慕课第三章复习要求及习题

3.6.1　本章要求掌握的概念和计算

(1) 二阶三阶方阵行列式的来源和表达式的几何意义。

(2) 高阶行列式的主元连乘法定义及好处，和消元法及 LU 分解的关系。

(3) 非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解存在是唯一的必要条件是 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的条件是 $\det(\boldsymbol{A})=0$。

(4) 行列式的主要性质及其利用上三角阵特性的证明，特别是如何快速判断行列式为零。

(5) 知道行列式计算的原理，会用软件工具计算行列式。

(6) 知道行列式的三个用途，判解、求面积(体积)、解特征方程。

(7) MATLAB 实践：符号矩阵的行阶梯和主元连乘求行列式，面积计算子程序，特征根计算。

(8) MATLAB 函数：det、lu、ref1、diag、prod、syms、poly、roots、null。

3.6.2　计算题

3.1　用行阶梯形(或 LU 分解)方法求矩阵的行列式，并与用 det 函数求的结果比较：

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-6&-7&7&6\\3&4&2&3\\-4&-2&0&6\\1&7&8&3\end{bmatrix}$；(b) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&-5&7&-1\\7&7&-6&-8\\-6&5&-4&9\\9&-7&3&2\end{bmatrix}$；(c) $C=\begin{bmatrix}-6&-9&-2&6\\-6&5&7&-9\\2&-1&0&3\\-4&8&-6&-2\end{bmatrix}$。

3.2　用 det 函数计算行列式：

(a) $\begin{vmatrix}4&9&1\\1&4&0\\2&5&2\end{vmatrix}$；(b) $\begin{vmatrix}1&9&4\\3&1&7\\2&0&9\end{vmatrix}$；(c) $\begin{vmatrix}a&b&a+b\\b&a+b&a\\a+b&a&b\end{vmatrix}$；(d) $\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&b&0&0\\0&c&1&0\\0&d&0&1\end{vmatrix}$ 及 $\begin{vmatrix}1&0&a&0\\0&1&b&0\\0&0&c&0\\0&0&d&1\end{vmatrix}$。

3.3　用 randintr(n)函数随机生成两个四阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$。

(a) 验证等式 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{A})+\det(\boldsymbol{B})$ 是否成立。

(b) 验证等式 $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$ 是否成立。

(c) 验证等式 $\det(\boldsymbol{A}^{-1})=(\det(\boldsymbol{A}))^{-1}$ 是否成立。

3.4　根据方程组的系数行列式，判断其解是否存在，是否唯一。再用行阶梯形分解方法或其他方法进行验证。

(a) $\begin{cases}4x_1-x_2+x_3-x_4=2\\2x_1+3x_2+7x_3+x_4=4\\2x_1+2x_2+2x_3-x_4=0\\3x_1-x_2+2x_3=3\end{cases}$；(b) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3+x_4=8\\3x_1-2x_2+2x_3+4x_4=1\\3x_1+5x_2+6x_3=1\\-2x_1-x_2-5x_3+x_4=3\end{cases}$

3.5　利用行列式计算面积。

(a) 已知 $A(1,2)$, $B(3,3)$,$C(2,$□$1)$, 画出三角形 ABC 图形并求其面积。

(b) 已知 $A(0,0)$, $B(1,4)$, $C(5,3)$, $D(4,1)$, 画出四边形 $ABCD$ 图形并求其面积。

3.6　求一个顶点在原点，相邻顶点在(1,0,2),(1,2,4),(7,1,0)的平行六面体的体积。

3.7　由 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&1\\2&3\end{bmatrix}$ 求 A^2 和 A^{-1} 及 $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ 的行列式，λ 取哪两个数时会导致 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$。

3.8　(a) 求描述如图 3-7 所示的交通流图的方程组并求其解。

(b) 如果 x_4 的路段被封闭，求此方程组的解。

(c) 若 x_5=0，求此方程组的解。

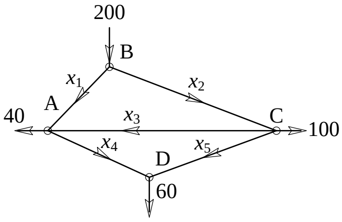


图 3-7　交通流图

3.9　求一个顶点在原点，相邻顶点在以下三点的平行六面体的体积。

$$(a)\ \begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\1\\0\end{bmatrix};\qquad (b)\ \begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-5\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix};$$

3.10　用克莱姆法则解下列方程组：

$$\text{(a)}\ \begin{cases}2x_1+2x_2-\ \ x_3+\ x_4=4\\4x_1+3x_2-\ x_3+2x_4=6\\8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12\\3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6\end{cases};\qquad \text{(b)}\ \begin{cases}2x_1+2x_2+11x_3+5x_4=2\\x_1+\ x_2+\ 5x_3+2x_4=1\\2x_1+\ x_2+\ 3x_3+2x_4=-3\\x_1+\ x_2+\ 3x_3+4x_4=-3\end{cases}。$$

3.11　用消元法把 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4&8\\4&3&9\\8&9&0\end{bmatrix}$ 简化成 $\boldsymbol{A=LU}$，求 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}$ 及 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}$ 的行列式。

3.12　设平面三角形的三个顶点坐标为 $z1=[x1,y1]$, $z2=[x2,y2]$, $z3=[x3,y3]$，试写出计算其面积的子程序。规定该子程序的程序头具有以下的基本格式：

function A=triarea(z1,z2,z3)

(注：下面三行是注释语句，在用 help triarea 命令时显示)

%　function A=triarea(z1,z2,z3)

% 根据三角形的三个顶点坐标 z1,z2,z3，计算其面积 A 的子程序

%　z1=[x1,y1],z2=[x2,y2],z3=[x3,y3]各为三个顶点的 1×2 坐标向量

(要写的程序段从此处开始)

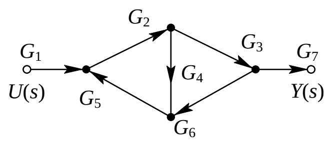
3.13　设某线性系统的信号流图如图 3-8 所示，输入信号为 u，输出信号为 y，请自行在四个中间节点上标注信号 x_1，x_2，x_3，x_4，然后

(a) 列出此系统的线性方程组。

(b) 将此线性方程组写成 $Ax=b$ 的标准矩阵形式。

(c) 用 ***x=A\B*** 求此方程，求出输出 y 与输入 u 之比，即系统传递函数。

(提示：要把 G_1，G_2，G_3，G_4，G_5，G_5，G_7 设为符号变量。)



题 3.13 图　某系统的信号流图

3.14 设矩阵方程为:

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&3\\2&7&-1\\5&6&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$，写成，求 $\mathbf{X}=\mathbf{A}*\mathbf{X}+\mathbf{B}$ $\quad\mathbf{X}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

3.15 用 3.14 题的 **A**、**B** 和求出的 **X**，求:

(a) E1=B-(eye(3)-A)*X

(b) E2= X-B/(eye(3)-A)

(c) E3= X- (eye(3)-A)\B

解释三个结果不同的原因。