数字滤波器的信号流图方程和计算机求解

陈怀琛

（西安电子科技大学 334 信箱 西安 710071 hchchen@xidian.edu.cn ）

摘要：本文把任意结构的数字滤波器用信号流图(Signal-Flow Graph)的矩阵表达式进行表述，这个矩阵表达式的解非常简洁，并具有通用性。.但其求解涉及高阶矩阵的求逆问题，手工计算有困难。利用具有符号推理功能的科学计算软件，方便地解决了这个问题。从而为任意复杂结构的数字滤波器的求解找到了一个简单、可靠、完整的途径。文中并用 MATLAB 软件工具为例，给出了求解的过程和编程的技巧。

关键词：信号流图；SFG；系统函数；MATLAB；符号运算；滤波器结构；计算机辅助设计

The Signal-Flow Graph Equation and Its Computerized Solution for Digital Filters

Chen, Huaichen

(Department of Electronics Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, hchchen@xidian.edu.cn)

Abstract: Digital Filters in arbitrary structure forms are expressed in a unique matrix equation deduced from their Signal Flow Graph. The solution of this matrix equation is very neat, but its calculation is related to a high order matrix inversion. By taking advantage of the scientific software with symbolic mathematics, this difficulty was solved. Thus a simple, reliable and general method for calculating any complex structured digital filter is provided. Examples are given to show the procedure and the programming techniques using MATLAB.

Key words: signal flow graph; system function; MATLAB; symbolic math; filter structure; computer aided design

1． 引言

任意复杂线性系统都可以用信号流图来表示它的内外信号关系。根据其拓扑特性，Mason 给出了解的一般公式[1]。但对复杂结构系统，其计算很冗繁而不实用。为此，我们把信号流图用矩阵描述，利用现已高度发展的符号运算计算机辅助软件（例如 Maple, MATLAB 等），就可以很方便地得出其全系统的传递函数[2]。将这个结果作一些变换，推广应用于信号处理领域，就可以藉计算机的帮助，推导任意复杂结构的滤波器的系统函数。

2．信号流图求解的解析公式

设信号流图中有 Ki 个输入节点，K 个中间和输出节点，它们分别代表输入信号 u_i（i=1,2,…Ki）和系统状态 x_j（j=1,2,…K）。信号流图代表它们之间的联结关系。用拉普拉斯算子表示后，任意 x_j 可以表为 u_i 和 x_j 的线性组合：

$$x_j = \sum_{k=1}^{K} q_{jk} x_k + \sum_{i=1}^{Ki} p_{ji} u_i$$

用矩阵表示可写成： $X = QX + PU$ （1）

其中：$X = [x_1, x_2, \ldots, x_k]^T$ 为 K 阶状态列向量，

$U=[u_1, u_2, \ldots, u_{ki}]^T$ 为 Ki 阶输入列向量，

Q 为 K×K 阶的连接矩阵，

P 为 K×Ki 阶的输入矩阵：

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & q_{NN} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NM} \end{bmatrix}$$

其中的元素 p_{ij},q_{ij} 均为含有拉普拉斯算子 s 的有理分式。

令 W=X/U 为以 U 为输入，全部状态 X 为输出的系统函数，它是一个 K×Ki 的矩阵。由（1）移项，不难得到：

$$W = \frac{X}{U} = (I-Q)^{-1}P \qquad (2)$$

这个简明的公式就等价于信号流图中的梅森公式。只要写出 P 和 Q，任何复杂系统的传递矩阵都可用这个简单的式子算出。若代入的是符号，得出的是用符号表示的公式，若代入的是数据模型，得出的是用数值表示的系统函数。这个公式既适用于连续线性系统，也适用于离散线性系统。其结果取决于元素 p_{ij},q_{ij} 的表达式。

3. 在连续系统中的求解举例

设某线性系统的框图及信号流图如图 1 所示，则可列出其方程组：

x1 = -G1*x4+G1*u

x2 = G2*x1 – G2*x5
x3 = G3*x2
x4 = G4*x2
x5 = G5*x3

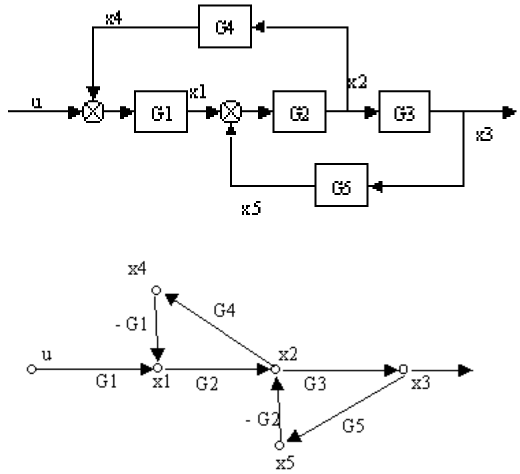

图 1 某系统框图（上）及对应的信号流图（下）

写成矩阵形式，连接矩阵 Q 和输入矩阵 P 分别为：

$$Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -G1 & 0\\ G2 & 0 & 0 & 0 & -G2\\ 0 & G3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & G4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & G5 & 0 & 0\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}G1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

MATLAB 及其符号运算工具箱 Symbolic 是一个功能强大而语法又十分简明的软件。用它来说明求解的过程非常清楚易懂。它对符号运算和数值运算采用同样的算符和程序，不同的结果只取决于被运算变量的属性。比如要推导滤波器公式，矩阵 Q 和 P 都必须是符号元素构成的符号矩阵。在 MATLAB 中，变量元素的符号属性由 syms 语句规定，而矩阵的属性由其第一个赋值元素的属性所决定。要推导公式，矩阵元素的第一条赋值语句的右端必须用符号元素，不能用具有二义性的 0 或 1（它们既可以是数值，也可以是符号，但默认为数值）来赋值。另外，MATLAB 对矩阵中任何一个元素赋值后，该元素左上方未赋值的矩阵元素会全部自动置零。利用这个规则，可以只对非零的元素及矩阵右下角的那个元素赋值，从而用最少的语句给整个 Q 矩阵及 P 矩阵赋值。按这个规则，可编出程序如下：

```
syms    G1 G2 G3 G4 G5
Q(1,4)=-G1; Q(2,1)=G2; Q(2,5)=-G2;
Q(3,2)=G3; Q(4,2)=G4; Q(5,3)=G5; Q(5,5)=0
P(1,1)=G1; P(5,1)=0
W=inv(eye(5)-Q)*P
pretty(W(3))
```

程序运行的结果为：

$$W=\begin{bmatrix}G1\ \ (1+G5\,G3\,G2)/(1+G5\,G3\,G2+G4\,G2\,G1)\\ G2\,G1/(1+G5\,G3\,G2+G4\,G2\,G1)\\ G3\,G2\,G1/(1+G5\,G3\,G2+G4\,G2\,G1)\\ G4\,G2\,G1/(1+G5\,G3\,G2+G4\,G2\,G1)\\ G5\,G3\,G2\,G1/(1+G5\,G3\,G2+G4\,G2\,G1)\end{bmatrix}$$

W 是以 u 为输入,X 为输出的传递函数。因为 X 中有 8 个变量，所以 W 是 8×1 单列向量。我们关心的输出是 x3，故取 W3=W(3)，即 W 阵的第三行。

$$W3=\frac{G3\,G2\,G1}{1+G5\,G3\,G2+G4\,G2\,G1}$$

其结果和梅森公式的结果相同。

在连续系统中，G1,G2,G3,G4,G5 都可表为拉普拉斯算子 s 的函数，若

$$G1=\frac{1}{2s+1},\ \ G2=\frac{5}{3s^2+2s+1},$$
$$G3=\frac{1}{4s+1},\ G4=\frac{2s-8}{s+5},\ G5=\frac{6}{8s+1},$$

这时只要用语句：

syms s 取代 syms G1,G2,G3,G4,G5

把 s 定义为符号变量，并将 G1,G2,G3,G4,G5 用 MATLAB 语句赋值，写入程序中，结果为：

$$W3=\frac{5(8s+1)(s+5)}{192s^6+1256s^5+1698s^4+1497s^3-649s^2-59s+115}$$

在文献[2]中，还讨论了 G1,G2,G3,G4 和 G5 用 MATLAB 中的 LTI 模型表述的情况。从中推导出系统函数的状态空间、传递函数、零极增益等各种模型形式，并讨论了这种方法比 MATLAB 控制工具箱中的现有方法的优越性，本文不再讨论。我们着重研究如何将这个方法应用到数字滤波器结构的分析计算中。

4．用于数字滤波器的特点

数字滤波器的结构图其实也是一个信号流图。不过它用的是数字滤波器的基本元件：乘子、移位算子 z^{-1}、和双端相加器。可以把它的每个节点定义为一个状态变量，它的值等于进入它的所有支路信号之和，这些信号的值等于支路起点信号乘以支路乘子或移位算子。这样列出的系统信号流方程组的特点是：状态变量数目比较多；而每个方程则相对简单，等式右端一般不超过两项。因此 Q 将是一个阶数很高的稀疏矩阵。用手工方法计算逆阵 $(I-Q)^{-1}$ 通常是不可想象的，因此只有把这个方法与计算机符号推导工具相结合才能显示出它的巨大优越性。举例说明如下：

图 2 为一个二阶全零点格型滤波器。在它的各个节点上依次标上状态变量的编号 $x_1,x_2,\ldots,x_8$。在其各支路上也标以乘子或移位算子。为了避免计算机把 z^{-1} 的指数部分当作算符，列写方程组时用算子移位 q 来代替 z^{-1}。则其方程组可表为：

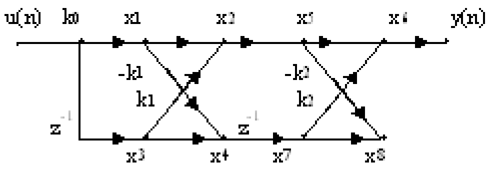

图 2　二阶全零点格型滤波器的结构图

$x_1=k_0u$;　　$x_2=x_1+k_1x_3$;

$x_3=k_0qu$;　$x_4=k_1x_1+x_3$;

$x_5=x_2$;　　　$x_6=x_5+k_2x_7$;

$x_7=qx_4$;　$x_8=k_2x_5+x_7$;　$y= x_6$;

写成标准的信号流图状态矩阵形式 $X=QX+PU$ ，有：

$$X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8 \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&k_1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ k_1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&k_2&0\\ 0&0&0&q&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&k_2&0&1&0 \end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix} k_0\\ 0\\ k_0q\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

用任何具有符号运算功能的科学计算软件就可以解出其系统函数 $W=(I-Q)^{-1}P$ ，它是以 U 为输入，X 所含的 8 个状态变量为输出的系统函数组成的 8×1 的单列向量。我们只关心其中代表输出的那个分量，此处为 $W(6)=x_6/U$。

5．滤波器用 MATLAB 求解举例

根据前面所说的规则和技巧，其 MATLAB 程序为：

```
clear,syms k0 k1 k2 q b0 b1 b2 %规定符号变量
Q(2,3)=k1; Q(2,1)=1;    %
%第一个赋值元素 k1 的属性决定了矩阵 Q 的符号属性
Q(4,1)=k1; Q(4,3)=1;% 给 Q 的各支路元素赋值
Q(5,2)=1;
Q(6,5)=1;Q(6,7)=k2;
Q(7,4)=q;
Q(8,5)=k2; Q(8,7)=1;
Q(8,8)=0;          % 给 Q 矩阵的右下角元素赋值
P(1,1)=k0; P(3,1)=k0*q; % 给 P 赋值为符号阵
P(8,1)=0;          % 给 P 矩阵的右下角元素赋值
W=inv(eye(8)-Q)*P;   % 求系统函数
% 取 W(6)，令它按 q 的幂整理排列
collect(W(6),q)
```

此程序的运行结果为：

W(6)=k2*k0*q^2+(k2*k1*k0+k1*k0)*q+k0

即　$H(z)=k_0+(k_2k_1k_0+k_1k_0)z^{-1}+k_2k_0z^{-2}$

将它与直接型滤波器系统函数 $W=b0+b1z^{-1}+b2z^{-2}$ 对比，可进一步利用 MATLAB 来解系数联立方程，求出 b0,b1,b2 与 k0,k1,k2 的关系。为此可输入以下 MATLAB 语句：

```
s1='k0=b0';
s2='k2*k1*k0+k1*k0=b1';
s3='k2*k0=b2'
[k0,k1,k2]=solve(s1,s2,s3)
```

解得：k0 = b0,k1 = b1/(b2+b0), k2 = b2/b0.

下面再举如图 3 所示的三阶格型梯形滤波器为数值解的实例。由于有反馈，这种滤波器的系统函数用手算是不太容易的。一般书上给出的递推公式也很繁。但可以很容易地列出它的信号流图方程如下：

$x_1= u- k_3x_4$;　$x_2=x_1$;　$x_3=k_3x_2+x_4$;　$x_4=qx_7$;

$x_5= x_2- k_2x_8$;　$x_6=x_5$;　$x_7=k_2x_6+x_8$;　$x_8=qx_{11}$;

$x_9= x_6- k_1x_{12}$;　$x_{10}=x_9$;　$x_{11}=k_1x_{10}+x_{12}$; $x_{12}=qx_{10}$;

$x_{13}=y= C_0x_{10}+ C_1x_{11}+ C_2x_7+ C_3x_3$

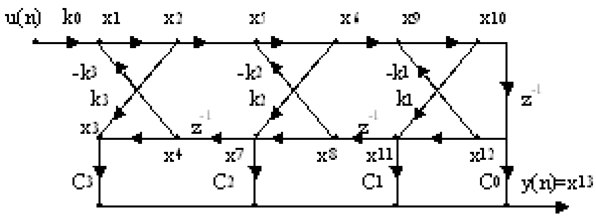

图 3　二阶全极点格型滤波器的结构图

例中的参数已给定数值如下：$k_0=1$, $k_1=1/4$, $k_2=1/2$, $k_3=1/3$, $C_0=-0.2$, $C_1=0.8$, $C_2=1.5$, $C_3=1$。为了节省篇幅，不必列出 Q 和 P 的矩阵形式，可以按其下标规律直接进行元素赋值。本例虽然是数值计算，但计算的内容中带有 z 变换算子 $q=z^{-1}$,所以 Q 矩阵仍然必须用符号属性，对 Q 赋值时第一个元素必须取含 q 的算式。程序如下：

```
clear, syms q
k1=1/4; k2=1/2; k3=1/3; k0=1;
C0=-0.2; C1=0.8; C2=1.5; C3=1;
Q(4,7)=q;        % Q 的第一个赋值元素为符号变量
Q(5,2)=1; Q(1,4)=-k3; Q(2,1)=1;
Q(3,2)=k3; Q(3,4)=1; Q(5,8)=-k2;
Q(6,5)=1; Q(7,6)=k2; Q(7,8)=1;
Q(8,11)=q; Q(9,6)=1;
Q(9,12)=-k1; Q(10,9)=1;
Q(11,10)=k1; Q(11,12)=1; Q(12,10)=q;
Q(13,3)=C3; Q(13,7)=C2;
Q(13,11)=C1; Q(13,10)=C0;
Q(13,13)=0; P(1,1)=k0; P(13,1)=0;     %给右下角元素赋值
W=inv(eye(size(Q))-Q)*P        % 信号流图方程解
pretty(W(13))          % 以美观的形式显示 W 中第 13 行
```

程序运行后的结果为：

$$W(13)=\frac{24q^3+49q^2+47.7q+26}{8q^3+15q^2+13q+24}$$

将 $q=z^{-1}$ 代入，按 z 的降幂排列，可得：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{26/24+47.7/24\,z^{-1}+49/24\,z^{-2}+z^{-3}}{1+13/24\,z^{-1}+5/8\,z^{-2}+1/3\,z^{-3}}$$

6. 结论

任何型式的滤波器结构都可以看作信号流图。信号流图可以用线性方程组描述，其系统函数最后可以用一个标准的高阶矩阵方程来表达。利用具有符号推理功能的科学计算软件，例如MATLAB，很容易准确地求出滤波器的系统函数。这个具有普遍意义的简捷公式适用于所有的线性系统，当然也适合所有的线性滤波器，从而可以节省人们在学习、推导和计算各种滤波器函数时的大量劳动，避免差错。并且便于以统一的观点讨论滤波器的有关特性和算法。

参考文献

[1] S. I. Mason, “Feedback Theory I. Some Properties of Signal Flow Graphs; II. Further Properties of Signal Flow Graphs.” Proc. IRE, vol. 41(1953). pp1144-1156; vol. 44(1956).pp. 920-926;

[2] Chen, Huaichen, The Matrix Expression of Signal Flow Graph and Its Application in System Analysis Software, Chinese Journal of Electronics, pp. 361-363,Vol.11, No.3, July 2002

[3] 陈怀琛、吴大正、高西全，MATLAB 及在电子信息课程中的应用，电子工业出版社，2002 年 1 月

作者简介： 陈怀琛，1934 年生，1953 年毕业并任教于西安电子科技大学，曾任研究生部主任、副校长、中国电子学会教育学会副主任委员、中国自动化学会理事，陕西省自动化学会副理事长等。发表论文数十篇。近几年来，致力于将科学计算语言 MATLAB 应用于大学课程教育，编著相关教材四本。

本文刊登于《信号处理》Vol.19 增刊—2003,pp-5

CCSP—2003 投稿 “DSP 基础理论”专题

联系方法：

（710071）西安电子科技大学 334 信箱 陈怀琛

电话：（029）8202988

电子邮箱： hchchen@xidian.edu.cn