第5章 线性变换及其特征

线性方程组**Ax=b**，**可以从三个不同的角度进行讨论**。

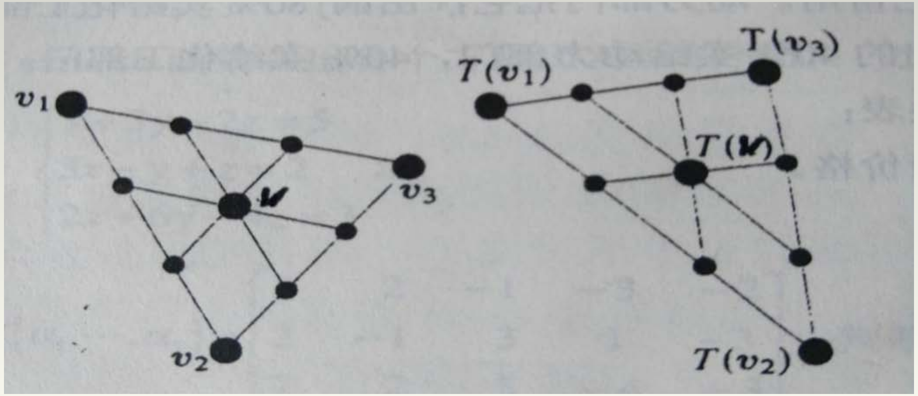
1. 已知**A**和**b**求**x**，解的方法是以**A**的行变换进行方程消元，通过高斯消元法得到行最简形矩阵，这是第一、二两章讨论的方法；

2. 第四章把**A**看作列向量组，把**Ax**看作列向量的线性组合，研究其和是否能等于向量**b**。用这个方法讨论了向量的线性相关性，证明了超定方程的最小二乘解。

3. 这一章则把**A**看作一个变换，把**x**域中的图形或向量变换到**b**域**(y**域**)**中，要研究的是变换前后图形会有何种变化。

5.1 平面上线性变换的几何意义

设V及U都是2维向量空间，U=T(V)为v到u的变换。若v是输入数据矩阵，u是输出矩阵，A为2×2变换矩阵，则u=A*v就执行了把v平面的向量组变成u平面向量组的线性变换。在线性变换时，直线变换后仍为直线，各点间的比例关系不变，如下图。图中v指变换前的点，u=T(v)指变换后的点。



变换y=Ax对向量的作用

把变换矩阵看做两个二维列向量的组合A=[α_1,α_2]，α_1,α_2称作此变换的基向量，则 $\mathbf{A1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, **的基向量为** $\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$,

对于x域中任意点 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ **,相乘表示两个基向量的线性组合：**

$$\mathbf{y}=\mathbf{A1}*\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}=[\alpha_1\ \ \alpha_2]\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=a\alpha_1+b\alpha_2=a\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a\\ b\end{bmatrix}$$

也就是把原来笛卡尔坐标中每单位横坐标变成了向量α_1,每单位纵坐标变成了向量α_2。任意点坐标(a,b)^{T}与它们的乘积成为该点在新坐标系中的位置。例如对于组成单位方块的x

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A1}*\mathbf{x}=\mathbf{y1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

不同的矩阵A产生的变换结果

例5.1 设 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 为顶点在(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)的单位方块。把不同矩阵A左乘此组2×5数据矩阵，其生成的图形都表示在下图上。这些矩阵的基向量都标成红色箭头

$$\mathbf{A2}=\begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{y2}=\begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A3}=\begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},\quad \mathbf{y3}=\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A4}=\begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{y4}=\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

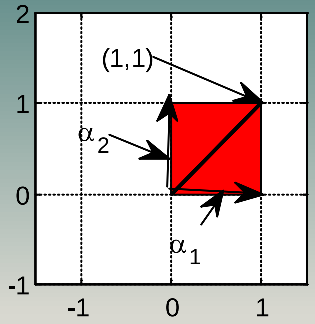
$$\mathbf{A5}=\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix},\quad \mathbf{y5}=\begin{bmatrix} 0 & 0.866 & 0.366 & -0.500 & 0 \\ 0 & 0.500 & 1.366 & 0.866 & 0 \end{bmatrix}$$

平面线性变换产生的图形示例

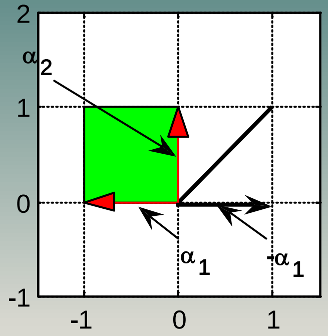
- 用pla501来完成计算和绘图，其核心语句如下。
- x=[0,1,1,0,0;0,0,1,1,0];subplot(2,3,1),
- fill([x(1,:),0],[x(2,:),0],'r')
- A1=[-1,0;0,1],y1=A1*x, subplot(2,3,2), ……
- 运行程序可以得到前面列出的y1~y5的值,它们都用2×5的矩阵表示，其所示的图形。矩阵A1使原图对纵轴生成镜像（反射），矩阵A2使原图在横轴方向膨胀，矩阵A3使原图在纵轴方向压缩，矩阵A4使原图向右上方剪切变形，矩阵A5使原图沿反时针方向旋转t=pi/6。

不同变换矩阵A=[α_1,α_2]生成的图形

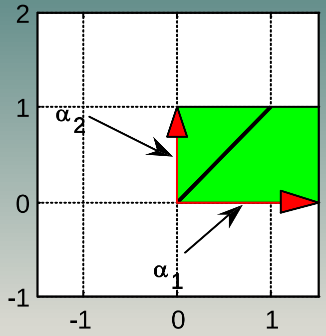
**(a) x=[0,1,1,0;
0,0,1,1]**



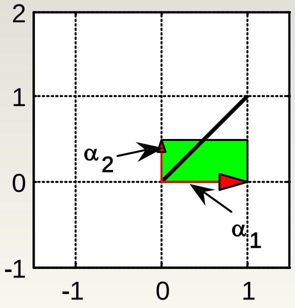
**(b)A1=[-1, 0;
0, 1]**



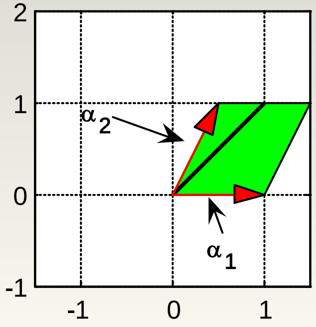
**(c)A2=[1.5, 0;
0, 1]**



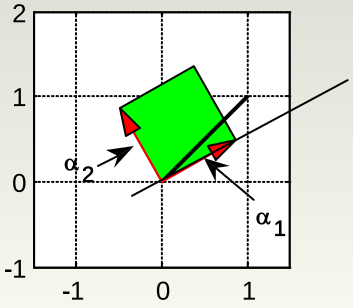
**(d)A3=[1, 0;
0, 0.5]**



**(e)A4=[1, 0.5;
0, 1]**



**(f)A5=[0.866, -0.5;
0.5, 0.866]**



变换矩阵的行列式的意义

求出五个变换矩阵的行列式,其结果如下:

det(A1)=-1, det(A2)=1.5,

det(A3)=0.5, det(A4)=1, det(A5)=1.

对二维空间（平面），行列式的几何意义是两个基向量所构成的平行四边形的面积。一个变换的行列式作用于某图形所造成的新图形的面积变化倍数，等于该变换的行列式。

可以看出，**A1,A4**和**A5**的行列式绝对值都是一，所以变换后图形的面积不会发生改变。而**A2**和**A3**的行列式分别为**1.5**和**0.5**，变换后图形面积的增加和减小倍数恰好于这两个值相对应。

变换矩阵对图形的影响还可从特征值和特征向量来研究。

下一讲 **5.2** 线性变换与形变

图形的形变与旋转

•线性变换对图形的作用可以从其基向量看出。**A1~A4**都是形状变化，**A5**则是旋转。这些变换，还可以互相连接，表现变换矩阵的相乘。在实际工程中有广泛的应用价值。比如先后进行两次转动，每次转角分别为**α**和**β**，则两次线性变换矩阵的连乘积为：

$$\mathbf{A}_\alpha \mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\alpha+\beta}$$

其结果与转动角度之和的变换相同。

要注意一般情况下，矩阵乘法不遵守交换律，**A2*A5≠A5*A2**，所以必须非常注意变换的先后次序。

正体字母变换为斜体字母

例5.2 数据矩阵 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0 & 0.50 & 0.50 & 6.0 & 6.00 & 5.50 & 5.50 & 0\\0 & 0 & 6.42 & 0 & 8.00 & 8.00 & 1.58 & 8\end{bmatrix}$

为字符N图形的各个节点,

(1)用plot语句在子图1中画出其形状;

(2)取A=[1,0.25;0,1]作为变换矩阵对**x**进行变换,并画出**y=Ax**的图形;

(3)对结果进行讨论。

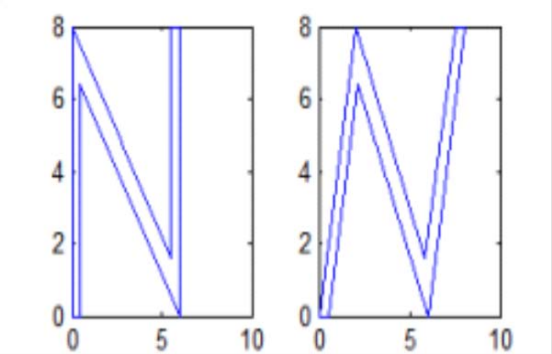


图 5-4　例 5.2 生成的 N 字符图形

程序pla502及其运行结果

- x0=[0,0.5,0.5,6,6,5.5,5.5,0;0,0,6.42,0,8,8,1.58,8];
- x=[x0,x0(:,1)]; % 把首顶点坐标补到末顶点之后
- A=[1,0.25;0,1]; y=A*x;
- subplot(1,2,1),plot(x(1,:),x(2,:))
- subplot(1,2,2),plot(y(1,:),y(2,:))
- 生成的图形见图5-4。这个例子说明在设计计算机字库时，斜体字库可以不必单独建立，只要对正体字库进行适当的线性变换，就可以实现斜体字，用这个方法可以节约大量的人力，并可节约存储量。
- 这个矩阵可根据第一基向量不变，第二基向量变成右斜线的思路构想出来：即α_1=[1;0], α_2=[0.5;1],

5.2.2 非同维线性变换的用途

•这里所实现的还只是同维空间（平面——平面）之间的变换，实际上还有不同维空间之间的变换。比如用1×2的变换矩阵A=[1　0]左乘数据矩阵x，将得到y=Ax=[0,1,1,0]。此时原二维向量x被变换为一维的新向量y。它的实质是把原方格图形投影到横坐标轴上。四个顶点变换（投影）为横坐标上的两个点0和1。

•把三维的物体图投影到两维平面具有更广泛的用途，最直接的就是三维动漫技术。

•三维到二维投影的另一个最新用途则是3D打印技术，它把由计算机辅助设计(CAD)生成的立体模型图纸，细密地分层截取它的截面形状，这就需要2×3维的变换矩阵。然后一层一层地打印粘叠起来，恢复复杂的三维原型。

把二维变换为三维向量的用途

- 反过来，把二维向量变换为三维向量，即把平面上的向量换成为空间向量，在某些情况下是很有用的。比如刚体在平面上的运动要用两个平移和一个转动来描述，转动可以从上面的线性变换A5得到，但平移却不是一个线性变换。要完全用矩阵乘法来描述刚体的运动，就要刚体位置的描述增加一维，采用下节介绍的“齐次坐标系”。

下一讲　线性变换与物体位移

5.2.3 用线性变换描述刚体的运动

•前面所研究的矩阵和向量的算法，都是在向量空间内有效的。所谓向量空间V，要求其所属的向量对加法和数乘满足封闭性：即：①若a,b∈V,则a+b ∈V,

• ②若a ∈V ,则ka ∈V,其中k为任意实数。

•但刚体的平移不满足这个条件。因为：

• ① 设 ya=xa+c；yb=xb+c；则它们的和为 y=ya+yb =xa+xb+2c≠x+c， 可见它对加法不封闭；

②、设 ya=xa+c；将它乘以常数k，有 y=k*ya=k(xa+c)=k*xa+k*c≠x+c，可见它对乘法也不封闭；就是说，平移不符合线性变换的规则，无法用矩阵乘法来实现平移变换y=x+c。

•人们发现，如把平面问题映射到三维空间来建立方程，这个问题却可以得到解决。

齐次坐标系中的平移矩阵

- 把原来通过原点的平面沿垂直方向提高一个单位，与原平面保持平行，把原来的二维的x用三维向量来表示。这样的坐标系称为齐次坐标系(Homogeneous coordinate)。可以把向量x和平移矩阵M写成：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 于是有 $$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 + c_1 \\ x_2 + c_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可见三维齐次坐标中的前两个分量实现了平移运算的要求。

齐次坐标系中的旋转矩阵

•对象若同时有旋转和平移，可以分别列出旋转矩阵和平移矩阵。不过此时的旋转矩阵也要改为3×3维，这可以把上述A5中增加第三行和第三列，置A(3,3)=1，其余新增元素为零。

$$\mathbf{A5} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

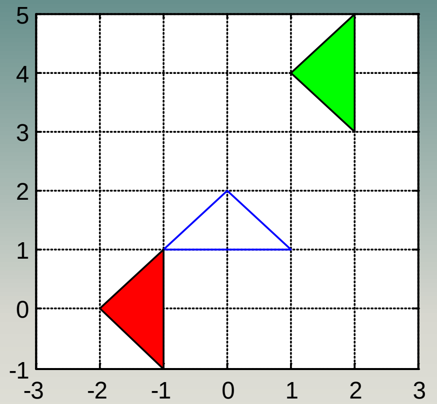
•把平移矩阵M左乘旋转矩阵A5就得到既包括平移，又包括转动的平面齐次坐标系的变换矩阵。

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} * \mathbf{A5} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & c_1 \\ \sin t & \cos t & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

•要注意变换矩阵的相乘次序是不符合交换律的。

三角形平移和转动的示例

例5.3 设一个三角形的三个顶点坐标为(-1,1), (1,1), (0,2)，今要使它旋转90度，右移3，上移4，试设计变换矩阵A，并画出变换前后的图形。



齐次数据矩阵：$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

旋转矩阵 $\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

平移矩阵 $\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

平移和转动的程序pla503

- 解：先列出数据矩阵，为了画图方便，把第一点的数据补到最后，构成2×4数据阵。根据前面的论述，有平移要求时，必须采用齐次坐标系，因此数据矩阵应该是3行的，即最后要补一个全幺行。平移和转动矩阵按上面的方法确定：
- 程序pla503核心语句如下：

```
x=[-1,1,0,-1;1,1,2,1;ones(1,4)] % 平面坐标改为齐次坐标
M=[1,0,4;0,1,3;0,0,1], % 齐次坐标系中的移位矩阵
t=pi/2,R=[cos(t),-sin(t),0;sin(t),cos(t),0;0,0,1] % 转动矩阵
y1=R*x,pause       % 求出转动后图形参数
y2=M*R*x,pause % 求出两次变换后图形参数
```

程序pla503的运行结果

- 程序运行结果是：

$$y1=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, y2=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

得出的图形见图5-5。**Y1**对应的图形是红色的，**Y2**对应的图形是红色的，矩阵的相乘不符合交换律，所以线性变换也不遵守交换律。本例取的是先转动（绕原点）后平移，也即先用**R**左乘，再用**M**左乘。如果换了次序，先平移再转动，即把**R**和**M**作用次序交换一下，结果就完全不同了。

下一讲　　　基向量与坐标值

5.2.4 基向量改变后坐标值的变化

- 坐标系的变化就是指的基向量变化，对于空间的固定点或形状不变的刚体，因为基向量变了，其坐标值也必然变化。这可以看做例5.1的逆过程，在例5.1的y=Ax中，假定坐标值x不变，改变基向量A，向量y就发生变化，那是知道x求y。反过来，知道y，也可以求x。
- 工程上往往要研究一个工件在测量仪上测出的数据与CAD图纸上的数据如何转换。因为图纸是按照工件自身的基准生成的，而三坐标测量仪的数据则是按夹持器为基准，要拿两者进行比较，必须进行坐标转换。

基向量改变后坐标的变化

- 用例5.1的数据来分析。取原始直角坐标系中的向量y=[1,1]^{T}为对象，当把基向量换成A1~A5后，这个向量在各新坐标系中的坐标值是多少呢？解就是x=A^{-1}y，在程序pla501执行之后，再键入以下MATLAB语句：

x1=inv(A1)*[1;1], x2=inv(A2)*[1;1], x3=inv(A3)*[1;1], x4=inv(A4)*[1;1], x5=inv(A5)*[1;1],

- 运行结果是：

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0.6667\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_4=\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_5=\begin{bmatrix}1.366\\0.366\end{bmatrix},$$

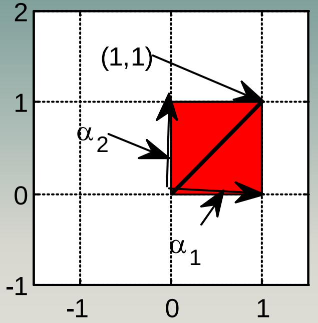
前面几项对照图形就可看出了，只把y5列出一个算式，

$$\mathbf{y}_5 = 1.366\,\alpha_{1} + 0.366\,\alpha_{2} = 1.366*\begin{bmatrix}0.866\\0.5\end{bmatrix} + 0.366*\begin{bmatrix}-0.5\\0.866\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

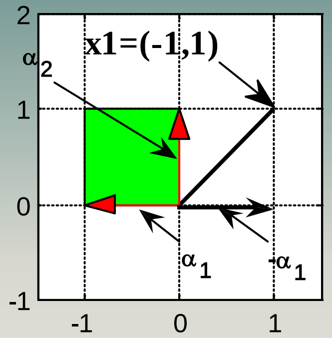
- 故向量[1,1]^{T}在新坐标系中的坐标值为（1.366, 0.366），此结果的正确性不难从图5-2上看出。

点y=[1,1]在各基坐标中的值

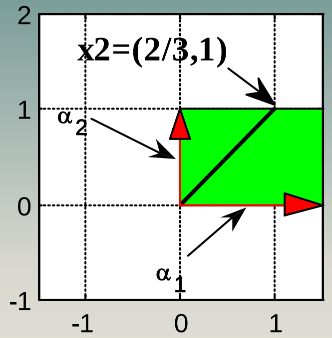
(a) x=[0,1,1,0;
0,0,1,1]



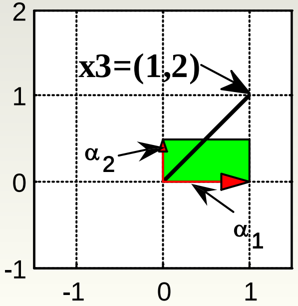
(b)A1=[-1, 0;
0, 1]



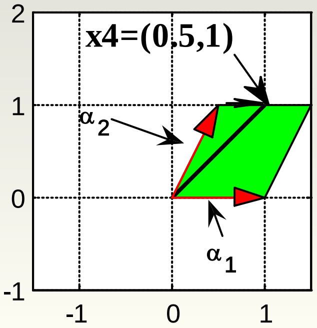
(c)A2=[1.5, 0;
0, 1]



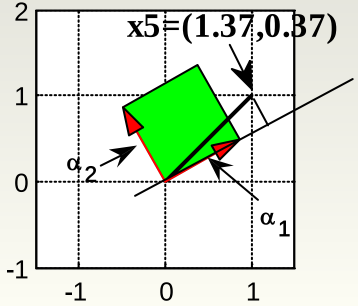
(d)A3=[1, 0;
0, 0.5]



(e)A4=[1, 0.5;
0, 1]



(f)A5=[0.866, -0.5;
0.5, 0.866]



坐标变换时的过渡矩阵

设线性空间R^3中的两组基向量[u1,u2,u3]，[v1,v2,v3], 其中每项都是3维列向量，它们在固定坐标系中的3个分量都是已知的，因此u和v都可表为3×3矩阵。如果R3中的一个向量w在以u为基的坐标系内的坐标为c（3×1数组），在以v为基的坐标系内的坐标为d(3×1数组)，它们在固定坐标系内的坐标应分别为u*c和v*d，这两者应该相等。u* c =v*d

$$d = inv(v)*u*c = v\backslash u*c = P*c$$

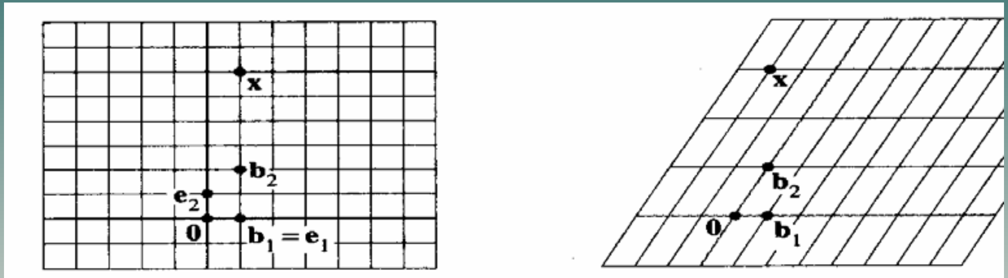
基坐标变换就是已知c，求d。将(5.2.7)左右均左乘以inv(v)

坐标变换矩阵P(u→v) 称为过渡矩阵，可由基向量u,v求得：

P=v \ u=inv(v)*u　　　　　　　　　　(5.2.9)

当u是笛卡尔坐标时，$u=I_3$(平面是I_2)，$P=v\backslash I_3=inv(v)$，也就是例5.1中用到的inv(A1),…inv(A5)，。

例5.4　基向量对坐标的影响



图中原来的基向量为笛卡尔坐标e1=[1,0]^T,e2=[0,1]^T，则x的坐标为x=[1,6]^T，若改用新基向量b1=[1,0]^T,b2=[1,2]^T，求原来的向量x在新基向量下的坐标d。

解：因为原基向量组为 $\mathbf{e}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,新基向量组为 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$,，

b=[1,1;0,2]; e=[1,0;0,1]; x=[1;6]; d=inv(b)*e*x，运行结果为: d=[-2;3]，即

$$x=-2b_1+3b_2=-2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$$

下一讲　　正交坐标系

5.3 正交坐标系

•构成坐标系的基向量必须是线性无关的，这只是必要条件，工程上通常还要求这些基向量相互正交。因为在正交坐标系中进行计算，可以避免各个数据分量之间的交叉影响，并保证在整个向量空间计算精度的一致性。特别是在坐标变换时，不会造成数据对象形状的扭曲，对于刚体这尤其重要。

•相互都正交的向量组称为正交向量组。由单位向量组成的正交向量组称为规范（标准）正交向量组。以三维为例，设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为正交向量组，其规范向量组：

$$\mathbf{A}_0=[\boldsymbol{\alpha}_{10},\boldsymbol{\alpha}_{20},\boldsymbol{\alpha}_{30}]=\left[\boldsymbol{\alpha}_1/\|\boldsymbol{\alpha}_1\|\quad \boldsymbol{\alpha}_2/\|\boldsymbol{\alpha}_2\|\quad \boldsymbol{\alpha}_3/\|\boldsymbol{\alpha}_3\|\right] \qquad (5.3.1)$$

在正交条件下有：

$$\boldsymbol{\alpha}_{i0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{j0}\begin{cases}=\mathbf{0}, & (i\neq j)\\ =1, & (i=j)\end{cases} \qquad (5.3.2)$$

故有：

$$\mathbf{A}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{10}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_{20}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_{30}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{10} & \boldsymbol{\alpha}_{20} & \boldsymbol{\alpha}_{30}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}_3 \qquad (5.3.3)$$

正交坐标系

- 对规范正交向量组，必有 $A_0^T A_0 = I_3$ 这是检验规范正交组的方法。由此推论，正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必定线性无关。也即向量组正交的要求比线性无关的要求更为严格。不难推想，**n**维规范向量组的正交条件为 $A_0^T A_0 = I_n$。
- 把例**5.1**中的各二维矩阵看作两个向量组成的向量组，由于其行列式都不等于零，显然都是线性无关的。用**MATLAB**语句**X=A'*A/norm(A)^2**对它们进行正交性检验，只有**A1,A5**两种情况的**X=I2**，满足正交条件，**A2,A3**和**A4**都不符合。从变换后的图形看出，经**A1,A5**变换以后，原始图形仍保持正方形不变，只是位置和方向有变化，这符合一切几何形状为刚体的描述要求，也是正交变换得到广泛应用的主要原因之一。

工程中的正交坐标系

在研究几何空间任何对象形状和运动时，必须建立坐标系。通常首先要有一个固定坐标系，它是我们观察和测量运动的基础，在大多数情况下采用地面坐标系。

在所研究的对象上，通常要设定另一个坐标系。比如研究飞机、汽车、船舶、...等运动物体时，就要在这些载体上建立坐标系；在研究机床、测量仪、机械手、... 等部分可动的设备时，也要在其运动终端上建立坐标系。

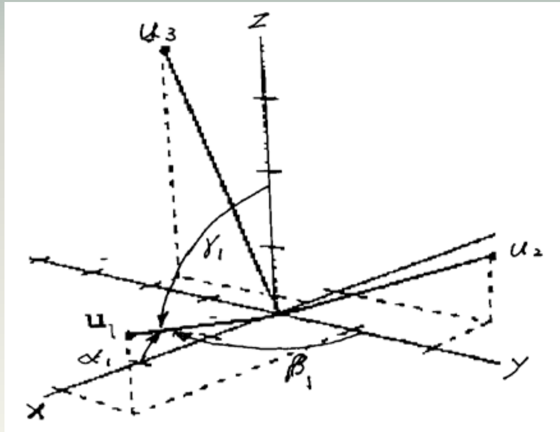
此外还往往需要一些中间坐标系，例如航母坐标系是舰载机与地面坐标的中间坐标系，机械臂坐标系是夹持端与固定基座的中间坐标系等。这些坐标系之间相互转换，都要利用线性代数的理论和方法。

固定坐标系通常取笛卡尔坐标，载体坐标系则多种多样。在大多数情况下它们也多取正交坐标系.

运动坐标系

举飞行器为例(图5-7)，它的机身坐标系的x轴沿机身纵轴，指向机首；它的y轴与机翼-机身平面垂直，指向上方；而它的z轴则与x,y轴正交，按右手法则，其正向指向右翼。两个三维坐标系之间有9个夹角，但可用三个空间角α,β,γ独立确定。

这几个空间角α,β,γ是很难度量的，通常都要转化为绕具体转轴的转角。空间航行器与地面坐标系的关系通常用三个空间角（欧拉角）来度量，机器人或机械手都有几个自由度，要把每一个关节的运动换算为上述方向余弦也有不小的计算量。



固定坐标与载体坐标关系

再把它们的方向余弦排成矩阵：

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) & \cos(\alpha_3)\\ \cos(\beta_1) & \cos(\beta_2) & \cos(\beta_3)\\ \cos(\gamma_1) & \cos(\gamma_2) & \cos(\gamma_3)\end{bmatrix}$$

		载体坐标系		
		u_1	u_2	u_3
固定坐标系	x	α_1	α_2	α_3
	y	β_1	β_2	β_3
	z	γ_1	γ_2	γ_3

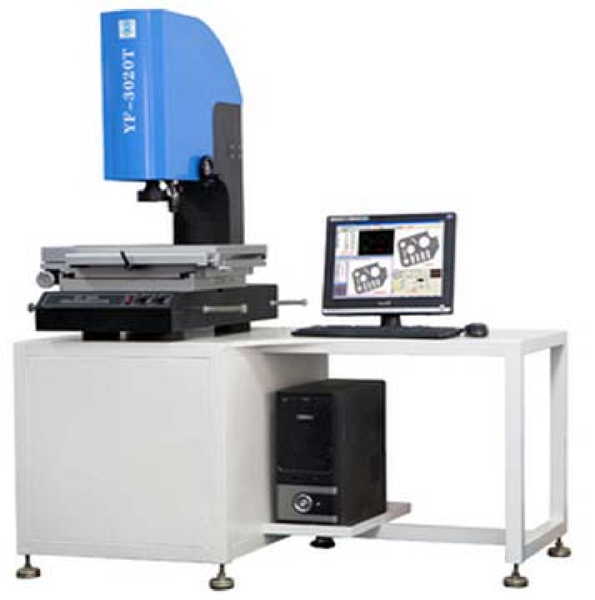
如果固定坐标系是正交系，则任何一个单位向量在三个坐标轴上的投影的平方就等于1，故变换矩阵p各列的平方和均为1。如果载体坐标系也是正交系，则方阵p 各行的平方和也均为1。所以有

$$\mathbf{p}^{\mathrm{T}}*\mathbf{p}=\mathbf{p}*\mathbf{p}^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}_3$$

下一讲　以数据为基础的坐标系

5.4 以数据为基础建立坐标系

三坐标测量仪（见图），其工作原理一般都采用三个直线光栅尺做测量基准，测量头以电触头触发，测量出工件触点的实际（x,y,z）位置。根据工件多点的大量数据，对工件的形状、尺寸的精确性进行分析。这样，测量的数据来自固定坐标系，它与夹持状况有关，图纸的数据则以工件位置为基准，两者之间必须要进行坐标转换才能对比。

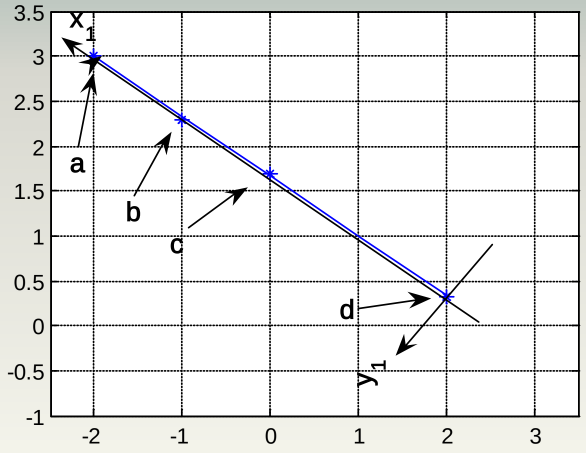


5.4.1 用数据建坐标的一个应用实例

例5.5 用坐标测量仪测出一个工件边界上的四点坐标如右表，问这四点是否在一根直线上？求此直线方程，及各点离此直线的距离，绘图说明。

解：把这四个点作图，可以得出图5-10。测试数据是在固定坐标系，坐标原点不在这根线上，要求出的各点误差则是在这根斜线的垂直方向，其测量误差的起点都以斜线为准。

坐标测量仪测出的四点坐标值				
	a	b	c	d
x	-2	1	0	2
y	3	2.3	1.7	.33



四点共线误差的分析

下面用数学表达思路：

1. 列出表示四点原坐标的向量组 L= $\begin{bmatrix} -2.0 & -1.0 & 0 & 2.0 \\ 3.0 & 2.3 & 1.7 & 0.33 \end{bmatrix}$

2. 将此向量组各向量都减去**d**点坐标，得到差向量矩阵**M**：

$$M = L - \begin{bmatrix} 2.0 \\ 0.33 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.0 & -3.0 & -2.0 & 0 \\ 2.67 & 1.97 & 1.37 & 0 \end{bmatrix}$$

3. M中的第一列表示**d-a**两点联线向量，也就是新坐标系中的$\mathbf{x_1}$轴基向量，将它称为$\mathbf{q_1}$，并规范化为单位向量$\mathbf{q_{10}}$，

$$\mathbf{q_{10}} = \mathbf{q_1}/\|\mathbf{q_1}\| = \begin{bmatrix} -4.0 \\ 2.67 \end{bmatrix} \Big/ \sqrt{(-4)^2 + 2.67^2} = \begin{bmatrix} -0.8317 \\ 0.5552 \end{bmatrix}$$

第二个基向量$\mathbf{q_2}$可以把第一个基向量旋转**90**度获得，

四点共线误差的分析(续)

$$\mathbf{r}(\pi/2) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}_{\theta=\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_{20} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_{10} = \begin{bmatrix} -0.5552 \\ -0.8317 \end{bmatrix}$$

得出新的基向量矩阵 $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_{10}, \mathbf{q}_{20}] = \begin{bmatrix} -0.8317 & -0.5552 \\ 0.5552 & -0.8317 \end{bmatrix}$

4. 有此两个基向量，就可以按基变换的公式**(5.4.2)**求这四点在新坐标系内的坐标值**R**。

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4.8093 & 3.5889 & 2.4241 & 0 \\ -0.0000 & 0.0270 & -0.0291 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看出在新的坐标系中，代表这四个点误差的**y1**坐标都非常小，说明四点基本共线。

四点共线误差的分析(续)

解此题的MATLAB程序pla505如下：

```
L=[-2,-1,0,2;3,2.3,1.7,0.33]   % 输入四点的坐标矩阵
M=L-L(:,4)*ones(1,4)% 求出差向量矩阵
q10=M(:,1)/norm(M(:,1)) % 把第一差向量作为基向量q10
q20=[0,-1;1,0]*q10  % 与它正交的第二基向量q20
Q=[q10,q20], % 将q10,q20排成向量组，
R=inv(Q)*M%其逆inv(Q)即坐标变换矩阵
```

上面的例题说明了以数据为基础建立坐标系并进行变换的作用。其中比较麻烦的一项工作就是建立与数据相关的正交坐标系。于是有人就研究了以n个n维向量为基础的构建n维正交坐标系的方法，称为施密特正交系生成法。它的思路不错，但算法很麻烦，特别是高阶的时候，会有积累误差。采用它的思想，又经过算法上的改进，发展为“qr正交分解”。

下一讲　qr分解

5.4.2 qr分解

MATLAB中的矩阵正交分解子程序qr.m可将A分解为Q和R两个矩阵的乘积。调用方法为：

[Q,R]=qr(A)

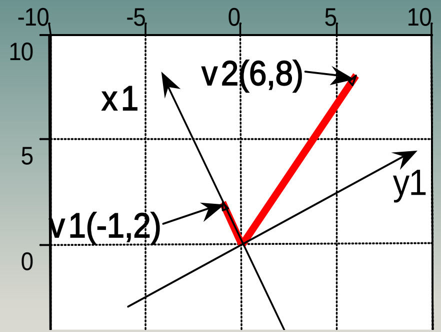
得出的**Q**和**R**满足 **Q*R=A （5.4.1）**

- 当**A**是**m×n**矩阵时，输出变元**R**是**m×n**的上三角矩阵。而**Q**则是**m×m**规范化正交矩阵。在三维空间应用中，**m**不大于**3**，而**n**是对象的图形中的顶点的数目，可能是很大的数，故一般有 **n≥m**。起主要作用的是前**m**列。
- 先从二阶开始分析，在例**5.5**的程序后面加一句**[Q1,R1]=qr(M)**，可以发现**Q1=Q,R1=R**。可见例**5.5**正是进行了这样的计算，**QR**分解代替了好几条语句。

二维平面上的qr分解

看看qr分解的几何意义。设两个列向量v1=[-1;2], v2=[6;8]，组成向量组：

$$\mathbf{A}=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2]=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 2 & 8\end{bmatrix}$$



•键入[Q,R]=qr(A)，作qr分解，得出：

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-0.4472 & 0.8944\\ 0.8944 & 0.4472\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix}2.2361 & 4.4721\\ 0 & 8.9443\end{bmatrix}$$

•在笛卡尔坐标系中画出列向量v1,v2如图，Q满足正交向量组的条件$Q^TQ=I_2$。两个列向量Q(:,1)和Q(:,2)是长度为1的单位向量，它们代表了新建立的坐标系x1和y1。R则是向量v1,v2在新坐标系中的坐标值。它的第一列只有一个元素，说明新坐标系的第一根轴取的就是v1方向，第二根轴则是按与v1成正交的条件取的。

二维平面上的qr分解（续）

qr分解实际上是一个正交坐标变换，从原来的笛卡尔正交坐标系转到新的正交坐标系。两者之间仅仅是转动了一个角度θ，**Q**就是按 $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 与θ关联的：

新坐标系的特点是其第一根轴沿着**A**的第一根列向量$\mathbf{v}_1$，第二根轴则按正交于$\mathbf{v}_1$的条件建立。如果两个向量$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$调换一下位置，**Q**和θ都会发生改变，因为这时新坐标系的第一根轴将取为$\mathbf{v}_2$的方向。因此对数据向量组**A**做qr变换时，**A**中第一列所代表的向量必须慎重选择。

对于三维空间中的向量组**A**，第一、二列所代表的向量更须慎重选择，因为他们决定了新坐标系的方向。下面将举一个三维空间qr变换的数字实例。

三维空间中的qr分解

例5.6 设四个列向量v1=(9;-5;2),v2=(0;7;5),
v3=(-1;-9;6), 4=(2,5,-3)，组成向量组A。
用语句[Q,R]=qr(A)对A作QR分解后，得到：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 9 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & -9 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} -0.8581 & -0.2475 & -0.4499 \\ 0.4767 & -0.7094 & -0.5191 \\ -0.1907 & -0.6599 & 0.7267 \end{bmatrix},\mathbf{R}=\begin{bmatrix} -10.4881 & 2.3837 & -4.5766 & 1.2395 \\ 0 & -8.2655 & 2.6727 & -2.0622 \\ 0 & 0 & 9.4822 & -5.6755 \end{bmatrix}$$

同样可以检验$\mathbf{Q^TQ=I_3}$，说明**Q**是规范化的三维空间正交坐标系，**R**中第一个列向量只有一个元素，说明新坐标的第一根轴取的是$\mathbf{v_1}$方向；**R**中第二个列向量有两个元素，说明新坐标的第二根轴在$\mathbf{v_3}$方向没有分量，它是位于$\mathbf{v_1,v_2}$平面上，方向与$\mathbf{v_1}$正交；它的第三个列向量有三个元素，说明它在新坐标系的三个方向都有分量，它与 $\mathbf{v_1,v_2}$共同构成新的正交坐标系。

5.5.1特征值与特征向量

矩阵A的特征方向

一个二维线性变换A就有四个参数，这表明它对x平面上不同方向的向量产生的作用是不同的。可以取x平面上的一个单位向量，让它渐渐转动，看看变换后的y=Ax如何变化。MATLAB设计了这样一个演示程序，程序名为eigshow，其输入变元是二维矩阵A。键入eigshow([1,0.5;0,1])就出现了所示的图形。

用鼠标左键点住绿色的x向量并拖动它围绕原点转动，它表示原坐标系中的单位向量。图中同时出现以蓝色表示的Ax向量，它表示变换后的新向量y。y与x在长度和相角上的不同就表示了该变换造成的这个向量的幅度增益和相角增量。

eigshow([1,0.5;0,1])产生的图形

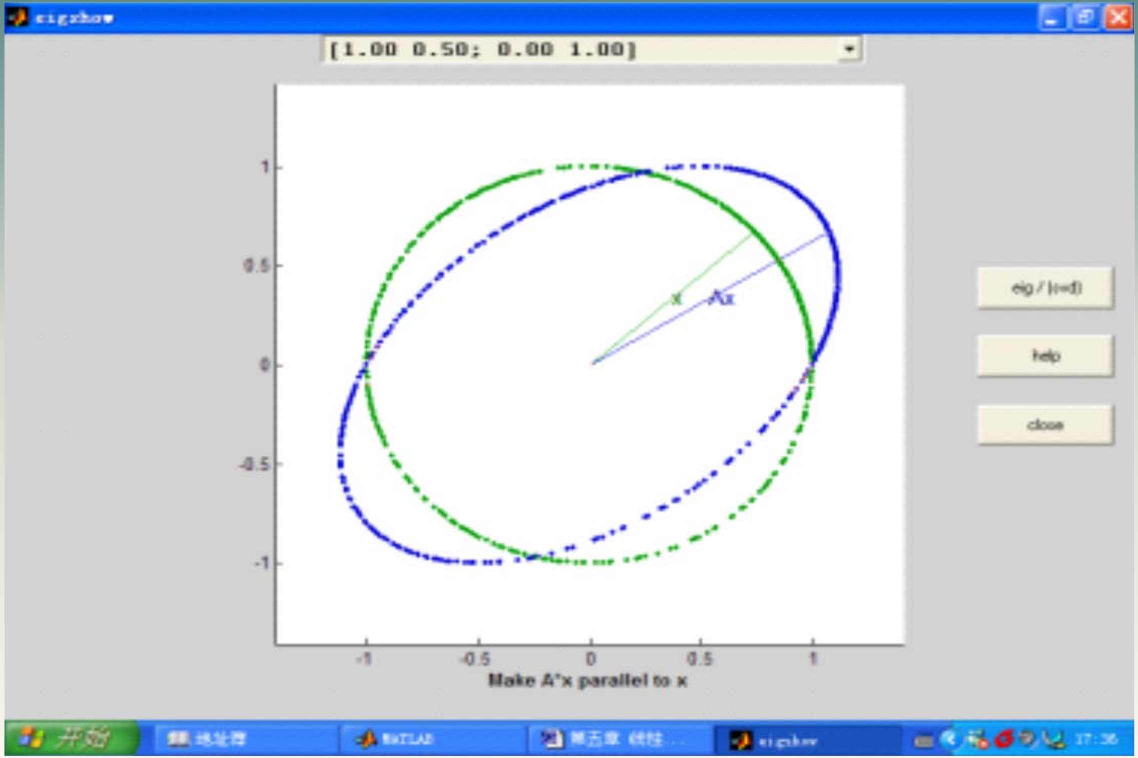


图 5-3　矩阵 A4 的特征向量和特征值演示

5.5.1 特征值和特征向量

当两个向量处在同一条直线上时（包括同向和反向），表示两者之间的方向重合，只差一个实数乘子λ。

$$Ax=\lambda x \quad 或 \quad (\lambda I-A)x=0 \qquad (5.1.7)$$

把这时的向量x称为特征向量，对应的乘子λ称为特征值。

在这个图中，当x转到±1的水平位置时，Ax也恰好与x重合，并具有同样的长度，说明其特征值等于1，特征向量则是实数单位向量1+j0。在其他方向的x所产生的y=Ax，不仅大小与x不同，而且方向也不同，所以要做一个二维运算。只有在特征向量的方向，只要简单地乘以λ，也就是只做一个一维运算。在数值计算和物理概念方面都带来方便。在矩阵数学上就表现为：

$P^{-1}AP=\Lambda$ 或 $A=P\Lambda P^{-1}$（Λ是诸λi组成的对角矩阵）

可将原来坐标系中的工程问题通过坐标变换转换到特征坐标上去，解完了再转换回来达到化简运算的目的。

二阶方阵特征向量的算法

•对于简单的二阶方阵，其特征向量p和特征值λ可以用手工计算算出，其基本步骤如下：根据特征方程是右端为零的齐次线性方程组，其解存在的条件是系数行列式为零：

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} =$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + D = 0$$

这方程称为特征方程，由它求出两个特征根λ_1, λ_2，再由下列齐次方程组求特征向量$\mathbf{p}_1$,$\mathbf{p}_2$

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_1 = 0, \quad (\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 = 0,$$

三阶方阵特征向量的求法

求特征值比较繁琐，三阶及以上只能靠计算机，这里只介绍解特征方程 $(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的思路。主要有三个：

(1) 展开左端系数行列式，令它为零，得出λ的 特征方程，

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0$$

展开这个行列式的计算就相当繁。

(2)求出**(5.5.1)**全部特征根**λi**，解高次代数方程又是难题。

(3)分别将这些**λi**代入方程，得到齐次方程组 $(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_\mathrm{i} = \mathbf{B}\mathbf{x}_\mathrm{i} = \mathbf{0}$ 这是欠定方程组求基础解的问题。

可以看出，用手工求任意方阵**A**的**Λ**和**P**几乎是不可能的，教科书上的例子都是反凑出来的。

特征值和特征向量的用途

- 分这样三步是为了说明原理，其实工程计算时，不需要中间过程。MATLAB提供了一条集成的命令eig就可以全部完成求特征值和特征向量的工作。其调用方法为：

[P,lambda]=eig(A)

把特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 排列成对角矩阵Λ，将全部特征向量$p_i=x_i$排列成向量组$P=[p_1,p_2,p_3]$，P就是能使$P^{-1}AP=\Lambda$的变换矩阵。把方阵A对角化就是使把它经过适当的线性变换变为对角矩阵Λ，$A=P\Lambda P^{-1}$。对角矩阵Λ就是特征值矩阵，*P*就是特征向量组。

下面的例子将说明特征值和特征向量的用法。

下一讲　方阵的对角化

5.5.2　方阵高次幂的计算

求特征值的一个应用是计算矩阵的高次幂，因为任意方阵的高次幂很难算，但可化成：

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{(\mathbf{P\Lambda P^{-1}})(\mathbf{P\Lambda P^{-1}})\cdots(\mathbf{P\Lambda P^{-1}})}_{\mathbf{k}} = \mathbf{P\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r^k \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

对角方阵的乘幂非常好算，只要把每个对角元素换成其k次幂即可。

例5.7 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，求一个正交矩阵P，使$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{\Lambda}$ 为对角矩阵，并求$\mathbf{A}^{10}$。

例5.7的解

解： 本例是数字矩阵，其程序pla507为:

A=[4,0,0;0,3,1;0,1,3], [p,lambda]=eig(A),

A10=p*lambda^10*inv(p)

- 运行结果为:

$$\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{lamda}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}10=\mathbf{A}^{\mathbf{10}}=\mathbf{P}\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{10} \end{bmatrix} inv(\mathbf{P})=\begin{bmatrix} 1038576 & 0 & 0 \\ 0 & 524800 & 523776 \\ 0 & 523776 & 524800 \end{bmatrix}$$

5.5.3　方阵指数的计算

常系数矩阵微分方程 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ 的解是 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}_0 \exp(\mathbf{A}t)$ 。对矩阵指数的分析和计算是工程中非常重要的问题，矩阵指数计算也要靠特征值和特征向量，为了使指数上的印刷文字加大，此处用**exp**代替**e**。

与标量指数相似，矩阵指数也定义为无穷级数

$$e^{\mathbf{A}} = \exp(\mathbf{A}) = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2/2! + \mathbf{A}^3/3! + \cdots + \mathbf{A}^n/n! + \cdots\right\}$$

将 $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}$ 代入上式右端各幂次项，可以得出：

$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{P}\exp(\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1}$，而 $\exp(\mathbf{\Lambda})$ 可按标量指数算出。

$$\exp(\mathbf{\Lambda}) = \exp\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_r} \end{bmatrix}$$

例5. 8 $A=\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ 求e^A

解: 将矩阵对角化，输入

A=[-2,-6;1,3]; [P,L]=eig(A),V=inv(P)，得到：

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-0.9487 & 0.8944\\ 0.3162 & -0.4472\end{bmatrix},\quad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{V}=\mathrm{inv}(\mathbf{P})=\begin{bmatrix}-3.1623 & -6.3246\\ -2.2361 & -6.7082\end{bmatrix}$$

于是 $\exp(\mathrm{A})=\mathbf{P}\exp(\mathbf{L})\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-0.9487 & 0.8944\\ 0.3162 & -0.4472\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^0 & 0\\ 0 & e^1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3.1623 & -6.3246\\ -2.2361 & -6.7082\end{bmatrix}$

因为，$e^1=e$, $e^0=1$,

最后得到 $$e^A=\begin{bmatrix}3-2e & 6-6e\\ e-1 & 3e-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.4366 & -10.3097\\ 1.7183 & 6.1548\end{bmatrix}$$

就工程应用的角度，不必这么麻烦，**MATLAB**已经给出了现成的函数，只要输入**expm(A)**就可得到最后结果。

下一讲　　二次型

5.5.4　对称方阵与二次型主轴

解析几何中的二次型可以用矩阵乘法表为 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$，作为2×2正交变换的一个应用，不妨研究一下对基坐标做了线性变换后会对二次型图形发生何种影响。设，

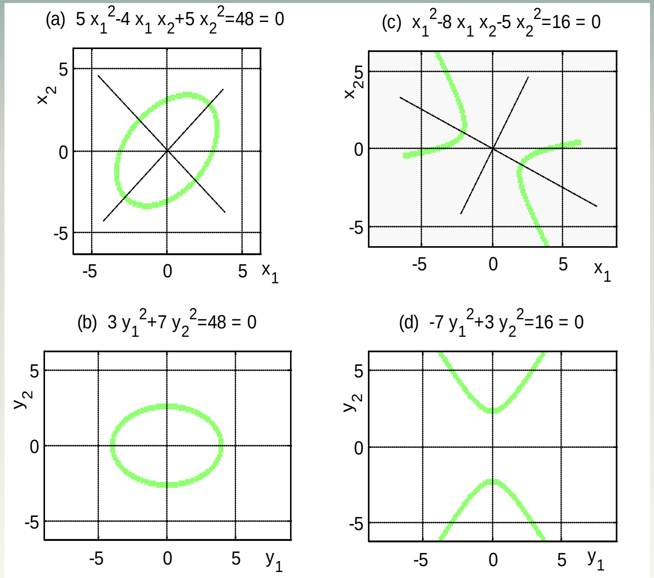
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

则二元二次型

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$=5x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2=48$$

是一个椭圆方程，其图形如右图左上图所示。



基坐标旋转对二次型的影响

如果作一个基坐标的旋转变换，让坐标轴转过45度，这个椭圆的主轴就与新的坐标方向y1,y2相同，如图5-12(b)所示，其方程将变为标准型椭圆方程。此变换关系为：

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1\cos{}^{\pi}\!/_4+x_2\sin{}^{\pi}\!/_4 \\ -x_1\sin{}^{\pi}\!/_4+x_2\cos{}^{\pi}\!/_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.707 & .707 \\ -.707 & .707 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\mathbf{Px}$$

P的逆变换为：

$$\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

于是：

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{y}^T\mathbf{PAP}^{-1}\mathbf{y}=\mathbf{y}^T\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\mathbf{y}=3y_1^2+7y_2^2=48$$

所以几何图形上寻找二次型主轴的问题，在线性代数中就等价于通过求特征值使方阵对角化。

只有特征值方法是正交变换

- 在MATLAB中直接输入[P,lambda]=eig([5,-2;-2,5])即可得到同样的结果。
- 有些教材中不加分析地介绍了“配方法”等其他使方阵对角化的方法。读者必须知道，只有特征值方法是正交变换（或称相似变换），它能使被变换的图形的形状和尺寸保持不变，这通常是工程问题的起码要求。
- 图中的(c) 和(d)子图表示了双曲线二次型，它的系数矩阵是：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

- 键入[P,lambda]=eig([1,-4;-4,-5])，得到

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0.4472 & -0.8944 \\ 0.8944 & 0.4472 \end{bmatrix}, \mathbf{lambda}=\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

双曲线二次型

- 两个特征值一正一负，对应于特征值-7的特征向量是P中的第一列,它所对应的转角θ可按θ=acos(0.4472)求得为63.4358度.对应于特征值3的特征向量是P中的第二列。这个由两个特征向量列排成的矩阵P其实就是可以把A对角化的正交变换矩阵R.不难检验如下:

$$\Lambda = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- 所以按新的坐标系统列出的二次型方程是,

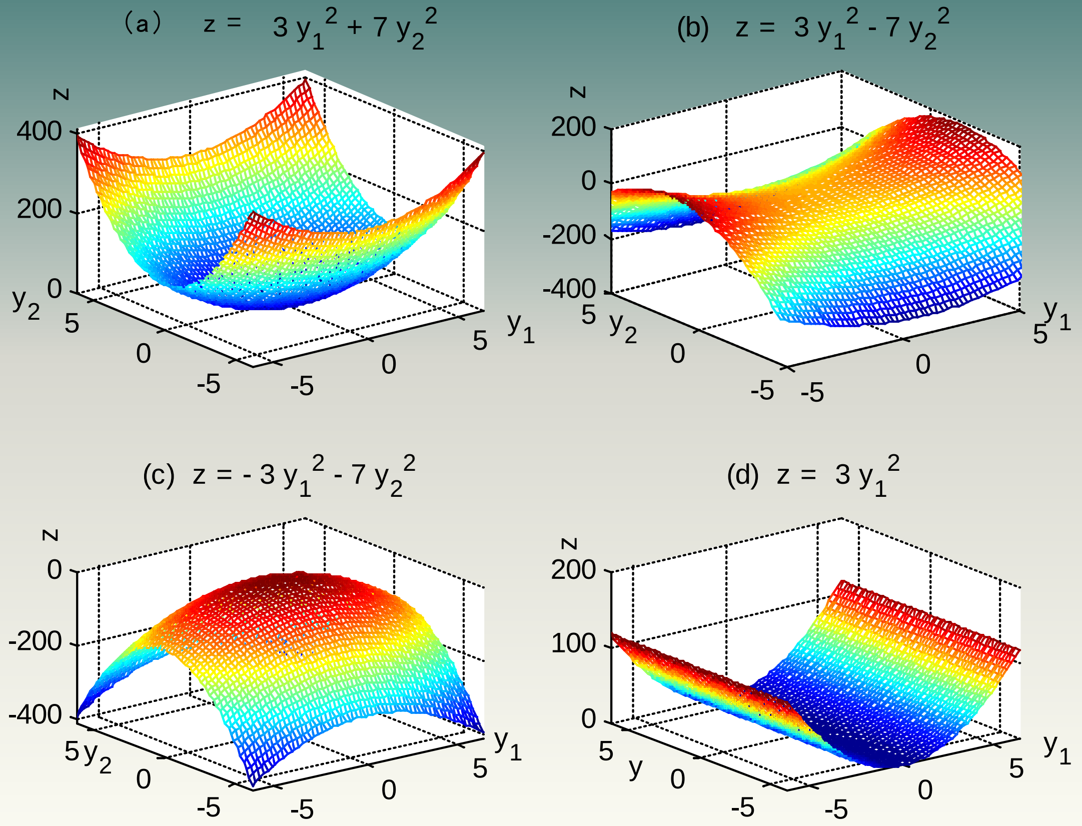
$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\mathbf{y} = -7y_1^2 + 3y_2^2 = 16$$

- 图 中(c)和(d)画出的就是这种情况。

特征值正负号与曲面形状的关系

- 特征值的正负与二次型的曲面的极值特性有密切关系，如图所示。
- 图(a)是两个特征值均为正的“正定”情况，曲面有极小值；图(b)是两个特征值一正一负的情况，极值处是一个鞍点；图(c)是两个特征值均为负的“负定”情况，曲面有极大值；图(d)是一个特征值为零的情况，它形成一个柱面；
- 曲面(a)与z=48水平平面的交线就是前一图中的椭圆(c)；曲面(b)与z=16水平平面的交线就是前一图中的双曲线(d)。由此我们知道，用正交矩阵把二次型转到对角化，实际上就是把坐标轴转动到二次型曲面的主轴方向。它可以把二次型的方程简化，在许多工程问题中，可以使它的物理意义变得清晰，因而得到广泛的应用。

特征值正负号与曲面形状的关系



下一讲　应用实例5.6.1

例5.6.1 字母阴影投影的生成

把字母当成一个直立的广告牌，立在第一象限平面上，底部放置于x轴上，阳光从后方斜照过来，在地上（第四象限平面）产生斜的阴影。设阴影的高度为原高的70%，倾斜的角度为右下方60度，试设计其变换矩阵。用例5.2中的字母N为例，在一张图中同时画出字母本体及其阴影。

解：第一个变换A1是反射，以x为反射轴，把文字从第一象限反射到第四象限，第二个变换A2是压缩高度；第三个变换A3是偏移。可以用它们的基向量来设计矩阵。

反射变换的第一基向量与x相同，第二基向量指向 -y，因此 $\mathbf{A1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，压缩变换的第一基向量与x相同，第二基向量指向y，但长度只有0.7，因此 $\mathbf{A2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.7\end{bmatrix}$ 。

字母阴影投影的生成(续)

对于偏移变换，它的第一基向量与x相同，第二基向量指向左上方60度，它的单位向量的两个分量为-0.5和0.866，故其矩阵为 $\mathbf{A3}=\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ 0 & 0.866\end{bmatrix}$。这里有一个地方要解释，就

是第二基向量为什么选择左上方，而不是右下方。因为要看此变换把原有笛卡尔坐标的y向基准向量改向何方，而不是看把现在的图形变向何方。看A2中的0.7为何没有负号就清楚了！

如果图形的数据矩阵为G，其投影数据矩阵为Gf，则有Gf=A3*A2*A1*G。取例5.2中的空心N字母图形数据，编成程序pla561。

字母阴影投影的生成(续)

程序pla561核心语句为：

A1=[1,0;0,-1],% 反射变换矩阵赋值

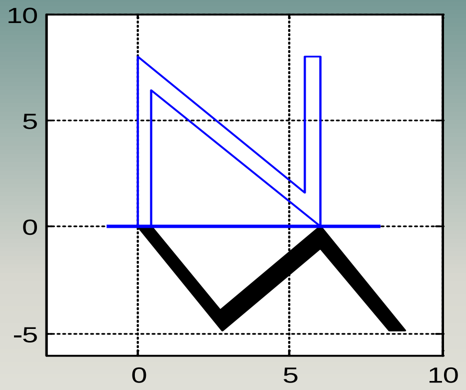
A2=[1,0;0,0.7],% 压缩变换矩阵赋值

A3=[1,-0.5;0,0.866]% 偏移变换矩阵赋值

Gf=A3*A2*A1*G % 总的变换矩阵

程序运行产生的图形见右，

计算出的总的变换矩阵为



$$\mathbf{A} = \mathbf{A3} * \mathbf{A2} * \mathbf{A1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.350 \\ 0 & -0.6062 \end{bmatrix}$$

下一讲　应用实例5.6.3

例5.6.3 人口迁徙模型

• 设在一个大城市中的总人口是固定的。人口的分布则因居民在市区和郊区之间迁徙而变化。每年有6%的市区居民搬到郊区去住，而有2%的郊区居民搬到市区。假如开始时有30%的居民住在市区，70%的居民住在郊区，问十年后市区和郊区的人口比例是多少？30年、50年后又如何？

解：这个问题可以用矩阵乘法来描述。把人口变量用市区和郊区两个分量表示，即其中xc为市区人口所占比例，xs为郊区人口所占比例，k表示年份的次序。在k=0的初始状态，用矩阵乘法来描述为：

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} x_{c0} \\ x_{s0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$，一年以后，可写成：

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94 & 0.02 \\ 0.06 & 0.98 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix} = \mathbf{Ax_0} = \begin{bmatrix} 0.2960 \\ 0.7040 \end{bmatrix}$$

人口迁徙模型（续）

此关系可以从初始时间到k年，扩展为

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} = A^2\mathbf{x}_{k-2} = \cdots = A^k\mathbf{x}_0$$

可用程序pla563进行计算：

A=[0.94,0.02;0.06,0.98],x0=[0.3;0.7]

x1=A*x0,x10=A^10*x0,x30=A^30*x0,x50=A^50*x0

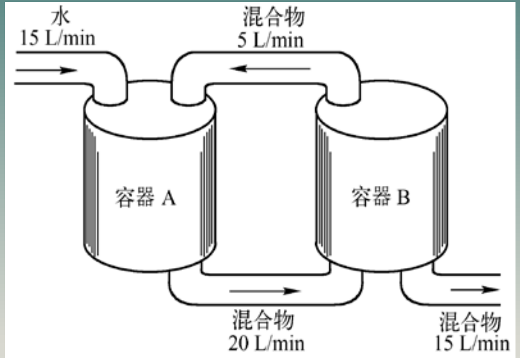
程序运行的结果为：

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.2960 \\ 0.7040 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0.2717 \\ 0.7283 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{30} = \begin{bmatrix} 0.2541 \\ 0.7459 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{50} = \begin{bmatrix} 0.2508 \\ 0.7492 \end{bmatrix},$$

无限增加k，市区郊区人口比将趋向常数 0.25/0.75。

例5. 6. 4　物料混合问题

如图所示，容器A中有200 L的盐水，其中溶解了60 g盐，容器B中则只有200 L的水，两容器中不断泵入和泵出的液体流量如图中所示，试求在时刻*t*两容器中所含的盐。



解：设$y_1(t)$和 $y_2(t)$为容器A和B所含的盐，用向量表示为：

$$\mathbf{Y(t)} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$，在初始时刻，$$\mathbf{Y(0)} = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因泵入和泵出的流量相等，每个容器中的液体数量保持不变，而盐分的变化率由泵入和泵出的盐量之差决定。

例5.6.4　物料混合问题(续)

对容器A，盐分泵入、泵出的速率差为

$$y_1'(t)=\frac{y_2}{200}\times 5-\frac{y_1}{200}\times 20=\frac{y_2(t)}{40}-\frac{y_1(t)}{10}$$

对容器B，盐分泵入、泵出的速率差为

$$y_2'(t)=\frac{y_1(t)}{200}\times 20-\frac{y_2(t)}{200}\times 20=\frac{y_1(t)}{10}-\frac{y_2(t)}{10}$$

合成的矩阵微分方程为:

$$\mathbf{Y}'=\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1/10 & 1/40 \\ 1/10 & -1/10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\boldsymbol{AY}$$

初始条件为$\mathbf{Y}(0)=\mathbf{Y}_0=[60,0]^T$,此一阶微分方程的解为:

$$\boldsymbol{Y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\mathrm{e}^{At}\cdot\boldsymbol{Y}_0$$

例5.6.4 物料混合问题(续)

exp(At)的计算公式需要把A对角化才能导出，输入A并键入[p,lamda]=eig(A) 后，得到

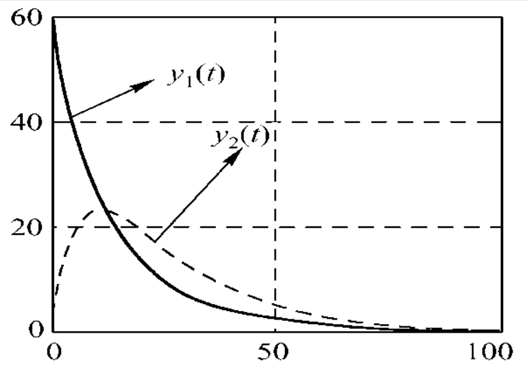
$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.4472 & -0.4472\\ 0.8944 & 0.8944\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\text{lamda}=\begin{bmatrix}-0.05 & 0\\ 0 & -0.15\end{bmatrix}$$

于是解成为：

$$\mathbf{Y}(t)=\exp(\mathbf{A}t)Y_0=\mathbf{P}\exp(\mathbf{\Lambda}t)\mathbf{P}^{-1}Y_0=\mathbf{P}\exp\left(\begin{bmatrix}\lambda_1 t & 0\\ 0 & \lambda_2 t\end{bmatrix}\right)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}_0=\mathbf{P}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}_0$$

将此题的参数代入式中，得到

$$\boldsymbol{Y}(t)=\begin{bmatrix}30\mathrm{e}^{-0.05t}+30\mathrm{e}^{-0.15t}\\ 60\mathrm{e}^{-0.05t}-60\mathrm{e}^{-0.15t}\end{bmatrix}$$

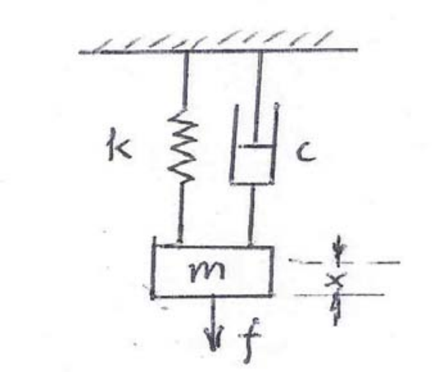


绘出的图形见右。

下一讲　应用实例5.6.5

例5. 6. 5　单自由度机械振动

右图表示了由一个质量、一个弹簧和一个阻尼器构成的单自由度振动系统，试求在给定初始位置和初始速度下质量的自由运动。



解：设x表示该质量对其平衡位置的偏移，则此单自由度振动系统的一般方程为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=f$$

其中m为质量，c为阻尼系数，k为弹簧系数，f为外加力。这是一个二阶的微分方程，数学上为了使模型更为简洁和归一化，通常把把它改写成一阶的微分方程组，然后用矩阵建立其模型，并用矩阵方法求解。

单自由度机械振动（续）

令 $x_1 = x,\ 及\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_2$

则微分方程(5.6.7)可以化成两个联立一阶微分方程：

$$m\frac{dx_2}{dt} + cx_2 + kx_1 = f \ \Rightarrow \ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{f}{m}$$

写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{f}{m} \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$$

其解为 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \exp(\mathbf{A}t)$，其中 $\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

单自由度机械振动（续）

不妨代入一些数字来得出感性的认识。设**m=1, k=4, c=0.1, x20=1, x10=0, f=0**，

则解为 $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -0.1 \end{bmatrix} t \right)$$

可用程序**pla564**直接计算并绘图，注意**(5.6.13)**式中的**exp**是矩阵的指数，在**MATLAB**中要调用**expm**函数，不是对标量的**exp**函数。

```
A=[0,1;-4,-0.1], X0=[1;0]
for k=0:1000  t(k+1)=0.1*k;
x([1,2],k+1)=x0'*expm(A*t(k+1)); end
plot(t,x(1,:))
```

画出的图形见图**5-19**，它是一个衰减振动。

单自由度机械振动（续）

为了看出振荡波形的来源，分步计算其特征根和特征向量：键入[p,L]=eig(A)，得到其特征值和特征向量都是复数，特征根为：

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0.0500 + 1.9994i & 0 \\ 0 & -0.0500 - 1.9994i \end{bmatrix}$$

特征根的虚部就是振动频率，其实部则为衰减系数。波形为：

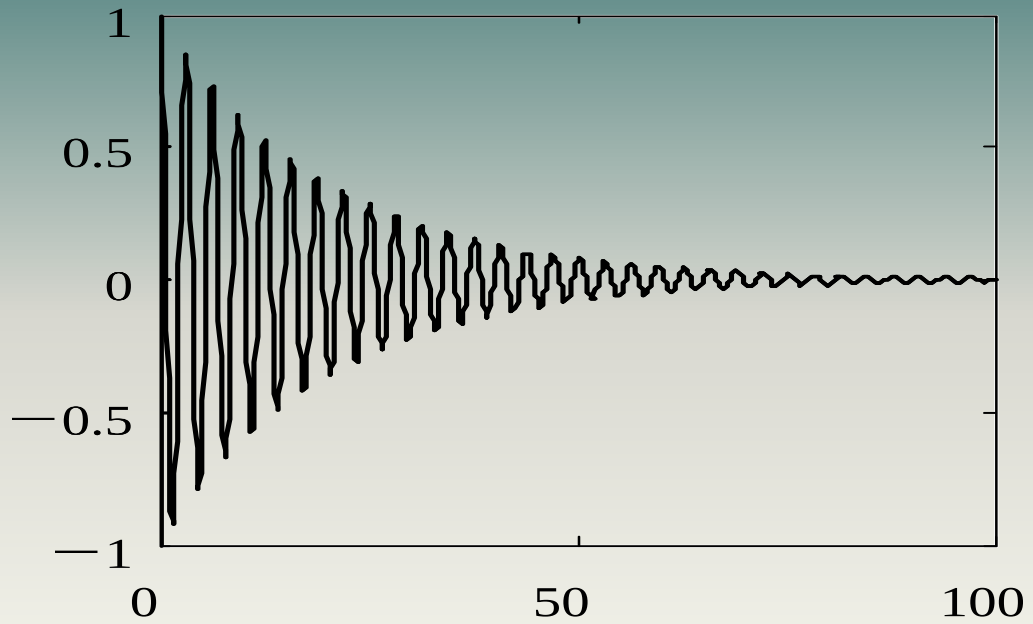
$$\exp(\alpha t + j\omega t) = e^{\alpha t}\left(\sin \omega t + j\cos \omega t\right)$$

如按下式计算

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \mathbf{P} * \exp\left(\begin{bmatrix} -0.0500 + 1.9994i & 0 \\ 0 & -0.0500 - 1.9994i \end{bmatrix} t\right) * \mathbf{P}^{-1}$$

整个输出中虚部的正负值会互相抵消，得出的实数解与图相同。也可以看出，工程中只要涉及振动，特征根就必定是复数，只研究实数特征值的矩阵就太局限了。

初始条件下自由振动波形



第五章要求掌握的概念和计算

- **1. y=Ax**表示向量空间**x**中的向量组成的图形经线性变换**A**变换为向量空间**y**中的图形。
- **2. eigshow(A)**可显示二维向量**x**沿单位圆转动时经过**A**左乘后**y=Ax**在**y**平面上的形状。当**x-y**共线时，有**y=Ax=λx**，此时的**λ**称为特征值，**x**称为特征向量，**(λI-A)x=0**，**det(λI-A)=0**称为特征方程。
- **3.** 线性变换**y=Ax** 也表示一个坐标变换，**A**的各列为**y**坐标的基向量；归一化处理后，它们就是**x**坐标系与**y**坐标系之间夹角的方向余弦。用这关系可进行正反坐标变换。
- **4. A=QR**代表一个特定的坐标变换，其新坐标是固连在数据向量组**A**上的正交坐标；

第五章要求掌握的概念和计算

- 5. 若有正交矩阵Q，对角矩阵Λ，使；称作把A对角化，对角化后矩阵乘幂和指数计算比较简单。通常Λ就是特征值矩阵，Q就是特征向量矩阵。
- 6. 解特征方程可用eig函数或poly,roots,null函数的组合。所有的对称矩阵都可以对角化，对称矩阵具有实特征值和正交的特征向量；
- 7. 复特征值和特征向量可描述振动问题，有重要的工程应用价值。所以非对称矩阵特征值也很重要。
- 8. MATLAB实践：正反坐标变换矩阵用法，qr函数的用法，二阶特征值和特征向量一次和分步求法。
- 9. MATLAB函数： eigshow, qr, eig, poly, roots, null,real, expm, exp,

下一讲　第五章习题

第5章计算题

5.1. 什么样的2*2矩阵 R 能把所有向量旋转45度？使向量(1,0)变成(0.707,0.707)，向量(0,1)变成(-0.707,0.707)。并画出其图形。

5.2. 将行向量A=[1,4,5]与列向量X=[x,y,z] T的数量积写成矩阵乘法AX。A只有一行， AX=0的解X具有什么形状？它与向量 (1,4,5)具有何种几何关系？

5.3. 设矩阵Q将向量(1,0)和(0,1)转动θ角，原坐标中的(1,0)点在转动了的新坐标中的坐标(a,b)是多少？，请画图说明。

5.4．按照制图国标，斜体数字和英文字母的倾斜角度应约为75度，问

（a）A应如何选择，才能保证其水平基线及高度不变，而垂直基线倾斜成75度？

（b）用数字7的空心字为例，说明其正体字的数据集如何建立，又如何用于生成斜体字。用图形加以说明。

5.5．在例5.3中，若要使三角形先上移3和右移2，再旋转30度，则其变换矩阵A应具有何种形式？写出程序使之给出变换后的图形，该图形用黄色表示，叠加再原图上，以便比较。

第5章计算题(续2)

5.6. 设 $Q = c\begin{bmatrix} 1, -1, -1, -1 \\ -1, \ 1, -1, -1 \\ -1, -1, \ 1, -1 \\ -1, -1, -1, \ 1 \end{bmatrix}$ ，选择c使得Q成为一个规范正交矩阵。

5.7. 求将列向量(1,0)及(0,1)转换为(1,4)及(1,5)的矩阵M，使线性组合 $a\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的a和b各为多少？这些新坐标如何与M及M^{-1}联系起来？

5.8. 试证明两次转动变换的矩阵乘积等于将两个转动角相加后做一次转动的变换矩阵相等。

提示：转动β角对应的变换矩阵为 $\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

5.9. 将下列矩阵对角化，列出其正交矩阵P和对角矩阵D。

第5章计算题(续2)

$$(a)\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad ,(b)\begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

5.10. 用poly及roots函数求它们的特征方程和特征值，用null([A-λiI],’r’)函数求对应于λi的特征向量。

$$(a)\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (b)\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (c)\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5.11. 用eig(A)函数求上题的特征值与特征向量，与上题的结果进行对比。

5.12. 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **，写出用特征值和特征向量求的表达式及MATLAB程序。**

第5章计算题(续3)

5.13． 计算下列指数矩阵

(a)， $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ **(b)**， $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ **(c)** $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$

5.14． 用正交变换将下列二次型变换为标准形。

(a) $4x_1^2+4x_2^2+3x_1x_2$ **(b)** $11x_1^2-x_2^2-12x_1x_2$

5.15. 求以下马尔科夫矩阵的特征值和特征向量（稳态值）。

$(a)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.15\\ 0.1 & 0.85\end{bmatrix},\ (b)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0.15\\ 0 & 0.85\end{bmatrix},\ (c)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.2 & 1\\ 0.8 & 0\end{bmatrix},$

5.16　设三坐标测量仪测出工件上的六点坐标，问这六点是否大体在一个平面上？此平面的方程是什么？各点离此平面的误差有多大？

	点a	点b	点c	点d	点e	点f
x	1.01	0.80	2.82	0.81	3.04	2.43
y	2.16	0.78	-1.36	0.67	3.58	-1.30
z	2.47	2.40	3.55	2.41	3.50	3.34