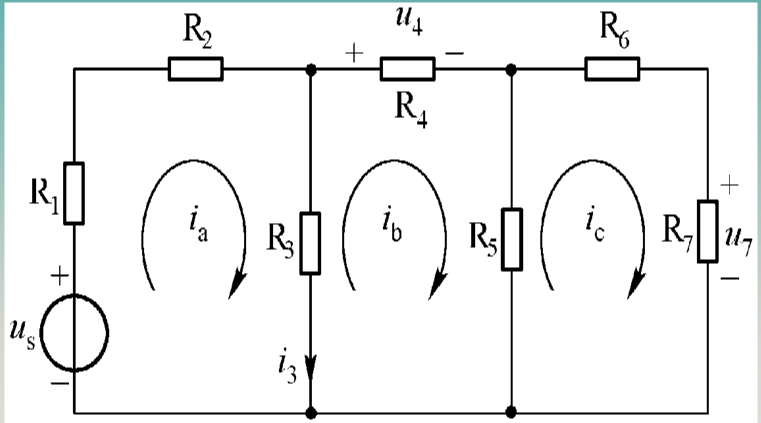
第6章　在后续课程中的应用

本书前五章讲述了线性代数的基本理论，并且把它应用在数学插值与拟合、化学、传热学、物料配比、计算机图形学、成本计算、人口与生态等领域中。为了使不同专业的读者普遍能够接受，举应用实例时只能以常识和大一的知识水平为原则，基本都不用到后续课和工程知识。线性代数的后续应用问题就由第六、七两章来介绍。第六章以后续课中的问题为主，第七章则以较复杂的工程问题为主。为降低教材价格，这一章放在网上。

6.1 电路中的应用

例6.1 电阻电路的计算

图6所示的电路中，已知 $R1 = 2\ \Omega$, $R2 = 4\ \Omega$, $R3 = 12\ \Omega$, $R4 = 4\ \Omega$, $R5 = 12\ \Omega$, $R6 = 4\ \Omega$, $R7 = 2\ \Omega$，设电压源 $us = 10$ V。求$i3$,$u4$,$u7$。



解: 用回路电流法进行建模。选回路如图6-1中所示，设三个网孔的回路电流分别为ia,ib和ic。根据基尔霍夫定律，任何回路中诸元件上的电压之和等于零。

各回路电压方程为:

直流电路的计算

$$(R1 + R2 + R3)ia - R3ib = us$$

$$- R3ia + (R3 + R4 + R5)ib - R5ic = 0$$

$$- R5ib + (R5 + R6 + R7)ic = 0$$

矩阵形式为：
$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_s$$

$$\Rightarrow \mathbf{AI} = \mathbf{u_s}$$

将参数代入后为：
$$\begin{bmatrix} 18 & -12 & 0 \\ -12 & 28 & -12 \\ 0 & -12 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_s$$

直流电路的计算

程序pla601如下。

```
A=[18,-12,0; -12,28,-12; 0,-12,18];
b=[1;0;0]; us=10; U=rref([A,b*us])
```

程序运行的结果为：

$$\boldsymbol{U}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0.9259\\0 & 1 & 0 & 0.5556\\0 & 0 & 1 & 0.3704\end{array}\right]\qquad \text{即}\quad \mathbf{I}=\begin{bmatrix}i_a\\i_b\\i_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9259\\0.5556\\0.3704\end{bmatrix}$$

- 任何稳态电路问题，都可以用线性代数方程描述。方程组的阶数将等于回路数。手工解将非常繁琐且不可靠，使用矩阵方程和计算机软件是必不可少的。

下一讲　　例6.2 交流电路

例6.2 交流稳态电路的计算

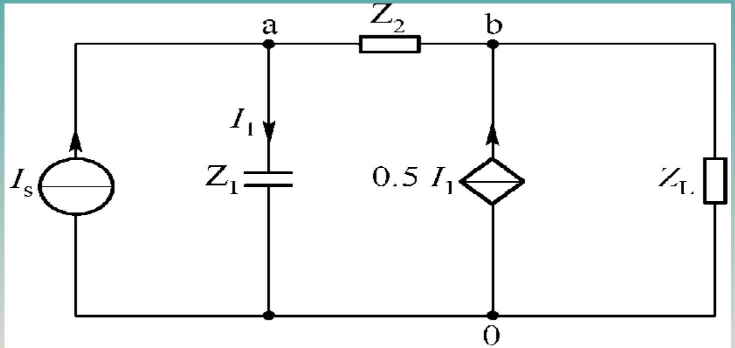
如图所示交流稳态电路，

设$Z1$ = -j250 Ω，

$Z2$ = 250 Ω，Is = 2∠0A，

负载ZL = 500+j500 Ω，

求负载电压。



解:（1）用节点电压法建模。设节点电压Ua、Ub和电流I_1为未知量（都是复数），根据进出a,b点的电流相等，列出方程组如下，其中系数（阻抗值）也都是复数。

$$\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)\dot{U}_a-\frac{1}{Z_2}\dot{U}_b=\dot{I}_s \qquad -\frac{1}{Z_2}\dot{U}_a+\frac{1}{Z_2}\dot{U}_b=\frac{\dot{U}_b}{Z_L}+0.5\dot{I}_1$$

$$\frac{1}{Z_1}\dot{U}_a=\dot{I}_1$$

交流稳态电路的计算

将未知量Ua,Ub和I_1均移到等号左端，整理为矩阵方程，得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} & 0 \\ -\frac{1}{Z_2} & \frac{1}{Z_2}-\frac{1}{Z_L} & -0.5 \\ \frac{1}{Z_1} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{U}_b \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{I}_s \quad \Rightarrow \mathbf{AX} = \mathbf{BI}_s$$

解题程序为pla602，将Is代入，并用矩阵解出Ua,Ub,I_1,程序中变量都已是复数。程序运行结果显示Ub的实部和虚部，也可用向量的幅值absUb和相角angleUb表示：

Ub = -2.5000e+002 -7.5000e+002i 即Ub = -250 - 750 i

absUb = 790.5694，angleUb = -108.4349

程序pla602.m核心语句

```
% 设定元件参数
Z1=-j*250; Z2=250; ki=0.5; Is=2+j*0; zL=500+j*500;

% 设定系数矩阵A
a11=1/Z1+1/Z2; a12=-1/Z2; a13=0;
a21=-1/Z2; a22=1/Z2-1/zL; a23=-ki;
a31=1/Z1; a32=0; a33=-1;
% 设定系数矩阵A,B
A=[a11,a12,a13; a21,a22,a23; a31,a32,a33]; B=[1;0;0];
X=A\B*Is;Ub=X(2)% 求方程解X=[Ua;Ub;I1]及负载电压
% 求负载电压的幅度和相角
absUb=abs(Ub), angleUb=angle(Ub)*180/pi
```

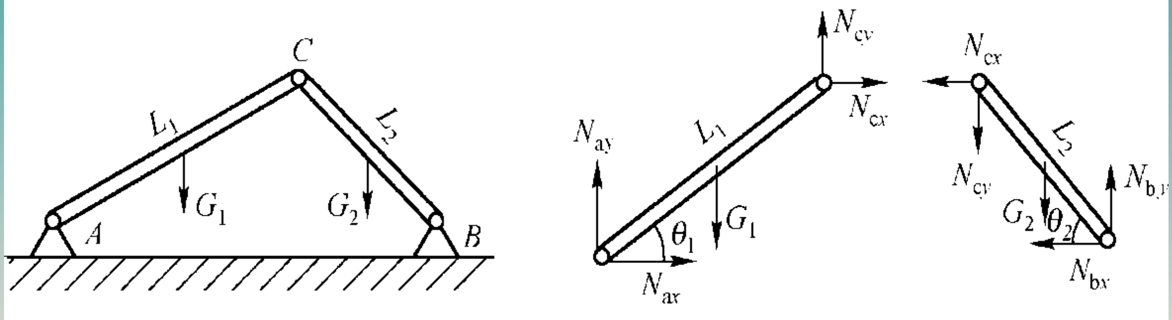
下一讲　　力学课中的应用

例6.3，例6.4

6.2 力学中的应用

- 在力学中，静力学是一个代数问题，它研究物体受力后的平衡方程。一个物体在平面上平衡，需要两个方向力的平衡方程和一个力矩平衡方程。空间物体的平衡需要三个坐标方向的力平衡和力矩平衡，总共6个平衡方程。如果是几个物体相互作用下的平衡，那么方程的总数就会成几倍的增加。若用手工方法一个一个地去解联立方程，那是非常麻烦的。
- 这些方程组通常都是线性的，所以可以归结为矩阵方程求解。用线性代数方法可以避免解单个方程和单个变量，只要把系数矩阵输入程序中，就可同时得出所有的解。

例6.3 求双杆系统的支撑反力



(a) 两杆系统的受力图　　(b) 分立体受力图

两杆系统受力如上图所示，已知*G*1 = 200, *G*2 = 100, *L*1 = 2; *L*2 =1.414，θ1 = π/6, θ2 =π/4，求所示杆系的支撑反力*Na*, *Nb*, *Nc*。

解: 画出杆1和杆2的受力图，如图6-3b。其中*Na*, *Nb*, *Nc* 都用其*x*, *y*方向的分量*Nax*, *Nay*, *Nbx*, *Nby*, *Ncx*, *Ncy* 表示，于是可列出方程如下:

双杆系统的平衡方程

- 对杆件1:

x方向力平衡： $\Sigma X = 0$, $Nax + Ncx = 0$ (6.2.1)

y方向力平衡： $\Sigma Y = 0$, $Nay + Ncy - G1 = 0$ (6.2.2)

绕A点力矩平衡：$\Sigma M_A = 0$,

$NcyL1\cos\theta1 - NcxL1\sin\theta1 - G1L1/2\cos\theta1 = 0$ (6.2.3)

- 对杆件2:

x方向力平衡： $\Sigma X = 0$, $Nbx - Ncx = 0$ (6.2.4)

y方向力平衡： $\Sigma Y = 0$, $Nby - Ncy - G2 = 0$ (6.2.5)

绕B点力矩平衡：$\Sigma M_B = 0$,

$NcyL2\cos\theta2 + NcxL2\sin\theta2 + G2L2/2\cos\theta2 = 0$ (6.2.6)

例6.03的矩阵方程

$$\left.\begin{aligned}
Nax \qquad\qquad + Ncx \qquad\qquad &= 0 \\
Nay \qquad\qquad + Ncy \qquad &= 200 \\
-Ncx\sin\theta_1 + Ncy\cos\theta_1 &= 86 \\
Nbx \qquad - Ncx \qquad\qquad &= 0 \\
Nby \qquad\qquad - Ncy &= 100 \\
Ncx\sin\theta_2 + Ncy\cos\theta_2 &= -35
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{写成}\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Nax} \\ \mathrm{Nay} \\ \mathrm{Nbx} \\ \mathrm{Nby} \\ \mathrm{Ncx} \\ \mathrm{Ncy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 86 \\ 0 \\ 100 \\ -35 \end{bmatrix}$$

程序pla603核心语句

```
G1=200; G2=100; L1= 2; L2 = sqrt(2) ; % 给原始参数赋值
theta1 =pi/6; theta2 =pi/4;% 将度化为弧度
% 则按此次序，系数矩阵A,B可写成下式
A=[1,0,0,0,1,0;0,1,0,0,0,1;0,0,0,0,-sin(theta1), cos(theta1);...
0,0,1,0,-1,0;0,0,0,1,0,-1;0,0,0,0, sin(theta2),cos(theta2)];
B=[0;G1;G1/2*cos(theta1);0;G2;-G2/2*cos(theta2)];
X = A\B                        % 用左除求解线性方程组
```

程序运行结果：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1.0000&0\\0&1&0&0&0&1.0000\\0&0&0&0&-0.5000&0.8660\\0&0&1&0&-1.0000&0\\0&0&0&1&0&-1.0000\\0&0&0&0&0.7071&0.7071\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\200.0000\\86.6025\\0\\100.0000\\-35.3553\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}95.0962\\154.9038\\-95.0962\\145.0962\\-95.0962\\45.0962\end{bmatrix}$$

例6.4 双滑块动力学方程

物体A(质量为m1)在具有斜面的物体B(质量为m2)上靠重力下滑, 设斜面和地面均无摩擦力,求A沿斜面下滑的相对加速度a1和B的加速度a2,并求斜面和地面的支撑力N1及N2.

- 解：分别画出A和B的受力图。

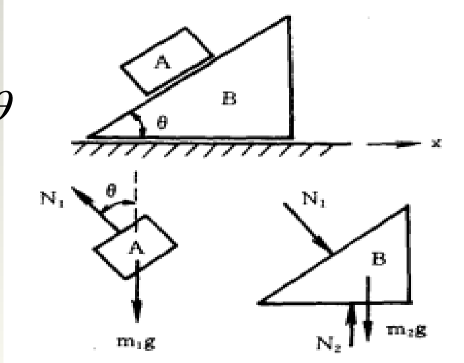
对物体A，B列写动力学方程，注意A的绝对加速度是a1 和a2的合成：

物体A : x向 $m_1\left(a_1\cos\theta - a_2\right) = N_1\sin\theta$

y向 $m_1 a_1 \sin\theta = m_1 g - N_1\cos\theta$

物体B: x向 $m_2 a_2 = N_1\sin\theta$

y向 $N_2 - N_1\cos\theta - m_2 g = 0$



双滑块动力学方程

- 矩阵方程为：

$$\begin{bmatrix} m_1\cos\theta & -m_1 & -\sin\theta & 0 \\ m_1\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & m_2 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\theta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g \\ 0 \\ m_2 g \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AX}=\mathbf{B}$$

- 程序pla604核心语句如下：

A = [m1*cos(theta),-m1, -sin(theta), 0;m1*sin(theta), 0, cos(theta), 0;...
 0 , m2, -sin(theta), 0; 0, 0, -cos(theta), 1];
B = [0, m1*g, 0, m2*g]'; X=A\B;

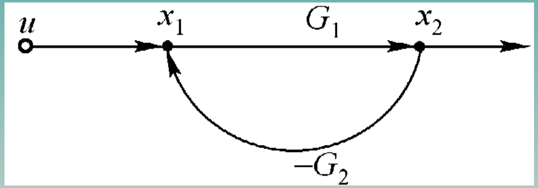
- 运行,输入m1=2,m2=4,g=9.81,theta=30*pi/180,得到

a1 = 6.54; a2 = 1.89， N1 = 15.10; N2 = 52.32

下一讲　信号与系统中 应用

例6.5，例6.6

6.3 信号与系统中的应用



信号流图的基本概念：
信号流图是用来表示和分析复杂系统内的信号变换关系的工具。它和交通流图或其他的物流图不同，其基本概念如下:

（1）系统中每个信号用图上的一个节点表示，如图中的*u*, *x*1, *x*2。

（2）系统部件对信号实施的变换关系用有向线段表示，箭尾为输入信号，箭头为输出信号，箭身标注对此信号进行变换的乘子。如图中的*G*1和*G*2。如果乘子为1，可以不必标注。

（3）每个节点信号的值等于所有指向此节点的箭头信号之和，每个节点信号可以向外输出给多个节点，其值都等于节点信号。

信号流图模型

上图可以表示为节点x1和x2处的两个方程 $\begin{aligned} x_1 &= -G_2 x_2 + u \\ x_2 &= G_1 x_1 \end{aligned}$ 。

写成矩阵方程为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -G_2 \\ G_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

或 **x = Qx + Pu**

移项整理后，可以得到求未知信号向量***x***的公式，

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{P}u$$

定义传递函数***W***为输出信号与输入信号之比***x/u***，则有

$$\mathbf{W} = \mathbf{x}/u = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{P}$$

因为 $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & G_2 \\ -G_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{1+G_1G_2} \begin{bmatrix} 1 & -G_2 \\ G_1 & 1 \end{bmatrix}$

故：$\mathbf{x}/\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1/u \\ x_2/u \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1+G_1G_2} \begin{bmatrix} 1 & -G_2 \\ G_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1+G_1G_2} \begin{bmatrix} 1 \\ G_1 \end{bmatrix}$

用信号流图程序解本题

对于阶次高的情况，求逆必须用软件工具。因为信号流图中有

符号变量G1，它的求解要先定义符号变量。对于本题，其MATLAB语句为:对于本题，可用程序语句为:

syms G1 G2, Q=[0,-G2;G1,0],

P=[1;0], W=inv(eye(2)-Q)*P

运行的结果是: $\mathbf{W}=\begin{bmatrix} 1/(1+G_2G_1) \\ G_1/(1+G_2G_1) \end{bmatrix}$ 与前面结果相同。

在信号与系统课程中，传统的“梅森公式”就是用图形拓扑的方法得到信号流图的公式，但不给证明，要靠死记笔算。若系统阶次高一些，就非常繁琐。用线性代数的方法可严格地解决这个问题，并且不管阶数多高，可由计算机快速准确地得出结果。

例6.5 双反馈回路的情况

对于较复杂的情况，如右图的双反馈信号流图。列出它的方程如下：

x1 = -G4x3 + u

x2 = G1x1-G5x4

x3 = G2x2

x4 = G3x3

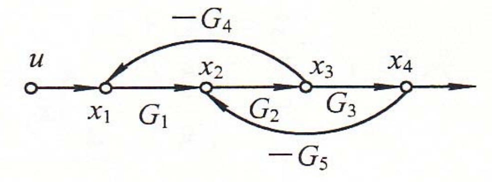


图 6-6　例 6.5 的带双重反馈的信号流图

写成矩阵形式，可得：

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-G_4&0\\G_1&0&0&-G_5\\0&G_2&0&0\\0&0&G_3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}u=\mathbf{Q}x+\mathbf{P}u$$

信号流图例6.5程序pla605

公式**W=x/u = inv(I – Q)*P**同样是正确的，不过这里的**Q**和**P**分别为4×4和4×1矩阵，用手工求逆是谁都怕的。可采用MATLAB程序pla605来计算：

- syms G1 G2 G3 G4 G5
- Q=[0,0,-G4,0;G1,0,0,-G5;0,G2,0,0;0,0,G3,0],
- P=[1;0;0;0], W=inv(eye(4)-Q)*P
- 程序运行的结果为：

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} x_1/u \\ x_2/u \\ x_3/u \\ x_4/u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [\ (1+G2*G5*G3)/(1+G2*G5*G3+G1*G2*G4)] \\ [\quad G1/(1+G2*G5*G3+G1*G2*G4)] \\ [\quad G1*G2/(1+G2*G5*G3+G1*G2*G4)] \\ [\quad G1*G2*G3/(1+G2*G5*G3+G1*G2*G4)] \end{bmatrix}$$

$$W(4)=\frac{x(4)}{u}=\frac{G1*G2*G3}{1+G2*G5*G3+G1*G2*G4}$$

- 其中：

下一讲　信号处理课中的应用

例6.6

6.4 数字信号处理中的应用

例6.6 数字滤波器系统函数

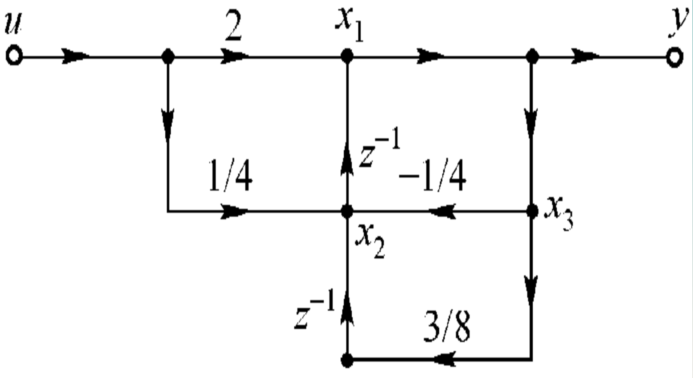
- 数字滤波器的网络结构图实际上也是一种信号流图。它的特点在于所有的相加节点都限定为双输入相加器；另外，数字滤波器器件有一个迟延一个节拍的运算，它也是一个线性算子，它的标注符号为z^{-1}。根据这样的结构图，也可以用类似于例6.5的方法，求出它的输入与输出之间的传递函数，在数字信号处理中称为系统函数。
- 图中所示为某个数字滤波器的结构图，现在要求出它的系统函数，即输出y与输入u之比。先在它的三个中间节点上标注信号的名称$x1$,$x2$,$x3$，以便对每个节点列写方程。由于迟延算子z^{-1}不是数，要用MATLAB能接受的符号代替，所以取$q = z^{-1}$，按照图示情况，可以写出

例6.6 数字滤波器系统函数

$$x_1 = qx_2 + 2u$$

$$x_2 = \left(\frac{3}{8}q - \frac{1}{4}\right)x_3 + \frac{1}{4}u$$

$$x_3 = x_1$$



写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8}q - \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qx} - \boldsymbol{Pu}$$

系统函数***W***可以写成　　W=x/u=(I-Q)$^{-1}$*P

数字滤波器系统函数程序pla606

syms q% 规定符号变量

Q(1,2)=q; Q(2,3)=3/8*q-1/4; Q(3,1)=1; % 给非零元素赋值

Q(3,3)=0; P=[2;1/4;0]% 给元素Q(3,3) P及赋值

W=inv(eye(3)-Q)*P% 求传递函数的公式

pretty(simple(W(3)))　　% 整理结果

程序运行的结果为：

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} x_1/u \\ x_2/u \\ x_3/u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -16/(-8+3*q^2-2*q)-2*q/(-8+3*q^2-2*q) \\ -2*(3*q-2)/(-8+3*q^2-2*q)-2/(-8+3*q^2-2*q) \\ -16/(-8+3*q^2-2*q)-2*q/(-8+3*q^2-2*q) \end{bmatrix}$$

整理后

$$W(3)=\frac{y}{u}=-2\frac{q+8}{(3\,q+4)\,(q-2)}=\frac{-2z^{-1}-16}{(3\,z^{-1}+4)\,(z^{-1}-2)}$$

用线性代数方法特别适用于多输入多输出系统。

下一讲　空间解析几何中的应用

例6.7,例6.8

6.5　在空间解析几何中的应用

- 许多大学已把空间解析几何部分地与线性代数相结合，这是一个正确的方向。当三坐标测量仪、机械手等精密设备日益广泛地得到应用时，工程中的空间几何难题更加突现，例如分析一组空间测量点集的共面性及求误差等问题，线性代数及其软件工具的使用对解题更显得重要。下面的例题将初步展示这一点。

例6.7 空间五点共面性的分析

数控坐标测量仪测出气缸截面上五个点的x,y,z坐标如右图，问：

(1).这五点是在一个平面上吗？离平面有多大误差？

(2).写出该平面的数学方程；

(3).这五点在该平面上是否近似构成一个圆？此圆的圆心坐标和半径是多少？

	x	y	z
点1	-0.28	-0.03	0.55
点2	4.00	4.60	3.00
点3	0.72	0.71	-0.13
点4	2.70	4.20	6.20
点5	2.00	1.80	-0.32

解：（1）如果五点在同一平面，则它们之间联线向量（可称为差向量）B=A(:,i)-A (:,j)应该共面，

五点共面性的分析(续1)

设各点的原始向量组为A，任意取第五点为基准，由它引向各点的向量组为B，则B=A-A(:,5)，矩阵减法规则要求两个矩阵是同维的，故应表为：

A=[-0.28, 4.00, 0.72, 2.70, 2.00;-0.03, 4.60,…
0.71, 4.20, 1.80; 0.55, 3,-0.13, 6.20,-0.32]

B=A-A(:,5)*[1,1,1,1,1]

$$A = \begin{bmatrix} -0.28 & 4.00 & 0.72 & 2.70 & 2.00 \\ -0.03 & 4.60 & 0.71 & 4.20 & 1.80 \\ 0.55 & 3.00 & -0.13 & 6.20 & -0.32 \end{bmatrix}$$

B =	-2.28	2.00	-1.28	0.70	0
	-1.83	2.80	-1.09	2.40	0
	0.87	3.32	0.19	6.52	0

五点共面性的分析(续2)

如果这四个向量共面，则它们组成的向量组的秩必须为2。简单试算结果是rank(B)=3，因为测试结果只取了两位小数，不大可能严格地位于同一平面上。MATLAB求秩命令允许在第三维上有一些小的突起。即用rank(B,tol)，tol是容差，它的默认值是MATLAB中的最小数eps。我们现在把它取得大一些，认为有0.1的起伏仍看做一个平面，于是键入：

rB=rank(B,0.1)=2

就是在最大误差0.1的意义下，这五点可看成共面。

（2）要找到这个平面的方程，首先要确定平面法线的方向余弦。办法之一是改变坐标系，使新坐标的xy两个主轴与此平面重合并使第三根轴与平面垂直。qr正交分解函数恰好能够完成这个工作，

五点共面性的分析(续3)

键入：　[Q,R]=qr(B)

结果为：

Q =

-0.75	-0.08	0.66
-0.60	-0.35	-0.72
0.29	-0.93	0.21

R =

3.05	-2.23	1.66	-0.10	0
0	-4.23	0.30	-6.98	0
0	0	-0.02	0.11	0

- Q的三列表示三个基向量，其中前两列是组成主要平面的基向量，第三列是与此平面正交的（即该平面法线的）基向量，R中的前两行表示在新坐标系主平面中的各点坐标值，这个新坐标是以前两个向量为基准的。R中第一个列向量沿着第一个新坐标轴，第二个列向量则是在前两个新坐标轴组成的平面上。R的第三行则表示各点对此新坐标平面的偏离和突起。

五点共面性的分析(续4)

- 知道了法线方向余弦为Q(:,3)，又知道平面上一点坐标A(:,i)，例如(4；4.6；3))后，该平面的方程即可用解析几何中的点法式公式写出：
- 0.66*(x-4)-0.72* (y-4.6)+0.21* (z-3)=0
- 化简后成为：
- 0.66*x-0.72*y+0.21*z=0.042
- （3）研究新的xy平面上各点坐标R(1,:)和R(2,:)是否构成圆，可参阅本章的例6.10。此处从略。

下一讲　　　例6.8

例6.8　圆锥截面方程插值问题

二元二次方程 $a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0$ 中的系数若均为实数，且a’,b’,c’中至少有一个不等于零，则它是圆锥曲线。设f’≠0，将方程两端除以f’，得

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+1=0$$

- 在平面上给出任意一点的坐标，代入此方程，表示这条曲线应该通过该点。如果规定了平面上的五个点，就可以得到五个关于五个系数的线性联立方程并解出它。
- 例如：求通过(-1,0),(0,2),(2,3),(2,-2),(0,-3)五点的二次圆锥截面曲线。将这五点的x,y值依次代入圆锥曲线方程，可以得到五个关于变量a,b,c,d,e的线性方程：

二次型方程插值问题(续1)

$$\begin{cases} a \qquad\qquad -d \quad +1=0 \\ \qquad 4c \qquad +2e+1=0 \\ 4a+6b+9c+2d+3e+1=0 \\ 4a-4b+4c+2d-2e+1=0 \\ \qquad 9c \quad -3e+1=0 \end{cases} \Rightarrow [\mathbf{A},\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

编程序时，高明的方法不是一点一点的代入，而是用元素群来计算，故程序pla608语句为

```
x=[-1;0;2;2;0]; y=[0;2;3;-2;-3];
A=[x.^2,x.*y,y.^2,x,y],
b=-ones(5,1), K=inv(A)*b
```

程序运行得到的A和b如上，而：

K=[a;b;c;d;e]= [-1/3;1/6;-1/6;2/3; -1/6]

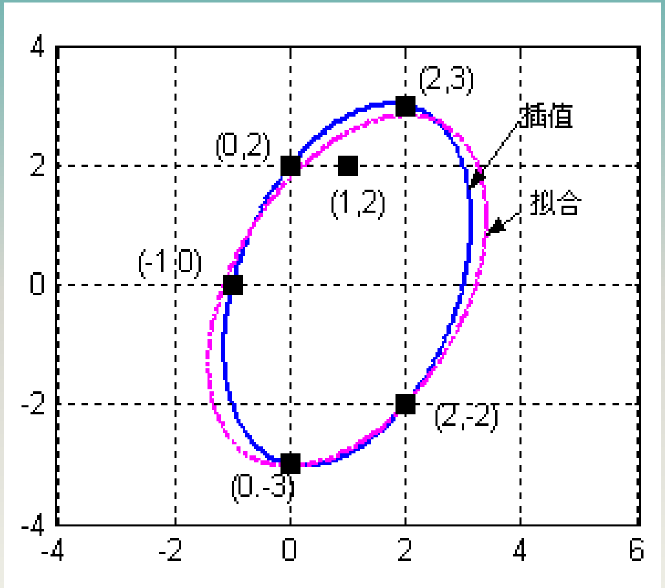
二次型方程插值问题(续2)

将方程两端同乘以-6，得到此椭圆的方程为：

$$2x^2 - xy + y^2 - 4x + y - 6 = 0$$

画出曲线如右图的蓝线。

如果随意增加一个点(1,2)，它不在椭圆上，则此时变为超定问题，插值变为拟合，程序名为pla608a。算出的方程系数向量当然不同了。用同样方法画出的图形如图中红色椭圆。

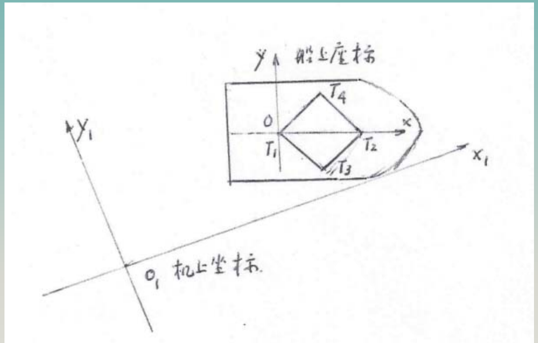


下一讲　　　例6. 9

6.6 测量学中的应用

例6.9 舰载机按测定数据判断甲板的偏斜角

设船体甲板上四个标志点在船体坐标（xb,yb）中的取值为T1(0,0), T2(10,0), T3(5,5,), T4(5,-5), 故T1、T2两点相距10米，其联线沿船的中轴线指向船头方向，T3、T4两点在T1左右45度配置，四个点构成正方菱形。舰载机上测出其机上坐标如下表。



	T1	T2	T3	T4
xp	100.00	109.950	105.47	104.476
yp	200.000	199.002	204.476	194.526

试求机上坐标与船体坐标之间夹角。

例6.9 舰载机按测定数据判断甲板的偏斜角

解：首先将机上测试数据写成一个向量组。

$$A=\begin{bmatrix} 100.0 & 109.950 & 105.470 & 104.476 \\ 200.0 & 199.002 & 204.476 & 194.526 \end{bmatrix}$$

求出机上测试的这些基准点之间的差向量。若以T1点为基准，则应把各点坐标减去T1点坐标，设这样构成的向量组为S，于是有：

S=A-A(:,1)*ones(1,4)

得到：S= 0 9.9500 5.4700 4.4760

0 -0.9980 4.4760 -5.4740

其中第一个向量为零向量，第二个向量是机上坐标系中观测的甲板上T1和T2的联线。可以把它作为判别机上坐标轴的基准。

舰载机按测定数据判断甲板的偏斜角

于是要把S向量中的第一个零向量调到最后去，而把第二个向量放到第一列，这可令S1=S(:,[2:4,1])实现。

然后对S1做qr分解，键入[Q,R]=qr(S1)，得：

$$Q = \begin{matrix} -0.9950 & 0.0998 \\ 0.0998 & 0.9950 \end{matrix}$$

及

$$R = \begin{matrix} -9.9999 & -4.9960 & -5.0000 & 0 \\ 0 & 4.9996 & -5.0000 & 0 \end{matrix}$$

Q 就是机上坐标轴与船体坐标轴之间的旋转变换矩阵。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

可从中求出机上坐标与舰上坐标之间的夹角：

Theta=asin(0.0998)=-0.1【弧度】

下一讲　　例6.10

例6.10 用坐标测量仪检验圆形工件

- 精密三坐标测量仪可以测量物体表面上任何一点的三维坐标，人们根据这些点的坐标就能推算出物体的各特征尺寸。例如，为了测量一个圆形截面的半径，要在*x-y*平面内测量其圆周上*n*个点的坐标(*xi*, *yi*)，*i* =1,…,*n*，然后拟合出其最小二乘圆的半径。
- 设圆周方程为： $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$
- 式中，(c_1,c_2)为圆心的坐标，r为半径。对c_1,c_2 ,r整理上述方程，得到

$$2xc_1+2yc_2+(r^2-c_1{}^2-c_2{}^2)=2xc_1+2yc_2+c_3=x^2+y^2$$

- 式中，$c_3=r^2-c_1{}^2-c_2{}^2$，因而 $r=\sqrt{c_3+c_1{}^2+c_2{}^2}$ ，求出c_1,c_2, c_3就可求出*r*。

用坐标测量仪检验圆形工件

- 用n个测量点坐标(xi, yi)代入，得到

$$\begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_n & 2y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{\ 2} & +y_1^{\ 2} \\ x_2^{\ 2} & +y_2^{\ 2} \\ \vdots & \vdots \\ x_n^{\ 2} & +y_n^{\ 2} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Ac} = \boldsymbol{B}$$

- 这是一组关于三个未知数c_1,c_2, c_3的n个线性方程，所以是一个超定问题。解出c_1,c_2, c_3就可得知这个最小二乘圆的圆心坐标和半径r的值。
- 设测量了某工件圆周上7个点，其坐标如下:

x =	-3.00	-2.00	-1.00	0	1.00	2.00	3.00
y =	3.03	3.90	4.35	4.50	4.40	4.02	3.26

- 试求此工件的拟合直径及圆心坐标。

用坐标测量仪检验圆形工件

解： 7点应该有7个方程，其结构相同，只是数据不同的而排成7行。可以把数据写成列向量，用元素群运算一次列出所有的7个方程。用最小二乘法解超定方程组。

其程序pla610为:

```
        % 把x,y赋值为列向量
x=[-3:3]'; y=[3.03,3.90,4.35,4.50,4.40,4.02,3.26]';
A=[2*x, 2*y, ones(size(x))]      % 求出系数矩阵A
B=x.^2+y.^2,                     % 求出系数矩阵A
c=inv(A'*A)*A'*B,                % 求超定方程的解c
r=sqrt(c(3)+c(1)^2+c(2)^2)       % 由c求出r
```

- 程序运行的结果为：

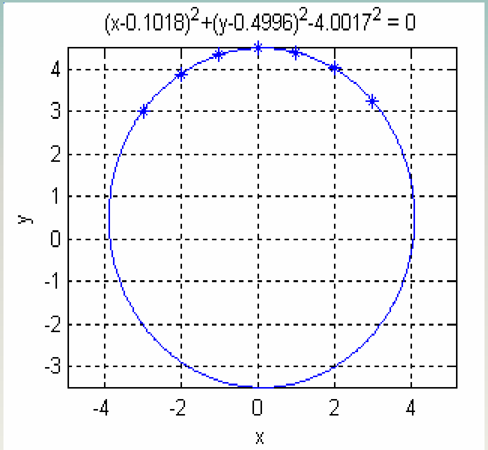
c_1= 0.1018, c_2= 0.4996 c_3 = 15.7533

r = 4.0017 工件的半径r

用坐标测量仪检验圆形工件

- pla610中还给出了画出这个拟合圆图形的语句，得出的图形见图。为了便于读者理解，把运行此程序前四行得出的A和B的结果写成方程:,可得：

$$\begin{bmatrix} -6.0000 & 6.0600 & 1.0000 \\ -4.0000 & 7.8000 & 1.0000 \\ -2.0000 & 8.7000 & 1.0000 \\ 0 & 9.0000 & 1.0000 \\ 2.0000 & 8.8000 & 1.0000 \\ 4.0000 & 8.0400 & 1.0000 \\ 6.0000 & 6.5200 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.1809 \\ 19.2100 \\ 19.9225 \\ 20.2500 \\ 20.3600 \\ 20.1604 \\ 19.6276 \end{bmatrix}$$



- 读者可以看出，把MATLAB的元素群运算和矩阵运算相结合，可以把复杂的计算变得非常简明。

下一讲　　例6.11

6.7　动漫技术中的应用

- 借助计算机实现动漫技术是一项新兴的极具竞争力的产业。线性代数在其中具有基础性的作用。比如把任何一个空间物体用多个多角锥体合成，把物体的动作分别用各个锥体的位置变化来表述。再把这些锥体在两个时间点之间的位移进行插补，使得动作可以用较小的步长连续地实现。最后要把立体的形象投影到屏幕的平面上。这个过程中几乎每一个环节都和线性代数相关。实际问题很复杂，我们在这里只举一个最简单的三角形平面运动的插补问题加以说明。

例6.11 三角形平面运动连续化

- 在例5.3中已经研究过一个三角形在平面上运动用矩阵描述的问题，并且求出了相应的变换矩阵。从动漫的角度就会提出，希望通过N次连续的小变换来完成这个运动，问这样的小变换矩阵具备什么形式？

解：把该题中求的变换矩阵看作一系列(N次)小变换**K**的连乘积，**K**$\mathbf{K}^N=\mathbf{A}$，则**K**可通过对**A**开N次方求得。在程序pla503中已设定三角形的顶点的初始数据矩阵为Q0，终点数据矩阵为Qf，本题需要在后面加一些绘图语句和相应的人机交互语句，构成程序pla611

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

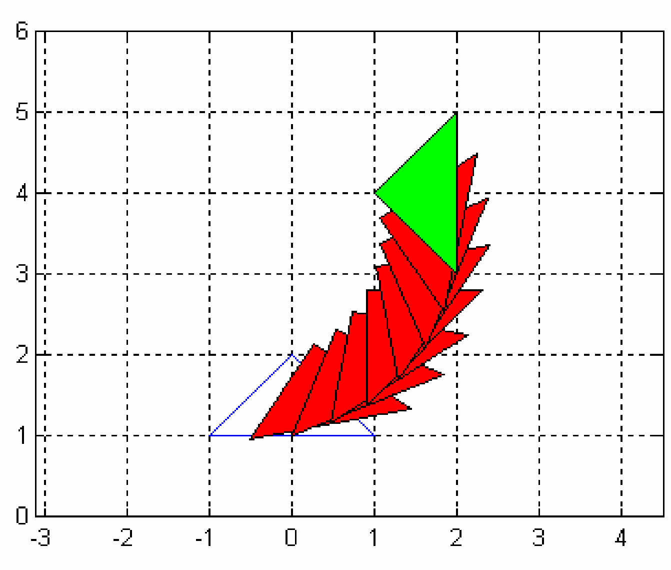
三角形平面运动连续化

其核心语句为：

```
N=input('分N份，输入N= ')
K=A^(1/N);
for i=1:N-1
  Qs=K^i*Q0;pause(2/N);
  fill(Qs(1,:),Qs(2,:),'r');
end
fill(Qf(1,:),Qf(2,:),'g'),pause
```

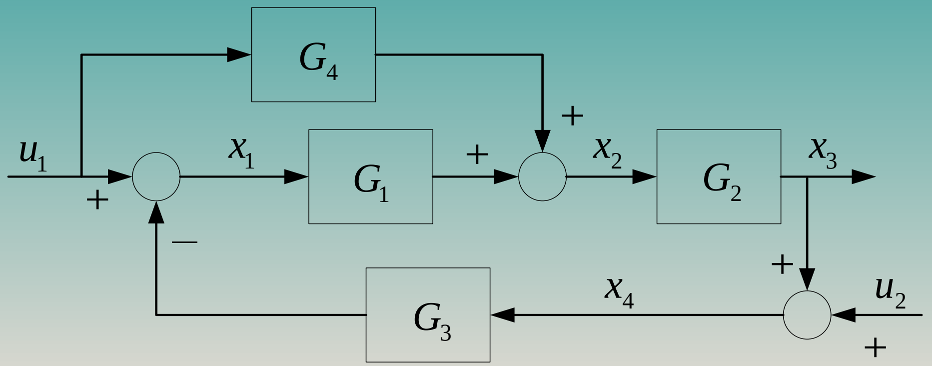
……..

- 运行程序并输入N=8时
- 执行的图形如右。



下一讲　　　控制例6.12

例6. 12　控制系统结构图的化简



- 分析图示系统，该系统有四个方框G1, G2, G3, G4 , 两个输入信号u1, u2, 图中任意选定了四个状态变量x1, x2, x3, x4。如果它是一个随动系统, 则G3为1，x1为测量误差，x3为输出, 不含测量噪声u2的真正误差为e= x3-u1。现在要求出以u2为输入，x1, x2, x3, x4, e为输出的传递函数。

控制系统结构图的化简

系统虽然简单，但却不能化成并联、串联和反馈三种简单情况的合成，除非把第二个合成节点移到第一个合成节点之前, 但这将改变变量x1的原始物理意义，另外也不能把结构框图所没有表出的真正误差e涵盖进去。

线性代数的方法是从原始方程组出发，建立矩阵模型，可以保持了各信号节点的原来物理意义。在本例中，取x1, x2, x3, x4, e五个信号节点列写方程，有:

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= -G_3 x_4 + u_1 \\
x_2 &= G_1 x_1 + G_4 u_1 \\
x_3 &= G_2 x_2 \\
x_4 &= x_3 + u_2 \\
e &= x_3 - u_1
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ e \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & -G_3 & 0 \\
G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ e \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
1 & 0 \\
G_4 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 1 \\
-1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}
$$

控制系统结构图的化简(续1)

•写成矩阵形式并推导为：

$$\mathbf{X} = \mathbf{QX} + \mathbf{PU} \;\Rightarrow\; (\mathbf{I}-\mathbf{Q})\mathbf{X} = \mathbf{PU} \;\Rightarrow\; \mathbf{X}/\mathbf{U} = (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{P}$$

•系数矩阵Q和P的内容一旦被赋值，根据这个算式， 就可以求出以u1, u2为输入， x1, x2, x3, x4, e为五个输出的5×2传递函数矩阵， 其中包括十个传递函数。编成的程序如pla612，其核心语句为：

```
syms G1 G2 G3 G4
Q(1, 4)=-G3;  Q(2, 1)=G1;                    %给Q,P赋值
Q(3, 2)=G2;  Q(4, 3)=1; Q(5, 3)=1; Q(5, 5)=0;
P(2, 1)=G4;  P(1, 1)=1; P(4, 2)=1;  P(5, 1)=-1;  P(5, 2)=0;
W=inv(eye(5)-Q)*P;                           % 信号流图方程解
```

控制系统结构图的化简(续2)

- 程序运行结果为:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X}/\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} x_1/u_1 & x_1/u_2 \\ x_2/u_1 & x_2/u_2 \\ x_3/u_1 & x_3/u_2 \\ x_4/u_1 & x_4/u_2 \\ e/u_1 & e/u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+G_1G_2G_3}\begin{bmatrix} 1-G_2G_3G_4 & -G_3 \\ G_1+G_4 & G_1G_3 \\ G_1G_2+G_2G_4 & -G_1G_2G_3 \\ G_1G_2+G_2G_4 & 1 \\ G_1G_2+G_2G_4 & -G_1G_2G_3 \end{bmatrix}$$

- 它显示了呈矩阵排列的十个传递函数。
- 用线性代数建模解决控制系统化简问题的最大优点是从原始方程出发，一步到位，不但避免了一切中间步骤的差错，而且能解出多输入多输出(MIMO)系统的全部传递函数。

下一讲　　　　例6.13

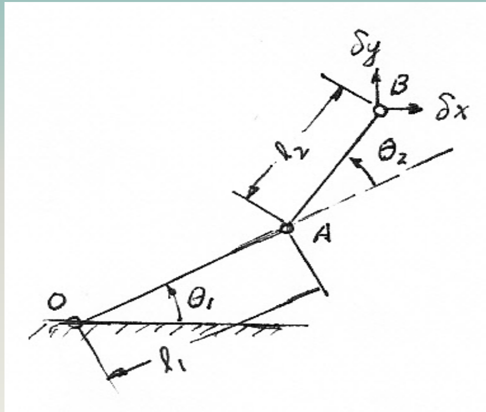
6.9 机器人运动学中的应用

- 例6.13 机械臂速度变换及雅克比矩阵

设一个两自由度平面机械臂如图6-12所示，执行端B点坐标与两转动关节转角度的关系为：

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$



输入量θ1, θ2和输出量x,y之间是非线性函数的关系，但两个关节转动角度的微增量$\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$所引起执行端B点微位移δx,δy却是线性关系，并以下列矩阵表示：

机械臂速度变换及雅克比矩阵

$$\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial x/\partial\theta_1 & \partial x/\partial\theta_2\\ \partial y/\partial\theta_1 & \partial y/\partial\theta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\theta_1\\ \delta\theta_2\end{bmatrix}=\mathbf{J}\begin{bmatrix}\delta\theta_1\\ \delta\theta_2\end{bmatrix}$$

- 这个偏导数矩阵J 称为雅可比矩阵，它确定了机械臂关节转动增量与执行器移动增量之间的线性关系。如果把方程两端都除以时间增量δt，则雅可比矩阵反映了两个转动速度ω与执行端移动速度v之间的变换关系。

$$\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial x/\partial\theta_1 & \partial x/\partial\theta_2\\ \partial y/\partial\theta_1 & \partial y/\partial\theta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}=\mathbf{J}*\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}$$

按上图的结构，经过求导数可以得出

机械臂速度变换及雅克比矩阵

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right) & -l_2 \sin\left(\theta_1+\theta_2\right) \\ \left(l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right) & l_2 \cos\left(\theta_1+\theta_2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

•工程实践中常常遇到的是逆问题，即规定了执行端的直线移动速度和方向，控制两个驱动轴的转动速度，那就要用到雅可比矩阵的逆阵了：

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\theta_1 & \partial x/\partial\theta_2 \\ \partial y/\partial\theta_1 & \partial y/\partial\theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

•复杂的机器人或机械臂具有很多自由度，对其执行端要求既有三方向的移动速度和三方向的转动速度要求时，雅可比矩阵将可能达到6×6维，甚至更高，求逆的计算量是很大的，矩阵工具是绝不能少的。

下一讲　　例6.14

6.10　文献管理中的应用

- 因特网上数字图书馆的发展对情报的存储和检索提出了更高的要求，现代情报检索技术就构筑在矩阵理论的基础上。通常，数据库中收集了大量的文件，我们希望从中搜索出那些能与特定关键词相匹配的文件。文件的类型可以是杂志中的研究报告、因特网上的网页、图书馆中的书或胶片库中的电影等。
- 假如数据库中包括了n个文件，而搜索所用的关键词有m个，就可以把数据库表示为$m \times n$的矩阵$\boldsymbol{A}$。其中每个关键词占矩阵的一行，每个文件用矩阵的列表示。$\boldsymbol{A}$的第j列的第一个元素是一个数，它表示第一个关键词出现的相对频率；第二个元素表示第二个关键词出现的相对频率；…，依次类推。用于搜索的关键词清单用R^m空间的列向量$\boldsymbol{x}$表示。如果关键词清单中第i个关键词在搜索列中出现，则$\boldsymbol{x}$的第i个元素就赋值1，否则就赋值0。为了进行搜索，只要把$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$乘以$\boldsymbol{x}$。

例6.14 用矩阵创建情报检索模型

•假如数据库包含有以下七本书，书名分别为:

B1—应用线性代数，B2—初等线性代数，

B3—初等线性代数及其应用，B4—线性代数及其应用
B5—线性代数及应用，B6—矩阵代数及应用

B7—矩阵理论。

而搜索的6个关键词组按以下的拼音字母次序排列:

初等，代数，矩阵，理论，线性，应用

因为这些关键词在每个书名中最多只出现1次，所以其相对频率数不是0就是1。当第i个关键词出现在第j本书名上时，元素A(i,j)就等于1，否则就等于0。

用矩阵创建情报检索模型

设输入的关键词是“应用，线性，代数”，则数据库矩阵A、搜索向量x及其两者的乘积: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 可以表示为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1\\1&1&1&1&1&0&0\\1&0&1&1&1&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&1\\1&1&0&0&1&0\\1&1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1&1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\3\\3\\3\\2\\0\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{y}$的各个分量就表示各书与搜索向量匹配的程度。因为$y1 = y3 = y4 = y5 = 3$，说明这四本书B1, B3, B4, B5必然包含所有三个关键词。这四本书就被认为具有最高的匹配度，因而在搜索的结果中会把这几本书排在最前面。

用矩阵创建情报检索模型(续)

- 互联网中的搜索引擎不仅要考虑匹配度，还要用网页的重要性进行加权，于是矩阵A就不再是0~1矩阵，而可能是取值0~10的加权矩阵。由Page(人名)提出了用网站的访问次数作为重要性加权指标，于是加权算法表现为两个超大矩阵的乘法，Google采纳了这种算法，使用户总能优先得到最重要的搜索结果，从而在搜索领域取得很大的成功。
- 本例把线性变换的概念进一步扩展。它不一定是在具体的几何空间内进行变量的变换（或映射），在本例中，它是从“关键词”子空间变换为“文献目录”子空间的。
- 现代的搜索中往往包括几百万个文件和成千的关键词，所以数据库矩阵会变得非常大。但是也要注意到数据库矩阵和搜索向量中的大部分的元素为零，这种矩阵和向量被称为稀疏的。利用这个性质，可以节省计算机的存储空间和搜索时间。MATLAB中就设有一个稀疏矩阵的子程序库。

下一讲　　　例6.15

6.11 经济管理中的应用

- Leontief教授因为宏观经济建模和1949年首创用计算机求解线性方程组而获得1973年诺贝尔奖。其建模思路如下：假定一个国家或经济体可以分解为*n*个部门，这些部门都有生产产品或服务的独立功能。设单列*n*元向量**x**是这些*n*个部门的产出向量。考虑该国要向外提供产品，设**d**为外部需求向量，表示其他国家和部门对该国经济体的需求。
- 在各经济部门进行满足外部需求的生产时，它们也必须增加内部的相互需求。Leontief提出的问题是，为了满足外部的最终需求向量*d*，各生产部门的实际产出**x**应该是多少，这对于经济计划的制订当然很有价值。因为

$$\mathbf{x} = \{内部需求\} + \{外部需求\mathbf{d}\}$$

- Leontiff的输入/输出模型中的一个基本假定是: 对于每个部门，存在着一个在R^n空间单位消耗列向量***vi***，它表示第*i*个部门每产出一个单位（比如100万美金）产品，需要消耗其他部门产出的数量。把这*n*个***vi***并列起来，它可以构成一个$n\times n$的系数矩阵，称为内部需求矩阵***V***。

例6. 15　　国民经济宏观模型

•设国民经济由制造业、农业和服务业三部门组成。它们的单位消耗列向量如下表。

向下列部门购买	每单位输出的输入消耗		
	制 造 业	农　业	服 务 业
制造业	0.5	0.4	0.2
农业	0.2	0.35	0.15
服务业	0.15	0.1	0.3

如果制造业产出了100个单位的产品，有50个单位会被自己消耗，20个单位被农业消耗，而被服务业消耗的是15个单位，用算式表示为：

$$100\boldsymbol{v}_1 = 100\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix}$$

国民经济宏观模型(续1)

把几个部门都算上的内部消耗的计算方法，可以写出

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.35 & 0.15 \\ 0.15 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}$$

- 于是总的需求方程可以写为

x - Vx = d，或(I -V)x = d

从而可用MATLAB语句写出其解的表达式为

x = inv (I -V)*d

用数字来试算一下，设外部需求d=[30;20;10]，只要知道内部需求矩阵V，就可以用以下程序解出***x***。

国民经济宏观模型(续2)

用程序pla615解出***x***。

V=[0.5,0.4,0.2;0.2,0.35,0.15;0.15,0.1,0.3]

d = [30;20;10], x = inv(eye(3)-V)*d

- 程序运行的结果为：

$$x = \begin{bmatrix} 160.4563 \\ 94.4867 \\ 62.1673 \end{bmatrix}$$

这个结果是合理的，因为实际产出应该比外部需求大得多，以应付生产过程中内部的消耗。说到某某外部需求可以拉动国民经济增长多少个百分点，就是从这样的模型中得出的。

- 内部需求矩阵***V***要满足一些基本要求，一般各列的列向元素总和必须小于1，否则这个部门就将因入不敷出而造成计划混乱。

附　　录

附录A　MATLAB的矩阵代数和作图初步

附录B　本书中应用例题索引

附录C　第七章电子稿简介：线性代数在工程和科技中的应用举例

参考书目

[1] Steven J. Leon, Linear Algebra with Applications (6th Edition), 2002，影印版“线性代数”，机械工业出版社，2004，ISBN 7-111-15216-6, pp545，机械工业出版社影印

[2] David C. Lay, Linear Algebra and Its Application (3rd Edition), 2004, ISBN: 0201709708, pp492+76，电子工业出版社影印

[3] Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, 4th Edition, Wilsley-Cambridge Press, Feb.2009, ISBN: 978-0980232714

[4] Steven J Leon, Eugene Herman, Richard Faulkenberry, ATLAST Manual, 2/E, Publisher: Prentice Hall, 12/19/2003,pp.270, ISBN: 0-13-101121-9

[5] 陈怀琛，龚杰民，线性代数实践及MATLAB入门，北京，电子工业出版社，2005年10月，ISBN: 978-0980232714

参考书目（续）

[6] 陈怀琛，高淑萍，杨威，工程线性代数（MATLAB版），北京，电子工业出版社，2007年10月，ISBN: 978-0980232714

[7] 杨威，高淑萍，线性代数机算与应用指导(MATLAB版)，西安，西安电子科技大学出版社，2009年4月。
ISBN: 978-0980232714

[8] 游宏，朱广俊，线性代数，北京，高等教育出版社，2012年3月

[9] 陈怀琛，论工科线性代数的现代化与大众化，高等数学研究，第15卷，第2期，2012年3月

[10] 陈怀琛，高淑萍，用主元连乘法定义行列式——二论工科线性代数的现代化与大众化，中国教育数学学会2013年会（南充）上的学术报告，2013年8月

参考书目（续）

[11] 陈怀琛，讲透三维空间，少讲N维空间——三论工科线性代数的现代化与大众化，中国教育数学学会2013年会（南充）上的学术报告，2013年8月

[12] 陈怀琛，《MATLAB及其在理工课程中的应用指南》，西安电子科技大学出版社，2000年1月第一版，2004年12月第二版

[13] 陈怀琛、吴大正、高西全：《MATLAB及在电子信息课程中的应用》，电子工业出版社，2002年1月第一版，2013年8月第四版

[14] 陈怀琛,《数字信号处理教程：MATLAB释义与实现》,电子工业出版社,2004年12月第一版,2013年8月第三版

[15] 陈怀琛，屈胜利，何雅静，控制系统化简的矩阵方法，CCC2010中国控制年会论文集, 2010 年8月

[16] 张小向，线性代数建模案例汇编，东南大学数学系，2012年6月