Лабораторной работе №2. Задача о погоне.

Вариант № 30

Евдокимов Максим Михайлович НФИбд-01-20

Содержание

Список иллюстраций

Цель лабораторной работы

Цель работы - разобраться в алгоритме построения математической модели на примере задачи о погоне. Нам необходимо провести теоритические рассуждение и вывести дифференциальные уравнения, с помощью которых мы сможем определить точку пересечения лодки и катера из задачи. Для более наглядного примера нам были выданы варианты, с помощью которых можно будет смоделировать траектории движения лодки и катера. Условия задачи: “На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в n раза больше скорости браконьерской лодки. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку.”

Задача лабораторной работы

1. Изучить условия задачи. Провести теоритические рассуждения используя данные из варианта
2. Вывести дифференциальное уравнение, соответствующее условиям задачи
3. Написать программу для расчета траетории движения катера и лодки.
4. Построить модели.
5. Определить по моделям точку пересечения катера и лодки.

Теоритическая часть

Начнем с теоритических рассуждений: Принимаем за $t_0 = 0, X_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент, когда их обнаруживают катера береговой охраны. Также $X_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки браконьеров. После введем полярные координаты. Будем считать, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 = 0 (\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса, а за это время лодка пройдет x, в то время как катер $x - k$ (или $x + k$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы.

Вывод формул

Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ - в первом случае, $\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ во втором случае. Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2, задачу будем решать для двух случаев :

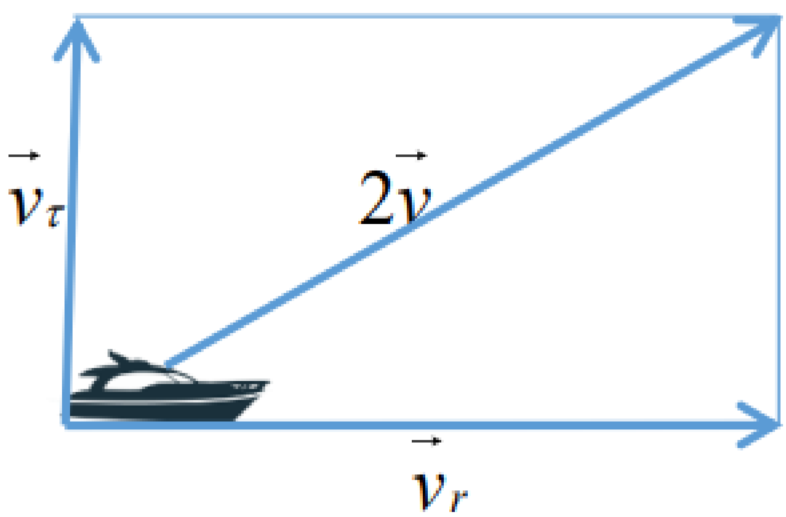
- $x_1 = \frac{k}{n+1}$,при $\theta = 0$
- $x_2 = \frac{k}{n-1}$,при $\theta = -\pi$

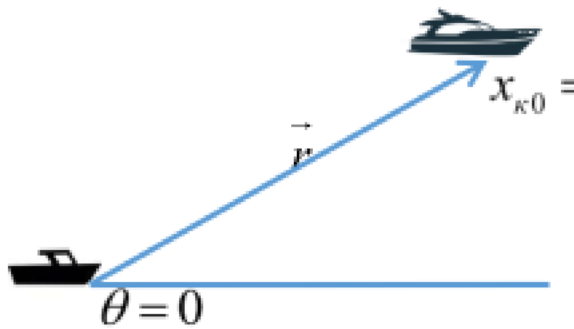
Ход работы

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки υ. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: υ_r - радиальная скорость и υ_t- тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса $\upsilon_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\upsilon = \frac{dr}{dt}$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $\upsilon r = r\frac{d\theta}{dt}$ Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $\upsilon_t = r\frac{d\theta}{dt}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $\upsilon_t = \sqrt{n^2\upsilon_r^2 - \upsilon^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна υ, то тангенциальную скорость находим из уравнения $\upsilon_t = \sqrt{n^2\upsilon^2 - \upsilon^2}$. Следовательно, $\upsilon_\tau = \upsilon\sqrt{n^2 - 1}$.

- Тогда получаем $r\frac{d\theta}{dt} = \upsilon\sqrt{n^2 - 1}$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений, которые будут описаны в коде программы.





Условие задачи

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 12.2 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4.1 раза больше скорости браконьерской лодки

формулы

$$\begin{cases} r_0 = s/(v+1) \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_0 = s/(v-1) \\ \theta_0 = \dfrac{-2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

$$\ln(r) = \int_{span[1]}^{span[2]} \frac{d\theta}{\sqrt{v^2 - 1}} = \frac{\theta}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

$$r = C * e^{\frac{\theta}{\sqrt{v^2-1}}}$$

Рис. 1: Теоретические рассчеты и вивод дифференциальных уровнений в соответствии с условием задачи

Код программы

```
using PyPlot
```

```
using DifferentialEquations

function f(du, u, p, t)
    du[1] = 1
    du[2] = sqrt(v*v - 1) / u[1]
end

function pointF(k, a) # точка пересечение
    for (i,k) in enumerate(k)
        if (round(k, digits=3) == round(a, digits=3))
            global intersection = r[i]
            break
        end
    end
end

function draw() # отображение
    ax = PyPlot.axes(polar="true")
    ax.plot(t, r, linestyle="-", color="darkblue")
    ax.plot([0, angle], [0, span[2]+10], linestyle="-", color="green")
    ax.scatter(angle, intersection, color="red", zorder=5)
    println("Точка соприкосновения: (", angle, " ; ", intersection, ")")
    show()
    clf()
end

s = 12.2
v = 4.1
span = (0, 40)
```

```
angle = 6pi/4
intersection = 0

r0 = s / (v + 1) # случай 1
t0 = 0.0
ode = ODEProblem(f, [r0,t0], span)
sol = solve(ode, dtmax=0.001)
r = [u[1] for u in sol.u]
t = [u[2] for u in sol.u]
pointF(t, angle)
draw()

r0 = s / (v - 1) # случай 2
t0 = -2pi/3
ode = ODEProblem(f, [r0,t0], span)
sol = solve(ode, dtmax=0.001)
r = [u[1] for u in sol.u]
t = [u[2] for u in sol.u]
pointF(t, angle)
draw()
```

Результаты работы программы

Точка пересечения красного и зеленого графиков является точкой пересечения катера береговой охраны и лодки браконьеров. Исходя из этого графика, мы имеем координаты: Координаты точки пересечения - (4.71238898038469 ; 7.823758233349156)

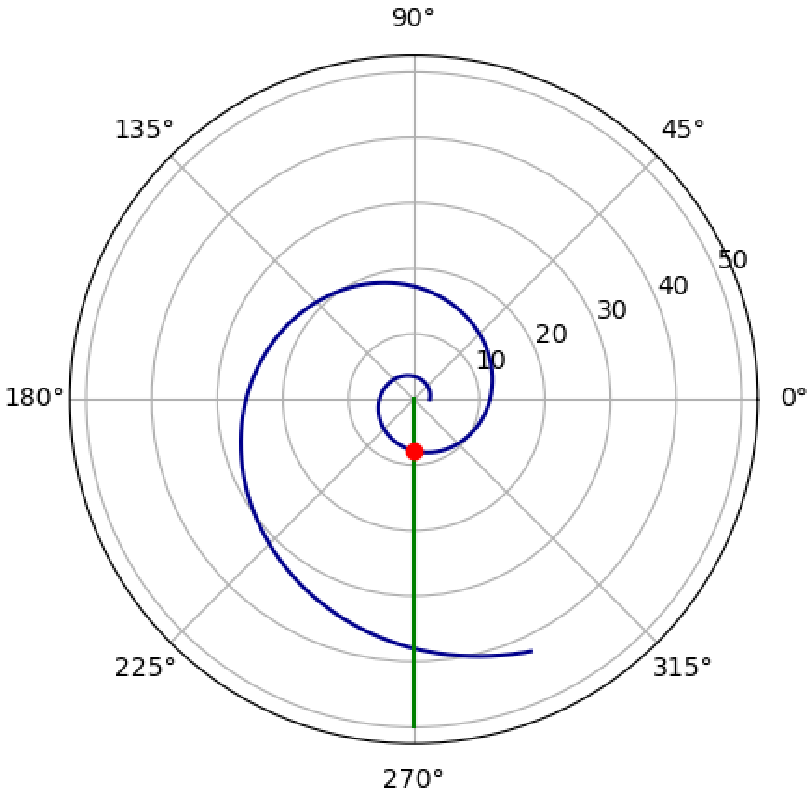


Рис. 2: траектории для первого случая

Результаты работы программы

Точка пересечения красного и зеленого графиков является точкой пересечения катера береговой охраны и лодки браконьеров. Исходя из этого графика, мы имеем координаты: Координаты точки пересечения - (4.71238898038469 ; 28.363483870979746)

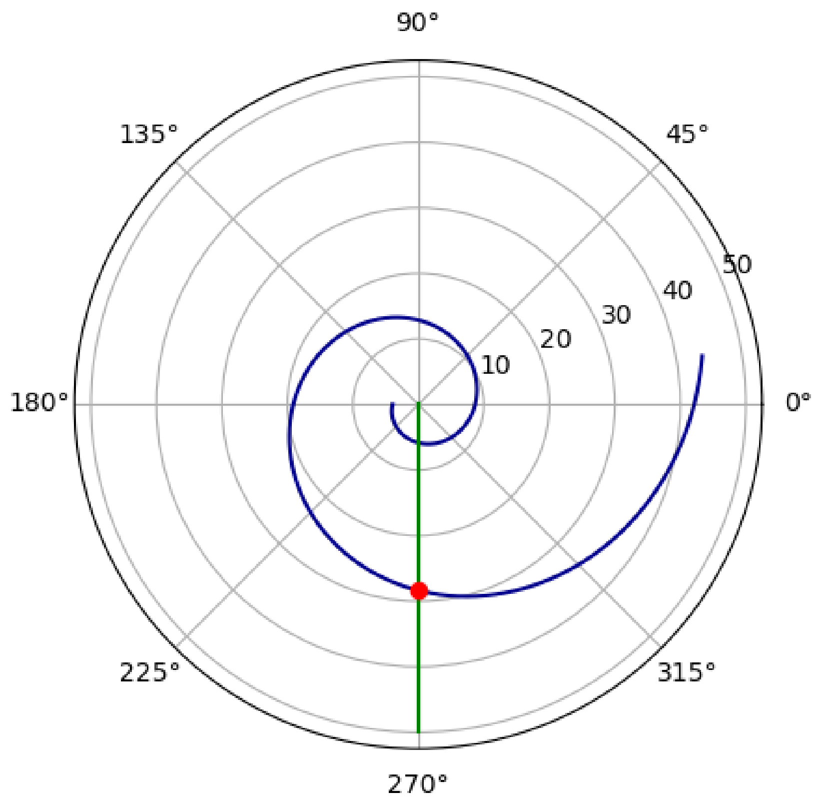


Рис. 3: траектории для второго случая

Выводы

Мы рассмотрели задачу о погоне, также провели анализ с помощью данных которые нам были даны, составили и решили дифференциальные уравнения. Смоделировали ситуацию и сделали вывод, что в первом случае погоня завершиться раньше.

```
Точка соприкосновения: (4.71238898038469 ; 7.823758233349156)
Точка соприкосновения: (4.71238898038469 ; 21.79548387097172)
```

Рис. 1: Точки соприкосновения в полярных координатах

Список литературы

1. Графика в julia
2. Создание графиков в julia
3. Основы julia
4. Работа с plot в julia