实用大众线性代数（MATLAB版）结束语

与数学系的线数有何不同

- 我们来看看本课与数学系讲的传统线性代数的不同。
- 传统线性代数课讲的仍是两百年前分析小矩阵的经典都是理论。时间都花在证明公式，讲抽象概念上。由计算机应用催生的课程讲的却与计算机完全无关，既难懂又没有用，工程上需要的高阶方程组，系数不是简单整数的实际问题都是笔算不敢碰的禁区。
- 工科线性代数则教会学生用计算机求解高阶复杂的矩阵模型，它主要发展于1950年后。它要用到部分经典理论，但有了很大的发展与创新，主要体现在与计算机结合的数学软件MATLAB。为了与经典线性代数相区别，不妨称之为现代线性代数，数学老师不学习它，等于只会半门课，必然就无法教好工科的学生。

经典线数为何解不了应用题？

- 1）计算的复杂性：即使是用高斯消元法，解题所需的乘法次数N随n而变的规律约为$N=n^2(n+1)/3$，2阶为4次，3阶为12次，4阶为27次…，加法次数相近。每次乘法的时间取决于数据长度，若10次乘加是忍耐极限。则3元线性方程组是手工计算的最高点。所以我们书上的多半例题，只学经典教材的读者就做不出来。如果数据是复数，如交流电路，那连二阶的，读者也不会有耐心算。
- 我们第六章的例题中，绝大部分都超过三阶，即使是三阶，谁也不愿意花半个小时去笔算。

经典线数为何解不了应用题?

- 2）计算的精确性：经典理论为了方便，给出的都是一两位整数元素，实际问题的数据复杂，矩阵计算对精度是很敏感的，时常常在会消元时出现两个大数相减的情况，使有效数位下降。这将使方程组接近于奇异，表现为行列式或某主元将接近于零。

  这时计算的精度会严重影响方程的判解和求秩。如例4.11和例6.6（多点共面问题），例6.10（多点共圆问题）等涉及机械测量的问题，都需要很高的有效数位，手工无法处理。

结论：线性代数从经典笔算走向现代机算是历史的必然。

工科与数学系线性代数的差别

数学系的侧重点	工科需要的侧重点
小矩阵（五阶以下）	大矩阵（多至几十、几百阶）
只讲主要用于小矩阵的经典理论	扬弃对大矩阵无用的理论
手工推演，不用新手段	依靠计算机和软件包
以公式符号推理为主	要求数字结果并有实际意义
强调N维空间和抽象思维	强调3维空间和形象概念
整数小矩阵的理论题	有大量的从简到繁的应用题

理论教学的改革思路

- 想把改革目标转向简化理论。就要弄清哪些理论是工科学生必学的。从一个工科教师的角度，我们采用了逆向思考的方法，把见过的后续课和工程问题加以归纳，找到其最低限度需要的理论。
- 作者在过去20年中，曾做过十多门课程中的数百道线性代数应用题，从这些命题中归纳出对理论的需求，其中凡是应用题需要的，讲透加强；凡是找不到直接需求的，即予删除；凡是能找到简明证法的，均予采纳。根据工科学生的特点，尽量从具体到抽象，加强图形和动画等形象教学在理论证明中的作用，少用不用数学语言，写成了《实用大众线性代数(MATLAB版)》。

本书的特色和概貌

本书的书名反映了它的特色，那就是“实用化”、“现代化”和“大众化”。

- “实用化”指的是本书以工科的后续课及未来工程的需求为标准安排内容，附录B,C中列出的60个应用实例表明了本书的实用背景；
- “现代化”指的是用计算机和软件MATLAB来解决问题，不依靠笔算；
- “大众化”指的是书中采用了最少、最浅而又足够的理论，使推理能力不太强的学生和有实践经验但不接触数学多年的工程师都能接受，便于向大众普及。

本书在理论教学上的改革

(1) 行列式讲法的改革：从行列式定义方法改起，彻底扬弃了对高阶矩阵没有用处的老定义，摆脱了大量繁琐无用概念和术语，扫除拦路虎。

(2) 重点讲好三维空间，少讲N维向量，真正把几何概念和代数紧密结合；

(3) 加强工程中有很大用处的超定方程组；减弱现实世界中意义不大的欠定方程组，特别是去掉对它的通解的讨论；

(4) 增加复特征方程，降阶实特征方程。

加强的都是有工程应用背景的问题，减弱的都是没有应用价值的问题。同时增加了很多应用实例，把“需求牵引”和软件“技术推动”结合起来。所有的实例都有MATLAB程序计算。

行列式理论为何可省略？

- 1.求行列式是老师编的理论题，不是工程需求。在应用题中，没有见过求行列式的需求，因为除面积、体积外，它没有物理意义，想编题都编不出来。
- 2. 行列式的概念还是有用的，至少要知道行列式为零时矩阵不可逆，能看懂MATLAB的出错提示。
- 3. 行列式的经典定义无可计算性，不适用于大矩阵，更不能用于软件编程，其公式概念能只用于公式推导，无工程用途，可以省略，只讲主元连乘定义；
- 4. 数学软件中用行阶梯形和秩rref(A)和rank(A)代替行列式，可使计算更高效而深入；
- 5.如果真要计算，用MATLAB的det(A)命令即可；

在此我们愿意接受挑战，谁能编出一个应用题，待求量是有物理意义的高阶行列式，我们将给予奖励。

N维向量空间为何该省略

- 1.本科四年所有后续课应用题都不需要;
- 2.大一学生掌握三维空间已是难点，N维向量空间过分超前，不可能掌握。
- 3. N维向量是数学家讨论问题的抽象概念和语言，不适用于普通人的现实世界，没必要也不可能被工程界接受，更不应该去教大学生。
- 4. 齐次方程基础解、欠定方程的通解等用N维向量空间讨论的问题，都可略去。

用最少理论解决最多实际问题

- 用最小的学习成本以获得最大的应用效果，这是本慕课取材的准则。我们把这看做是非数学系大学生和工程师在理论上的最低要求，对应用型的人才是基本够用了，如果要搞研究，那还差得多。
- 本书力图用工程语言来叙述概念，从具体到抽象，尽量少用数学定义和数学语言，多用图形等来证明，有的就不证了，不过分强调严密。微积分教材有两百年了，花样还多些；线性代数历史短，与工科远未磨合好，教材基本上都还是数学系的模式，很难适应不同的需求和口味，不利于普及。

三、线性代数改革对后续课产生的效果

线数改革的明显实效

- 1）在校大学生早期接触MATLAB直接促进了他们自学使用计算机和数学软件的动力，我校学生在各种校际科技竞赛中持续领先与此很有关系。
- 2）一些重要的后续课，如力学、电路等以大量的线性方程组为特征的，都可以用计算机解题了，提高了讲课的水平和作业的效率；
- 3）一些繁琐难记的笔算公式换成了简明严密可以机算的矩阵方程，最明显的例子是把半经验的**梅森公式**换成严密的矩阵建模方程。它是涉及三门课（信号与系统、信号处理、自动控制）的公式。分别见本书例6.5，例6.6和例6.12。

6.5　双反馈回路信号流图

双反馈信号流图。列出的方程如下：

x1 = -G4x3 + u

x2 = G1x1-G5x4

x3 = G2x2

x4 = G3x3

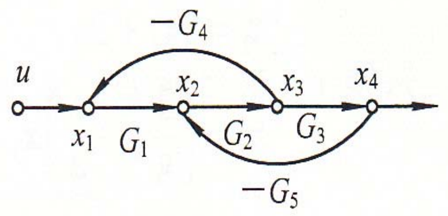


图 6-6　例 6.5 的带双重反馈的信号流图

写成矩阵形式，可得：

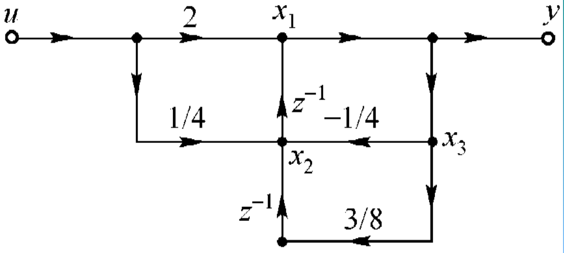
$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-G_4&0\\G_1&0&0&-G_5\\0&G_2&0&0\\0&0&G_3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}u=\mathbf{Q}x+\mathbf{P}u$$

例6.6 数字滤波器系统函数

$$x_1 = qx_2 + 2u$$

$$x_2 = \left(\frac{3}{8}q - \frac{1}{4}\right)x_3 + \frac{1}{4}u$$

$$x_3 = x_1$$



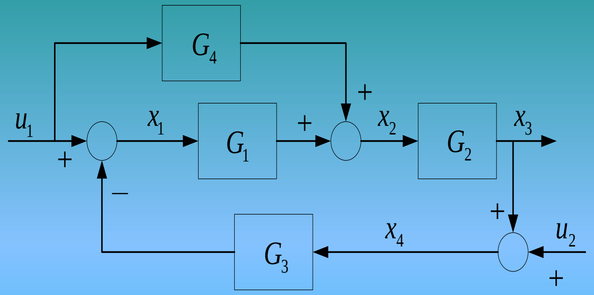
写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8}q - \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qx} - \boldsymbol{Pu}$$

系统函数***W***可以写成 $W=x/u=(I-Q)^{-1}*P$

6.12 控制系统结构图的化简

线性代数的方法是从原始方程组出发，建立矩阵模型，可以不受结构图画法的局限，保持了各信号节点的原来物理意义。

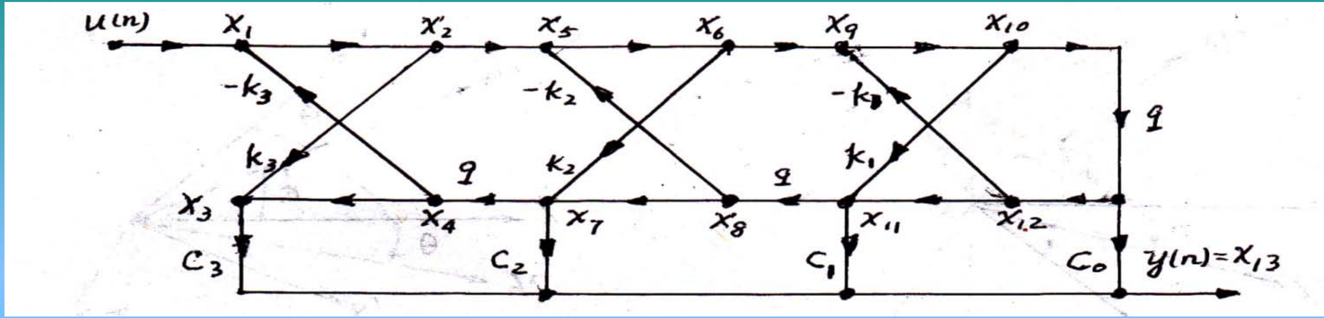


在本例中，取x1, x2, x3, x4, e五个信号节点列写方程，有:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -G_3 x_4 + u_1 \\ x_2 &= G_1 x_1 + G_4 u_1 \\ x_3 &= G_2 x_2 \\ x_4 &= x_3 + u_2 \\ e &= x_3 - u_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -G_3 & 0 \\ G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G_4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X = QX + PU \Rightarrow \ W = X / U = inv(I - Q) * P}$$

7.3 三阶格型梯形滤波器



- 图示的滤波器用信号流图表示，它有13个节点，代表13个信号，相互之间的代数关系用图表示：
- 先列出方程，令$q=z^{-1}$，得到
- $x_1= u- k_3x_4$；$x_2=x_1$；$x_3=k_3x_2+x_4$；$x_4=qx_7$; $x_5= x_2- k_2x_8$; $x_6=x_5$; $x_7=k_2x_6+x_8$；$x_8=qx_{11}$; $x_9= x_6- k_1x_{12}$；$x_{10}=x_9$；$x_{11}=k_1x_{10}+x_{12}$; $x_{12}=qx_{10}$; $x_{13}=y= C_0x_{12}+ C_1x_{11}+ C_2x_7+ C_3x_3$
- 矩阵建模法就是把方程组扩展成为矩阵方程。

矩阵建模法的基本思想

- 这是一组含有13个变量的13个联立方程，用过去的手工方法一个一个消元，理论上是可行的，但它运算极其繁琐，可以预期，95%以上的师生恐怕十个小时也解不出来，而且做对的概率极低。现在还没有解这类问题的简单办法。
- 用矩阵的思路和方法来解就完全不同，它不是通过消元来减少变量，而是想办法补上所有的零元素，把方程扩充为完整的矩阵形式：

代数方程化为矩阵模型

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= u - k_3 x_4 \\
x_2 &= x_1 \\
x_3 &= k_3 x_2 + x_4 \\
x_4 &= q x_7 \\
x_5 &= x_2 - k_2 x_8 \\
x_6 &= x_5 \\
x_7 &= k_2 x_6 + x_8 \\
x_8 &= q x_{11} \\
x_9 &= x_6 - k_1 x_{12} \\
x_{10} &= x_9 \\
x_{11} &= k_1 x_{10} + x_{12} \\
x_{12} &= q x_{10} \\
x_{13} &= \cdots\cdots
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0, & 0, & 0, & -k_3, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & k_3, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & q, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -k_2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & k_2, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & q, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -k_1, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & k_1, & 0, & 1, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & q, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & C_3, & 0, & 0, & 0, & C_2, & 0, & 0, & 0, & C_1, & C_0, & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u
$$

$$\mathbf{X = QX + PU \Rightarrow \left(I - Q\right) X = PU \Rightarrow W = X / U = inv(I - Q)P}$$

程序pla703运行的结果

- 看似把模型搞复杂了，其实计算却非常容易。程序pla703先对P，Q矩阵赋值键入，马上就得出了系统函数。
- 编程时要注意，本例虽然是数值计算，但计算的内容中带有z变换算子$q=z^{-1}$，所以P，Q矩阵仍然必须用符号属性，对P，Q赋值时第一个元素必须取含q的算式。熟练后不必列出Q和P的矩阵形式，可以按其下标规律直接进行元素赋值。
- 用以下参数：$k_0=1, k_1=1/4, k_2=1/2, k_3=1/3, C_0=-0.2, C_1=0.8, C_2=1.5, C_3=1$，编成了程序pla703。运行此程序就得到：

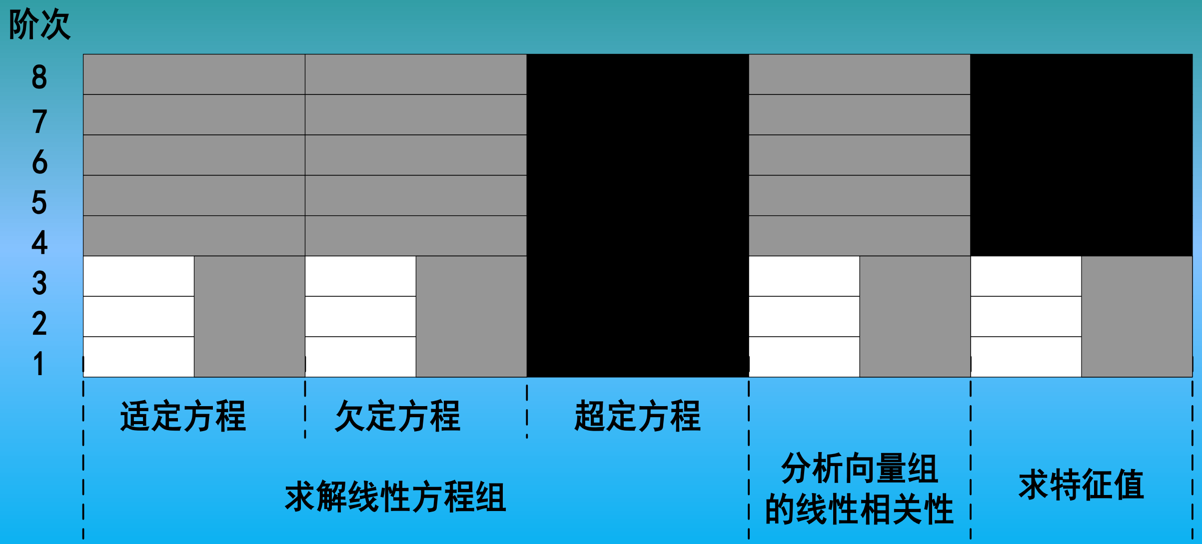
$$W(13)=\frac{x(13)}{u}=\frac{24q^3+49q^2+42.9q+30.8}{8q^3+15q^2+13q+24}$$

$$=\frac{24z^{-3}+49z^{-2}+42.9z^{-1}+30.8}{8z^{-3}+15z^{-2}+13z^{-1}+24}$$

刚体测量和运动的命题

- 由本书的例6.3、6.9、6.10、6.11和6.12，可以看出物体的空间位置和运动的描述与矩阵密切相关。一个刚体的平面坐标有两维，加一个转动，要用一个三维矩阵才能描述。由于平移必须在齐次坐标系中才符合线性变换，所以还要增加一维。
- 空间坐标有三维，它的运动包括三个移动和三个转动，也就是有6个自由度。机械手可能用几个刚体联接而成，所以其数学描述将涉及高维的矩阵，尽管它的运动还是在三维物理空间中。所以N维的概念是有用的，但对大一的学生，搞懂三维就不错了。
- 经典的线性代数无论从速度和精度上都不能处理这类问题，为什么不向现代化方向前进呢？老师只要花一个月学学MATLAB就行了！

经典与现代线数解题覆盖区



图中黑色区域是经典线数没给出解的，灰色区域是因计算复杂而没法算的，所以只有白色区域是它能解的。工程问题的阶次可到几百几千，可见经典理论只能解决工程问题的极小比例，所以过去放进工科教学计划没有意义。和计算机一结合，又讲了超定，工程问题就全部能解了，所以受到工科的欢迎。

线性代数将使后续课程现代化

- 上面例题说明用现代化的线性代数如何使后续课程现代化，这里已经举出了多门电类课程，机械力学方面又可拿出理论力学、材料力学、结构力学、机械振动、测量等几门课程，还可举出数值方法、微分方程等数学课程…。所以我们说，线性代数改革和MATLAB应用的影响面是很宽的。我们希望通过这个慕课，引起大家对线性代数和MATLAB 结合的重视，共同把高校的各门课程都推向计算机解题的现代化方向。

– 谢谢大家！

参考文献

[1]	Steven J. Leon, Linear Algebra with Applications (6th Edition), 2002, 影印版“线性代数”，机械工业出版社，2004，ISBN 7-111-15216-6, pp545，机械工业出版社影印

- [2]	David C. Lay, Linear Algebra and Its Application (3rd Edition), 2004, ISBN: 0201709708, pp492+76，电子工业出版社影印
- [3]	Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, 4th Edition, Wilsley-Cambridge Press, Feb.2009, ISBN: 978-0980232714
- [4]	Steven J Leon, Eugene Herman, Richard Faulkenberry, ATLAST Manual, 2/E, Publisher: Prentice Hall, 12/19/2003,pp.270, ISBN: 0-13-101121-9
- [5]	陈怀琛，龚杰民，线性代数实践及MATLAB入门，北京，电子工业出版社，2005年10月，ISBN: 978-0980232714
- [6] 陈怀琛，高淑萍，杨威，工程线性代数（MATLAB版），北京，电子工业出版社，2007年10月，ISBN: 978-0980232714
- [7] 杨威，高淑萍，线性代数机算与应用指导(MATLAB版)，西安，西安电子科技大学出版社，2009年4月。ISBN: 978-0980232714
- [8] 游宏，朱广俊，线性代数，北京，高等教育出版社，2012年3月

参考文献（续）

- [9] 陈怀琛，论工科线性代数的现代化与大众化，高等数学研究，第15卷，第2期，2012年3月
- [10] 陈怀琛，高淑萍，用主元连乘法定义行列式——二论工科线性代数的现代化与大众化，中国教育数学学会2013年会（南充）上的学术报告，2013年8月
- [11] 陈怀琛，讲透三维空间，少讲N维空间——三论工科线性代数的现代化与大众化，中国教育数学学会2013年会（南充）上的学术报告，2013年8月
- [12] 陈怀琛，《MATLAB及其在理工课程中的应用指南》，西安电子科技大学出版社，2000年1月第一版，2004年12月第二版
- [13] 陈怀琛、吴大正、高西全：《MATLAB及在电子信息课程中的应用》，电子工业出版社，2002年1月第一版，2013年8月第四版
- [14] 陈怀琛，《数字信号处理教程——MATLAB释义与实现》，电子工业出版社，2004年12月第一版，2013年8月第三版
- [15] 陈怀琛，屈胜利，何雅静，控制系统化简的矩阵方法，CCC2010中国控制年会论文集,2010 年8月
- [16] 张小向，线性代数建模案例汇编，东南大学数学系，2012年6月

程序集和教学资料的下载

本慕课可下载的文件为:

- 1.“实用大众线性代数程序集”，英文名dskpla（使用英文操作系统的计算机只认英文路径名和库名）。
- 2. 本慕课的幻灯片：“实用大众线性代数课件”
- 3. 本书的第七章，标题是“在科技及工程中的应用实例”。它提供了难度更高的十多个例题。
- 4.“论非数学专业的线性代数(中译稿)”作者在2006春应用和工程数学国际会议(AEM-S)上的学术论文:

作者联系方法

- 我的电子邮址是：hchchen1934@vip.163.com
- 欢迎使用过本书的教师和同学提供批评和指正。
- 我年事已高，不能参加第一线的教学活动。期待有青年教师接力，常和我联系，把这项改革进行下去！