)放回抽样; (b)不放回抽样.

求:（1）两球颜色相同的概率。

（2）两球中至少有一只白球的概率。

解：定义事件: A=“两球都是白球”, B=“两球都是红球”,

C=“两球中至少有一只白球”,

（a）放回抽样（按照有重复排列来考虑）

样本空间:取两次球, 共有6 ×6种取法.

事件A的样本点：共有4×4 种取法,

事件B的样本点：共有2×2 种取法,

A=“两球都是白球”，
B=“两球都是红球”,
C=“两球中至少有一只白球”，

故$P(A)=\dfrac{4\times4}{6\times6}=\dfrac{4}{9}\approx0.444$, $P(B)=\dfrac{2\times2}{6\times6}=\dfrac{1}{9}\approx0.111$,

A∪B=“两个球颜色相同”，

则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{16+4}{36}\approx0.556$,

$P(C)=1-P(B)\approx0.889$

A=“两球都是白球”，
B=“两球都是红球”,
C=“两球中至少有一只白球”，

(b) 不放回抽样（按照无重复排列来考虑）

样本空间:第一次有6种取法，第二次有5种取法，共有 $P_6^2=6\times5$ 种取法.

事件A的样本点：共有 $P_4^2=4\times3$ 种取法。

事件B的样本点：共有 $P_2^2=2\times1$ 种取法。

$$故P(A)=\frac{4\times3}{6\times5}=\frac{2}{5}=0.4,\ \ P(B)=\frac{2\times1}{6\times5}=\frac{1}{15}\approx0.0667,$$

后面的计算留给大家

例4：将3只球随机放入10个盒子 中去,求

（1）指定的3个盒子各有 一只球的概率.

（2）任意的3个盒子各有 一只球的概率.

解:设A=“指定的3个盒子各有一只球”

B=“任意的3个盒子各有一只球”

S的样本点数为$10^3=1000$,

A的样本点数为 $3!=6$,

B的样本点数为$P_{10}^3=720$,

$$故P(A)=\frac{6}{1000}=\frac{3}{500},P(B)=\frac{720}{1000}=\frac{18}{25}.$$

例5：设一袋中有编号为1,2,…,9的球共9只，
现从中任取3只,试求:
(1)取到1号球的概率,（事件A）
(2)最小号码为5的概率.（事件B）
（按照组合来考虑）

解: 从9个球中任取3只球,共有 C_9^3 种取法.

（1）取到1号球共有 C_8^2 种取法 $P(A)=\dfrac{C_8^2}{C_9^3}=\dfrac{1}{3}.$

（2）最小号码为5,共有 C_4^2 种取法.

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_9^3}=\frac{1}{14}.$$

(分球入箱问题):

例6：将5只球随机放入9 个盒子中去,求“每个盒子至多有一只球” 的概率.(设盒子的容量不限).

（按照排列来考虑）

解: 每一只球都可以放入这9个盒子中的任一个, 相当于从1到9这9个数中有放回地选取5次，每次选一个数。共有 9^5种不同的放法.

“每个盒子至多放一只球”等价于“恰好有5个盒子各放一球”,共有 P_9^5种不同的放法.

则所求事件的概率$P=\dfrac{P_9^5}{9^5}$

注：同类型的还有分房问题和生日问题

(分房问题):

例7：有n个人，每个人等可能地进入N (N≥n)间房间中的任何一间，求“恰有n间房各有一人”的概率.

解: 将每一个人进入的房间号看作从1到N中随机取出来的一个数，那么“恰有n间房各有一人”就等价于“取出来的n个数完全不同”。

则，所求概率$p=\dfrac{P_N^n}{N^n}$。

（生日问题）

例8：假定每个人在一年365天的任一天都等可能过生日,随机选取 n (小于365)人,求他们生日至少有两个相同的概率。

分析：（365天—365个盒子，人—球）

（至少有两个球在同一盒子——对立事件：每个盒子至多有一个球）

概率$p=1-\dfrac{P_{365}^{n}}{365^{n}}.$　　若取n=64, $p=0.997.$

例9：　　某接待站在某一周曾接待过12次来访,已知所有这12次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的?

解：假设接待站的接待时间是没有规定,而各来访者在一周的任一天中去接待站的是等可能的,那么，12次接待来访者都在周二、周四的概率为

$$\frac{2^{12}}{7^{12}} = 0.0000003$$

人们在长期实践中总结得到**“概率很小的事在一次试验中实际上几乎是不发生的”**，现在概率很小的事件在一次试验中竟然发生了, 因此有理由怀疑假设的正确性, 从而推断接待站不是每天都接待来访者, 即认为其接待时间是有规定的.

例10：设有N件产品, 其中D件次品, 从中任取n件, 求其中恰有$k(k \leqslant D)$件次品的概率.

解:N件中任取n件, 可以不考虑次序共有C_N^n取法, D件次品中取k件, 所有可能取法共有 C_D^k 种取法,

从N-D件正品中取n-k件所有可能的取法共有C_{N-D}^{n-k}种, 由乘法原理知

$$p = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}.$$

例11：15名新生中有3名是优秀生，将这15名新生随机地平均分配到三个班级中去，问每班各分配到一名优秀生的概率是多少？

解：15名新生平均分到配到三个班级中的分法总数为

$$C_{15}^{5}C_{10}^{5}C_{5}^{5}=\frac{15!}{10!5!}\cdot\frac{10!}{5!5!}=\frac{15!}{5!5!5!}$$

将3名优秀生平均分到三个班级中（每班一名）共3！种分法，另外12名新生平均分到三个班级中的分法有

$$C_{12}^{4}C_{8}^{4}C_{4}^{4}=\frac{12!}{4!4!4!}$$

于是，$p=\dfrac{3!\times\dfrac{12!}{4!4!4!}}{\dfrac{15!}{5!5!5!}}=\dfrac{25}{91}=0.2747$

*5.几何概型

如果一个随机试验满足:

(1) 试验的可能结果有无限多个，且所有结果可以用一个有度量的区域来表示。

(2) 试验中每个结果的出现具有等可能性.

这种试验称为**几何概型**。

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{的度量}}{\text{样本空间}S\text{的度量}}$$

(会面问题):

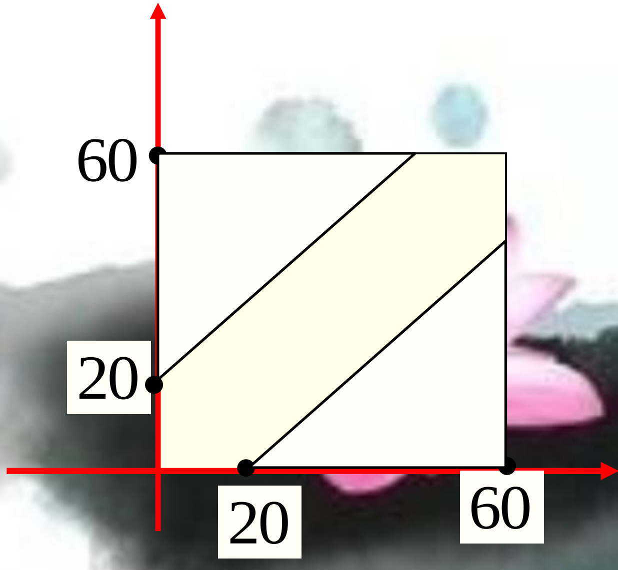
例11：两个朋友约定在晚上8点到9点在某地会面，先到者等候另一人20分钟，不到即先行离去，求这对朋友能会面的概率。

解:以x,y表示两人到达时间，则有 $0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60$,

样本点(x，y)充满正方形域, 能会面的条件为

$$|x - y| \le 20,$$

能满足条件的点充满图中蓝色区域



所以

$$P = \frac{\text{阴影域面积}}{\text{正方形域面积}} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$