Отчет по ходу работы лабораторной №5

Модель хищник-жертва Лотки-Вольтерры. Вариант 30

Евдокимов Максим Михайлович НФИбд-01-20

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Изучить простейшую модель Лотки-Вольтерры хищник-жертва, основанную на нескольких предлоположениях. Построить модель с помощью дифференциальных уравнений. Сделать выводы по заданию

Задание

1. Построить график зависимости x от y и графики функций $x(t), y(t)$
2. Найти стационарное состояние системы

Выполнение лабораторной работы

Теоретические сведения

В данной лабораторной работе рассматривается математическая модель системы «Хищник-жертва». [source_of_the_theory]

- Рассмотрим базисные компоненты системы: X хищников и Y жертв.

- Пусть для этой системы выполняются следующие предположения: (Модель Лотки-Вольтерра).

1. Численность популяции жертв и хищников зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) + by(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = cy(t) - dy(t)x(t) \end{cases}$$

Теоретические сведения

Параметр a определяет коэффициент смертности хищников, b – коэффициент естественного прироста хищников, c – коэффициент прироста жертв и d – коэффициент смертности жертв.

В зависимости от этих параметрах система и будет изменяться. Однако следует выделить одно важное состояние системы, при котором не происходит никаких изменений как со стороны хищников, так и со стороны жертв. Это, так называемое, стационарное состояние системы. При нем, как уже было отмечено, изменение численности популяции равно нулю.

Следовательно, при отсутствии изменений в системе $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$

Пусть по условию есть хотя бы один хищник и хотя бы одна жертва: $x > 0, y > 0$ Тогда стационарное состояние системы определяется следующим образом:

$$x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$$

Задача

Условие задачи

В лесу проживают х число волков, питающихся зайцами, число которых в этом же лесу у. Пока число зайцев достаточно велико, для прокормки всех волков, численность волков растет до тех пор, пока не наступит момент, что корма перестанет хватать на всех. Тогда волки начнут умирать, и их численность будет уменьшаться. В этом случае в какой-то момент времени численность зайцев снова начнет увеличиваться, что повлечет за собой новый рост популяции волков. Такой цикл будет повторяться, пока обе популяции будут существовать. Помимо этого,на численность стаи влияют болезни и старение. [lab_example]

Данная модель описывается следующим уравнением:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) + by(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = cy(t) - dy(t)x(t) \end{cases}$$

Мой вариант

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.63x(t) + 0.019y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.59y(t) - 0.018y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 7, y_0 = 12$ Найдите стационарное состояние системы. [lab_task]

Приведение значение к стационарному

Стационарное состояние $x_0 = \frac{c}{d} = 32.7778, y_0 = \frac{a}{b} = 33.1579$

Код программы на julia

[Predator-prey_model]

```
using PyPlot
using DifferentialEquations

function f(du, u, p, t)
    du[1] = -a*u[1] + b*u[1]*u[2]
    du[2] = c*u[2] - d*u[1]*u[2]
end

function draw(p)
    ax = PyPlot.axes()
    ax.set_title(p)
    ax.plot(x, y, color="green")
    show()
    close()
    ax = PyPlot.axes()
    ax.set_title(p)
    ax.plot(time, x, color="blue")
    ax.plot(time, y, color="red")
    show()
    close()
end
```

```
range = (0, 100)
a = 0.63 # коэф. смертности хищников
b = 0.019 # коэф. прироста жертв
c = 0.59 # коэф. числа хищников
d = 0.018 # коэф.смертности жертв
X = 7
Y = 12
ode = ODEProblem(f, [X,Y], range)
sol = solve(ode, dtmax=0.02)
x = [u[1] for u in sol.u]
y = [u[2] for u in sol.u]
time = [t for t in sol.t]
draw("Случай с указанным начальным состоянием системы")

X = c/d
Y = a/b
ode = ODEProblem(f, [X,Y], range)
sol = solve(ode, dtmax=0.02)
x = [u[1] for u in sol.u]
y = [u[2] for u in sol.u]
time = [t for t in sol.t]
draw("Случай со стационарным состоянием системы")
```

Результаты работы:

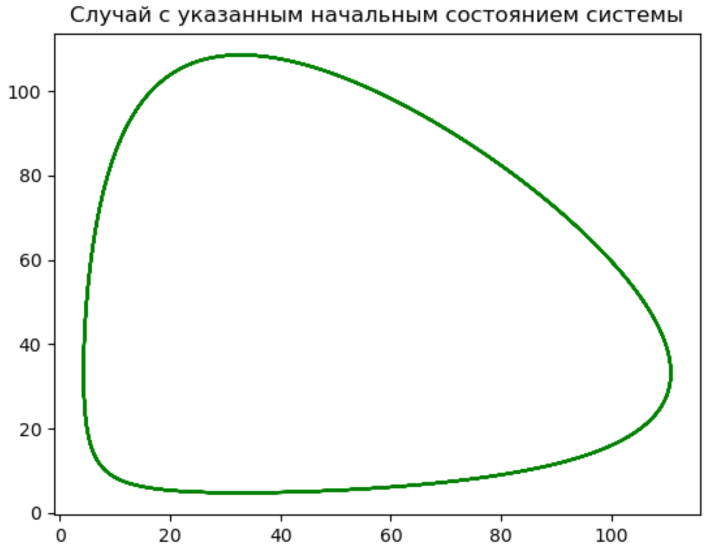

Рис. 1: Параметрический график при указанных состояние

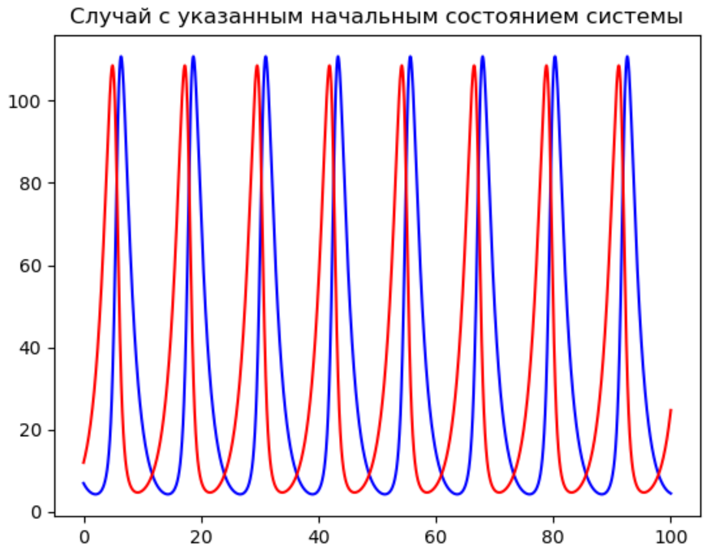

Рис. 2: Линейный график при указанных состояние

Рис. 3: Параметрический график при стационарных состояние

Рис. 4: Линейный график при стационарных состояние

Код программы OpenMoelica

Случай с указанным начальным состоянием системы

```
model model_1

parameter Real a = 0.63;
parameter Real b = 0.019;
parameter Real c = 0.59;
parameter Real d = 0.018;

parameter Real x0=7;
parameter Real y0=12;

Real x(start =x0);
Real y(start =y0);

equation
  der(x) = -a*x + b*x*y;
  der(y) = c*y - d*x*y;

  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 100, Tolerance = 1e-
6, Interval = 0.02));
```

```
end model_1;
```

Результаты работы:

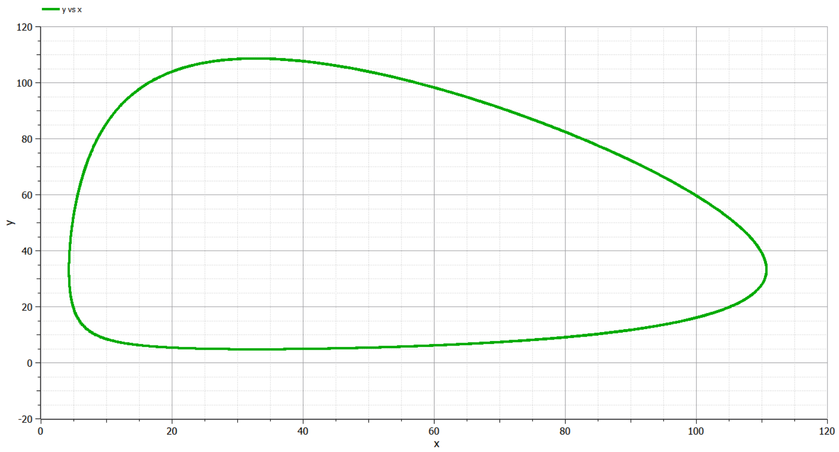

Рис. 1: Параметрический график при указанных состояние

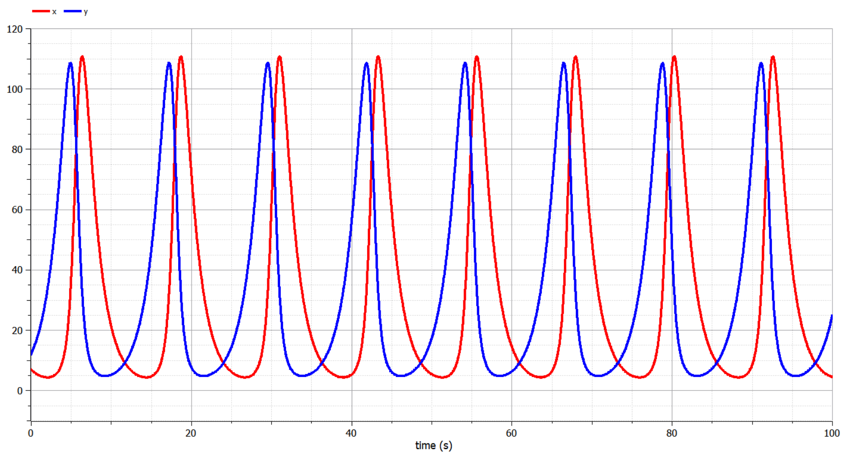

Рис. 2: Линейный график при указанных состояние

Случай со стационарным состоянием системы

```
model model_2


parameter Real a = 0.63;
```

```
parameter Real b = 0.019;
parameter Real c = 0.59;
parameter Real d = 0.018;

parameter Real x0=c/d;
parameter Real y0=a/b;

Real x(start =x0);
Real y(start =y0);

equation
  der(x) = -a*x + b*x*y;
  der(y) = c*y - d*x*y;

  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 100, Tolerance = 1e-
6, Interval = 0.02));

end model_2;
```

Результаты работы:

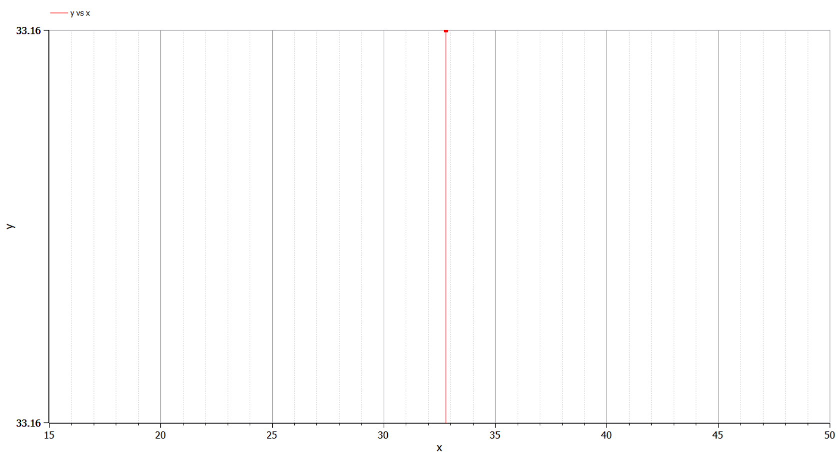

Рис. 3: Параметрический график при стационарных состояние

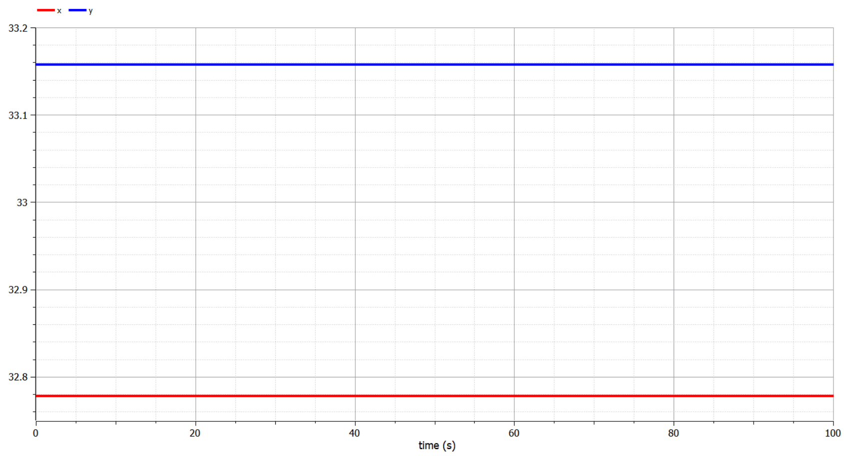

Рис. 4: Линейный график при стационарных состояние

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построены графики зависимости количества хищников и жертв в разных отношениях и в разные периоды времени.