§1.5　条件概率

- 条件概率的定义
- 乘法公式
- 全概率公式和贝叶斯公式（Bayes）

1. 条件概率

设试验E的样本空间为S， A, B是事件, 要考虑在A已经发生的条件下B发生的概率, 这就是在事件A发生的条件下, 事件B发生的条件概率问题. 记为$P(B|A)$.

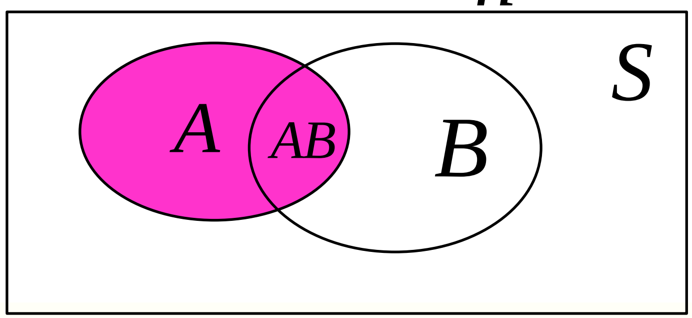
例1：将一枚硬币掷两次，观察其出现正反面的情况. 设 A= “至少有一次正面”， B= “两次掷出同一面”，求A发生的条件下B发生的概率.

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$ $A=\{HH, HT, TH\}$

$B=\{HH, TT\}$ 则， $P\left(B|A\right)=\dfrac{1}{3}.$

从上例可以看到，在古典概型中:

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{\dfrac{n_{AB}}{n}}{\dfrac{n_A}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$



直观含义：**在A发生的条件下B发生，也就是A发生且B也发生，即AB发生，是在A发生的前提条件下，因此应以A作为样本空间，而排除了A以外的样本点，因此P(B|A)是P(AB)与P(A)之比.**

定义: 设A, B是两个事件, 且$P(A)>0$, 称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件A发生的条件下事件B发生的**条件概率**.

条件概率符合概率定义中的三个条件,即

1^0 对于每一个事件B,有 $1 \geq P(B \mid A) \geq 0.$

2^0 $P(S \mid A) = 1.$

3^0 设$B_1, B_2, \cdots$两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \mid A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \mid A).$$

此外，条件概率具有无条件概率类似性质.例如：

(1) $P(\Phi \mid A) = 0.$

(2) 设$B_1, B_2, \cdots, B_n$两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(B_i \middle| A\right)$$

(3) $P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A).$

(4) $P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A) - P(BC \mid A).$

(5) $P((A-B) \mid C) = P(A \mid C) - P(AB \mid C).$

特别地，当$A=S$时，$P(B|S)=P(B)$，条件概率化为无条件概率，因此无条件概率可看成条件概率。

计算条件概率的两种方法:

$$\text{设}P(A)>0,\text{求}P(B\mid A)$$

(1)：根据A发生以后的情况直接计算

(把A作为新的样本空间)如例1.

(2)：先计算P (A), P (AB),然后按公式计算

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

我们一般采用(2)计算.

例2：已知某家庭有3个小孩，且至少有一个是女孩，求该家庭至少有一个男孩的概率.

解：设 A={ 3个小孩至少有一个女孩 }

B={ 3个小孩至少有一个男孩 }

则 $P(\overline{A})=\frac{1}{2^3}$， $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{7}{8}$， $P(\overline{B})=\frac{1}{8}$，

因为$\overline{A}$与$\overline{B}$互斥，所以 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$，

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{3}{4},$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3/4}{7/8}=\frac{6}{7}.$$

2. 乘法公式

（求积事件概率的基本公式）

若$P(A)>0$,

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

推广：$P(AB)>0$, 则有

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

一般, 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个事件,$(n\geq 2)$, $P(A_1A_2 \ldots A_{n-1})>0$, 则有乘法公式:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_{n-1}|A_1A_2\ldots A_{n-2}) P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

例3：

r只红球

t只白球

每次任取一只球,观察颜色后, 放回,再放回a只与取出那只同色的球,

在袋中连续取球4次, 试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解：A_i ——第i次取到红球, $i=1,2,3,4.$

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

$$=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A_3}\mid A_1A_2)P(\overline{A_4}\mid A_1A_2\overline{A_3})$$

$$=\frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{t+a}{r+t+3a}$$

例4:设袋中装有3只● 3只● 4只○ .

从袋中摸球三次,每次摸一球.有两种方式:

(a)放回摸球; (b)不放回摸球.

求第三次才摸得白球的概率.

解:设A_i ="第i次摸得白球"(i=1, 2, 3),

(a) 放回摸球

$$故P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right)P\left(A_3\middle|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{18}{125}$$

(b) 不放回摸球

$$故P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right)P\left(A_3\middle|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$$

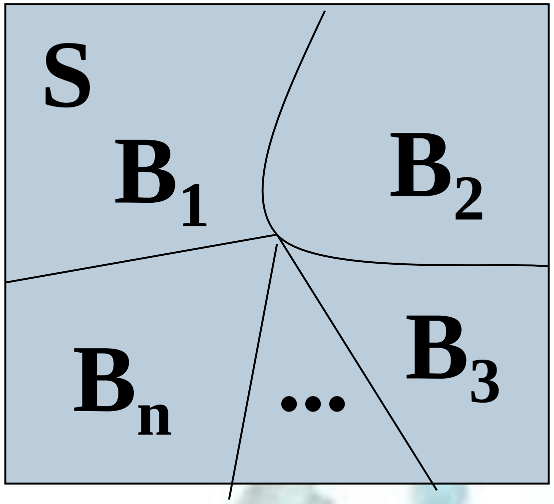
3. 全概率公式和贝叶斯公式：

（1）样本空间的划分(或完备事件组)

定义：若$B_1, B_2, \cdots, B_n$是试验E的一组事件满足

(i) $B_iB_j = \varphi,\ i \neq j,\ \ i, j = 1, 2, \ldots, n,$

(ii) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S,$



则称$B_1, B_2, \cdots, B_n$为样本空间的一个划分.

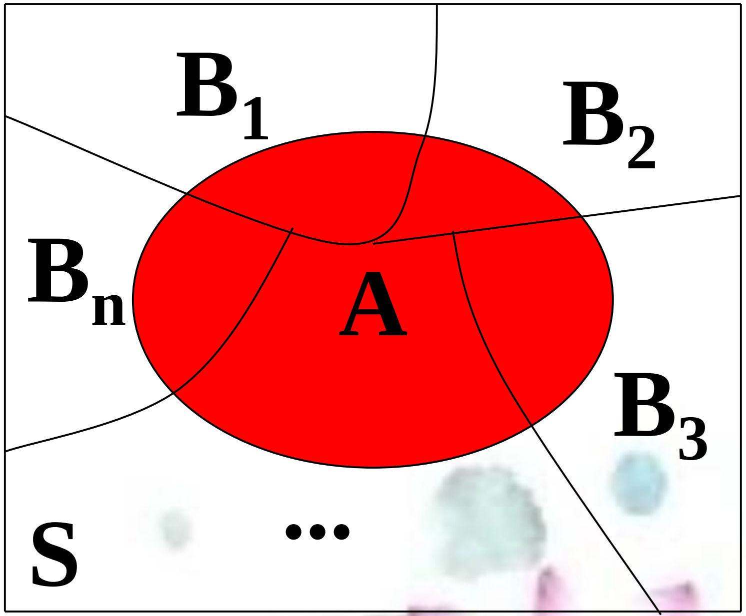
注： （1）若$B_1, B_2, \ldots, B_n$是样本空间S的一个划分,则每次试验中, 事件$B_1, B_2, \ldots, B_n$中必有一个且仅有一个发生.

（2）互为对立的两个事件是一个最简单的划分。

（1）全概率公式:

$$\left(AB_i\right)\cap\left(AB_j\right)=\varnothing,(i\neq j),\ \text{且}\ A=\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i),$$

由有限可加性,有



$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)$$

$$=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)$$

再由乘法定理

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

全概率公式

1° 全概率公式解决的是“已知原因求结果”的问题可以用来计算复杂随机事件的概率.

常用于:如果事件A的发生有多种原因 B_i 或者与多个随机事件 B_i 发生有关,就应该考虑使用全概率公式.

关键:事件 B_i 构成S的一个划分.

2° 条件概率也有全概率公式:

$$P(A|C)=P(AB_1|C)+P(AB_2|C)+\cdots+P(AB_n|C)$$

$$=P(B_1|C)P(A|B_1C)+\cdots+P(B_n|C)P(A|B_nC)$$

例5.

第1盒	第2盒	第3盒
2个白球 ○	3个白球 ○	2个白球 ○
1个黑球 ●	1个黑球 ●	2个黑球 ●

现从中任取一盒,再从该盒中任取一球,求取得白球的概率.

解:设A="取得白球",B_i="球取自第i个盒",

$i=1,2,3$,则B_i是一个划分.

$$\text{则}\ P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{23}{36}$$

(2) 贝叶斯公式:

在结果A发生的条件下,为求B_1的条件概率$P(B_1|A)$,先介绍贝叶斯公式.

设$B_1,B_2,\cdots B_n$为一划分，且$P(A)>0$,则

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots P(B_n)P(A|B_n)}$$

$$=\frac{\overbrace{P(B_j)P(A|B_j)}^{P(AB_j)}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}_{P(A)}}$$

贝叶斯公式

例6.

一号箱	二号箱	三号箱
4个白球	3个白球	
1个红球	2个红球	3个红球

现从中任取一箱,再从该箱中任取一球,结果发现是红球,求此球来自一号箱的概率.

解：令$A=$“取得红球”，$B_i=$“选取第i箱”（$i=1,2,3$）

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times 1}=\frac{1}{8}.$$

全概率公式与贝叶斯公式是计算复杂事物概率的重要工具。

若把事件A看作“果”，每一划分B_i看作“因”，则全概率公式反映“由因求果”的概率问题。公式

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

中的$P(B_i)$是根据以往信息和经验得到的，所以被称为先验概率。而贝叶斯公式是“执果溯因”的概率问题，即在结果A已发生的情况下，寻找A发生的原因，公式中$P(B_i|A)$是得到“信息”A后求出的，称为后验概率。

两者有不可分割的联系。求贝叶斯公式中的$P(B_i|A)$要用到$P(A)$，而$P(A)$是由先验概率计算得到。