在最近几十年中，概率论的方法被引入各个工程技术学科和社会学科。目前，概率论在近代物理、自动控制、地震预报和气象预报、工厂产品质量控制、农业试验和公用事业等方面都得到了重要应用。概率论也成为其它许多学科的有力工具。

数理统计是伴随着概率论的发展而发展起来的一个数学分支，研究如何有效的收集、整理和分析受随机因素影响的数据，并对所考虑的问题作出推断或预测，为采取某种决策和行动提供依据或建议.

随机事件及其概率

§1.1随机试验及随机事件

- 随机试验
- 样本空间
- 随机事件
- 事件的关系
- 事件的运算

1. 随机试验

自然界与社会生活中的两类现象

确定性现象　　在一定条件下必然发生

不确定性现象　　在一定条件下结果不确定，但在大量重复试验中有一定的规律性

早晨太阳每天从东方升起　　确定

打把，击中靶心　　不确定

向上抛一枚硬币会落到地上　　确定

抛一枚硬币在地上，正面朝上　　不确定

1. 随机试验

自然界与社会生活中的两类现象

确定性现象　　在一定条件下必然发生

不确定性现象　　在一定条件下结果不确定，但在大量重复试验中有一定的规律性

（随机现象）

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的数学学科。

例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是正面朝下。

但大量重复抛掷该硬币时，其结果又具有某种统计规律。如，正面朝上的频率会接近0.5。

1. 随机试验

要了解随机现象的规律性，需要进行试验，对随机现象进行观察研究的过程就称为随机试验，简称试验，记为E

例如

E_1:抛一枚硬币，观察正H（Heads）、反T（Tails）面出现的情况。

E_2：将一枚硬币抛两次，观察正(H)反(T)面出现的情况。

1. 随机试验

E_3:将一枚硬币抛5次，观察正面出现的次数。

E_4:掷一颗色子，观察出现的点数

E_5:随机取一个自然数

E_6:测试一批灯泡中任意一只的寿命

1. 随机试验

随机试验的三个特点：

（1）可重复性：试验可以在相同条件下重复进行

（2）可观察性：每次实验可能的结果不止一个，但可以在实验之前知道所有可能的结果；

（3）随机性：每次实验之前不能确定出现哪个结果。

2. 样本空间

我们将随机试验E 的所有可能的结果组成的集合称为E 的样本空间，记为S。

样本空间的元素，即E 的每一个结果，称为样本点，记为e。

如果试验E 的可能的结果是 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ 则这些结果就是E 的样本点。

E 的样本空间 $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$

例：

E_1：抛一枚硬币，观察正(H)反(T)面出现的情况。

样本点 H 或 T

样本空间：$S_1=\{H,T\}$

E_2：将一枚硬币抛两次，观察正(H)反(T)面出现的情况。

样本点　HH，　HT，　TH　或TT

样本空间：$S_2 = \{HH, HT, TH, TT\}$

E_3：将一枚硬币抛5次，观察正面出现的次数。

样本点　0，　1，　2　，　3，　4或5次

样本空间：$S_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

E_4：掷一颗色子，观察出现的点数

样本点　1，　2　，　3，　4，　5或6点

样本空间：$S_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E_5：随机取一个自然数

（结果有可数无穷多个）

样本空间：$S_5=\{0,1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$

E_6：测试一批灯泡中任意一只的寿命 t

（结果有不可数无穷多个）

样本空间：$S_6=\{t \mid 0\le t\le T\}$

（小时）

3. 随机事件

样本空间中的子集，称为试验E 的随机事件，简称事件，用大写字母A,B,C表示。当A中某一个样本点出现时，就说事件A发生了。

每次试验中都不可能发生的事件称为不可能事件，也即空集$\varnothing$ 。

样本空间S包含了试验的所有样本点，在每次试验中它总会发生，称S为必然事件。

由一个样本点e组成的单点集$\{e\}$称为基本事件。
（也可以将样本点本身看做基本事件）

注：1、一般的事件是由基本事件复合而成的，

2、基本事件是不能再分解的事件。

3、事实上，不可能事件和必然事件具有确定性，但我们任然把他当做随机事件来处理。

例1：掷一颗色子的试验的基本事件是：

$$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$$

事件A={掷出1点}　　$A=\{1\}$

事件B={掷出奇数点}　　$B=\{1,3,5\}$

事件C={掷出点数大于4}　　$C=\{5,6\}$

事件D={掷出点数小于7}是必然事件

事件E={掷出点数大于8}是不可能事件

例2：将一颗色子掷两次，求点数之和大于或等于10的事件B。

解：试验的样本点形如(m,n)，

其中m,n分别属于$\{1,2,3,4,5,6\}$，

一共有$6^2=36$个样本点。

事件$B=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

例3: 在自然数中随机地取一个数，求该数是大于5的偶数的事件C.

解：试验的样本点是所有自然数.

(有可数无穷多个样本点)

事件$C=\{6,8,10,12,\cdots\}$

例4：在区间$[0,10]$中随机地取一个数，求该数大于2，并且小于5的事件A.

解：试验的样本点是区间$[0,10]$中任何实数t.

$($有不可数无穷多个样本点$)$

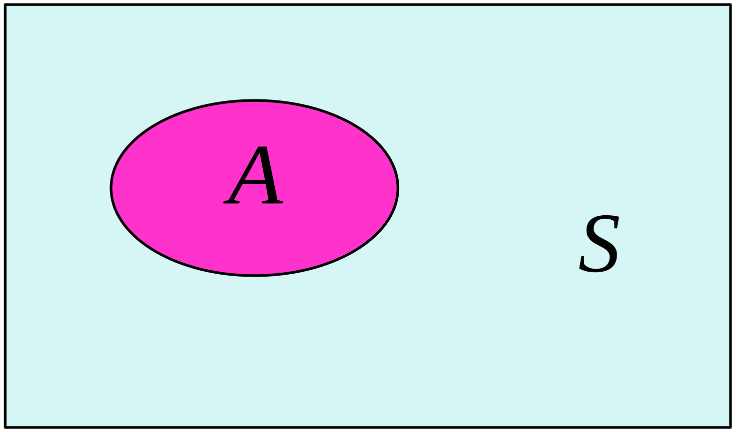
事件$A=\{t|2<t<5\}$

4. 事件的关系

一个事件A是样本空间S的一个子集，因此事件之间的关系以及事件的运算可以用集合之间的关系以及集合的运算来处理。

还可以用文氏图来表示事件：

矩形区域表示整个样本空间S



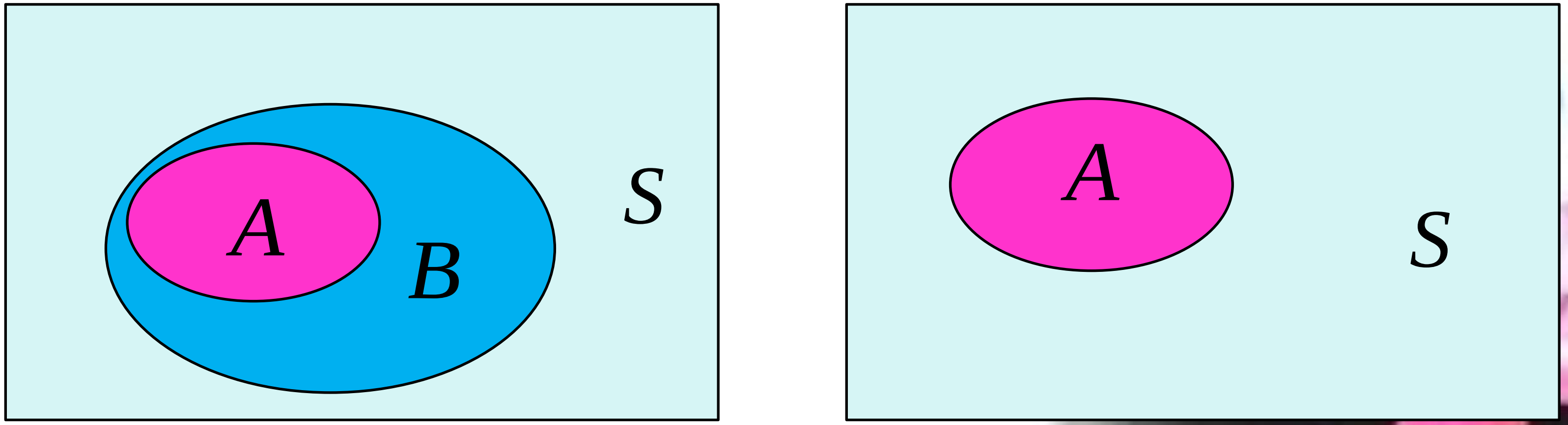
其中一个子区域表示一个具体事件A

(1). 事件的包含

如果事件A发生必然导致事件B发生，即属于A的样本点也属于B，则称事件B包含事件A，或称事件A包含于事件B

$B \supset A$或$A \subset B$　　　　$\varnothing \subset A \subset S$

用文氏图表示



(1). 事件的包含

例5：

记*A*=“考试成绩大于90分”， *B*=“考试及格”

$A=\{x|90\le x\le 100\}$ $B=\{x|60\le x\le 100\}$

$B\supset A$ 或 $A\subset B$

(2).事件的相等

如果事件B包含事件A （$A \subset B$），事件A也包含事件B（$A \supset B$），即A、B有相同的样本点，则称事件A与事件B相等，记作 $A = B$

例6：掷两颗色子，出现的点数分别记为x, y
记A= “x+y为奇数”，B= “两次的色子点数奇偶性不同”

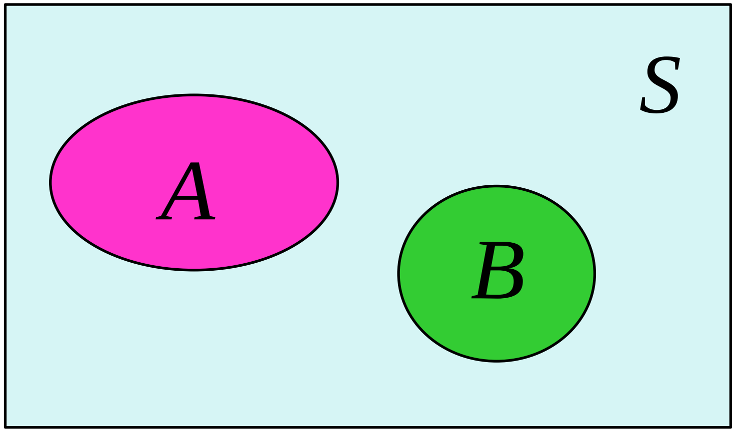
$$A = B$$

(3). 互斥事件（或互不相容）

若事件A与事件B不能同时发生，则称事件A与事件B互斥或互不相容。

$$即A\cap B=\varnothing$$

事件A与事件B互斥当且仅当二者没有共有的样本点。



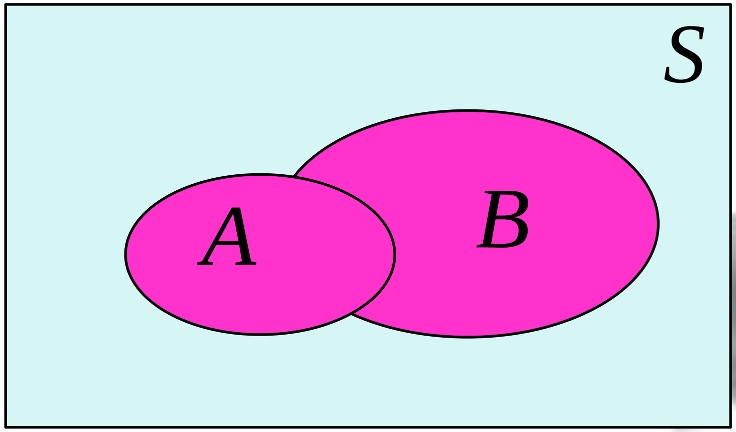
注：基本事件之间两两互斥。

5. 事件的运算 (1). 和（并）

$$A \cup B = \left\{ x \middle| x \in A \text{或} x \in B \right\}$$

称为事件A与事件B的和事件（或并），即事件A与事件B中至少有一个发生。

$A \cup B$是由事件A与事件B的所有样本点组成的事件。



推广到有限个或可列个事件：

n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生的事件称为这些事件的**和事件**

记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

推广到可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的和事件

记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

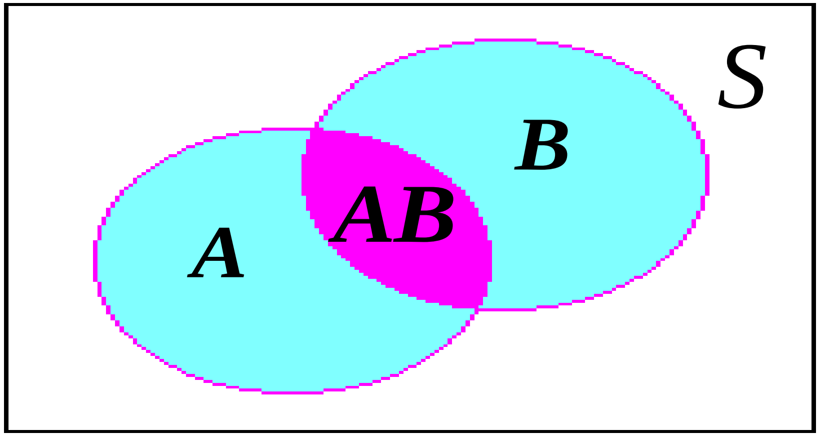
(2). 积（交）

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$$

称为事件A与事件B的积事件（或交事件），即事件A与事件B同时发生。

$A \cap B$ 是由事件A与事件B的共有的样本点组成的事件。

$(\text{或}AB)$



推广到有限个或可列个事件：

n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生所构成的事件称为这些事件的**积事件**

记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

推广到可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的积事件

记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

例7:抛一粒骰子，事件A="出现点数不超过3"，B="出现偶数点".

则$A=\{1,2,3\}$， $B=\{2,4,6\}$.

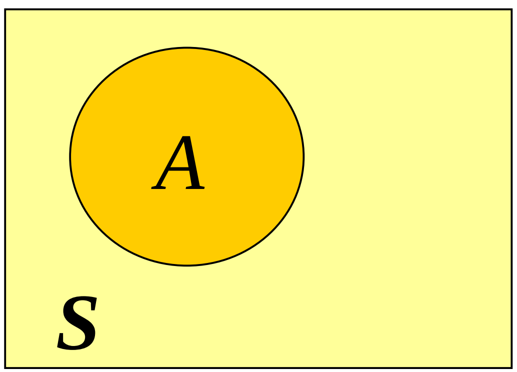
$A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$

$A\cap B=\{2\}$

(3).互逆（或对立事件）

样本空间中所有不包含在事件A中的样本点的集合记作$\overline{A}$，称事件A与事件$\overline{A}$互逆或互为对立事件。在每次试验中必有且只有其中之一发生。

即$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=S$



$\overline{\overline{A}}=A$

例8：S=｛1，2，3，4，5，6｝，

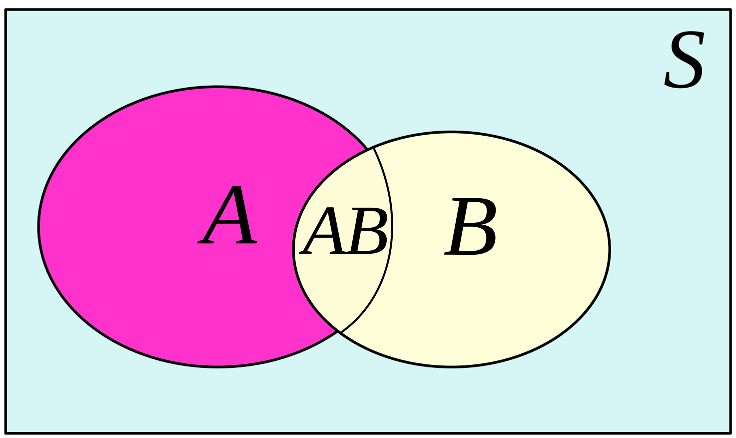
A=｛1，2，3｝，

$\overline{A}=\{4,5,6\}$

(4). 差

事件A发生，但事件B不发生，这样的事件称为事件A与事件B的差事件。记作 $A-B$

事件$A-B$由事件A的，但不是事件B的样本点组成。



$$A-B=A-AB=A\overline{B}$$

6.事件的运算规律

1、交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$

2、结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

3、分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；

4、德摩根定律(对偶律)：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；

更一般地，

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

例8：设某学生考试，记$A=$｛数学及格｝，$B=$｛英语及格｝

$A\cup B=$｛数学、英语至少有一科及格｝

$AB=$｛数学、英语都及格｝

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}=$｛数学、英语都不及格｝

$\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{AB}=$｛数学、英语至少有一科不及格｝

$\bar{A}B=$｛英语及格，但数学不及格｝

例9：事件“A与B发生，C不发生”

$$A \cap B \cap \overline{C}.$$

事件'A、B、C中至少有二个发生

$$AB \cup AC \cup BC$$

事件'A、B、C中恰有二个发生

$$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC.$$

例10：事件A、B、C两两互不相容，则有

ABC＝ϕ.　反之,不成立.