矩阵建模法解高阶系统三步骤

解联立方程是它的用武之地

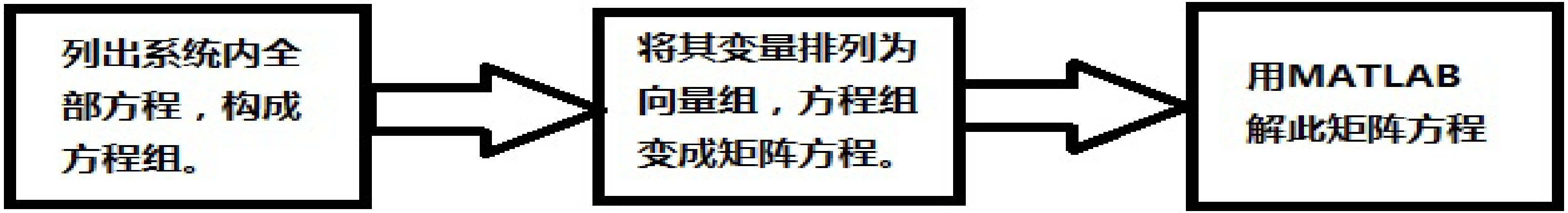
- 大学高年级课程和工程中，充满了多元代数问题。可是我们以前所学的数学，都没有给出好的解法。大量的问题遗留在那里，靠中学代数其他笨办法在处理。
- 中学代数学过“代入法” “消去法”，只是把二元代数方程变为一元方程。多元的方程就没有好办法。逐次消元法带来的繁琐计算，阻碍了它的应用。
- 高斯消元法的特点是给出了一个更规则的方法来解线性方程组，这种规则化为程序化创造了条件。但其计算量太大仍然是后续课及工程上无法接受的。乘法次数(N=n*n*n/3)

n	2	3	4	5	6	7	8
$N=n^3/3$	4	9	21	42	72	114	172

高斯消元法的计算量

- 假如把10次乘法作为人们手工计算的耐受极限，则用笔算将无法处理n>3的系统。除了计算慢，还有计算误差问题，在使用计算机之前，线性代数的应用就被限制于此，因而找不到它在后续工程课中的实际应用。
- 线代也教了矩阵，矩阵是描述高阶系统的好方法，但如果用手工算矩阵，必定要把它分解为标量，还原到一个一个数来算，从而丢掉矩阵描述和运算带来的全部“红利”。矩阵带来的好处必须有计算机才能体现，这个简单的道理怎么那么多的线性代数教授们都认识不到呢？
- 90年代前进大学的工程师没学过线代，90年后的大学生没学过带计算机的线代，线代老师若不学计算机，那就是统统不会用线代。让谁去创新？我痛感线代界保守落后之余，也看到了大片的科技处女地供我们来开垦。我在下面要讲的内容，尽管简单，但却没人做过。

矩阵建模法解高阶代数三步骤



一个复杂系统，列出的方程通常有两种形式：

1. 变量都在等号左侧，常数项在等号右侧，这样整理出的矩阵方程具有AX=B的格式，解是X=inv(A)*B=A\B
2. 每个式子只有一个变量在等号左边，其余变量在右边，直接整理出的矩阵方程具有X=QX+PU的输入输出格式，方程的形式是(I-Q)X=PU，传递函数W=X/U=inv(I-Q)*P

1. 建立原始的代数方程组

这要从学科的物理定律出发，从前面讲过的应用实例来看：

- 对于交、直流电路，用回路电流法或节点电位法列出克希荷夫方程组；方程的数目与节点数或回路数相等。方程的系数有时是复数。
- 对于静力学问题，用各物体各方向平衡方程，动力学问题则用牛顿定理。平面上一个物体有三个方程，k个物体有3k个方程。
- 信号不涉及物理内容，就比力和电抽象了。信号流图按每个节点列方程，每个节点是一个信号，能列出一个方程，信号流图方程组的个数就等于节点数。
- 自动控制是跨物理系统，每个元件的输出代表一个变量，根据系统框图，写出这些变量之间的原始数学关系，就得到系统的全部方程组。

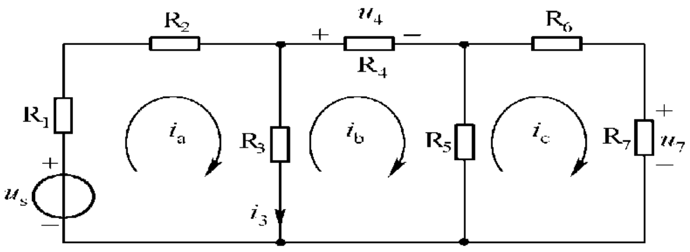
可见机械、电气工程实践中遇到的都是高阶线性方程组的问题。线性代数若能解决这些问题，功莫大焉。可是不用计算机，就无法解决。你们看看，我们用了计算机能多快好省地解多么复杂的问题，就知道为什么强调学线性代数必须结合计算机。

2. 把方程组转换为矩阵模型

电路中的例6.1和例6.2

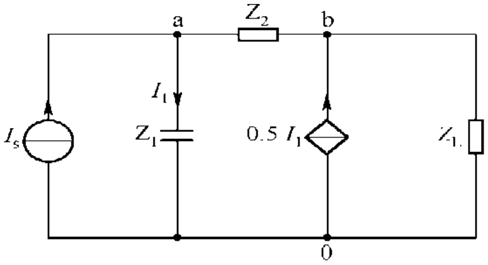
$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3+R_4+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5+R_6+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u_s$$

$$\Rightarrow \mathbf{AI}=\mathbf{u_s} \;\Rightarrow\; \mathbf{I}=\mathbf{A}\backslash\mathbf{u_s}=\mathbf{inv(A)}*\mathbf{u_s}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} & 0 \\ -\frac{1}{Z_2} & \frac{1}{Z_2}-\frac{1}{Z_L} & -0.5 \\ \frac{1}{Z_1} & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{U}_b \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\dot{I}_s \;\Rightarrow\; \mathbf{AX}=\mathbf{BI_s}$$

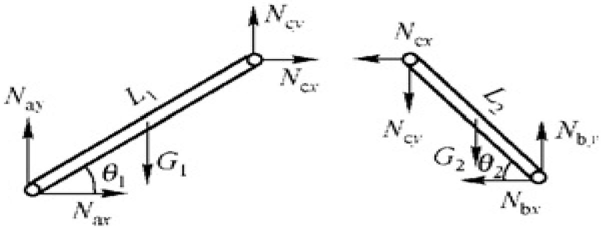
$$\mathbf{X}=\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}*\mathbf{I}_s \;\Rightarrow\; \mathbf{X}=\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}*\mathbf{I}_s$$



例6.3 两构件桁架的平衡问题

受力方程组

$$\left.\begin{aligned}
&Nax + Ncx = 0\\
&Nay + Ncy = 200\\
&-Ncx\sin\theta_1 + Ncy\cos\theta_1 = 86\\
&Nbx - Ncx = 0\\
&Nby - Ncy = 100\\
&Ncx\sin\theta_2 + Ncy\cos\theta_2 = -35
\end{aligned}\right\}$$

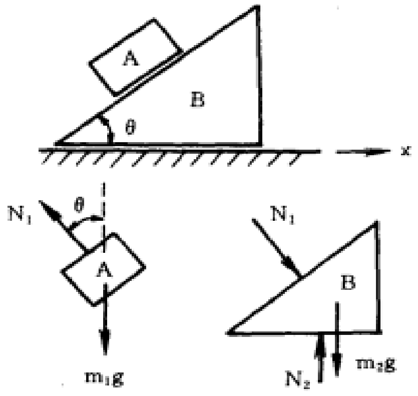


矩阵模型

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&-\sin\theta_1&\cos\theta_1\\0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&\sin\theta_2&\cos\theta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Nax}\\\mathrm{Nay}\\\mathrm{Nbx}\\\mathrm{Nby}\\\mathrm{Ncx}\\\mathrm{Ncy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\200\\86\\0\\100\\-35\end{bmatrix}$$

例6.4 双滑块动力学方程

对物体A，B列写动力学方程，两个物体各有两个方程，共四个方程。可将它们合成为一个四阶的矩阵方程：

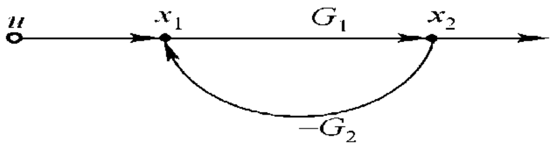


$$\begin{bmatrix} m_1\cos\theta & -m_1 & -\sin\theta & 0 \\ m_1\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & m_2 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\theta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g \\ 0 \\ m_2 g \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{AX}=\mathbf{B}$$

例6.5 信号流图

二阶方程组

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -G_2 x_2 + u \\
x_2 &= G_1 x_1
\end{aligned}
$$

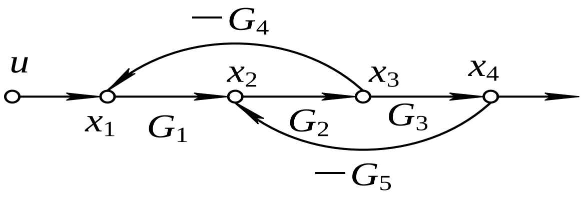


矩阵模型

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -G_2 \\ G_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u
$$

四阶方程组

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -G_4 x_3 + u \\
x_2 &= G_1 x_1 - G_5 x_4 \\
x_3 &= G_2 x_2 \\
x_4 &= G_3 x_3
\end{aligned}
$$



矩阵模型

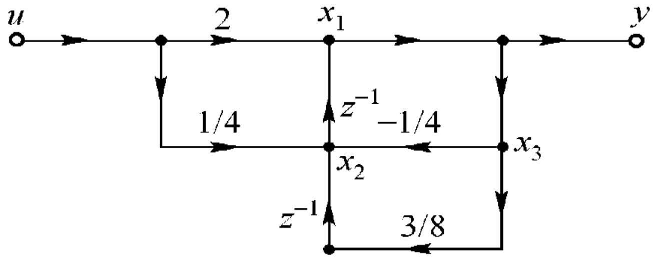
$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G_4 & 0 \\ G_1 & 0 & 0 & -G_5 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u = \mathbf{Q}x + \mathbf{P}u
$$

例6.6 数字滤波器系统函数

$$x_1 = qx_2 + 2u$$

$$x_2 = \left(\frac{3}{8}q - \frac{1}{4}\right)x_3 + \frac{1}{4}u$$

$$x_3 = x_1$$



$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8}q - \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{u} \ \Rightarrow \ \mathbf{W} = \mathbf{x}/\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} * \mathbf{P}$$

3. 用数学软件解矩阵方程

- 可以看出，要解的矩阵方程非常简单、规范。无非是两种：
- 1. AX=B → X=inv(A)*B=A\B
- 2. X=QX=PU → X/U=inv(I-Q)*P=(I-Q)\P
- 其中最难的就是求逆，阶数超过3，没有谁敢去碰的，所以必须靠计算机，特别是要有数学软件，工程人员可以避免一切数学障碍，直接进入求解主题。软件可以用MATLAB，也可以用别的。

矩阵建模法是线代最大的应用

- 从上面给出的应用实例看，电路、力学、信号与系统、信号处理、自动控制、.....那么多的主课，都可以藉助于矩阵建模法解决其遇到的高阶系统的难题，并借助于它而进行机算，实现计算现代化。所以它是线性代数最有价值的一个功能，凡是用了这个功能的，都会毫无保留地承认线性代数是工科必修的基础课。矩阵建模法有几项特别重大的贡献我们将在下面介绍。
- 线性代数还有一个重大的功能是对物体的形状和空间位移进行描述，这在研究精密测量、参数拟合、多自由度运动、坐标变换、图形图像、动漫技术、3D打印 .... 等。相关的理论我们将在本慕课的后两章讨论。

下一讲 矩阵建模法的重大创新

矩阵建模法的重大创新应用

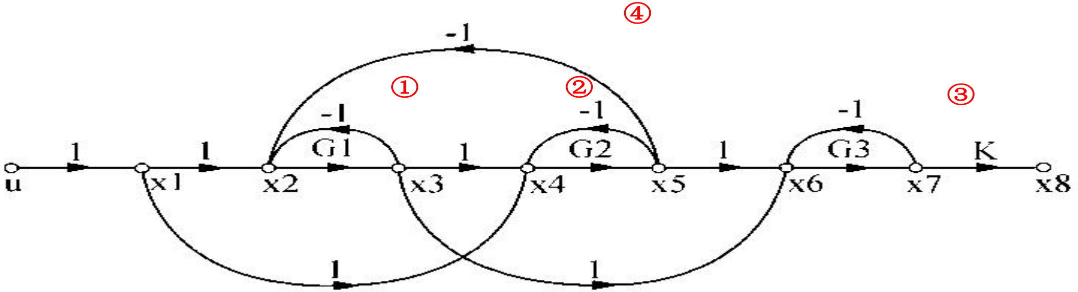
- 前面的几道例子只说明了线性代数解高阶线性问题时的快速、高效和准确。其实它在某些问题上甚至可以有革命性的表现，下面我们举三个例子来说明。
- 1.用它可以取代信号与系统课中的梅森公式，此公式系1953年由MIT的梅森 (Mason)教授提出，沿用了50年。线性代数法简明、严密、准确、可机算，都超过梅森公式，可以取代它。
- 2. 用它可以靠计算机算出很复杂滤波器的系统函数，还没有一种其他方法能算，它解决了数字信号处理中的难题。
- 3. 用它可以对多输入、多输出的控制系统框图进行结构图变换，得出传递函数矩阵，而且靠计算机完成，它超过了一切手工计算，也超过了MATLAB的商用工具箱；

替代算信号流图的梅森公式

矩阵建模法重大创新应用（1）

一个高阶的信号流图举例

- x1=u
- x2=x1-x3-x5
- x3=G1*x2
- x4=x3+x1-x5
- x5=G2*x4
- x6=x3+x5-x7
- x7=G3*x6
- x8=K*x7



$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \\ x7 \\ x8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \\ x7 \\ x8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * u \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{QX} + \mathbf{PU}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{(I - Q)X = PU} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W = X/U = (I - Q) \backslash P}$$

计算此信号流图的程序和结果

```
syms G1 G2 G3 K;
Q=[0 0 0 0 0 0 0 0; 1 0 -1 0 -1 0 0 0; 0 G1 0 0 0 0 0 0; ...
 1 0 1 0 -1 0 0 0; 0 0 0 G2 0 0 0 0;   0 0 1 0 1 0 -1 0; ...
  0 0 0 0 0 G3 0 0;  0 0 0 0 0 0 K 0];
P=[1;0;0;0;0;0;0;0];
W=(eye(8)-Q)\P;
pretty(simple(W(8)))
```

- 运行结果：

$$W(8)=\frac{\mathrm{G3\ K\ (2\ G1\ G2 + G2 + G1)}}{\mathrm{(1 + G3)\ (2\ G1\ G2 + 1 + G2 + G1)}}$$

对比 1953年MIT的Mason给的公式

- 梅森公式的形式为：

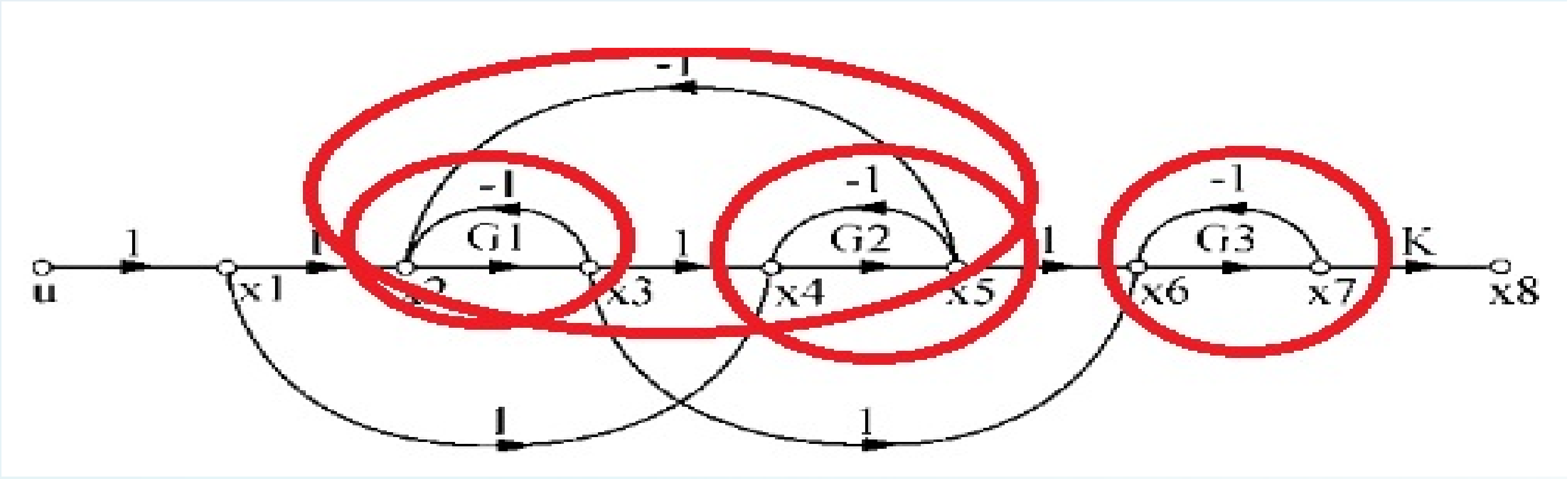
$$H=\frac{1}{\Delta}\sum_{k} g_k \Delta_k$$

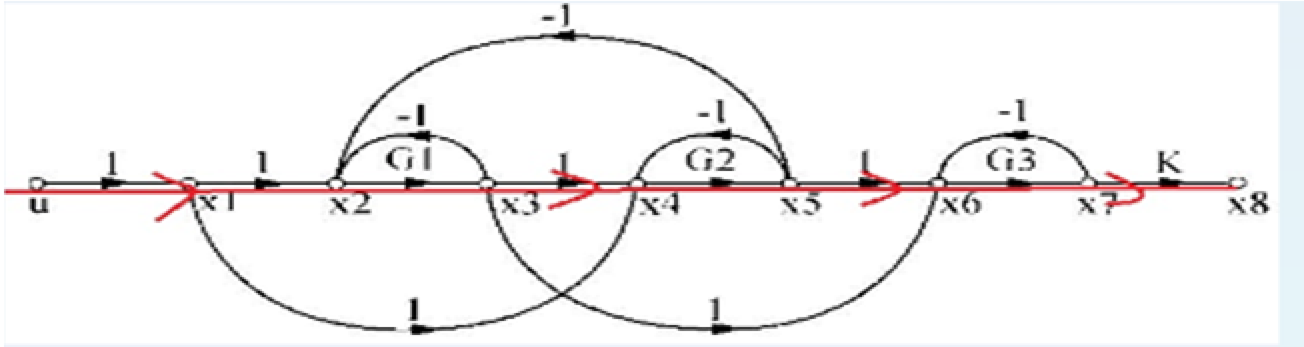
- 其中：Δ——称为流图的特征多项式。
- Δ= 1 -（所有不同环路的增益之和）
- +（所有两两互不接触环路的增益乘积之和）
- -（所有三个互不接触环路的增益乘积之和）+ .....
-

$$\Delta=1-\sum L_i+\sum L_i L_j-\sum L_i L_j L_k+\cdots$$

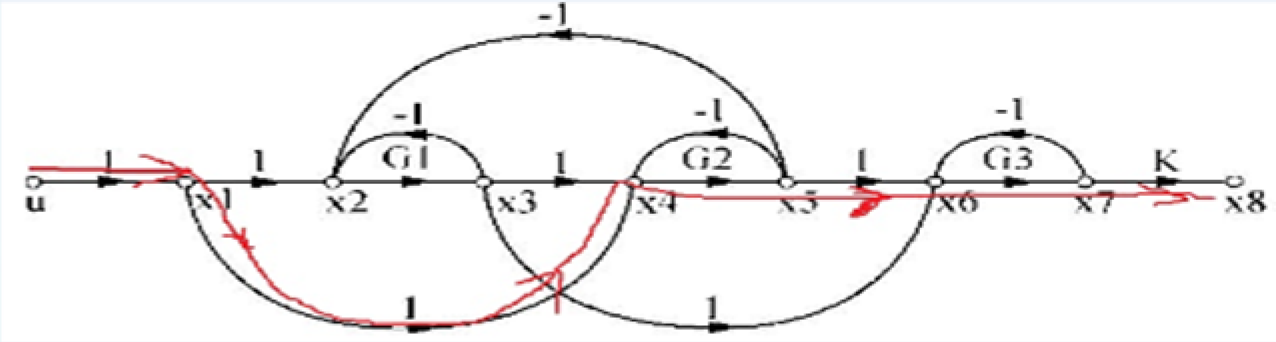
-
- k——为源点到阱点之间第k条前向通路的标号
- g_k——为源点到阱点之间第k条前向通路的增益
- Δ_k——为对应于第k条前向通路特征行列式的余因子。它是除去第k条前向通路相接触的环路外，余下环路的特征行列式。

例题中的四个环路：$L1=-G1$, $L2=-G2$, $L3=-G3$, $L4=-G1G2$，
判断这些环路有无接触来确定公式中的$\Delta=1-LiLj+\ldots= 1-(-G1-G2-G1*G2)+(G1*G2)$;
它的四个前向通路见后：$g1=G1G2G3$,$g2=G2G3$,$g3=G1G3$,$g4= -G1G2G3$
并根据环路与通路有无接触决定Δk，$\Delta 1=1$,$\Delta 2=1+G1$, $\Delta 3=1+G2$, $\Delta 4=1$。

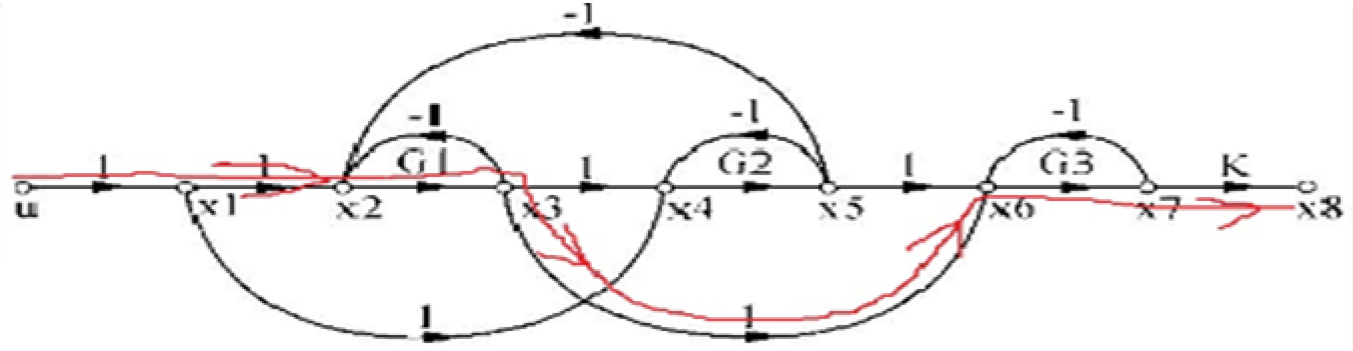




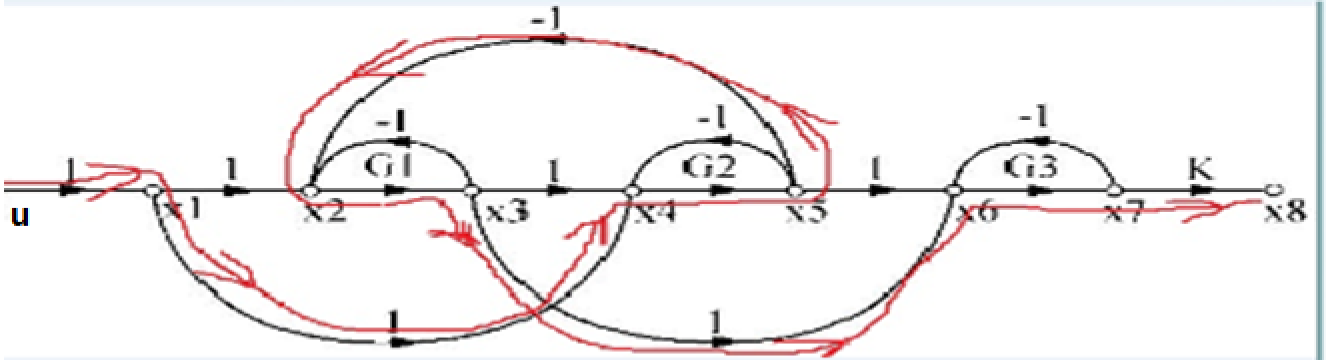
（第一条） g1=G1G2G3K, delta1=1-0



（第二条） g2=G2G3K, delta2=1-(-G1)



（第三条） g3=G1G3K, delta3=1-(-G2)



（第四条） g4=-G1G2G3K, delta4=1-0

应用梅森公式中的难题

- 1. 信号流图本身很难画，很易出错；
- 2.不易判别系统中的环路数目；所以很难求出所有环路的增益L和Δ。
- 3. 很难找出全部源点到阱点之间所有前向通路，因此这些前向增益很易遗漏。
- 4. 更难找出对应于第k条前向通路特征行列式的余因子Δk。
- 5. 最大的问题是找全了没有？找得对不对？没有判别的方法，而且所有的计算只能靠笔算，系统复杂时极易出错且很难发现。比如本例信号流图中有四个环路和四个前向通路，都得自己找。我们有一位学生要比较一下梅森公式的结果，他只找到了前三条（见附图），在找到第四条通路之前，用梅森公式算的结果一直是错的：

$$W(8)=\frac{G3\ K\ (3G1\ G2+G2+G1)}{(1+G3)\ (2\ G1\ G2+1+G2+G1)}$$

从本例看出矩阵建模法的优越性

- 1. 从原始方程出发，根本不需要画成信号流图，免去了绘图的错误源；
- 2.方程的项数与矩阵元素一一对应，极易检查，免去了寻找环路通路、列式的错误源；
- 3. MATLAB可以给出Q,P的赋值结果，可直接对照；可免除一切赋值的错误源；
- 4. 计算全靠计算机，避免一切计算误差。

有矩阵建模法替代，梅森公式可以退出历史舞台了！

但需要宣传，教线性代数的老师还不会矩阵建模法，学生也不会，教信号与系统的老师也不会，靠谁来宣传呢？写书、慕课都是我的宣传阵地。希望大家也参与！

求复杂数字滤波器的系统函数

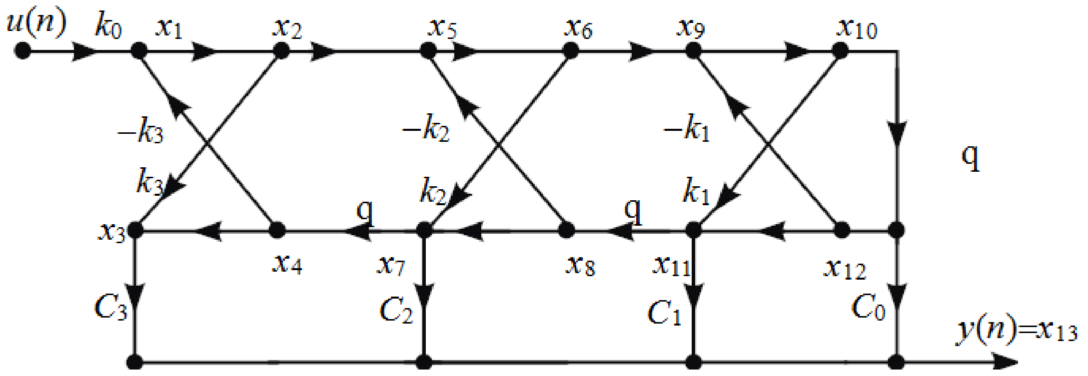
矩阵建模法的重大创新（2）

2.复杂数字滤波器的计算

- 数字信号处理中常常可遇到复杂的滤波器计算，因为它是靠程序中的计算实现的，所以有很大的灵活性，结构可以很复杂，系数可以有很高的精度。
- 滤波器结构图也是一种信号流图，但是要画成闭环和前向通路更加困难，搞信号处理的老师没有人用梅森公式的。他们通常都列方程组，但列出一大堆方程却不知道怎么解。
- 我们举“数字信号处理书”中常给出的梯形格型滤波器为例，没有一本书给出解法的，我们却可以用线代的矩阵建模法把它方便地解出来。
- 我们把这个思路和程序写成论文在2003年中国电子学报和信号处理学术会议上作了报告。题目是《《数字滤波器的信号流图方程和计算机求解》。

三阶梯形格型滤波器

$x_1 = u - k_3 x_4;$
$x_2 = x_1;$
$x_3 = k_3 x_2 + x_4;$
$x_4 = q x_7;$
$x_5 = x_2 - k_2 x_8;$
$x_6 = x_5;$
$x_7 = k_2 x_6 + x_8;$
$x_8 = q x_{11};$
$x_9 = x_6 - k_1 x_{12};$
$x_{10} = x_9;$
$x_{11} = k_1 x_{10} + x_{12};$
$x_{12} = q x_{10};$
$x_{13} = y = c_0 x_{12} + c_1 x_{11} + c_2 x_7 + c_3 x_3$



$$
\left.
\begin{aligned}
&x_1 = u - k_3 x_4;\\
&x_2 = x_1;\\
&x_3 = k_3 x_2 + x_4;\\
&x_4 = q x_7;\\
&x_5 = x_2 - k_2 x_8;\\
&x_6 = x_5;\\
&x_7 = k_2 x_6 + x_8;\\
&x_8 = q x_{11};\\
&x_9 = x_6 - k_1 x_{12};\\
&x_{10} = x_9;\\
&x_{11} = k_1 x_{10} + x_{12};\\
&x_{12} = q x_{10};\\
&x_{13} = c_0 x_{12} + c_1 x_{11}\\
&+ c_2 x_7 + c_3 x_3
\end{aligned}
\right\}
\quad
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9\\ x_{10}\\ x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0, & 0, & 0, & -k_3, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\
1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\
0, & k_3, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & q, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\
0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -k_2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\
0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & k_2, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & q, & 0, & 0\\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -k_1, & 0\\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0\\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & k_1, & 0, & 1, & 0\\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & q, & 0, & 0, & 0\\
0, & 0, & C_3, & 0, & 0, & 0, & C_2, & 0, & 0, & 0, & C_1, & C_0, & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9\\ x_{10}\\ x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} u
$$

$$
\Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{QX} + \mathbf{PU}, \Rightarrow \mathbf{X} / \mathbf{U} = \mathbf{inv(I - Q) * P}
$$

此滤波器的计算程序

- clear, syms q
- k1=1/4; k2=1/2; k3=1/3; k0=1;
- C0=-0.2; C1=0.8; C2=1.5; C3=1;
- Q(4,7)=q; % Q的第一个赋值元素为符号变量
- Q(5,2)=1; Q(1,4)=-k3; Q(2,1)=1;
- Q(3,2)=k3; Q(3,4)=1; Q(5,8)=-k2;
- Q(6,5)=1; Q(7,6)=k2; Q(7,8)=1;
- Q(8,11)=q; Q(9,6)=1;
- Q(9,12)=-k1; Q(10,9)=1;
- Q(11,10)=k1; Q(11,12)=1; Q(12,10)=q;
- Q(13,3)=C3; Q(13,7)=C2;
- Q(13,11)=C1; Q(13,10)=C0;
- Q(13,13)=0; P(1,1)=k0; P(13,1)=0; %给右下角元素赋值
- W=inv(eye(13)-Q)*P % 信号流图方程解
- pretty(W(13)) % 以美观的形式显示W中第13行

程序运行结果

$$W(13)=\frac{1}{10}\,\frac{240\,q^3+490\,q^2+477\,q+260}{8\,q^3+15\,q^2+13\,q+24}$$

将$q=z^{-1}$代入，按z的降幂排列，可得：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{26/24+47.7/24\,z^{-1}+49/24\,z^{-2}+z^{-3}}{1+13/24\,z^{-1}+5/8\,z^{-2}+1/3\,z^{-3}}$$

这样复杂的滤波器，要画出它的信号流图就很困难。再要在图上找全部环路和通路，更是极易出错和遗漏，难怪数字信号处理课程不用梅森公式。那用什么呢？你们可问问你们的老师，到现在为止，没有解答。我可以在此自信地答复，“矩阵建模法”是最好的解答。

(MIMO)控制系统结构图化简

矩阵建模法的重大创新（3）

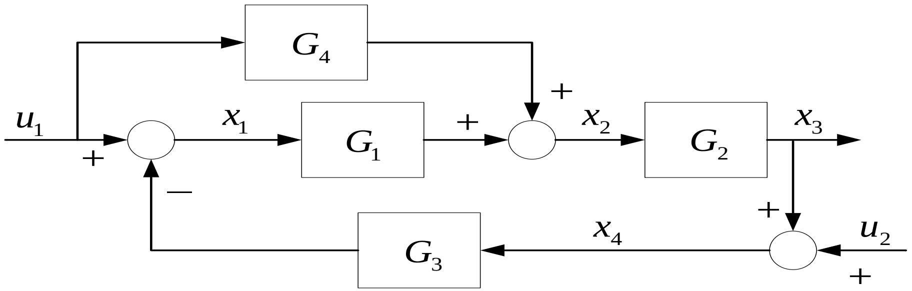
3.自动控制系统结构图化简

- 对我来说，自动控制是我的真正老本行，1960年开始教控制系统，到2001年40个年头，结构图变换老是一个难点。求复杂系统任何一个输入到任何一个点输出的传递函数式子就不好列，列出式子计算又繁。所以有了MATLAB，就想利用。但MATLAB中的结构图变换也是很繁的，他们给出的通用计算方法和公式，都是用状态变量和状态方程矩阵的，看不出物理意义。
- 我想，线性系统的结构图变换，根本上还是一个由多个小线性方程合成一个大方程，那应该是可以用矩阵建模法的。于是我做了尝试，真正成功了。我们的这个例子，两个输入五个输出，它竟然一下给出了5×2=10个传递函数，排列成矩阵格式。在2010全国自控大会上，有的教授称之为神奇。是的，我也没有想到过。

线性控制系统的结构图变换

五阶方程组

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -G_3x_4 + u_1 \\ x_2 &= G_1x_1 + G_4u_1 \\ x_3 &= G_2x_2 \\ x_4 &= x_3 + u_2 \\ e &= x_3 - u_1 \end{aligned}\right\}$$



矩阵模型

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -G_3 & 0 \\ G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ G_4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{QX} + \mathbf{PU} \Rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{X} = \mathbf{PU} \Rightarrow \mathbf{W} = \mathbf{X}/\mathbf{U} = \mathbf{inv}(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{P}$$

控制系统化简的MATLAB程序

- 程序的核心语句为：

```
syms G1 G2 G3 G4
Q(1, 4)=-G3;  Q(2, 1)=G1;        %给Q,P赋值
Q(3, 2)=G2;  Q(4, 3)=1;
Q(5, 3)=1; Q(5, 5)=0;
P(2, 1)=G4;  P(1, 1)=1;
P(4, 2)=1;  P(5, 1)=-1;  P(5, 2)=0;
W=inv(eye(5)-Q)*P;               % 信号流图方程解
pretty(W)
```

多输入多输出(MIMO)系统

给$\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}$赋值，执行命令：　$\boldsymbol{W = X/U = inv(I - Q)P}$

得到5×2传递函数矩阵：$\boldsymbol{W}$

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X}/\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} x_1/u_1 & x_1/u_2 \\ x_2/u_1 & x_2/u_2 \\ x_3/u_1 & x_3/u_2 \\ x_4/u_1 & x_4/u_2 \\ e/u_1 & e/u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+G_1G_2G_3}\begin{bmatrix} 1-G_2G_3G_4 & -G_3 \\ G_1+G_4 & G_1G_3 \\ G_1G_2+G_2G_4 & -G_1G_2G_3 \\ G_1G_2+G_2G_4 & 1 \\ G_1G_2+G_2G_4 & -G_1G_2G_3 \end{bmatrix}$$

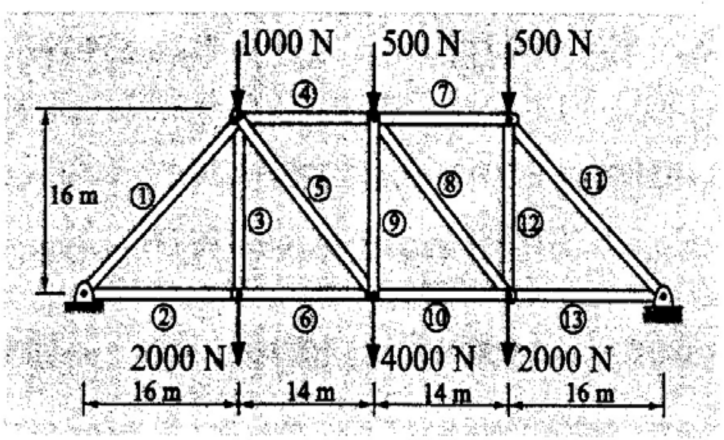
将G_1,G_2,G_3,G_4写成具体的拉普拉斯算子s的函数，同样可行，故可进行控制系统的自动计算。

检查维数：因为X(5×1),W(5×2),U(2×1)，故有X=W*U。

矩阵建模法的其他创新和未来

复杂结构力学平衡问题

由13根拉压杆件组成的桁架结构，如图7-1所示，13个平衡方程已给出，它们来自6个中间节点，每个节点有x,y两个方向的平衡方程，还有一个整体结构的y方向平衡方程。现求其各杆所受的力。



解：各杆只能产生轴向的力，因此要求出倾斜角度，然后列出13个方程，再将方程组变为矩阵模型——AF=B，求**F=A\B**，结果为：

F=[-7236; 5117; 2000; -6969; 2812; 5117; -4883; -3167; 1883; 6969; -6906; 4383; 4883]

$$
\left.
\begin{aligned}
&F_2 + k_2 F_1 = 0 \\
&-F_2 + F_6 = 0 \\
&F_3 = 2000 \\
&F_4 + k_1 F_5 - k_2 F_1 = 0 \\
&k_2 F_1 + F_3 + k_3 F_5 = -1000 \\
&F_7 + k_1 F_8 - F_4 = 0 \\
&k_3 F_8 + F_9 = -500 \\
&F_{10} - k_1 F_5 - F_6 = 0 \\
&F_9 + k_3 F_5 = 4000 \\
&k_2 F_{11} - F_7 = 0, \\
&k_2 F_{11} + F_{12} = -500 \\
&F_{12} + k_3 F_8 = 2000 \\
&F_{13} + k_2 F_{11} = 0
\end{aligned}
\right\}
\Rightarrow
\begin{bmatrix}
k_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-k_2 & 0 & 0 & 1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k_2 & 0 & 1 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 2000 \\ 0 \\ -1000 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \\ 4000 \\ 0 \\ -500 \\ 2000 \\ 0
\end{bmatrix}
\Rightarrow \mathbf{AF = B}
$$

矩阵建模法用于复杂系统的经过

- 1. 2001年3月17日由陕西省自动化学会组织的“MATLAB学术交流会”上发表《**MATLAB中梅森公式等价程序的推导**》。
- 2. 2002年7月出版的《中国电子学报（英文版）11卷3期》发表《信号流图的矩阵表达式及其计算机解》
- 3. 2002年9月出版的教材《MATLAB及其在电子信息课程中的应用》例6.20讲信号流图，例8.4讲自动控制时采用了矩阵建模的方法。
- 4. 2003年7月在青岛举行的信号处理学术会议上发表论文《数字滤波器的信号流图方程和计算机求解》
- 5. 2010年7月“中国控制大会(CCC2010) ”上发表《线性控制系统化简的矩阵方法》
- 国内我们是首创，国际上我们没查到。因为MATLAB的符号处理工具箱1993年才推出，如果早于我们，那就只能出现于1994-2000年之间。
- 用还是不用计算机，差了一个时代。你是创新的就所向无敌，我把这个创新经历向大家介绍，真正寄希望于年轻一代。

以后的发展

- 科学计算深入到物体或空间场的内部时，通常遇到的是偏微分方程，研究的方法是把对象进行空间分割，变成千百个的小立方体，列写方程。这些方程通常可看作线性方程，于是就需要解成千上万个线性方程组，系数矩阵的阶数可能达到几千几万，成百万个系数用现在的方法赋值是不可能的，计算的方法也要改进，所以解线性方程组的软件也在不断地创新。这是一个不断进步的世界，抱着百年前的陈旧知识不求进步将会被时代淘汰。

谢谢大家！