РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ОТЧЕТ
ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 6

дисциплина: Компьютерный практикум по статистическому анализу данных

Студент: Евдокимов Максим Михайлович (1032203019)

Группа: НФИбд-01-20

МОСКВА

2023 г.

Постановка задачи

Основной целью работы является освоение специализированных пакетов для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

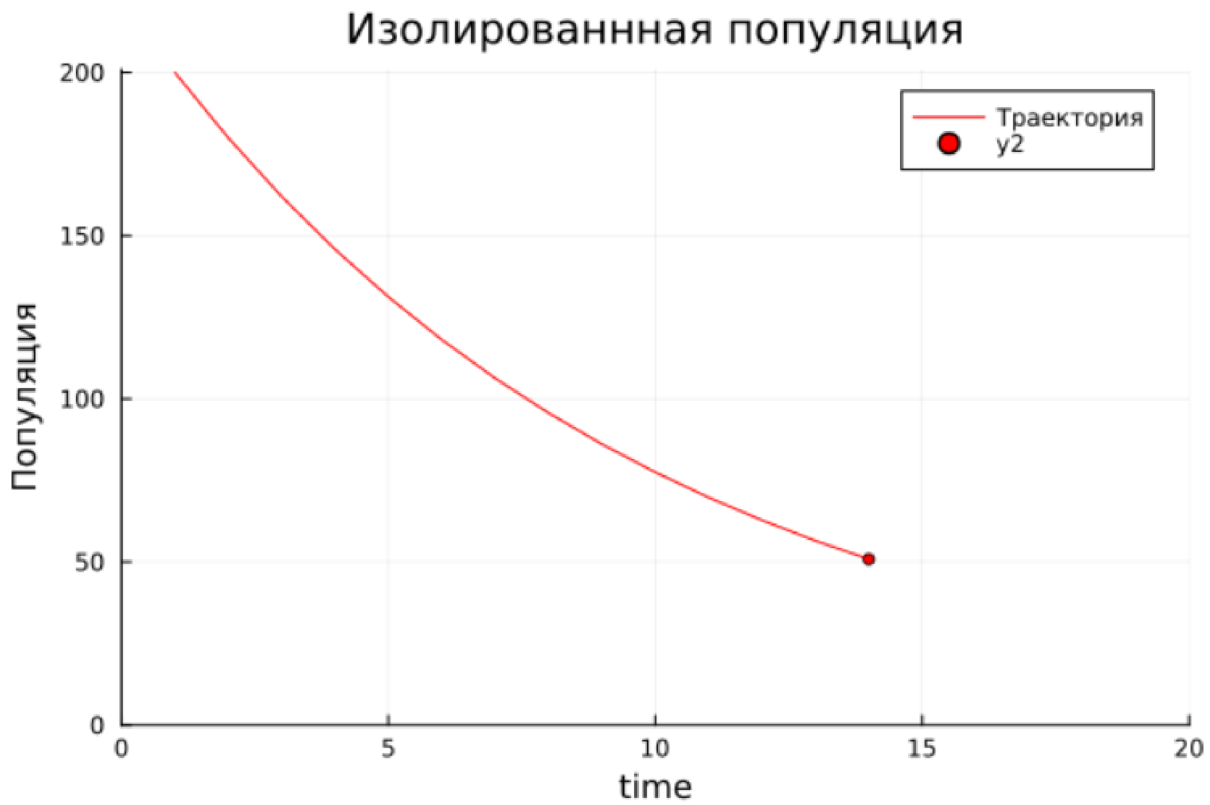
Выполнение работы

1. Реализовать и проанализировать модель роста численности изолированной популяции (модель Мальтуса):

$\dot{x} = ax, \quad a = b - c.$ где x(t) — численность изолированной популяции в момент времени t, a — коэффициент роста популяции, b — коэффициент рождаемости, c — коэффициент смертности. Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией).

```julia
# 1
function malthus_model(x0::Int64, b::Float64, c::Float64, t::Int64)
    x = Vector{Float64}([x0])
    a = b - c
    for i in 1:t
        x_new = a * x[i]
        push!(x, x_new)
    end
    return x
end

population = malthus_model(200, 1.4, 0.5, 15)

println("Численность популяции: ", population)
println("Численность популяции после промежуточного отрезка времени (половина): ", population[end÷2])
println("Соотношение начальным и финальным значением в процентах: $(round(population[end]/population[1]*100, digits=2))%")

fig = plt.figure(figsize=[6, 6], tight_layout=true)
ax = fig.add_subplot(title="Модель роста численности изолированной популяции 1", xlabel="time", ylabel="population")
ax.grid(color="k", visible=true, linestyle="--")
ax.plot([i for i in 1:length(population)], population, color="r", marker="o", label="График популяции")
ax.legend()
plt.show()
X = [i for i in 1:length(population)]

anim = @animate for i in 1:length(population)
    plot(X[1:i], population[1:i], c=:red, xlims=(0, 20), ylims=(0, maximum(population)+1),
        xlabel="time", ylabel="Популяция", title="Изолированнная популяция", label="Траектория")
    scatter!([X[i]], [population[i]], markersize=3, markershape=:circle, markercolor=:red)
end
gif(anim, "data//malthus_model.gif")
```

```
Численность популяции: [200.0, 179.99999999999997, 161.99999999999997, 145.79999999999995, 131.21999999999994, 118.09799999999994, 106.28819999
9993, 95.65937999999993, 86.09344199999992, 77.48409779999993, 69.73568801999993, 62.76211921799993, 56.48590729619993, 50.837316566579936, 45.
358490992194, 41.17822641892974]
Численность популяции после промежуточного отрезка времени (половина): 95.65937999999993
Соотношение начальным и финальным значением в процентах: 20.59%
```

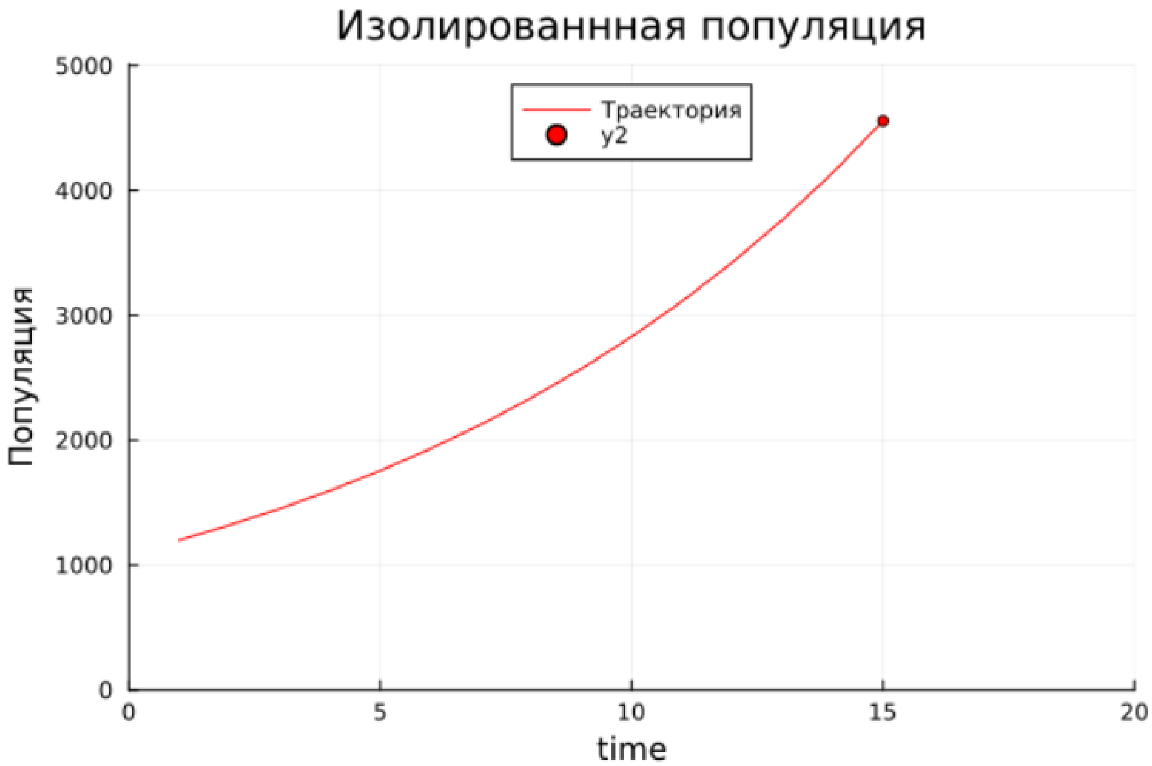


2. Реализовать и проанализировать логистическую модель роста популяции, заданную уравнением:

$\dot{x} = rx\left(1-\frac{x}{k}\right), \quad r>0, \quad k>0$ r — коэффициент роста популяции, k — потенциальная ёмкость экологической системы (предельное значение численности популяции). Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией).

```
# 2
function malthus_model2(x0::Int64, r::Float64, k::Float64, t::Int64)
    x = Vector{Float64}([x0])
    for i in 1:t
        x_new = r * x[i] * (1 - x[i]/k)
        push!(x, x_new)
    end
    return x
end

population = malthus_model(1200, 1.9, 0.8, 15)

println("Численность популяции: ", population)
println("Численность популяции после промежуточного отрезка времени (половина): ", population[end÷2])
println("Соотношение начальным и финальным значением в процентах: $(round(population[end]/population[1]*100, digits=2))%")

fig = plt.figure(figsize=[6, 6], tight_layout=true)
ax = fig.add_subplot(title="Модель роста численности изолированной популяции 2", xlabel="time", ylabel="population")
ax.grid(color="k", visible=true, linestyle="--")
ax.plot([i for i in 1:length(population)], population, color="r", marker="o", label="График популяции")
ax.legend()
plt.show()

anim = @animate for i in 1:length(population)
    plot(X[1:i], population[1:i], c=:red, xlims=(0, 20), ylims=(0, maximum(population)+1), legend=:top,
         xlabel="time", ylabel="Популяция", title="Изолированнная популяция", label="Траектория")
    scatter!([X[i]], [population[i]], markersize=3, markershape=:circle, markercolor=:red)
end
gif(anim, "data//malthus_model2.gif")
```

```
Численность популяции: [1200.0, 1319.9999999999998, 1451.9999999999995, 1597.1999999999994, 1756.9199999999992, 1932.611999999999, 2125.8731999999986, 2338.4605199999983, 2572.3065719999977, 2829.537229199997, 3112.490952119996, 3423.7400473319954, 3766.1140520651943, 4142.725457271713, 4556.998002998884, 5012.697803298772]
Численность популяции после промежуточного отрезка времени (половина): 2338.4605199999983
Соотношение начальным и финальным значением в процентах: 417.72%
```



3. Реализовать и проанализировать модель эпидемии Кермака–Маккендрика (SIRмодель):

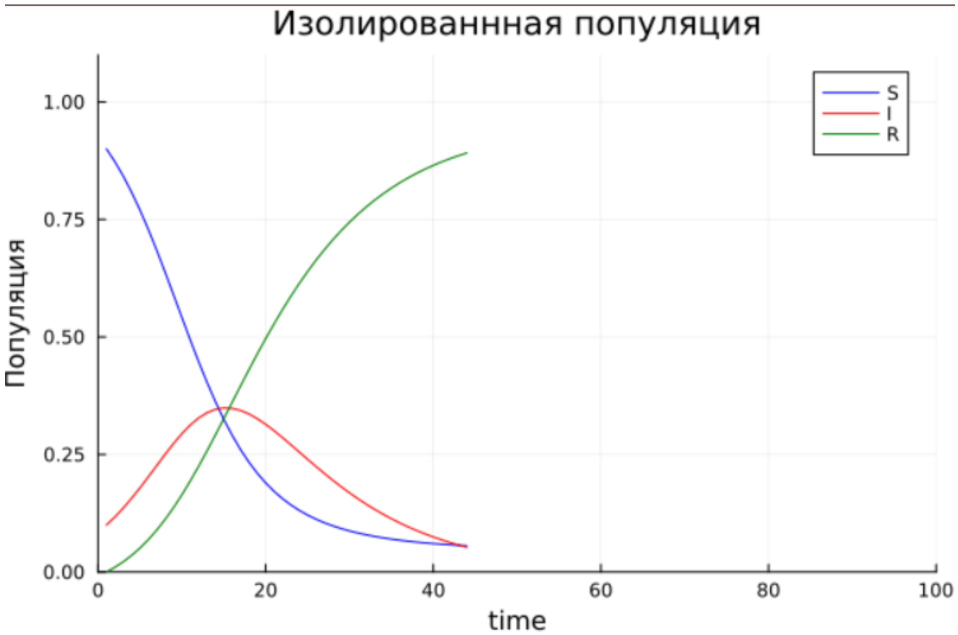
$$\begin{cases} \dot{s} = -\beta i s, \\ \dot{i} = \beta i s - \nu i, \\ \dot{r} = \nu i, \end{cases}$$

где s(t) — численность восприимчивых к болезни индивидов в момент времени е, i(t) — численность инфицированных индивидов в момент времени t, r(t) — численность переболевших индивидов в момент времени t, β — коэффициент интенсивности контактов индивидов с последующим инфицированием, ν — коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов. Численность популяции считается постоянной, т.е. $\dot{s} + \dot{i} + \dot{r} = 0$. Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией).

```julia
# 3
function SIR_model(s0, i0, r0, B, v, t)
    s, i, r = [s0], [i0], [r0]
    for j in 1:t
        ds = -B * s[j] * i[j]
        di = B * s[j] * i[j] - v * i[j]
        dr = v * i[j]

        s_new = s[j] + ds
        i_new = i[j] + di
        r_new = r[j] + dr

        push!(s, s_new)
        push!(i, i_new)
        push!(r, r_new)
    end
    return s, i, r
end

S, I, R = SIR_model(0.9, 0.1, 0.0, 0.3, 0.1, 50)
percents = [[round(s, digits=3) for s in S.*100],
            [round(i, digits=3) for i in I.*100],
            [round(r, digits=3) for r in R.*100]]
X = [j for j in 1:51]
println("Восприимчевых: $(S)\nБольных: $(I)\nЗдоровых: $(R)\n")
println("Восприимчевых%: $(percents[1])\nБольных%: $(percents[2])\nЗдоровых%: $(percents[3])\n")
```

```julia
fig, axs = plt.subplots(ncols=2, nrows=1)
axs[1,1].set(title="SIR модель", xlabel="time", ylabel="population")
axs[1,1].grid(color="k", visible=true, linestyle="--")
axs[1,1].set_yticks([j for j in 0:0.1:1], ["$(i)" for i in 0:0.1:1])
axs[1,1].plot(X, S, color="r", marker="o", label="S")
axs[1,1].plot(X, I, color="g", marker="*", label="I")
axs[1,1].plot(X, R, color="b", marker="P", label="R")
axs[1,1].legend()

axs[2,1].set(title="SIR модель", xlabel="time", ylabel="%")
axs[2,1].grid(color="k", visible=true, linestyle="--")
axs[2,1].set_yticks([j for j in 0:5:100], ["$(i)%" for i in 0:5:100])
axs[2,1].plot(X, percents[1], color="r", marker="o", label="S")
axs[2,1].plot(X, percents[2], color="g", marker="*", label="I")
axs[2,1].plot(X, percents[3], color="b", marker="P", label="R")
axs[2,1].legend()
plt.show()

anim = @animate for i in 1:length(S)
    plot(X[1:i], S[1:i], c=:blue, xlims=(0, 100), ylims=(0, 1.1), legend=:topright,
        xlabel="time", ylabel="Популяция", title="Изолированнная популяция", label="S")
    plot!(X[1:i], I[1:i], c=:red, label="I")
    plot!(X[1:i], R[1:i], c=:green, label="R")
end
gif(anim, "data//SIR_model.gif")
```

```
Восприимчевых: [0.9, 0.873, 0.8423577, 0.808004087051787, 0.7700194069707721, 0.7286656237385065, 0.6844061039198719, 0.6379046015548219, 0.58999
77540824755, 0.5416401497759483, 0.49382773262786744, 0.4475117360548944, 0.4035188241286599, 0.3624918878055019, 0.32486026113493577, 0.29084030
191362875, 0.26046039502726864, 0.233600667139365, 0.21003747219338265, 0.18948497862478775, 0.1716294019079922, 0.15615433270429474, 0.142757607
7968879, 0.13116120348125934, 0.12111593332564355, 0.11240260276485663, 0.10483095445801432, 0.09823738432299443, 0.09248209587502139, 0.08744611
685101729, 0.08302842695740134, 0.07914332742652624, 0.0757181077625832, 0.07269101984265305, 0.07000954436918538, 0.06762892225198602, 0.0655109
1881883349, 0.0636227885159209, 0.06193640987240178, 0.060427563691945727, 0.059075330953149874, 0.05786159033929945, 0.056770598470542166, 0.055
78863869334101, 0.05490372667684759, 0.05410536309350424, 0.0533843253585647, 0.0527324918129931, 0.0521426928988235, 0.051608584834748575, 0.051
124542087126766]
Больных: [0.1, 0.117, 0.13594230000000002, 0.15670168294821302, 0.17901619473440655, 0.2024683584932315, 0.22648104246254297, 0.2503344405813387,
0.27320784399555126, 0.2942446639025233, 0.31263261466035186, 0.3276853497672897, 0.33890972671679526, 0.3460456903682737, 0.34907274800201243,
0.3481854324231182, 0.3437467960671665, 0.3362318443483535, 0.3261718548595005, 0.31410716294214536, 0.30055202336472636, 0.2859718902319512, 0.2
707714261161629, 0.25529068782017517, 0.23980688919377344, 0.22453953083518302, 0.20965722605850703, 0.19528507358767622, 0.18151185467688163, 0.
16839664823319755, 0.15597467330349374, 0.14426230550401947, 0.1332612946175606, 0.12296225307573466, 0.11334750324162886, 0.10439337503466534,
0.09607204096435135, 0.08835296717082879, 0.08120404909726503, 0.07459249036799458, 0.06848547406999098, 0.0628506672768423, 0.05765659241791535,
0.052872892953324965, 0.04847051567448589, 0.04442182769038065, 0.04070068265628213, 0.03728244793622551, 0.034144002056772566, 0.031263709915170
24, 0.028621381671275023]
Здоровых: [0.0, 0.010000000000000002, 0.021700000000000004, 0.035294230000000001, 0.050964398294821314, 0.06886601776826197, 0.08911285361758511,
0.11176095786383941, 0.13679440192197329, 0.1641151863215284, 0.19353965271178075, 0.22480291417781595, 0.25757144915454494, 0.29146242182622445,
0.3260669908630518, 0.360974265663253, 0.39579280890556484, 0.4301674885122815, 0.46379067294711684, 0.4964078584330669, 0.5278185747272814, 0.55
78737770637541, 0.5864709660869492, 0.6135481086985655, 0.639077177480583, 0.6630578663999603, 0.6855118194834786, 0.7064775420893293, 0.72600604
9448097, 0.7441572349157851, 0.7609968997391049, 0.7765943670694543, 0.7910205976198562, 0.8043467270816123, 0.8166429523891857, 0.82797770271334
86, 0.8384170402168151, 0.8480242443132502, 0.856859541030333, 0.8649799459400596, 0.8724391949768591, 0.8792877423838582, 0.8855728091115425, 0.
891338468353334, 0.8966257576486665, 0.9014728092161151, 0.9059149919851531, 0.9099850602507813, 0.9137133050444038, 0.9171277052500811, 0.920254
0762415982]

Восприимчевых%: [90.0, 87.3, 84.236, 80.8, 77.002, 72.867, 68.441, 63.79, 59.0, 54.164, 49.383, 44.751, 40.352, 36.249, 32.486, 29.084, 26.046, 2
3.36, 21.004, 18.948, 17.163, 15.615, 14.276, 13.116, 12.112, 11.24, 10.483, 9.824, 9.248, 8.745, 8.303, 7.914, 7.572, 7.269, 7.001, 6.763, 6.55
1, 6.362, 6.194, 6.043, 5.908, 5.786, 5.677, 5.579, 5.49, 5.411, 5.338, 5.273, 5.214, 5.161, 5.112]
Больных%: [10.0, 11.7, 13.594, 15.67, 17.902, 20.247, 22.648, 25.033, 27.321, 29.424, 31.263, 32.769, 33.891, 34.605, 34.907, 34.819, 34.375, 33.
623, 32.617, 31.411, 30.055, 28.597, 27.077, 25.529, 23.981, 22.454, 20.966, 19.529, 18.151, 16.84, 15.597, 14.426, 13.326, 12.296, 11.335, 10.43
9, 9.607, 8.835, 8.12, 7.459, 6.849, 6.285, 5.766, 5.287, 4.847, 4.442, 4.07, 3.728, 3.414, 3.126, 2.862]
Здоровых%: [0.0, 1.0, 2.17, 3.529, 5.096, 6.887, 8.911, 11.176, 13.679, 16.412, 19.354, 22.48, 25.757, 29.146, 32.607, 36.097, 39.579, 43.017, 4
6.379, 49.641, 52.782, 55.787, 58.647, 61.355, 63.908, 66.306, 68.551, 70.648, 72.601, 74.416, 76.1, 77.659, 79.102, 80.435, 81.664, 82.798, 83.8
42, 84.802, 85.686, 86.498, 87.244, 87.929, 88.557, 89.134, 89.663, 90.147, 90.591, 90.999, 91.371, 91.713, 92.025]
```



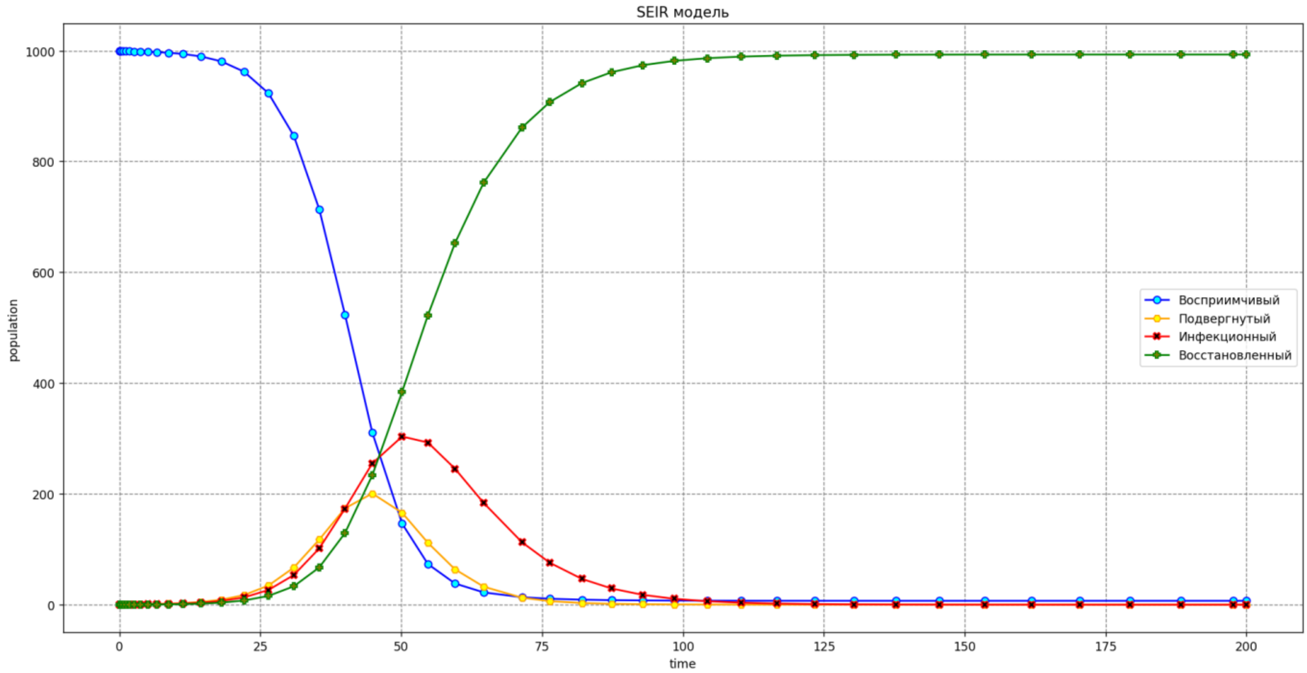
4. Как расширение модели SIR (Susceptible-Infected-Removed) по результатом эпидемии испанки была предложена модель SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed):

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -\frac{\beta}{N}s(t)i(t), \\ \dot{e}(t) = \frac{\beta}{N}s(t)i(t) - \delta e(t), \\ \dot{i}(t) = \delta e(t) - \gamma i(t), \\ \dot{r}(t) = \gamma i(t). \end{cases} \qquad s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = N$$

Размер популяции сохраняется, исследуйте, сравните с SIR.

```
# 4
function seir_model!(du, u, p, t)
    β, σ, γ, N = p
    s, e, i, r = u
    du[1] = -β * s * i / N
    du[2] = β * s * i / N - σ * e
    du[3] = σ * e - γ * i
    du[4] = γ * i
end

function simulate_seir_model(β, σ, γ, N, s0, e0, i0, r0, time)
    u0 = [s0, e0, i0, r0]
    p = [β, σ, γ, N]
    prob = ODEProblem(seir_model!, u0, time, p)
    sol = solve(prob, Tsit5())
    return sol
end

β, σ, γ, N = 0.5, 0.2, 0.1, 1000
s0, e0, i0, r0 = N - 1, 1, 0, 0
time = (0.0, 200.0)
```

```
sol = simulate_seir_model(β, σ, γ, N, s0, e0, i0, r0, time)
S, E, I, R = [], [], [], []
for j in sol.u push!(S, j[1]); push!(E, j[2]); push!(I, j[3]); push!(R, j[4]) end

fig = plt.figure(figsize=[6, 6], tight_layout=true)
ax = fig.add_subplot(title="SEIR модель", xlabel="time", ylabel="population")
ax.grid(color="gray", visible=true, linestyle="--")
ax.plot(sol.t, S, color="blue", marker="o", label="Восприимчивый", fillstyle="full", markerfacecolor="cyan")
ax.plot(sol.t, E, color="orange", marker="H", label="Подвергнутый", fillstyle="full", markerfacecolor="yellow")
ax.plot(sol.t, I, color="red", marker="X", label="Инфекционный", fillstyle="full", markerfacecolor="black")
ax.plot(sol.t, R, color="green", marker="P", label="Восстановленный", fillstyle="full", markerfacecolor="olive")
ax.legend()
plt.show()
```



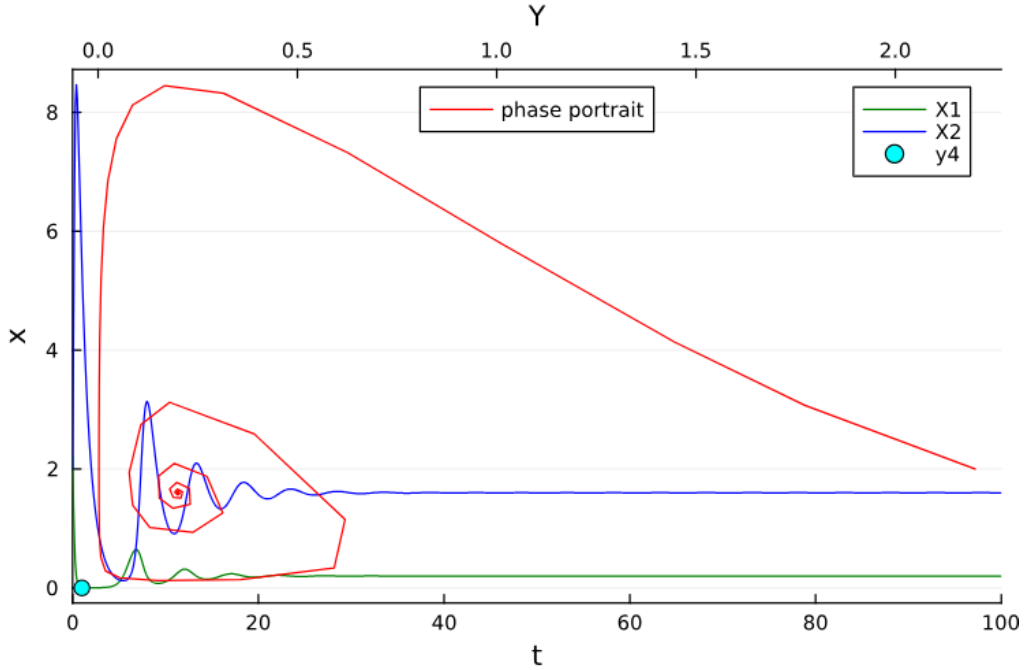
5. Для дискретной модели Лотки–Вольтерры:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = aX_1(t)(1 - X_1(t)) - X_1(t)X_2(t), \\ X_2(t+1) = -cX_2(t) + dX_1(t)X_2(t). \end{cases}$$

с начальными данными a = 2, c = 1, d = 5 (b = 1) найдите точку равновесия. Получите и сравните аналитическое и численное решения. Численное решение изобразите на фазовом портрете.

```
# 5
using NLsolve


function lotka_volterra!(du, u, p, t)
    du[1] = p[1]*u[1]*(1-u[1]) - p[2]*u[1]*u[2]
    du[2] = -p[3]*u[2] + p[4]*u[1]*u[2]
end


u0, X, Y = [2.2, 2.0], Vector([]), Vector([])
time = (0.0, 100.0)
p = [2.0, 1.0, 1.0, 5.0]
prob = ODEProblem(lotka_volterra!, u0, time, p)
sol = solve(prob, Tsit5())
for j in sol.u push!(X, j[1]); push!(Y, j[2]) end

f(x) = [2*x[1]*(1-x[1]) - 1*x[1]*x[2], -1*x[2] + 5*x[1]*x[2]]
equilibrium = nlsolve(f, [2.2, 2.0])
println("Equilibrium point: ", equilibrium)
z = equilibrium.zero

plot(sol, vars=(0, 1), color=:green, xlabel="t", ylabel="x", label="X1", )
plot!(sol, vars=(0, 2), color=:blue, xlabel="t", ylabel="x", label="X2")
plot!(twiny(), X, Y, color=:red, xlabel="Y", label="phase portrait", legend=:top)
scatter!([z[1]], [z[2]], color=:cyan, markersize=5)
```

```
Equilibrium point: Results of Nonlinear Solver Algorithm
 * Algorithm: Trust-region with dogleg and autoscaling
 * Starting Point: [2.2, 2.0]
 * Zero: [0.9999999999751682, 4.693334918837513e-10]
 * Inf-norm of residuals: 0.000000
 * Iterations: 5
 * Convergence: true
   * |x - x'| < 0.0e+00: false
   * |f(x)| < 1.0e-08: true
 * Function Calls (f): 6
 * Jacobian Calls (df/dx): 6
```

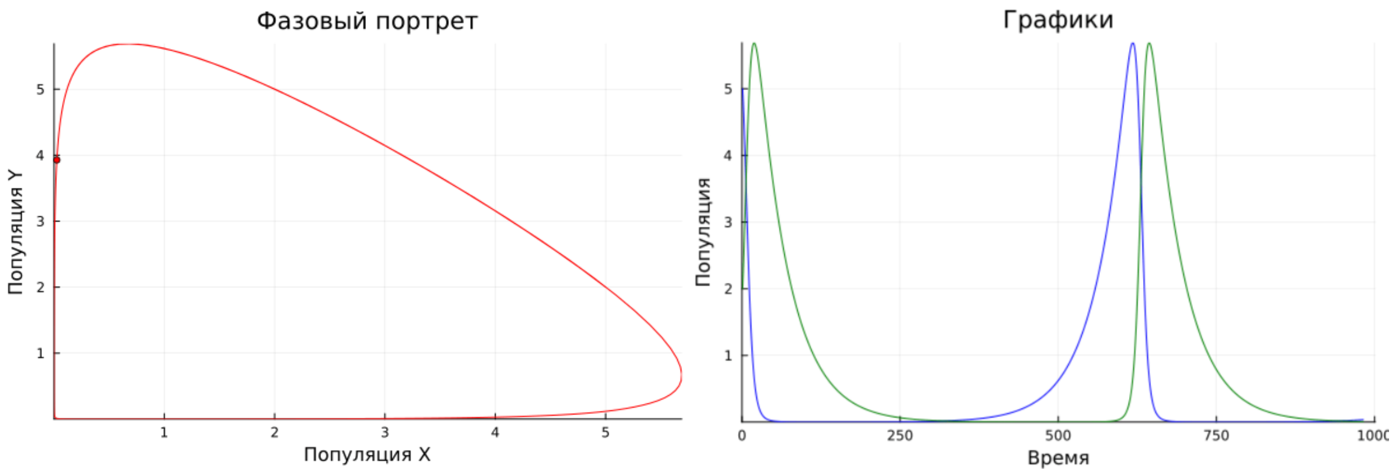


6. Реализовать на языке Julia модель отбора на основе конкурентных отношений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta x y, \\ \dot{y} = \alpha y - \beta x y. \end{cases}$$

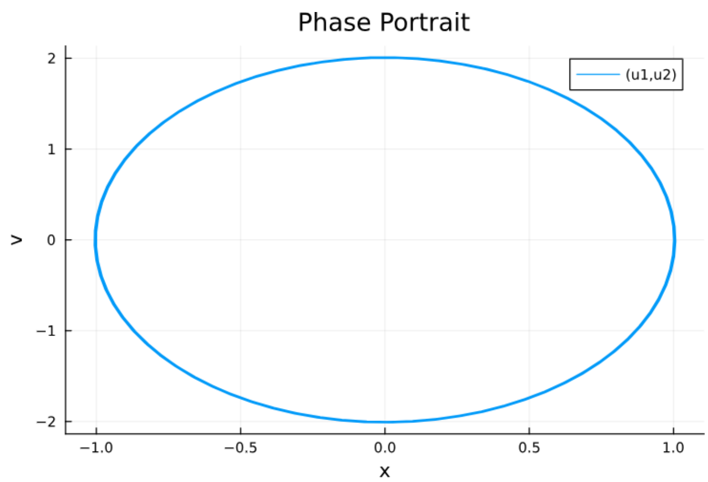
Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет.

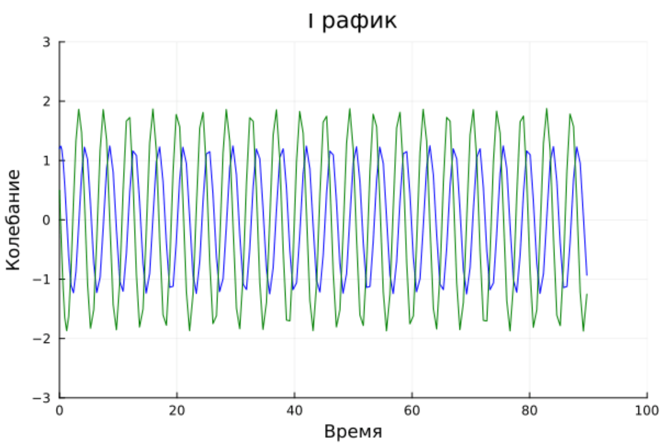
```
# 6
gr()
function relationship!(du, u, p, t)
    du[1] = p[1]*u[1] - p[2]*u[1]*u[2]
    du[2] = -p[1]*u[2] + p[2]*u[1]*u[2]
end

u0, p = [5, 2], [0.2, 0.3]
time, X, Y = 100, [], []
prob = ODEProblem(relationship!, u0, time, p)
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat=0.1)

for j in sol.u push!(X, j[1]); push!(Y, j[2]) end
N = Vector(1:size(X)[1])

anim1 = @animate for i in 1:N[end]
    plot(X[1:i], Y[1:i], c=:red, xlims=(minimum(X), maximum(X)), ylims=(minimum(Y), maximum(Y)), legend=false,
        xlabel="Популяция X", ylabel="Популяция Y", title="Фазовый портрет", label="Траектория")
    scatter!([X[i]], [Y[i]], markersize=3, markershape=:circle, markercolor=:red)
end; gif(anim1, "data//competitive_relationshipF.gif")

anim2 = @animate for i in 1:N[end]
    plot(N[1:i], X[1:i], c=:blue, xlims=(0, N[end]), ylims=(minimum(X), maximum(X)), legend=false,
        xlabel="Время", ylabel="Популяция", title="Графики", label="Траектория")
    plot!(N[1:i], Y[1:i], c=:green)
end; gif(anim2, "data//competitive_relationshipT.gif")
```



7. Реализовать на языке Julia модель консервативного гармонического осциллятора: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = y_0$ где $\omega 0$ — циклическая частота. Начальные параметры подобрать самостоятельно, выбор пояснить. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет.

```julia
# 7
function harmonic_oscillator!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -p^2 * u[1]
end

x0, v0, w0 = 1.2, 0.5, 1.5
u0, X, Y = [x0, v0], [], []
tspan = (0.0, 100.0)
probh = ODEProblem(harmonic_oscillator!, u0, tspan, w0)
solh = solve(probh)
for j in solh.u push!(X, j[1]); push!(Y, j[2]) end
N = solh.t

anim1 = @animate for i in 1:length(N)
    plot(X[1:i], Y[1:i], c=:red, xlims=(-3, 3), ylims=(-3, 3), legend=false,
         xlabel="X", ylabel="Y", title="Фазовый портрет")
    scatter!([X[i]], [Y[i]], markersize=3, markershape=:circle, markercolor=:red)
end; gif(anim1, "data//harmonic_oscillatorF.gif")

anim2 = @animate for i in 1:length(N)
    plot(N[1:i], X[1:i], c=:blue, xlims=(0, N[end]), ylims=(-3, 3), legend=false,
         xlabel="Время", ylabel="Колебание", title="График")
    plot!(N[1:i], Y[1:i], c=:green)
end; gif(anim2, "data//harmonic_oscillatorT.gif")

plot(sol, vars=(1,2), xlabel="x", ylabel="v", title="Phase Portrait")
```

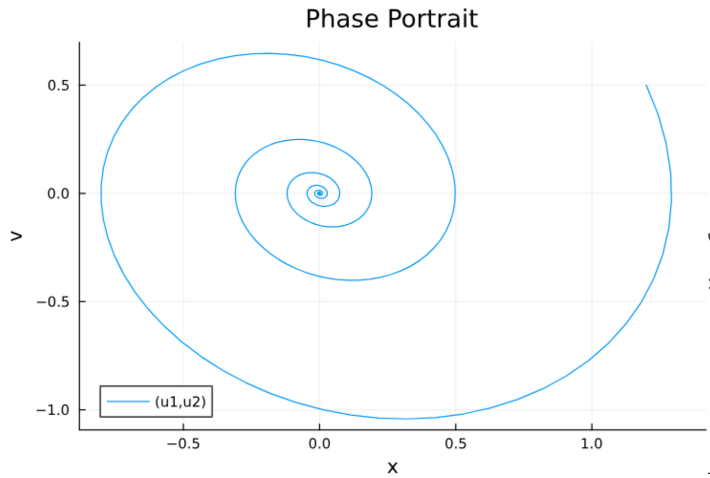


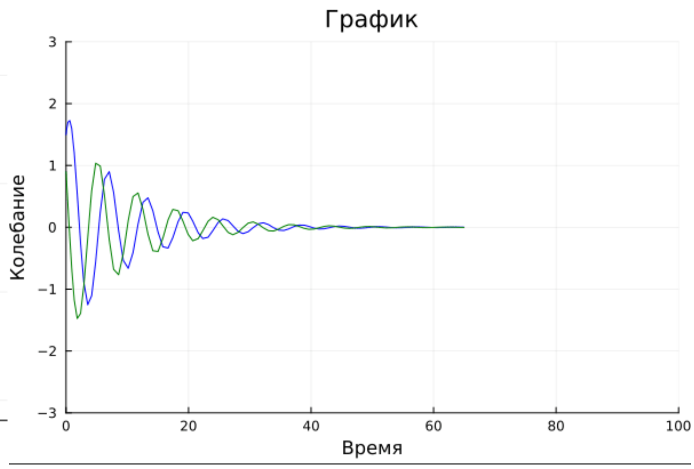


8. Реализовать на языке Julia модель свободных колебаний гармонического осциллятора:

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = y_0$ где $\omega 0$ — циклическая частота, γ — параметр, характеризующий потери энергии. Начальные параметры подобрать самостоятельно, выбор пояснить. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет.

```julia
# 8
function fading_harmonic_oscillator!(du, u, p, t)
    w0, γ = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -γ * u[2] - w0^2 * u[1]
end

p, u0 = [1.0, 0.2], [1.5, 0.9]
tspan = (0.0, 100.0)
X, Y = [], []
prob = ODEProblem(fading_harmonic_oscillator!, u0, tspan, p)
solf = solve(prob, Tsit5())
for j in solf.u push!(X, j[1]); push!(Y, j[2]) end
N = solf.t

anim1 = @animate for i in 1:length(N)
    plot(X[1:i], Y[1:i], c=:red, xlims=(-2, 2), ylims=(-2, 2), legend=false,
        xlabel="X", ylabel="Y", title="Фазовый портрет")
    scatter!([X[i]], [Y[i]], markersize=3, markershape=:circle, markercolor=:red)
end; gif(anim1, "data//fading_harmonic_oscillatorF.gif")

anim2 = @animate for i in 1:length(N)
    plot(N[1:i], X[1:i], c=:blue, xlims=(0, N[end]), ylims=(-3, 3), legend=false,
        xlabel="Время", ylabel="Колебание", title="График")
    plot!(N[1:i], Y[1:i], c=:green)
end; gif(anim2, "data//fading_harmonic_oscillatoTr.gif")


plot(sol, vars=(1,2), xlabel="x", ylabel="v", title="Phase Portrait")
```





Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены и построены различные непрерывные, линейные и дискретные модели времени. Повторены методы построения различных графиков, фазовых портретов и анимации.