慕课第五章复习要求及习题

5.7.1　第五章要求掌握的概念和计算

(1) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 表示向量空间 $\boldsymbol{x}$ 中的向量组成的图形经线性变换 $\boldsymbol{A}$ 变换为向量空间 $\boldsymbol{y}$ 中的图形。

(2) 线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 也表示一个坐标变换，$\boldsymbol{A}$ 的各列为 $\boldsymbol{y}$ 坐标的基向量；归一化处理后，它们就是 $\boldsymbol{x}$ 坐标系与 $\boldsymbol{y}$ 坐标系之间夹角的方向余弦。用这关系可进行正反坐标变换。

(3) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$ 代表一个特定的坐标变换，其新坐标是固连在数据向量组 $\boldsymbol{A}$ 上的正交坐标；

(4) eigshow(A)可显示二维向量 $\boldsymbol{x}$ 沿单位圆转动时经过 $\boldsymbol{A}$ 左乘后 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{y}$ 平面上的形状．当 $\boldsymbol{xy}$ 共线时，有 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，此时的 λ 称为特征值，x 称为特征向量，$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$，$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ 称为特征方程。

(5) 若有正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，则称其把 $\boldsymbol{A}$ 对角化，对角化后矩阵乘幂和指数计算比较简单。通常 $\boldsymbol{\Lambda}$ 就是特征值矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 就是特征向量矩阵。

(6) 解特征方程可用 eig 函数或 poly,roots,null 函数的组合。所有的对称矩阵都可以对角化，对称矩阵具有实特征值和正交的特征向量。

(7) 复特征值和特征向量可描述振动问题，有重要的工程应用价值。

(8) MATLAB 实践：正反坐标变换矩阵用法，qr 函数的用法，二阶特征值和特征向量一次求法。

(9) MATLAB 函数：eigshow、qr、eig、poly、roots、null、real、expm、exp。

5.7.2　计算题

5.1　什么样的 2×2 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 能把所有向量旋转 45 度？从而使向量(1,0)变成(0.707,0.707)，向量(0,1)变成(−0.707,0.707)。并画出上述过程的图形。

5.2　将行向量 $\boldsymbol{A}=[1,4,5]$与列向量 $\boldsymbol{X}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}$ 的数量积写成矩阵乘法 $\boldsymbol{AX}$。$\boldsymbol{A}$ 只有一行，$\boldsymbol{AX}=0$ 的解 $\boldsymbol{X}$ 具有什么形状？它与向量 (1,4,5)具有何种几何关系？

5.3　设矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 将向量(1,0)和(0,1)转动 $\boldsymbol{\theta}$ 角，原坐标中的(1,0)点在转动了的新坐标中的坐标$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是多少？，请画图说明。

5.4　按照制图国标，斜体数字和英文字母的倾斜角度应约为 75 度，问：

(a) $\boldsymbol{A}$ 应如何选择，才能保证其水平基线及高度不变，而垂直基线倾斜成 75 度？

(b) 以数字 7 的空心字为例，说明其正体字的数据集如何建立，又如何用于生成斜体字。用图形加以说明。

5.5　在例 5.3 中，若要使三角形先上移 3 和右移 2，再旋转 30 度，则其变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 应具有何种形式？编写程序显示出变换后的图形，该图形用黄色表示，叠加在原图上，以便比较。

5.6　设 $\boldsymbol{Q}=c\begin{bmatrix}1, & -1, & -1, & -1\\ -1, & 1, & -1, & -1\\ -1, & -1, & 1, & -1\\ -1, & -1, & -1, & 1\end{bmatrix}$，选择 $\boldsymbol{c}$ 使得 $\boldsymbol{Q}$ 成为一个规范正交矩阵。

5.7　求将列向量(1,0)及(0,1)转换为(1,4)及(1,5)的矩阵 $\boldsymbol{M}$，并求 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵。

5.8　试证明两次转动变换的矩阵乘积等于将两个转动角相加候做一次转动的变换矩阵相等。

提示：转动 $\boldsymbol{\beta}$ 角对应的变换矩阵为 $\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$

5.9　将下列矩阵对角化，列出其正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{D}$，检验误差 P*D/P-A 是否为零？

(a) $\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$；(b) $\begin{bmatrix}7 & -4 & 4\\ -4 & 5 & 0\\ 4 & 0 & 9\end{bmatrix}$。

5.10　用 poly 及 roots 函数求特征方程和特征值，用 eig 函数检验：

(a) $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$；　(b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$；(c) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$

5.11　用 eig(A)函数求下列方阵的特征值与特征向量。

(a) $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$；　(b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$；(c) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$

5.12　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$，写出用特征值和特征向量求 $\boldsymbol{A}^{10}$ 的表达式及 MATLAB 程序。

5.13　分别用特征值正交分解法和 expm 函数计算指数矩阵 $e^{\boldsymbol{A}}$，比较其结果。

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$；　(b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$；(c) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$。

5.14　用正交变换将下列二次型变换为标准形。

(a) $4x_1^2+4x_2^2+3x_1x_2$

(b) $11x_1^2-x_2^2-12x_1x_2$

5.15　求马尔科夫矩阵的特征值和特征向量(即稳态值)：

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.15\\ 0.1 & 0.85\end{bmatrix}$；(b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0.15\\ 0 & 0.85\end{bmatrix}$；(c) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.2 & 1\\ 0.8 & 0\end{bmatrix}$。

5.16 设三坐标测量仪测出工件上的六点坐标如数据表，问这六点是否大体在一个平面上？此平面的方程是什么？各点离此平面的误差有多大？

表 5.6　题 5.16 的数据表

	点 a	点 b	点 c	点 d	点 e	点 f
x	1.01	0.80	2.82	0.81	3.04	2.43
y	2.16	0.78	-1.36	0.67	3.58	-1.30
z	2.47	2.40	3.55	2.41	3.50	3.34