paper ID No. 60009

On Linear Algebra for non-Mathematics Majors

Huaichen Chen*, Shuping Gao, Wei Yang
Dept. of Electronics Eng., Dept. of Science, Dept. of Technical Physics, Xidian University, Xi'an, China
Email: hchchen1934@vip.163.com, gaosp@mail.xidian.edu.cn, weiyang@mail.xidian.edu.cn

中译本说明

这是我在 2016 年 4 月在中国苏州举行的 “应用和工程数学国际会议(2016 春季)”

International Conference on Applied and Engineering Mathematics (AEM-S)

上发表的文章。这篇文章的针对对象主要应该是国内的线性代数界的同行，故译为中文。

这篇文章提出的第一个问题是：工科线性代数要不要现代化，是不是必须教会学生用数学软件，通过计算机来解？这是美国线性代数界在 1990 年就提出并且解决了的。为了缩短差距，中国的高教司在 2009 年设立了“用 MATLAB 和建模实践改造工科线性代数课程”的项目，有十九个大学参与，在实施的两年中有 200 位教师和 45000 名学生受益，但全国大多数学校还是照数学系的经典方法在教，根本与计算机不沾边。美国线性代数界提出改革的五条建议（LACSG Recommendations）已经 25 年了，其核心就是要用计算机。中国如此滞后，我认为就是中国很多数学老师有不学计算机的坏习惯。尤其是对线性代数教师，若不会计算机，就意味着他们只能解五阶以下的小题目，大量普通高阶问题都解不了，更无法处理涉及精度的理论问题（例如奇异值分解）。丢掉了计算机，如何能理解半个多世纪来线性代数的 “创新”呢？

第二个问题是实用化，线性代数的特点是计算量大，所以没有现代化就不可能实用。我的文章中简介了三个应用例题，是专门考一考那些不会用计算机的“线性代数专家”的。如果解不了，说明他们“理论空谈，实践为零”，他们怎么能教会自己的学生用线性代数解决实际问题呢？可见他们只配教半门线性代数课，特别不配教非数学专业的学生。

文章的第三个中心思想是大众化。线性代数的理论很深很繁，加以简化，要教学生真正用得到的理论。我对这个问题的讲法与国外改革后的教材基本精神相似，但有一定的差别。其中最大的一个举措是用了行列式的新定义，因而改写了国内许多教材的开篇章节。一个工科教师竟敢动数学先哲的“奶酪”，可能一些数学家难于接受。但请看一看我的论据：

论据一、高阶行列式没有物理意义，所以不会成为现实世界命题中待求量。我做过十几个领域的几百道线性代数的应用题，除了求面积、体积等有物理意义的低阶行列式以外，没有一道题目要求行列式的。所以那么多的行列式题目都是数学老师编出来的，不是来源于工程实践。

论据二、在解线性方程组的中间过程中是否要用行列式呢？回答是可用可不用，用行列式是笨办法。聪明人通过高斯消元法，用主元不为零判解的存在，既简单又好懂；不求行列式，胜似行列式！书呆子才会用克拉默法则，或用行列式判解。

论据三、还要指出，第一个动奶酪的不是我，我首先是从 MIT 的 Strang 教授的书[7]里看到这个定义；最先动这奶酪的中国人是游宏教授，他在 2012 年出的书[4]中严格地证明了此定义的合理性。因为他在证明中又引用了其他书籍，所以他也不是鼻祖。而我只是将它与传统定义比较，说明它是我所知道的唯一具有可计算性、适用于大矩阵的定义。而且我发现动了这个奶酪的好处：那两种经典定义以及相关的逆序数、代数余子式、随伴矩阵...等等概念都可以不讲。这就能在不失理论正确性的前提下打开线性代数大众化的大门，使千百万普通技术人员方便地学会线性代数的基本原理和应用，推动全国各行各业计算的现代化。

国外 1990 年后出的基础教材对行列式的处理是渐进的淡化：一是只讲到三阶，不讲高阶，逆序数、代数余子式都只用三阶介绍一下完事；二是移动位置，Strang 说他把行列式从第一章移到第三章、再移到第五章，目的就是贬低它；三是提出的评价, Lay 写道：“在大矩阵时代，行列式只有很小的数值价值！”，这是美国数学教师逐渐认识的过程。而我作为工程教师，用逆向思维的方法，总结了几百道应用题的需求，证明行列式计算在所有的题目中都用不到，并且找出了它的原因。我用改变定义的方法来处理了高阶行列式中的冗繁概念，显得比较激进而已。实际上，二者是异曲同工。其实最彻底的是 MATLAB，它根本没给出逆序数、代数余子式、随伴矩阵等等的子程序和术语，证明工程计算用不到它们。我要声明：这只是对非数学系而言，数学系的高深理论也许需要它们，该讲还得讲，但不要照搬到非数学系的大一课程中来。

还有一个问题，线性代数中的 N 维空间太吸引数学家的抽象思维了，所以喜欢在书中竭力宣扬。我觉得在数学家的象牙之塔中讨论讨论这种概念是可以的，也是有益的 但决不该搬到工程中去,特别是不该给低年级大学生去灌输。他们没有想到过工程师是和普通人打交道的，对常人讲这种天书般的概念无异于鸡同鸭讲。比如配平化学方程出现的欠定方程，只要加一个“最小正整数条件”就可变为适定。工程师要做的是找到命题中的缺陷，找到有效解。而不是承认这种缺陷命题，而去找它的抽象的解空间，拿着后者在实际工作中是交不了账的。我们不能把工科学生教成书呆子去闹笑话。

这篇文章主要的目标读者是中国的老师和学生，我觉得应该把这篇文章写成中文，以利于更多的中国读者能够看懂。说句不好听的话，中国线性代数界的保守思想太严重了！美国改革已 25 年，所有 1995 年以后引进的国外教材都已用了计算机和 MATLAB，高教司为进行改革而立项也已 8 年，... 可是在中国，传统的数学系式的教材还是占着压倒地位。有道理吗？我是非常希望有人站出来学术争论，但没有！反正过去怎么做，现在照做就是唯一的理由！

为了加快创新和改革，我希望数学教指委提出 “现代线性代数”这样的一个名词，只有课程中用了计算机才能使用这个名称，以利于教师有目标，也有利于读者进行选课。

陈怀琛

于西安电子科技大学

2016 年 4 月

论非数学专业的线性代数

——用最浅显的理论解决最广泛的应用问题

西安电子科技大学： 电子工程系 陈怀琛*，数学系 高淑萍，技术物理系 杨威

电子邮址: hchchen1934@vip.163.com, gaosp@mail.xidian.edu.cn, weiyang@mail.xidian.edu.cn

摘要：为了弄清线性代数中哪些理论是非数学类（下简称工科）学生必学的，采用了逆向追踪的方法，把后续课和工程中可能遇到的实际问题加以归纳，找到其最低限度需要的理论。根据大一学生的知识水平，尽量用简明形象方法来讲解。提出了取材的原则，并写出了面向应用、形象易懂、采用机算的普及型教材《实用大众线性代数(MATLAB 版)》[1]。

关键词：线性代数，行列式，矩阵运算，向量空间，形象教学，高斯消元法、行阶梯矩阵，秩，奇异值分解，qr 分解，计算机解题，MATLAB，

一、工科大学为什么要开线性代数课？

线性代数起源于 18 世纪，1950 年前，它只是数学系和少数其他专业研究生的课程。然而到 1960 年以后，它突然被列入美国大学非数学系本科教学计划，以后修这门课的非数学系学生却成了主流；在中国，三十年前的工科是没有线性代数课的，80 年代起增设它为公共基础课，人人必修。线性代数为什么在近几十年如此风靡呢？最根本的一个理由是：它的重要性因计算机的出现而飞速上升。1973 年的诺贝尔经济奖发给了 Leontief 教授，因为他 1949 年首创用计算机解了 42 阶线性方程组；80 年代初，线性代数软件包 LINPACK 开发成功。这样人们不需要精通矩阵求解的数学细节，就可以解决大型复杂的线性代数命题，MATLAB 也是用此软件包作为后台支撑的。线性代数在上世纪后半叶以来的成就也集中在大规模矩阵问题的求解方面。它不再是少数理论尖子才能学会的秘笈，而成为普通大学生都能掌握的计算工具。

现代社会对工程数学提出了愈来愈高的要求。1989 年，钱学森先生写道[2]：**今后对一个问题求解可以全部让电子计算机去干，不需要人去一点一点算。而直到今天，工科理科大学一二年级的数学课是构筑在人自己去算这一要求上的。从解析几何、微积分、微分方程、复变函数论、偏微分方程等，无不如此。… 所以理工科的数学课必须改革，数学课不是为了学生学会自己去求解，而是为了学生学会让电子计算机去求解，学会理解电子计算机给出的答案。....”** 线性代数是数值计算的基础，它不仅应该带头用计算机，而且应该推动在其他数学课程和工程问题中应用计算机。

线性代数的重要性主要体现在它把愈来愈多的使用多变量模型的新领域与计算机联系起来。Leontiff 获经济奖说明，这种“需求牵引”对非数学专业而言，体现在用计算机求解高阶的现实矩阵模型，不是去手工推证课程内部的数学公式。但原数学系的课程重点却是后者，两者的大体差别见表 1。把数学系的内容照搬过来，就会“教了的没用，有用的不教”，完全背离了把工程问题与计算机相结合的设课目的，这是人们没有预想到的。

表 1 数学系与非数学系的不同要求

	数学系的重点	**工科的需求**
矩阵的阶数	小矩阵（小于 4 阶）	大矩阵（高至几十~几百阶）
理论的内容选择	小矩阵经典理论	只讲对大矩阵有用的理论
工具和对结果的要求	手工推导和公式证明	数学软件和实用的计算结果
要求建立的概念	强调 N 维抽象思维	强调三维空间立体概念
解决的问题	假想的整数元素小矩阵例题	后续课及工程中遇到的实际问题

在实施十多年后，美国一些名师深感此问题的严重，他们于 1990 年成立了线性代数大纲研究组(LACSG)，提出了著名的五条改革建议[3]：

(i)线性代数课程要面向应用，满足非数学专业的需要；

(ii)它应该是面向矩阵的（不是面向向量空间）；

(iii)它应该适应学生的水平和需要（面向普通系大一学生不是数学系高年级）；

(iv)它应该利用最新的计算技术；

(v)抽象内容应另设后续课程来讲；

这五条建议鲜明地指出了非数学系的线性代数与原有课程的重大区别。前四点都是强调线性代数近五十年来的成就，第五点则是对部分过深的经典理论的处理建议。随后，他们又在美国国家基金会(NSF)资助下实施了 ATLAST 计划，在六年内使大批教师学会了用 MATLAB 解线性代数问题。

我国高教司于 2009 年设立了“用 MATLAB 和建模实践改造工科线性代数课程”项目，由西安电子科技大学牵头，19 所大学参加，为时两年，重点解决把线性代数与计算机相结合的实践问题，有 200 位教师和 45000 名学生受益。现在在这些大学中，线性代数必须用计算机已成共识，大一学生都学会用 MATLAB，为本科全程使用机算打下了基础。但大部分大学并未改革。

许多学校想改，但在现有大纲学时的限制下，很难有足够的时间兼顾经典理论和它的 MATLAB 实践。因此很有必要研究线性代数理论的哪些部分是工程实践中最必需的。

二、如何满足非数学专业的需要？

要认识到客观需求，必须深入到非数学专业的实践中去，而用计算机解矩阵方程是问题的核心。作者在机电专业十多门后续工程与管理课程中曾做过两百多个应用例题，本书中取了 46 例。大体情况是：（1）矩阵四则运算和求逆 12 例（最高 21 阶）；（2）线性方程组求解 16 例（最高 7 阶，内超定 5，欠定 3，其余适定）；（3）向量空间关系和运动变换 8 例（涉及空间几何形状测量和运动，判别共面性等）；（4）线性变换和特征值 10 例，内含复特征根问题；... 这些例题覆盖了作者在本科课程中遇到过的所有应用题型，只是略去了阶数太高的题目。

我们采用了逆向思考的方法，把这些例题加以归纳，找到其最低限度所需要的理论。凡是后续课程需要的，就讲透；凡是找不到需求的，即予删除；凡是能找到简明证法的，均予采纳；个别太难的就不证了，相信数学家的结论。毕竟工科(特别是应用型、技能型)人才是“用数学”的，与“搞数学”的要有区别。教材要充分利用成熟的矩阵处理软件 MATLAB 资源，尽量把理论与所用到的子程序衔接起来，使学生不至于傻瓜式的用软件。重要的有以下几点：

(1)、把高斯消元法解线性方程组作为全书的理论主线，把行列式定义为行阶梯型的对角主元的连乘积[4]。把向量组的秩和线性相关性等也都纳入这根主线上。所以在本书中，行阶梯变换函数 rref 的使用频度是很高的，它可以替代行列式和秩的许多繁琐的计算；

(2)、要使学生建立计算复杂度和计算精度的概念，这是过去的教材中从未见过的。两个传统的行列式定义就是因为计算太复杂而失去其工程价值；过去的手工算题中，给的都只能是整数，结果都是绝对化的。无法讨论行列式接近于零、或秩随容差变化等问题，也讨论不了“多点近似共面”这样的应用命题，而用了计算机都可以赋以实际的意义。

(3)、从大一学生的平均水平出发，着重建立线性代数与空间解析几何的关系。工程中三维空间概念和难题多得很，没必要在学生三维空间还没搞清楚之前急于去教 N 维向量空间；何况我们找不到后者在工程系本科的应用需求。

这样组织的内容，与原有的数学系的线性代数教材就有了很大的不同。

三、行列式的定义和性质的讲法改革

为了计算行列式，它的数学定义和可实现性是必须关注的问题。数值计算中通常用所需的乘法次数来标志计算的复杂度，表 2 给出了行列式三种定义方法在不同阶数 n 下的计算量：

表 2　行列式的三种定义方法所需乘法次数						
阶数 n	2	3	4	5	10	25
1.　显式法（不计算逆序数）　(n-1)n!	2	12	72	480	32659200	3.72*10^26
2.　代数余子式法≈2n!	2	9	40	205	7257600	3.10*10^25
3.　对角主元连乘法 $n^3/3$	4	13	24	45	342	5233

拿 1,3 两种方法所需的乘法次数加以比较，可以看出，只有 n=2,3 时，用显式法才比消元法方便。n=5 时，前两法已无法笔算。n=25 时，两种老定义的运算量已超越了计算机的能力，用当今最快的计算机来算也要几百年。这种现象称为“维度灾难(Curse of Dimensionality)”，拒绝它们是科学的做法。采用新定义，不但计算量大大缩减，证公式更容易，编程也方便了。那些“逆序数、代数余子式、随伴矩阵、行列式按行展开、…”等古典推导时用到的概念都可省略。非数学系避开了这些“拦路虎”，可大大压缩学时，降低难度，何乐而不为呢。

我们发现在所有的应用实例中，没有一个真正需要求行列式的（最多是求面积体积）。判解虽要用行列式，但高斯消元法已经用了“主元非零”的判据，它与行列式判据等价，所以行列式等于已经用在消元法中了，再去算它是冗余的。主元连乘是高斯消元法的自然延伸，无需引入新概念或新公式。用这个定义，很容易证明行列式的各种有用性质，并便于编程。实际上，工程中万一需要算行列式，用一个 det 命令就解决了。

有人把行列式的经典定义看做线性代数的基础，这是过时的观念。既然证明了它在计算高阶矩阵时有致命的缺陷，我们就不应让工程类学生在此浪费时间。经典行列式的时代已经过去！证据之一是最新的软件工具，在 MATLAB 中，找不到任何一个与上述传统定义相关的术语或子程序，即计算机是不用这些理论来算题的；证据之二是一些著名教材，例如 Strang[7]有意把行列式移到第五章，强调这是为了降低其重要性；Lay[5]做了精辟的评述：“在柯西的年代，矩阵很小，行列式在数学中起过重要作用。而今天它在大规模矩阵运算中只有很小的价值”。美国大多数非数学系教材都只讲到三阶行列式，用它解释一下两种传统定义中的术语，与本书的水平相当。

四、向量空间要讲透三维，减缩 N 维

帮助大学低年级学生建立立体概念是大学教学计划中的重要一环，经验证明三维空间的概念不是那末好建立的。它需要包括线性代数在内很多课程的共同努力。但中国现有的线性代数很多来源于高年级数学教材，它们片面强调 N 维空间和抽象思维，超越了大一新生的水平。国外的各种面向工科的线性代数优秀教材，都是以三维空间为主的，并且有大量的立体图辅助。中国教材强调 N 维，没法画图，全是公式，很不利于学生接受。本书强调二、三维，使例子形象化，并使图形作为建立概念的重要工具。利用三维空间向量的概念又可以推导出超定方程组的最小二乘解，为扩大线性代数的理论和应用起了很好的作用。

线性代数的许多应用实例与三维向量空间有关，比如刚体的形状测量和运动描述，机器人和三坐标测量仪中的坐标变换，3-D 动画向 2-D 屏幕的投影，3-D 打印机，...等等。即使在线性代数和空间解析几何自身中，也有大量的问题，如判断三点共线、五点共面等，超定方程组的最小二乘解也可以通过三维空间几何模型来证明。在本科所有后续课中，三维空间问题多得很，并没见到过 N 维向量空间的应用，为什么丢掉三维，急急忙忙去讲 N 维呢？经验证明，低年级学生能初步掌握三维就很不错了，N 维的抽象内容留给研究生和数学系学生都有点深。

五、弱化欠定，加强超定

实际问题中欠定方程组是非常少见，通常它是由于命题条件不足造成的，工程师可以拒绝处理或要求给出补充条件以使之确定。在真实世界中，没有人会希望工程师给出线性代数中教的那种解空间。例如化学方程的配平常常是欠定的，必须补充规定一个条件，那就是这些系数

必须是最小正整数。有了这个条件，欠定方程组就成了适定方程组了。如果不指出这点，而把一根 N 维空间中的超直线作为解来交差，那是要闹笑话的。

超定方程则是工程上常见的问题，它来源于实践中不可避免的干扰和测量误差，而且用几何概念来求最小二乘解又可加强向量空间的概念。世界各国的教材都讲，只有我国的多数教材不讲，使学生解不了大量的应用命题。“大讲欠定，不讲超定”是我国线性代数教学脱离工程的又一表现。我们应当采取符合工程实际的选材原则。

六、特征根不讲高阶，但实数和复数根都要讲

在许多教材中，讨论的是 N 阶的特征方程，但即使是三阶特征方程如何求根，也没有一本书讲过，这显然是前后脱节。此外，我们在本科课程中，找不到它们的物理意义和几何模型。能搞懂二阶的就不错了。同样，二次型只需讲到二阶。另一方面，复数特征根却是工程中很有用的。它是理解振动问题的基础，所以不能只讲实特征根。

七、说明线性代数改革需求的几个实例[1]

对这些例子，经典理论是束手无策的，由此证明对工科线性代数进行改造的必要性

例 1　根据图-1 所示的电路，求出 I_a, I_b, I_c.

列出此电路的方程组，写成矩阵模型如下:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3+R_4+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5+R_6+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u_s \Rightarrow$$

$$\mathbf{AX=b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X=inv(A)*b}$$

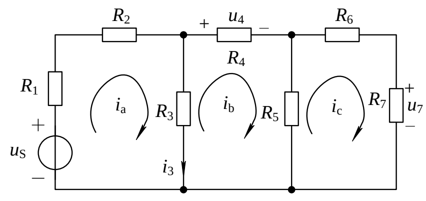

图-1　一个三回路电阻网络

在实际工程中，此矩阵的阶数可能达到几十。如果是交流电路，其变量和系数都是复数。解这样的问题，离开计算机是不可能的。但并不需要计算行列式，也不需要知道它的代数余子式或随伴矩阵等任何其它概念。

例 2　根据图-2 所示的信号流图，求出它的传输函数 $w_4=x_4/u$.

此信号流图的方程组和矩阵模型如下:

$$\begin{cases} x_1=-G_4x_3+u \\ x_2=G_1x_1-G_5x_4 \\ x_3=G_2x_2 \\ x_4=G_3x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -G_4 & 0 \\ G_1 & 0 & 0 & -G_5 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{X=AX+bu} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}=\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{u}}=\left(\mathbf{I-A}\right)^{-1}\mathbf{b}$$

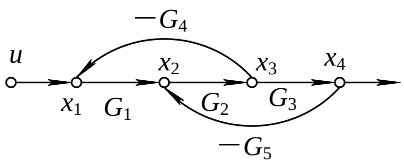

图-2 一个双反馈信号流图

用 MATLAB 求解结果为:

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} x_1/u \\ x_2/u \\ x_3/u \\ x_4/u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [\ (1+G_2G_5G_3)/(1+G_2G_5G_3+G_1G_2G_4)] \\ [\quad G_1/(1+G_2G_5G_3+G_1G_2G_4)] \\ [\quad G_1G_2/(1+G_2G_5G_3+G_1G_2G_4)] \\ [\quad G_1G_2G3/(1+G_2G_5G_3+G_1G_2G_4)] \end{bmatrix}$$

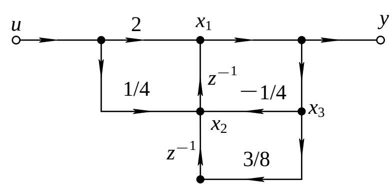

图-3 一个数字滤波器结构图

即:　$$W_4=\frac{x_4}{u}=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_5G_3+G_1G_2G_4}$$

这方法可以用于数字滤波器(图-3) 和控制系统(图-4)，以便根据其结构图求出全系统的传输函数[6]。不管它的结构多复杂，阶数多高，用支持矩阵运算的软件工具都可以在几秒钟内得到它的解。

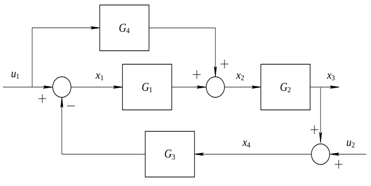

图-4　一个控制系统方框图

图-3 的解是：$W(3)=\dfrac{y}{u}=-2\dfrac{q+8}{(3\,q\ +\ 4)\ (q-2)}=\dfrac{-2z^{-1}-16}{(3\,z^{-1}+\ 4)\ (z^{-1}-2)}$

图-4 的输入是 2×1 向量，输出是 5×1 向量，得到的解是 5×2 传递函数矩阵：

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{X}/\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} x_1/u_1 & x_1/u_2 \\ x_2/u_1 & x_2/u_2 \\ x_3/u_1 & x_3/u_2 \\ x_4/u_1 & x_4/u_2 \\ e/u_1 & e/u_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{1+G_1G_2G_3}\begin{bmatrix} 1-G_2G_3G_4 & -G_3 \\ G_1+G_4 & G_1G_3 \\ G_1G_2+G_2G_4 & -G_1G_2G_3 \\ G_1G_2+G_2G_4 & 1 \\ G_1G_2+G_2G_4 & -G_1G_2G_3 \end{bmatrix}$$

在一次运行中竟然求出了十个传递函数。这说明线性代数在三门极重要后续课程（信号与系统，数字信号处理、自动控制原理）及工程中都具有关键性的意义。但若不与计算机联系起来，手工解这几道题几乎不可能，而且结果极不可信,所以靠笔算的线性代数没有工程用途。

例 3　根据表-2 中的五点空间坐标，评价其共面性，并求其拟合平面的方程。

表-2　测得的各点坐标

	点 a	点 b	点 c	点 d	点 e
x	-0.28	4.00	0.72	2.70	2.00
y	−0.03	4.60	0.71	.20	1.80
z	0.55	3.00	−0.13	6.20	−0.32

这是一个在具有三坐标测量仪的现代化的车间里会遇到的线性代数问题，解它需要较强的空间概念。解题的步骤如下:

(1) 设向量组 $V=[v_a,v_b,v_c,v_d,v_e]$，它的各列是这些点的三维坐标。令 $U=V-[v_e,v_e,v_e,v_e,v_e]$ 为差向量组，它表示把坐标原点移到点 e 所得的新向量组。

(2) 如果这些点共面，则 U 中的各点处在同一平面上，故 U 的秩应为 2 或以下。但由于数据的有限精度和计算误差，算出的 U 的秩必定为 rank(U)=3.

(3) 主要的问题在于判别这些点在多大程度上共面？离开共面的最大误差是多少？这涉及评价行列式接近于零的程度,理论相当深,但对非数学系的学生,可以靠 软件工具来解。在MATLAB 中，求秩的函数 RANK(A,TOL) 包含一个输入容差变元 TOL，它的默认值为 10^{-16}，表示有一点超过 10^{-16} 的误差，秩就要加一，也就是不承认这几点共面。采用大一点的容差试算，可得 rank(U,0.01)=3 而 rank(U,0.1)=2。这意味着容差为 0.1 时，五点可看成在同一平面上。

(4). 要求出这个拟合平面的方程和各点到它的距离，最简便的方法是用 qr 分解：键入 [Q,R]=qr(U)，得到：

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} -0.75 & -0.08 & 0.66 \\ -0.60 & -0.35 & -0.72 \\ 0.29 & -0.93 & 0.21 \end{bmatrix},\ \mathbf{R}=\begin{bmatrix} 3.05 & -2.23 & 1.66 & -0.10 & 0 \\ 0 & -4.12 & 0.30 & -6.98 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & 0.11 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 Q 的第三列是该平面的方向余弦，R 中的第三行是各点到拟合平面的距离。可以看出它的起伏可控制在±0.1 以下。拟合平面的方程可以用点斜公式求得为:

$$0.66(x-4)-0.72(y-4.6)+0.21(z-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 0.66x-0.72y+0.21z=0.042$$

在解这类问题时，完全没用到 N 维向量经典理论，而计算机和三维空间概念却是不可或缺的。手工笔算完全无用，确实应该被淘汰了。

八、结语

采用了这些改革措施后，无用的理论大大减少，有用的理论有所增加，概念题和证明题大大缩减；但解决实际问题的能力却有长足的提高，这正是我们期待的。

这本书设立了一个满足应用需求的最低理论界限。它不带有主观的任意性，每一个内容都有客观的应用背景。去掉任一部分，必然造成解某些实际问题的困难；实施这本书的体系，加上 MATLAB，大约需 30 学时左右，适用于低学时的大纲，也适合在职人员继续教育。但对学时多的专业，也有指导意义。因为国内现有绝大多数高学时教材的解题水平都比不上本书。可以把这本书中的实际问题做一个标杆，高学时的教材至少要能解这些问题，才算达到线性代数实践的起码要求，然后再用多余的学时顾及其他用处较小但更深的理论问题。

考研是影响本课改革的重要因素。现在有些线性代数考研题是按经典数学系的大纲出的，与今天非数学类不对口。显然要改革，使之与计算机结合并面向应用。在考研题改革前，应明确公共基础课内容是为本科各后续课服务的，特别是为后续课使用计算机打基础的；那些本科四年根本用不到的高深内容，到考研时早忘光了，与其放在大一让全体学生陪绑白耗时间，无谓地增加师生负担和教育成本。不如作为高年级选修课，考前供少数考研生补修。

附录：用主元连乘法定义和计算行列式

用高斯法解线性方程组 **AX=b** 时，列出增广矩阵 **C=[A,b]**，通过消元求 **C** 的行阶梯阵：

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \Rightarrow [\mathbf{P},\mathbf{d}]=\left[\begin{array}{cccc:c} p_{11} & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & p_{22} & \cdots & 0 & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{nn} & d_n \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1/p_{11} \\ d_2/p_{22} \\ \vdots \\ d_n/p_{nn} \end{bmatrix}$$

只要消元后的对角主元 $p_{11},p_{22},\ldots,p_{nn}$ 都不等于零，此方程组的解向量 X 就存在。方程解存在的条件也可以表达为另一种形式，$|D|=\prod_{i=1}^{n}|p_{ii}|\neq 0$，D 被称为方阵 A 的行列式，这就是主元连乘定义的大意。这里只定义了行列式的模，避开了其正负号的定义，因为实际上只要知道行列式是否为零，它的具体数值和符号都毫无用处。在工程实践中，所有应用题都只要求解，不需求行列式，所以初等的工科线性代数不必在行列式计算方面花太多功夫。如果真要求行列式，当然只能用计算机。主元连乘法的行阶梯子程序是现成的，加一条连乘语句即可。其他两种方法具有“维数灾难”，不可能有子程序，再花时间去学它的繁琐理论是太没有价值了。主元连乘法合理性的严格证明可见[4]。

参 考 文 献

［1］陈怀琛，实用大众线性代数（MATLAB 版），西安电子科技大学出版社，2014 年 8 月

［2］钱学森，回顾与展望，《老交大的故事》,江苏文艺出版社，1998年12月

［3］David Carlson et al, Resources for Teaching Linear Algebra, Mathematical Association of America notes 42,ISBN 0-88385-150-4, 1997

［4］游宏，朱广俊，线性代数，北京，高等教育出版社，2012, 97-114 页

［5］David C Lay,“Linear Algebra and its application”3th Edition, Pearson-Addison-Wesley, 2006, pp162

［6］陈怀琛，屈胜利，何雅静，"Reduction of Complex Linear Systems using Matrix Modeling", *Proceedings of 29th Chinese Control Conference*, Beijing, China, July, 2010

［7］Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, 4th Edition, Wilsley-Cambridge Press, Feb. 2009, pp.244, ISBN: 978-098023271

paper ID No. 60009