实用大众线性代数

第1章 线性方程组与矩阵

主讲：杨威

第1章 线性方程组与矩阵

1.1 概述

例1.1 食品配方的应用问题，某食品厂收到某种食品的订单，要求这种食品由甲、乙、丙、丁四种原料做成，且该食品中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的比例分别为15%、5%和12%。而甲、乙、丙、丁原料中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的百分比由表1.1给出。那么，如何用这四种原料配置出满足要求的食品呢？

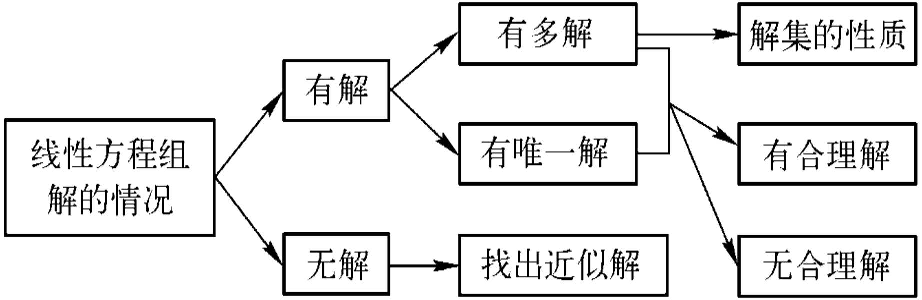
表1.1

	甲	乙	丙	丁	某食品
蛋白质（%）	20	16	10	15	15
脂肪（%）	3	8	2	5	5
碳水化合物（%）	10	25	20	5	12

表1.1					
	甲	乙	丙	丁	某食品
蛋白质（%）	20	16	10	15	15
脂肪（%）	3	8	2	5	5
碳水化合物（%）	10	25	20	5	12

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 20\%x_1 + 16\%x_2 + 10\%x_3 + 15\%x_4 = 15\% \\ 3\%x_1 + 8\%x_2 + 2\%x_3 + 5\%x_4 = 5\% \\ 10\%x_1 + 25\%x_2 + 20\%x_3 + 5\%x_4 = 12\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 20x_1 + 16x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 15 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 5 \\ 10x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$$

线性代数的任务之一



线性方程组的解有三种类型：

1. **适定方程组：存在着唯一的一组解；**
2. **欠定方程组：其解存在但不唯一；**
3. **超定方程组：不存在精确解，可以求出其近似解。**

1.2 线性方程组解的几何意义

- 例1.2　二元线性方程组解法

$$(a)\begin{cases} x_1-2x_2=-1 \\ -x_1+3x_2=3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \\ r_2'=r_2+r_1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1-2x_2=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$$

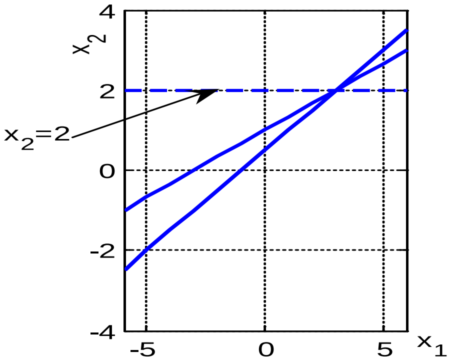
$$(b)\begin{cases} x_1-2x_2=-1 \\ -x_1+2x_2=3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \\ r_2=r_2'+r_1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1-2x_2=-1 \\ 0x_1+0x_2=2 \end{cases}$$

题(a)可以由下而上地回代解出x2=2，及x1=3，这是解线性方程组的规范方法。

题(b)则无解。

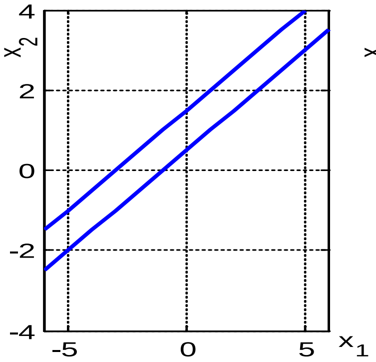
题(c)有无穷多解。其几何解释见下图。

二元方程组解的几种情况



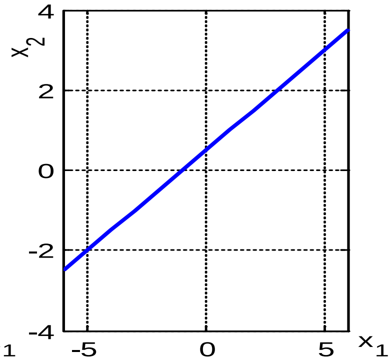
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

(a)有解



$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

(b) 无解



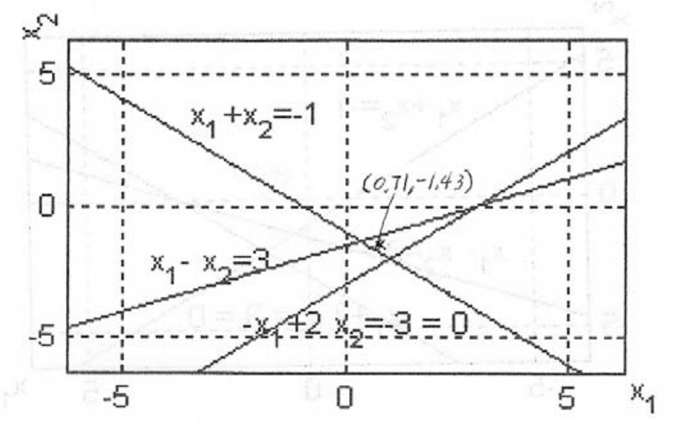
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

(c) 有无数解

超定二元方程组的近似解

三个方程，只有两个变量。它们所对应的三根直线并不共点，即方程组不相容，称为超定方程组。它没有精确解，但有近似解——最小二乘解(第四章介绍)。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$$



例1.3 求解下列三元方程组

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -5x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 4 \\ -5y + 3z = -5 \\ 7y - 7z = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 4 \\ -5y + 3z = -5 \\ -2.8z = 14 \end{cases}$$

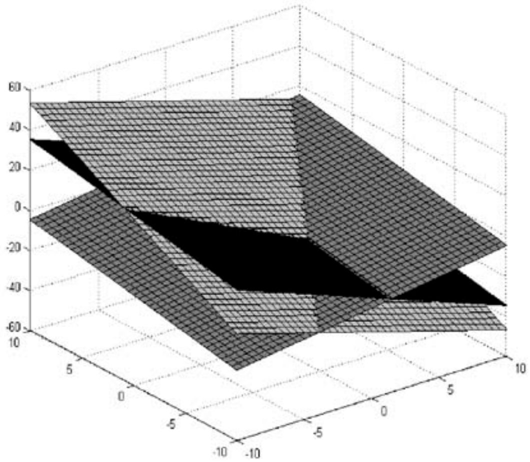
从第2个方程中减去第1个方程的2倍，得到x系数为零的新的第2方程，再从第3个方程中减去第1个方程的-5倍，得到x系数为零的新的第3个方程。

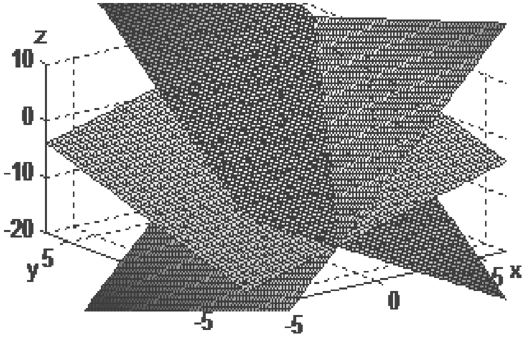
- 再将第2个方程乘7/5与第3个方程相加，在第3个方程中消去y。
- 于是形成了阶梯形的结构。可以由下而上地回代解出z, y, x，这是解线性方程组的规范方法。

例1.3的解的几何意义

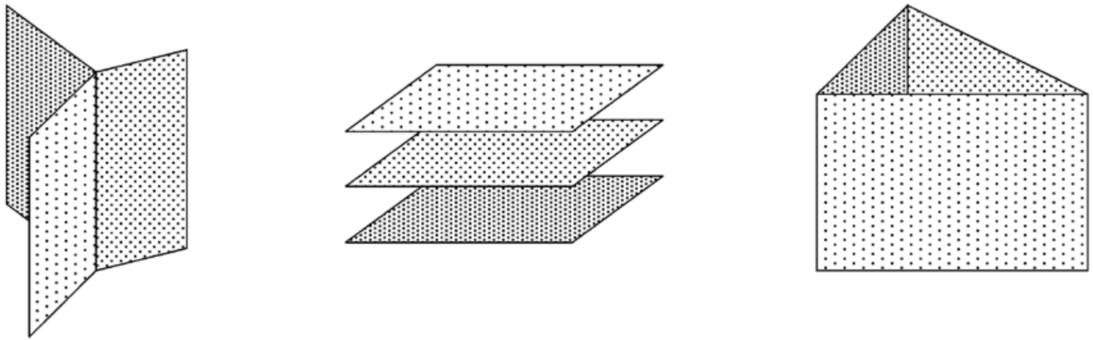
这三个方程在笛卡尔坐标系中的图形是三个平面，方程组的解就是它们的交点坐标，如下左图。
若将第三个方程改一下，消元后剩了两个方程，交点就成了交线，说明有无数个解，构成了一根直线，如下右图。

$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-3y+z=3 \\ 4x-y-z=11 \end{cases} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1} \begin{cases} x+y-z=4 \\ -5y+3z=-5 \\ -5y+3z=-5 \end{cases} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{cases} x+y-z=4 \\ -5y+3z=-5 \\ 0=0 \end{cases}$$





三元方程无解和多解的几何意义



对于更多元的线性方程组，不可能想象出其空间的几何图形，但关于欠定、适定和不相容方程的基本概念是一脉相承的，它们的解的特性也都可以推广到高维空间。

1.3 高斯消元法与阶梯形方程组

将上面的方法推广到高阶系统。这就要借助于矩阵，用计算机解决问题，这是线性代数与初等代数的区别。设m为方程数，n为变元数，一般情况下，变量的个数*n*与方程的个数*m*不一定相等。则n元方程组可表为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.3.1)$$

式（1.3.1）称为n元线性方程组。

高阶线性方程组的形式

- 线性方程组（1.3.1）中解的全体称为它的解集合。解方程组就是求其全部解，亦即求出其解集合。如果两个方程组有相同的解集合，就称它们为同解方程组。
- 消元法的基本思想是：通过消元变换把方程组化为容易求解的阶梯形结构的同解方程组。下面通过一个三元方程组的例题来说明消元法的具体步骤。

例1.4方程组的消元过程

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=-4 \\ 3x_1+3x_2\ \ -x_3\ =\ -5 \\ 2x_1+2x_2\ \ -x_3\ =\ \ 4 \end{cases} \qquad （1.3.2）$$

解：将式中的第一个方程分别乘以-3/3(-a_{21}/a_{11})及-2/3(-a_{31}/a_{11})，加到第二、三方程上，可以消去后两个方程中的变量x_1，

$$\begin{cases} 3x_1\ +\ 2x_2\ \ -\ \ 2x_3=-4 \\ \qquad\quad x_2\ \ +\ \ x_3\ =\ -1 \\ \quad 2/3x_2+1/3x_3=20/3 \end{cases} \qquad (1.3.3)$$

将式（1.3.3）中的第二个方程乘-2/3(-a_{32}/a_{22})，加到第三个方程中，消去其中的x_2，得

例1.4方程组的消元过程(续)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ \quad\quad\; x_2 + x_3 = -1 \\ \quad\quad\quad -1/3x_3 = 22/3 \end{cases} \qquad (1.3.4)$$

形如式（1.3.4）的方程组称为**行阶梯形方程组**。这样的阶梯形方程组可以用回代法方便地逐个求出它的解。回代过程如下：由最后一个方程解出x_3= -22，代入第二个方程，解得x_2=-1+22=21，再将x_2，x_3代入第一个方程，得到：x1=(-4-2x2+2x3)/3=-30。

从编程来看，回代过程也可以像消元一样进行，不过是自下而上，自右至左，把主对角线右上方的元素都消成零而已。

例1.4方程组的消元过程(续)

- 把第三个方程分别乘以-6, 3，依次加到第一、二两方程中，消去这两个方程中x3的系数，再将第二个方程乘2，加到第一个方程中，得到仅含变量x1的方程，方程组依次成为：

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & = -48 \\ \qquad x_2 & = \ 21 \\ \qquad\qquad -1/3x_3 & = \ 22/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 & = -90 \\ \qquad x_2 & = \ 21 \\ \qquad\qquad -1/3\, x_3 & = \ 22/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 & = -30 \\ \qquad x_2 & = \ 21 \\ \qquad\qquad x_3 & = -22 \end{cases}$$

最后的行阶梯形方程组只保留了系数均为1的对角项。得到它就等于求出了方程组的解。消元法的任务已经完成。

三种同解变换

- 在消元过程中，主要对原方程组进行了三种变换：
- ① 互换两个方程的位置；称为位置变换。
- ② 用一个非零数k乘某个方程；称为数乘变换。
- ③ 把一个方程的k倍加到另一个方程上。称为消元变换。
- 这三种变换称为线性方程组的**同解变换**。因为对方程组而言，这些变换不会改变方程组的解。
- 消元法规则刻板，容易程序化，其计算量又是最少的，所以可以利用计算机用简明的程序实现。成为一切线性方程组求解的基础。

1.4 矩阵及矩阵的初等变换

- 重新观察例1.4，可以发现，从方程组（1.3.2）变换到方程组（1.3.5）的全过程中，方程组中的变量并没有参与任何运算，参与运算的只是方程组的系数和常数。于是可省略变量，提取方程组（1.3.2）的等式左端的系数和右端常数，分别写成如下系数数表A和常数数表b

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- 其中，数表A的行号表示方程的序号，列号表示变量x的序号。由数表A、b很容易恢复出方程组原型。所以可以通过这两个数表来研究线性方程组。该矩形数表就称为矩阵。学习线性代数的主要目标就是要学会利用矩阵来描述系统，并用矩阵软件工具去解决各种问题。

1.4.1 矩阵的概念和定义

- 定义1.1　由m×n个数(i=1,2,…,m; j= 1,2,…,n）排成的m行n列的矩形数表(右方为对应的MATLAB表示法)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \left(a=\begin{bmatrix} a(1,1) & a(1,2) & \cdots & a(1,n) \\ a(2,1) & a(2,2) & \cdots & a(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(m,1) & a(m,2) & \cdots & a(m,n) \end{bmatrix} \right)$$

- 称为m行n列矩阵，简称m×n(阶)矩阵，通常用黑体大写字母来

表示。矩阵中的m×n个数称为矩阵A的元素，其中a_{ij}表示矩阵A的第i行第j列元素。在MATLAB中表为a(i,j)，元素全是实数的矩阵称为实矩阵；元素含复数的矩阵称为复矩阵。

几种特殊矩阵

- 只有一行的矩阵 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ ，称为行矩阵，又称为行向量。
- 只有一列的矩阵 $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 称为列矩阵，又称为列向量。
- 如果两个矩阵的行数与列数相等，则称它们为同型矩阵。
- 若A、B是同型矩阵，且所有对应位置的元素值均相等，则称矩阵A与矩阵B相等，记为A=B。
- 元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作O。
- 行数与列数相同的矩阵称为n阶方阵，简记为A_n。

几种特殊矩阵(续)

- 一个n阶方阵的左上角与右下角之间的连线称为它的主对角线。主对角线下方的元素全为零的方阵称为上三角矩阵，主对角线上方的元素全为零的方阵称为下三角矩阵，即

$$\text{上三角 } \mathbf{A_n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{下三角} \boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 主对角线以外的元素全为零的方阵称为对角阵。在对角方阵中，主对角线以外的零元素可不必写出。
- 主对角线上全为1的n阶对角方阵称为单位矩阵，记作：

$$\text{对角矩阵} \boldsymbol{\Lambda}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{单位矩阵} \boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

线性方程组用增广矩阵表示

由线性方程组所有系数所构成的矩阵，称为线性方程组的系数矩阵。系数矩阵为n阶方阵的方程组也称为n阶方程组。三阶线性方程组（1.3.2）的系数矩阵为;

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- 把A,b并排起来组成的矩阵C称为增广矩阵，知道C也就知道了线性方程组的全部参数。对方程所做的消元变换都可以表示为对系数增广矩阵的行变换。

前向消元过程

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-2x_3=-4\\3x_1+3x_2-x_3=-5\\2x_1+2x_2-x_3=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x_1+2x_2-2x_3=-4\\x_2+x_3=-1\\2/3x_2+1/3x_3=20/3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x_1+2x_2-2x_3=-4\\x_2+x_3=-1\\-1/3x_3=22/3\end{cases}$$

系数矩阵

$$\begin{bmatrix}3&2&-2&-4\\3&3&-1&-5\\2&2&-1&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3&2&-2&-4\\0&1&1&-1\\0&2/3&1/3&20/3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3&2&-2&-4\\0&1&1&-1\\0&0&-1/3&22/3\end{bmatrix}$$

回代过程的系数矩阵

$$\begin{bmatrix}3&2&-2&-4\\0&1&1&-1\\0&0&-1/3&22/3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3&2&0&-48\\0&1&0&21\\0&0&-1/3&22/3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3&0&0&-90\\0&1&0&21\\0&0&-1/3&22/3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-30\\0&1&0&21\\0&0&1&-22\end{bmatrix}$$

1.4.3 矩阵的初等行变换

- 定义1.2　下面三种变换称为矩阵的初等行变换：（以下的r是英文行(row)字的缩写）

（1）交换两行的位置（交换第i，j行，记作$r_i \longleftrightarrow r_j$）；

（2）以非零数k乘某行（以k乘第i行，记作kr_i）；

（3）把某一行的k倍加到另一行上（把第j行的k倍加到第i行上，记作r_i+kr_j）

- 矩阵的这三种初等行变换就对应于方程组的三种初等变换（位置、数乘和消元）。它们都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换，由此可知，初等行变换是同解变换。
- 如果矩阵A经有限次初等行变换变成矩阵B，就称矩阵A与矩阵B等价。

方程消元等价于行变换

- 线性方程组和它的增广矩阵是一一对应的，对线性方程组进行初等行变换就是对其增广矩阵进行初等行变换。于是解方程组（1.3.2）的过程可用矩阵的初等行变换来一一对照。

$$\mathbf{C}=[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 3 & 3 & -1 & -5\\ 2 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2/3r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2/3 & 1/3 & 20/3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2/3r_2]{}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & -48\\ 0 & 1 & 0 & 21\\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & -90\\ 0 & 1 & 0 & 21\\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & -90\\ 0 & 1 & 0 & 21\\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3\end{bmatrix}$$

- 这样得到了行阶梯矩阵，它对应于方程组（1.3.5）。
- 对该矩阵还可以继续进行初等行变换，它对应于消元法中的回代过程。
- 回代后系数矩阵成为对角矩阵。最后一步是将各行都除以对角元素，使系数矩阵成为一个单位矩阵，其最右边一列就是方程组（1.3.2）的解。

1.5 利用MATLAB来解方程组

线性代数最基本的运算函数：rref

(Reduced Row Echelon Form—rref)

作用：把矩阵化为行最简形，有以下具体功能：

（1）解线性方程组；

（2）求矩阵的秩；

（3）求矩阵行最简形首元所在的列数。

例1.6 用计算机解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -11 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -12 \end{cases}$$

解:A=[2,-2,2,6;2,-1,2,4;3,-1,4,4;1,1,-1,3],
b=[-16;-10;-11;-12
U0c=rref([A,b])
系统立即给出:

$$\mathrm{U0c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

U0c矩阵的最后一列就是方程组的解。

例1.7 设方程组的系数矩阵A, b如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 2 & 2 & -2\\ 1 & -5 & 1 & -3 & -1\\ -1 & 2 & -5 & 6 & 5\\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$$

- **判断它解的性质及A的秩。**
- **解:A=[-2,-2,2,-2,2;1,-5,1,-1,-3;-1,2,-5,5,6;-1,2,1,-1,0]**
- **b=[-2;-1;2;0],[U0c,ip]=rref([A,b])**
- **得到：U0c =**

1	0	0	0	0	-2/9
0	1	0	0	0	2/9
0	0	1	-1	0	-2/3
0	0	0	0	1	-1/3

- **ip= 1 2 3 5**

例1.7的解（欠定方程组）

- ip的长度为4，说明有4个主元和主元行，即矩阵A的秩r=4。由于系数矩阵A与增广矩阵[A,b]具有同样的秩，方程组是相容的。它有四个方程和五个变量。故方程组又是欠定的，其中x4是可以任选的自由变量，取不同的值就有不同的解，故有无穷多组解：

  $$x_1=-2/9,\quad x_2=2/9,\quad x_3=-2/3+x_4,\quad x_5=-1/3,$$

- 按适定方程那样求解，使x=A\b，可以得到答案。

- 其中x4可以任意赋值，可设为常数x4=c，于是，方程组有无穷多组解。

1.6 应 用 实 例

- 1.6.1 求插值多项式 $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$ 的各系数，使它能通过表中各点。

t_i	0	1	2	3
$f(t_i)$	3	0	–1	6

- 解：列方程

$$\left\{\begin{array}{llllr} a_0 & & & & = 3 \\ a_0 & + a_1 & + a_2 & + a_3 & = 0 \\ a_0 & +2a_1 & +4a_2 & + 8a_3 & = -1 \\ a_0 & +3a_1 & +9a_2 & +27a_3 & = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{AX}=\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{X}=\mathbf{A}\setminus\mathbf{b}$$

程序为：A=[1,0,0,0;1,1,1,1;1,2,4,8;1,3,9,27]
b=[3;0;-1;6], U0=rref([A,b])

插值多项式系数计算

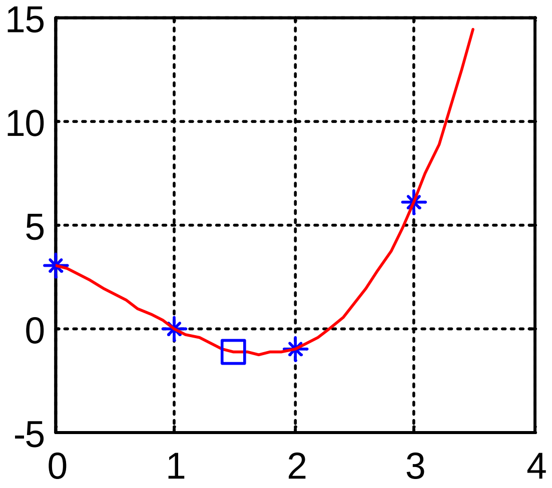
U0 =

1	0	0	0	3
0	1	0	0	−2
0	0	1	0	−2
0	0	0	1	1

X=A\b=[3, −2, −2, 1]^T

即a0=3, a1=−2, a2=−2, a3=1代入

$$p(t) = 3 - 2t - 2t^2 + t^3$$

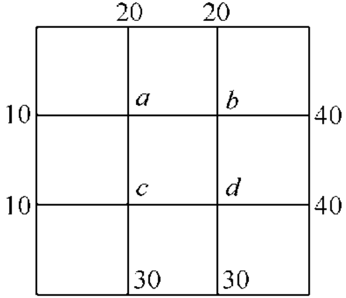


求t=1.5处多项式的值：

$$p(1.5) = 3 - 2(1.5) - 2(1.5)^2 + (1.5)^3 = -1.125$$

1.6.2 平板稳态温度的计算

$$x_a = (10 + 20 + x_b + x_c)/4$$
$$x_b = (20 + 40 + x_a + x_d)/4$$
$$x_c = (10 + 30 + x_a + x_d)/4$$
$$x_d = (40 + 30 + x_b + x_c)/4$$



- 写成规范的矩阵方程AX=b：

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.25 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 1.00 & 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0 & 1.00 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & -0.25 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 15 \\ 10 \\ 17.5 \end{bmatrix}$$

平板温度问题的解

- A=[1,-.25,-0.25,0;-0.25,1,0,-0.25;-0.25,0,1, -0.25; 0,-0.25, -0.25,1]
- b=[7.5;15;10;17.5], U0=rref([A,b])

运行结果为：

- U0 = 1 0 0 0 20
- 0 1 0 0 27.50
- 0 0 1 0 22.5000
- 0 0 0 1 30.0000
- 即xa=20度，xb=27.5度，xc=22.5度，xd=30度

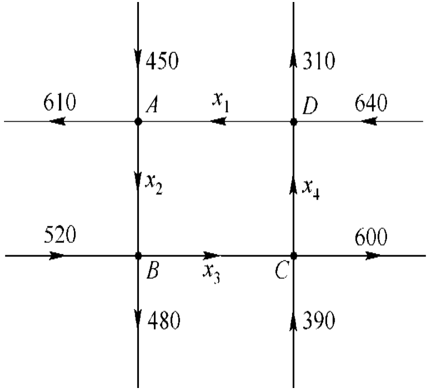
1.6.3 交通流量的分析

节点A:　　$x1+450=x2+610$

节点B:　　$x2+520=x3+480$

节点C:　　$x3+390=x4+600$

节点D:　　$x4+640=x1+310$



$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad &= 160 \\
x_2 - x_3 \qquad\quad &= -40 \\
x_3 - x_4 &= 210 \\
-x_1 \qquad\qquad + x_4 &= -330
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ -40 \\ 210 \\ -330 \end{bmatrix}
$$

交通流量的分析计算机解

- A=[1,-1,0,0;0,1,-1,0;0,0,1,-1;-1,0,0,1]
- b=[160;-40;210;-330]，U0=rref([A,b])

$$U0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} 330 \\ 170 \\ 210 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}x_4$$

- 这是一个欠定方程组，如果用X=A\b,得出的是非数NaN，即得不出解，所以用rref来解概念比较清楚。它的秩为3，设x4是自由变量，将它移到增广项位置，就可以求出上述的解。其物理意义就是可以有任意数量的车绕行而不影响方程组，但同时影响x1~x4。

1.6.4 化学方程的配平

$$(x_1)C_3H_8+(x_2)O_2\rightarrow(x_3)CO_2+(x_4)H_2O$$

四种物质的成分列向量 $C_3H_8:\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix},\ O_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},\ CO_2\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\ H_2O\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$

配平方程为:

$$x_1\cdot\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix}+x_2\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}=x_3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+x_4\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

移项化后可知:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&-1&0\\8&0&0&-2\\0&2&-2&-1\end{bmatrix}\quad\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

化学反应方程配平的解

这是一个欠定方程组，用行阶梯变换求解，
A=[3,0,-1,0;8,0,0,-2;0,2,-2,-1]，U0=rref(A)

得到：
$$U0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \end{bmatrix}$$

第四行看做0=0或x4＝x4，第四列是x4的系数，将它看做自由变量，得到的解必须是最小正整数，x4应取４，配平后方程：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} (x_4\text{取 }4\text{ })$$

$$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$$

第一章要求掌握的概念和计算

1. 了解二阶和三阶线性方程组在笛卡尔坐标系中的图形及几何意义。

2. 掌握利用初等变换把增广矩阵化为行最简形。

3. 秩表明独立方程的个数。系数矩阵与增广矩阵的秩相等是线性方程组有解的充分必要条件。

4、MATLAB实践：

（1）能够利用MATLAB软件构造矩阵；

（2）能够利用MATLAB软件求解线性方程组的解；

（3）能够利用MATLAB软件求矩阵的秩；