2.5　行阶梯形变换等价于矩阵乘法——LU 分解

在行阶梯形变换中，如果不变换成最简形 $\boldsymbol{U}_0$，只变换成行阶梯形矩阵 U，也就是把式(2.4.1)中的所有数乘变换矩阵 $\boldsymbol{D}_k$ 都去掉，只保留消元变换 $\boldsymbol{E}$ 和行交换矩阵 $\boldsymbol{P}$，则式(2.4.1)可写成：

$$\boldsymbol{U}=(\text{行阶梯变换中所有 }\boldsymbol{P}\text{ 及 }\boldsymbol{E}\text{ 的连乘积})*\boldsymbol{A}$$

由于初等变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵存在，其乘积也是可逆的，故可令行阶梯形变换中所有 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的连乘积矩阵的逆矩阵为 $\boldsymbol{L}$，即

$$(\text{行阶梯变换中所有 }\boldsymbol{P}\text{ 及 }\boldsymbol{E}\text{ 的连乘积})^{-1}= \tag{2.5.1}$$

在式(2.5.1)两端同乘以 $\boldsymbol{L}$，可写成

$$\boldsymbol{LU}=\boldsymbol{A} \tag{2.5.2}$$

这种把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过初等矩阵左乘分解为一个对角元素全为 1 的下三角矩阵和一个上三角矩阵乘积的变换称为 LU 变换。MATLAB 提供了矩阵的三角分解函数 lu.m，其调用格式为：

```
[L,U]=lu(A)
```

它返回的结果是一个有关行交换的下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和一个上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$。这个变换程序实质上是高斯消元法的另一种形式。

例 2.12　用例 1.4 中矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$ 的数据，用矩阵乘法求其行阶梯形变换的解。

解　该题的增广矩阵为：$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 3 & 3 & -1 & -5\\ 2 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}$，按该例题解题过程可知三次消元所需的消元元素 e 应为 $e(2,1)$=-3/3，$e(3,1)$ =−2/3 及 $e(3,2)$= −2/3，相应的初等消元矩阵为：

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2/3 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2/3 & 1\end{bmatrix}$$

用矩阵乘法可求出

$$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 3 & 3 & -1 & -5\\ 2 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2/3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2/3 & 1/3 & 20/3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2/3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2/3 & 1/3 & 20/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1/3 & 20/3\end{bmatrix}=\boldsymbol{U}$$

这些矩阵相乘的结果可与式(1.3.2)～(1.3.5)的系数相对照。按式(2.5.1)可求出行阶梯形变换诸矩阵连乘积的逆阵 L(注意矩阵连乘求逆时各逆阵的排列次序要颠倒)，即

$$\boldsymbol{L}=\mathrm{inv}(\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1)=\mathrm{inv}(\boldsymbol{E}_1)\mathrm{inv}(\boldsymbol{E}_2)\mathrm{inv}(\boldsymbol{E}_3)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2/3 & 2/3 & 1\end{bmatrix}$$

列出这些矩阵相乘的结果，主要是为读者做笔算时提供参考，读者最好用软件来检验这些结果，学完这本书后就不要再用笔算了！像这道题，可直接调用 lu 分解函数，键入语句：

[L1,U1]=lu(A)来检验，也可执行程序 pla212 进行细致的检验。

此处还要说明一下 $\boldsymbol{L}$ 为什么是下三角矩阵。由 2.4 节可知，消元矩阵 $\boldsymbol{E}$ 及其逆阵 $\boldsymbol{E}^{-1}$ 都是下三角矩阵，例 2.12 的行阶梯形变换中只用到 $\boldsymbol{E}$，根据矩阵相乘的规则(5)可知，它们的连乘积也必定是下三角矩阵。但商用软件中还要多次用行交换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 来保证消元法的精度。这会使得最后的下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 不那么标准，各行有些颠倒，故称之为准下三角矩阵。

例 2.13 把矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$进行 LU 分解，求出其行阶梯形 $\boldsymbol{U}$ 及变换矩阵 $\boldsymbol{L}$。

解 输入矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 format rat，再键入[L,U]=lu(A)，得出：

```
A= 2  -2   0   6      L =  2/3   1    0   0      U =  3   -1    4    4
   2  -1   2   4           2/3  1/4   *   1           0  -4/3 -8/3 10/3
   3  -1   4   4           1     0    0   0           0    0   -3   10
   1   1   1   8           1/3  -1    1   0           0    0    0   1/2
```

可见 $\boldsymbol{L}$ 是一个准下三角型阵，必须把 $\boldsymbol{L}$ 的各行进行交换，才能成为下三角矩阵。L 中有一个元素是*号，那是在 rat 格式下表示极小数的符号，键入 L(2,3)即可显示它的值。

MATLAB 给出了另一种调用 lu 命令的格式：[L1,U1,P1]=lu(A)，此时得出

```
P1=0   0   1   0      L1=  1    0   0   0      U1= 3   -1    4    4
   1   0   0   0           2/3  1   0   0          0  -4/3 -8/3 10/3
   0   0   0   1           1/3 -1   1   0          0    0   -3   10
   0   1   0   0           2/3 1/4  *   1          0    0    0   1/2
```

它们之间的关系是 L1*U1=P1*A，交换矩阵 P1 的作用可以看做对 **A** 的各行进行交换，从而相应地把准下三角矩阵 L 中的第一行换到第二行{P(2,1)=1}，第 2 行换到第四行{P(4,2)=1}，第三行换到第一行{P(1,3)=1}，第四行换到第三行{P(3,4)=1}，使得出的 L1 成为一个真正的下三角矩阵。