慕课第四章复习要求及习题

4.7.1　第四章要求掌握的概念和计算

(1) 掌握二、三维向量线性组合和向量空间的定义，为什么要求其各基向量必须线性无关？

(2) 向量点乘、叉乘的定义，与平面向量四边形的面积、三维向量六面体的体积有何关系？

(3) 行列式为什么能表示体积？与向量组线性无关有何关系？

(4) 掌握向量的归一化及两向量夹角计算公式 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{v}\|\cdot\|\boldsymbol{w}\|\cos\theta$ 来源及意义。当 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=0$ 时，$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 正交。

(5) 如何用 rref 函数判断多个向量组合的线性相关或线性无关？如何判断多个向量之间的正交性？

(6) 从向量线性组合的角度，看待线性方程组的几何意义，分别就适定、欠定或超定进行讨论。超定方程中点与平面的最小距离为何等价于最小二乘误差？

(7) 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解写成 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{b}$，可适用于适定、欠定或超定吗？三种情况如何判别？它的实际计算内容有些什么不同？

(8) MATLAB 实践：四个以上三维向量的相关性分析，欠定方程组通解的 MATLAB 求法，超定方程组的解法。

(9) MATLAB 函数：rank、norm、null、zeros、pinv、drawvec、dot、cross。

4.7.2　计算题

4.1　用空间笛卡尔坐标概念，找出两个最简单的单位向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，它们与向量 $a(1,0,1)$垂直并相互正交。

4.2　问向量[1, 1, 1]是否处在向量[1, 3, 4], [4, 0, 1]和[3, 1, 2] 所张成的子空间中？

4.3　是非题(若为“是”，给出理由，若为非，给出反例)：

(a) 设三维向量 $\boldsymbol{u}$ 垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 平行；

(b) 设三维向量 $\boldsymbol{u}$ 垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$，则 $\boldsymbol{u}$ 垂直于 $\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}$；

(c) 设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 为相互正交的单位向量，则 $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|=\sqrt{2}$ 。

4.4　求顶点为 $A(1,2,2)$、$B(3,1,4)$、$C(5,2,1)$的三角形的面积。(提示：用叉乘命令 cross)

4.5　已知两个在三维空间中的平面 $x-2y+z=0$ 和 $-x+2y+z=0$，试画出此两平面的立体图形并显示它们的交线。

4.6　解下列方程组，并用 ezplot 函数画出各个方程所对应的直线及交点。

(a) $\begin{cases}x+3y=5\\3x-y=2\end{cases}$；(b) $\begin{cases}x+y=2\\3x+3y=6\end{cases}$；(c) $\begin{cases}x+y=2\\3x+3y=5\end{cases}$。

4.7　解下列方程组，并用 ezmesh 函数画出各个方程所对应的平面、交线及交点。

(a) $\begin{cases}x+3y-2z=5\\3x-y+z=2\\2x+y-3z=-3\end{cases}$；(b) $\begin{cases}x+3y-2z=5\\3x-y+z=2\\2x+6y-4z=3\end{cases}$。

4.8　设五个三维向量 $M=\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_5\right]=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1 & -3 & -2\\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3\\ 7 & 2 & 5 & -4 & -3\end{bmatrix}$，判断哪几个向量组成线性无关组。

4.9　求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left[4,5,6\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left[1,3,1\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\left[3,4,3\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\left[1,1,2\right]^{\mathrm{T}}$ 所生的向量空间的一组基，确定这四个向量的线性相关关系式。

4.10　设 $\mathbf{H}$ 为由 $\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix}5\\3\\8\end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2}=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$, 所张成的向量空间，现有一个向量 $b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, 问 b 的三个分量应该满足什么条件才能保证 b 在 H 空间中？

4.11　求 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left[1,-1,2,4\right]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\left[0,3,1,2\right]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\left[3,0,7,14\right]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\left[1,-1,2,0\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\left[2,1,5,0\right]^{\mathrm{T}}$ 的线性无关组，并将其余向量用这组基向量表示。

4.12　求出通过平面上三点(0,4),(1,2),(2,5)的二次多项式 ax^2+bx+c，并画出其图形。若要求它通过点(3,9)，可以做到吗？要使四个线性方程误差的均方根最小，二次多项式应具有何种形式？

4.13　设三维空间内的点(x,y,z)是空间向量(2,3,1)和(1,2,3)的线性组合，试问所有满足条件的 x、y、z 取何形状？其方程是什么？

4.14　已知 x,y 平面上四点(0,0),(1,8),(3,8),(4,20)，求直线 b=Dx，使得在 x=[0,1,3,4]四处误差(y-b)的均方值为最小，并画出直线图和各误差 e。

4.15　求：(a) 一个平面 $C+Dx+Ey=z$，它在四个角(1,0),(0,1),(−1,0),(0,−1)上能最佳拟合 4 个值 b=(0,1,3,4)；

(b) 四个误差及其均方值，并证明在方形中心的原点上，z 是四个 b 的平均值。

4.16　已知健康孩子的心脏收缩血压 p(毫米汞柱)与他的体重 w(斤)之间的近似关系为 $\beta_0+\beta_1\ln w=p$。现有的统计结果如表 4-5 所示。

表 4-5　例 4.16 的数据表

w	20	30	40	50	60
ln$w$	3.00	3.40	3.69	3.91	4.09
p	91	99	105	110	112

(a) 根据以上统计数据来确定 β_0、β_1 的值。

(b) 对于体重为 45(斤)的孩子，其收缩压的标准值应为多少？

4.17　设某经济体有三个部门：化工、动力和机械制造。化工部门把它产出的 30%卖给动力部门，50%卖给机械部门，其余自己留用。动力部门把它产出的 80%卖给化工部门，10%卖给机械部门，其余自己留用。机械部门把它产出的 40%卖给动力部门，40%卖给化工部门，其余自己留用。

(a) 列出此经济体的交换表；

(b) 求出此经济体的平衡价格。

4.18 求最小二乘直线 y=β₀+ x, 来拟合数据，并求均方误差

a. (−2, 0), (−1, 0), (0, 2), (1, 4) 和 (2, 4)

b.　(2, 3), (3, 2), (5, 1) 和 (6, 0)

4.19 一个实验产生的数据为 (1, 1.8), (2, 2.7), (3，3.4), (4，3.8) 和 (5，3.9)，描述用下列函数形式

生成的最小二乘拟合模型：　$y = \beta_1 x + \beta_2 x^2$

a. 给出这模型的设计矩阵，观察向量，和未知参数向量，

b. 找出数据对应的最小二乘曲线。

4.20 某一个实验得到的数据为 (1,7.4)，(2,5.9)，(3,-0.9)，描述有下列形式的函数来拟合这些数据产生的最小二乘模型。

$$y = a\cos x + b\sin x$$

4.21 为测量飞机起飞表演，飞机的水平位置从 t=0.2 到 t=12 每秒测量一次，具体位置是 0, 8.8, 29.9, 62.0, 104.7,160, 222.0, 294.5, 380.4, 471.1, 571.7, 686.8, 809.2。

a, 求这些数据的最小二乘立方曲线 $y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$

b, 利用（a）的结果，估计当 t 等于 4.5 秒时飞机的水平速度，

4.22 若放射性物质 A 和 B 分别具有衰变常数 0.02 和 0.07，如果一种含这两种物质的混合物，在时刻 t=0 时，包含有 A 物质 M_A 克和 B 物质 M_B 克，那么在时刻 t，混合物的总量模型是：

$$y = M_A e^{-0.02t} + M_B e^{-0.07t}$$

若初始含量 M_A 和 M_B 未知，但在几个时刻记录的(ti,yi)数据为：(10,21.34),(11,20.68),(12,20.05), (14,18.87) 和(15,18.30)，试给出能估计 M_A 和 M_B 的线性模型。并找出基于此方程的最小二乘曲线。

4.23 已知文革后高校历年录取人数如右表，分别用二次及三次多项式模型：

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$
$$y = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

拟合此数据，比较其拟合误差。

年份 t	录取人数 y（万）
1977	27
1980	40.2
1990	60.9
2000	221
2008	607.7