7.4 图的连通性问题

7.4.1 无向图的连通分量和生成树

7.4.3 最小生成树

7.4.1 无向图的连通分量和生成树

```
void DFSForest( Graph G,  CSTree &T ) {
   //建立无向图G的深度优先生成森林的(最左)孩子(右)兄弟链表T
   T=NULL;
   for ( v=0; v<G.vexnum; ++v )
       visited[v]=FALSE;
   for ( v=0; v<G.vexnum; ++v )
      if (!visited[v]){                        //第v顶点为新的生成树的根结点
         p=(CSTree) malloc (sizeof ( CSNode ));      //分配根结点
         *p={GetVex(G,v), NULL, NULL};             //给该结点赋值
         if ( !T )   T = p;          //是第一棵生成树的根(T的根)
         else q->nextsibling=p; //是其他生成树的根(前一棵的根的“兄弟”
         q=p;                                        //q指示当前生成树的根
         DFSForest(G, v, p);                       //建立以p为根的生成树
       }
}// DFSForest
```

算法 7.7

```
void DFSTree( Graph G,  CSTree &T ) {
    //从第v个顶点出发深度优先遍历图G，建立以T为根的生成树。
    visited[v]=TRUE        ;  first=TRUE;
    for ( w=FisrtAdjVex(G,v); w>=0; w=NextAdjVex(G,v,w) )
        if (!visited[w]){
          p=(CSTree) malloc (sizeof ( CSNode ));      //分配孩子结点
             *p={GetVex(G,w), NULL, NULL};
          if ( first)  {                    //w是v的第一个未被访问的邻接顶点
              T->lchild=p;  first=FALSE;          //是根的左孩子结点
             }//if
          else{                                //w是v的其他未被访问的邻接顶点
                 q->nextsibling=p;      //是上一邻接顶点的有兄弟结点
             }//else
             q=p;
             DFSTree(G, w, q);
           //从第w个顶点出发深度优先遍历图G，建立子生成树q
        }//if
}// DFSTree
```

算法 7.8

7.4.3 最小生成树

问题：

假设要在 n 个城市之间建立通讯联络网，则连通 n 个城市只需要修建 n-1条线路，**如何在最节省经费的前提下建立**这个**通讯网**？

该问题等价于：

构造网的一棵最小生成树，即：在 e 条带权的边中选取 n-1 条边（不构成回路），使“**权值之和**”为最小。

算法一：（普里姆算法prim）

算法二：（克鲁斯卡尔算法kruskal）

算法利用了最小生成树的下列一种简称为MST的性质：假设N=（V，｛E｝）是一个连通网，U是顶点集V的一个非空集合。若(u,v)是一条具有最小权值（代价）的边，其中u∈ U，v∈V-U，则必存在一棵包含边（u,v）的最小生成树。

可用反证法证明：假设网N任何一棵最小生成树都不含(u,v)。设T是一棵最小生成树，当将边(u,v)加入到T中时，由生成树定义，T中必存在一条包含(u,v)的回路。另一方面，T是生成树，T中必存在另一条边(u',v')，其中u'∈ U，v'∈V-U，且u和u'之间，v和v'之间均有路径相通，删去边(u',v')，便可消除回路，同时得到另一棵生成树T'。因为（u,v）的代价不高于(u',v')，则T'的代价亦不高于T，T'是包含(u,v)的一棵最小生成树。由此和假设矛盾。

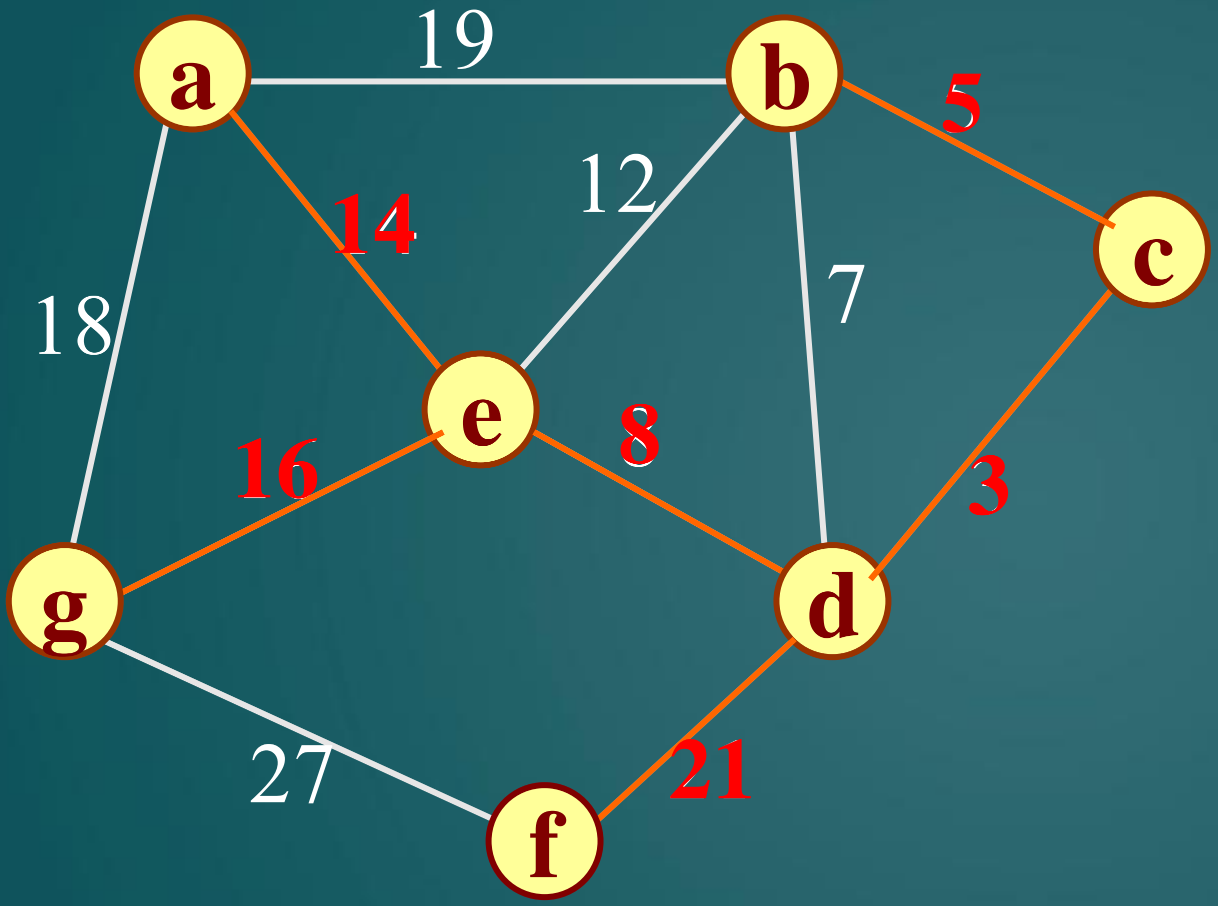
普里姆算法的基本思想:

取图中任意一个顶点 v 作为生成树的根，之后往生成树上添加新的顶点 w。**在添加的顶点 w 和已经在生成树上的顶点v 之间必定存在一条边，并且该边的权值在所有连通顶点 v 和 w 之间的边中取值最小。**之后继续往生成树上添加顶点，直至生成树上含有 n-1 条边为止。

普里姆算法:

假设N=（V，{E}）是连通网，TE是N上最小生成树中边的集合。算法从U={u_0}(u_0∈V,TE= ={}开始，重复执行下述操作：在所有u∈U, v∈V-U的边(u,v)∈E中找一条代价最小的边（u_0，v_0）并入集合，同时v_0并入U，直至U=V为止。此时TE中必有n-1条边，则T=（V，{TE}）为N的最小生成树。

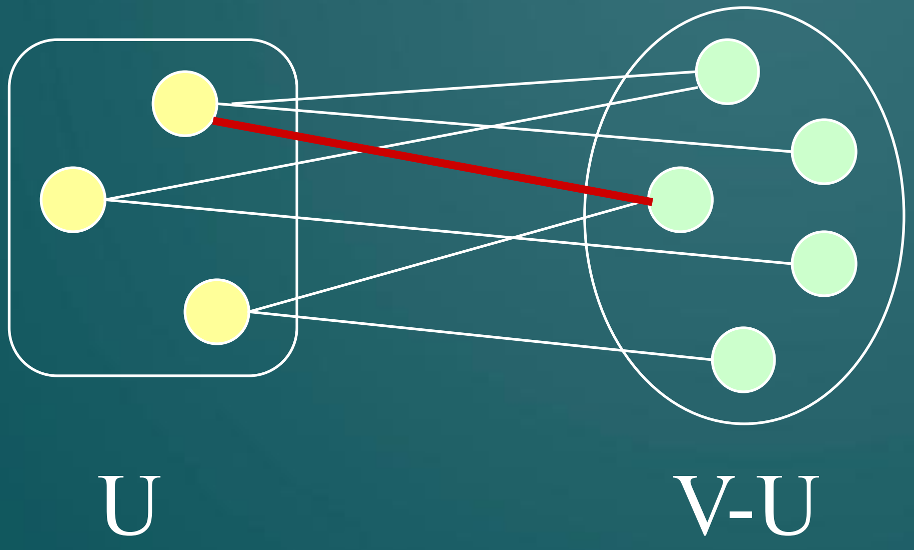
例如:



所得生成树权值和 = 14+8+3+5+16+21 = 67

一般情况下所添加的顶点应满足下列条件:

在生成树的构造过程中，图中 n 个顶点分属两个集合：已落在生成树上的顶点集 **U** 和尚未落在生成树上的顶点集**V-U**，则应**在所有连通U中顶点和V-U中顶点的边中选取权值最小的边。**



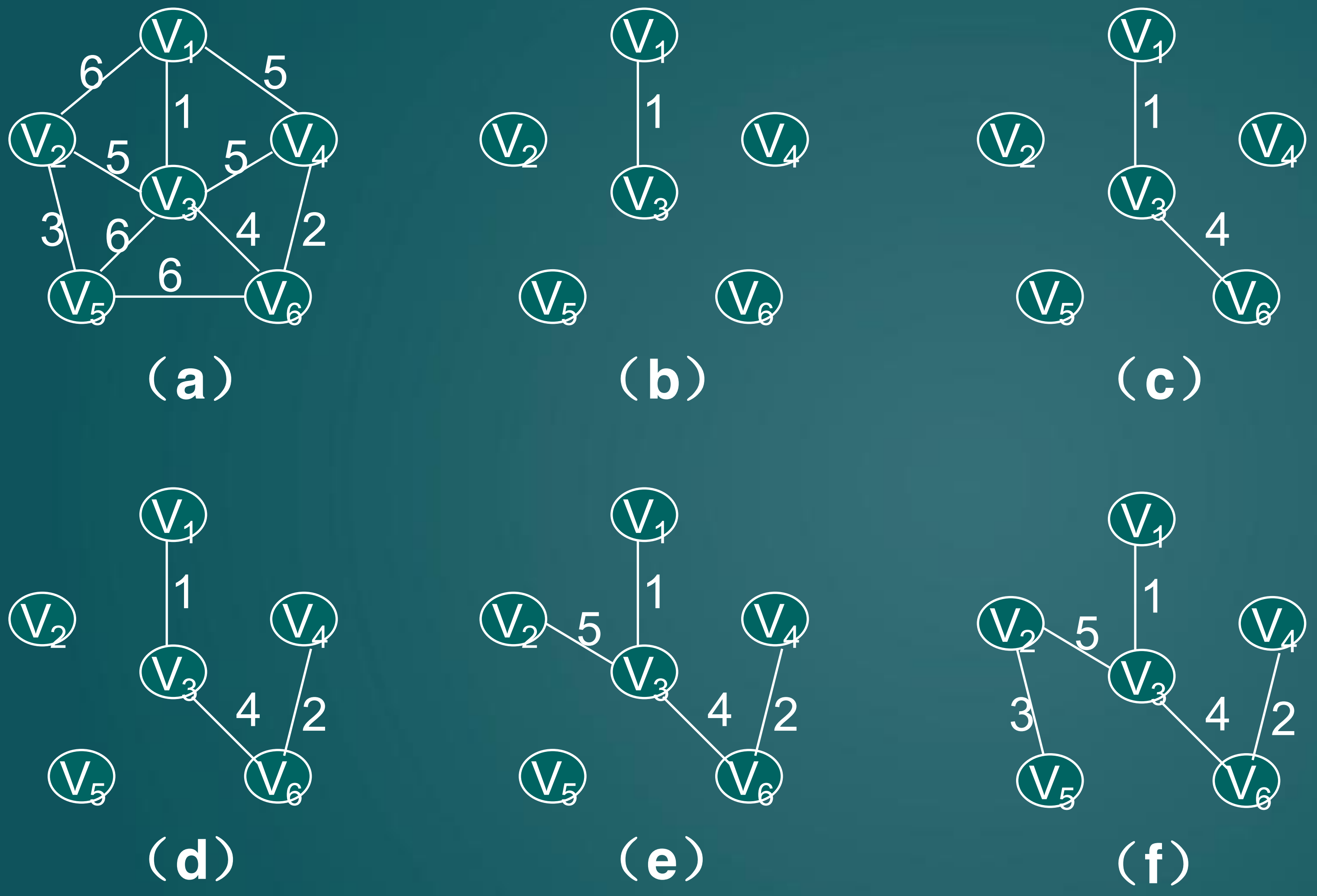


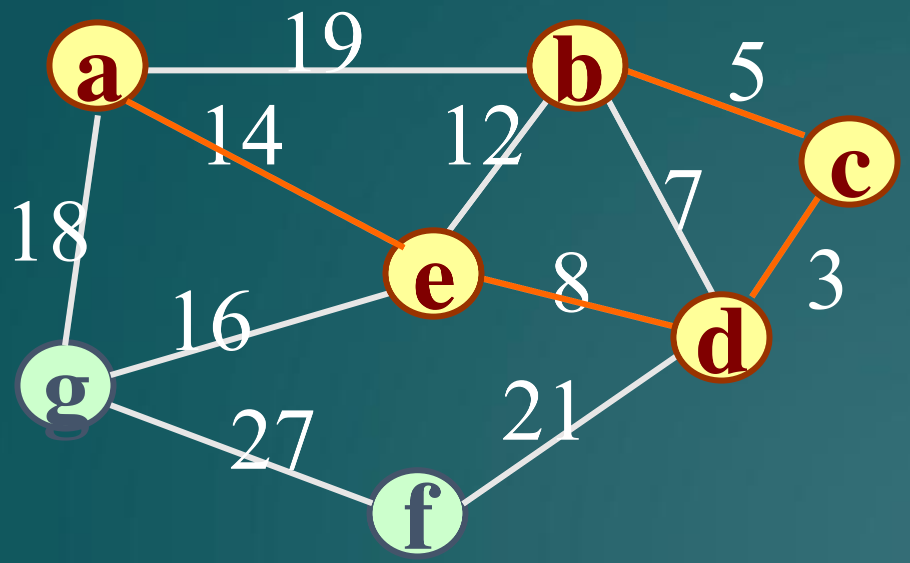
图7.16 普里姆算法构造最小生成树的过程

　　设置一个辅助数组closedge，对当前V - U集中的每个顶点，记录和顶点集U中顶点相连接的代价最小的边。对每个顶点$v_i \in V-U$，在辅助数组中存在一个相应分量closedge[i-1]，它包括两个域，其中lowcost存储该边上的权。显然：

$$closedge[i-1].lowcost=Min\{cost(u,v)|u \in U\}$$

```
struct {
    VertexType  adjvex;  // U集中的顶点序号
    VRType      lowcost;  // 边的权值
} closedge[MAX_VERTEX_NUM];
```

例如:



closedge	0 a	1 b	2 c	3 d	4 e	5 f	6 g
Adjvex		c	d	e	a	d	e
Lowcost		5	3	8	14	21	16

```
void MiniSpanTree_P(MGraph G, VertexType u) {
 //用普里姆算法从顶点u出发构造网G的最小生成树
  k = LocateVex ( G, u );
  for ( j=0; j<G.vexnum; ++j )  // 辅助数组初始化
     if (j!=k)
        closedge[j] = { u, G.arcs[k][j].adj };
  closedge[k].lowcost = 0;      // 初始，U = {u}
  for (i=0; i<G.vexnum; ++i) {
       ...
}
```

算法 7.9

```
k = minimum(closedge);
                // 求出加入生成树的下一个顶点(k)
printf(closedge[k].adjvex, G.vexs[k]);
                 // 输出生成树上一条边
closedge[k].lowcost = 0;    // 第k顶点并入U集
for (j=0; j<G.vexnum; ++j)
      //修改其它顶点的最小边
  if (G.arcs[k][j].adj < closedge[j].lowcost)
    closedge[j] = { G.vexs[k], G.arcs[k][j].adj };
```

克鲁斯卡尔算法的基本思想：

- **考虑问题的出发点:** 为使生成树上边的权值之和达到最小，则应使生成树中每一条边的权值尽可能的小。

- **具体做法:** 先构造一个只含 n 个顶点的子图 SG，然后从权值最小的边开始，若它的添加不使SG 中产生回路，则在 SG 上加上这条边，如此重复，直至加上 n-1 条边为止。

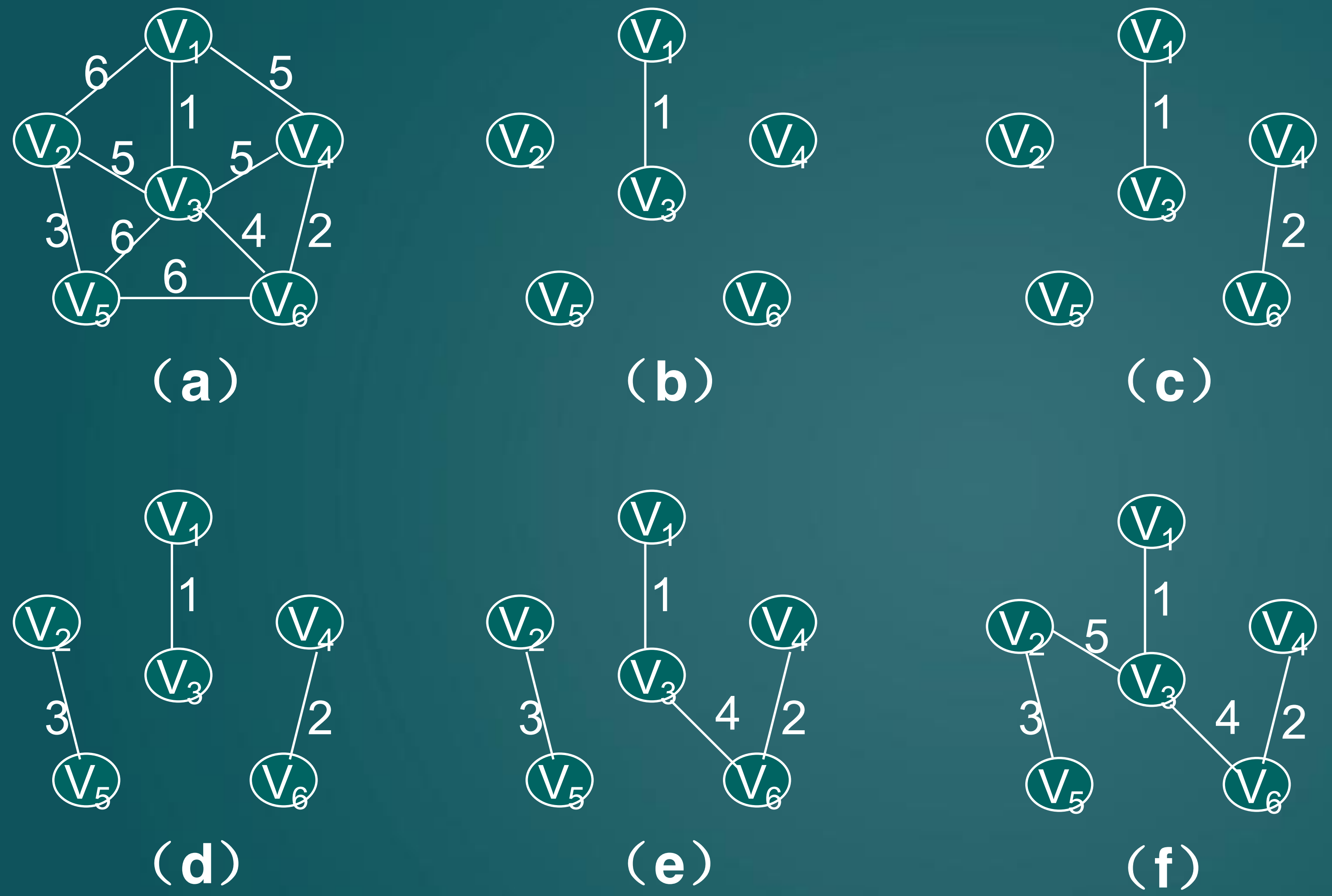
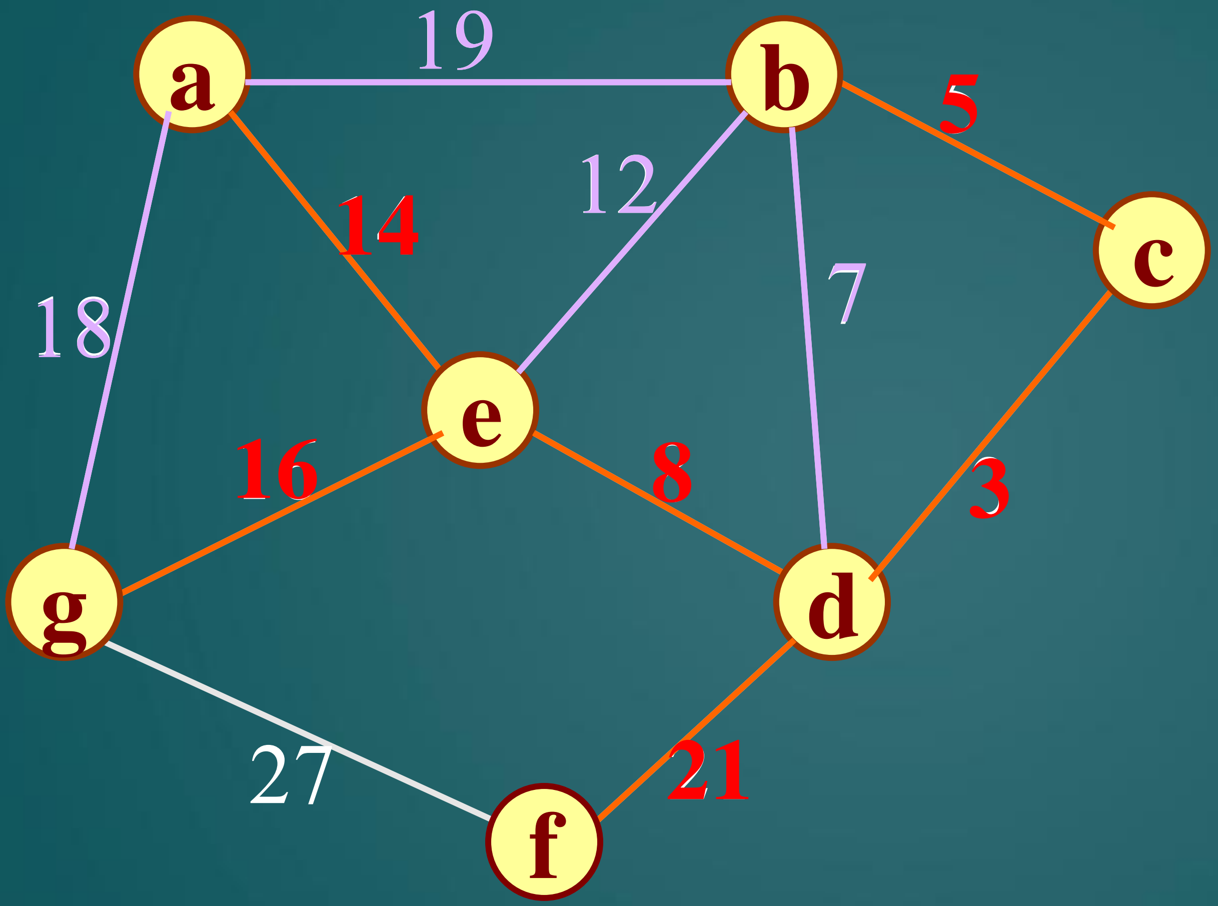


图7.18 克鲁斯卡尔算法构造最小生成树的过程

例如:



算法描述:

构造非连通图 ST=(V,{ });

k = i = 0;   // k 计选中的边数

while (k<n-1) **{**

++i;

检查边集 E 中**第 i 条权值最小的边**(u,v)； **若(u,v)加入ST后不使ST中产生回路，**

则 输出边(u,v); 且 k++;

}

比较两种算法

算法名	普里姆算法	克鲁斯卡尔算法
时间复杂度	$O(n^2)$	O(eloge)
适应范围	稠密图	稀疏图