实用大众线性代数

第1章 线性方程组与矩阵

主讲：杨威

第1章 线性方程组与矩阵

1.1 概 述
1.2 二元与三元方程组的解的几何意义
1.3 高斯消元法与行阶梯方程组
1.4 矩阵及矩阵的初等变换
1.5 利用MATLAB解线性方程组
1.6 应用实例

1.1 概述

例1.1 食品配方的应用问题，某食品厂收到某种食品的订单，要求这种食品由甲、乙、丙、丁四种原料做成，且该食品中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的比例分别为15%、5%和12%。而甲、乙、丙、丁原料中含蛋白质、脂肪和碳水化合物的百分比由表1.1给出。那么，如何用这四种原料配置出满足要求的食品呢？

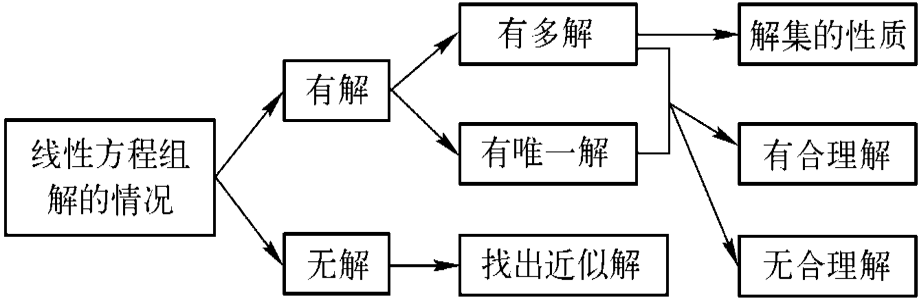
表1.1

	甲	乙	丙	丁	某食品
蛋白质（%）	20	16	10	15	15
脂肪（%）	3	8	2	5	5
碳水化合物（%）	10	25	20	5	12

表1.1					
	甲	乙	丙	丁	某食品
蛋白质（%）	20	16	10	15	15
脂肪（%）	3	8	2	5	5
碳水化合物（%）	10	25	20	5	12

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
20\%x_1 + 16\%x_2 + 10\%x_3 + 15\%x_4 = 15\% \\
3\%x_1 + 8\%x_2 + 2\%x_3 + 5\%x_4 = 5\% \\
10\%x_1 + 25\%x_2 + 20\%x_3 + 5\%x_4 = 12\%
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
20x_1 + 16x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 15 \\
3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 5 \\
10x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 5x_4 = 12
\end{cases}
$$

线性代数的任务之一



线性方程组的解有三种类型：

1. **适定方程组：存在着唯一的一组解；**
2. **欠定方程组：其解存在但不唯一；**
3. **超定方程组：不存在精确解，可以求出其近似解。**

1.2 线性方程组解的几何意义

- **例1.2　二元线性方程组解法**

$$(a)\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{matrix} \\ r_2' = r_2 + r_1 \end{matrix} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ \qquad\quad x_2 = 2 \end{cases}$$

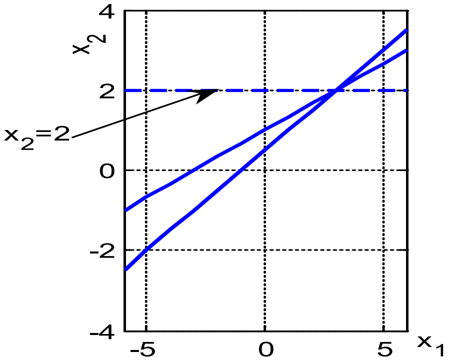
$$(b)\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{matrix} \\ r_2 = r_2' + r_1 \end{matrix} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 = 2 \end{cases}$$

题(a)可以由下而上地回代解出x2=2，及x1=3，这是解线性方程组的规范方法。

题(b)则无解。

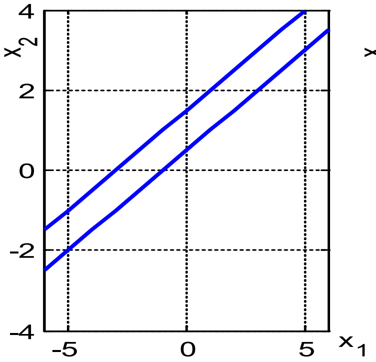
题(c)有无穷多解。其几何解释见下图。

二元方程组解的几种情况



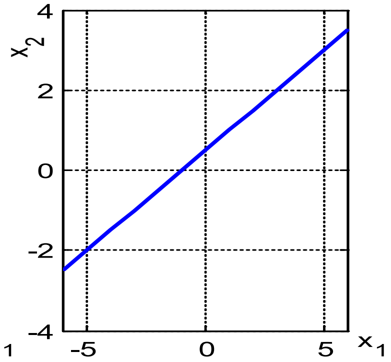
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

(a)有解



$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

(b) 无解



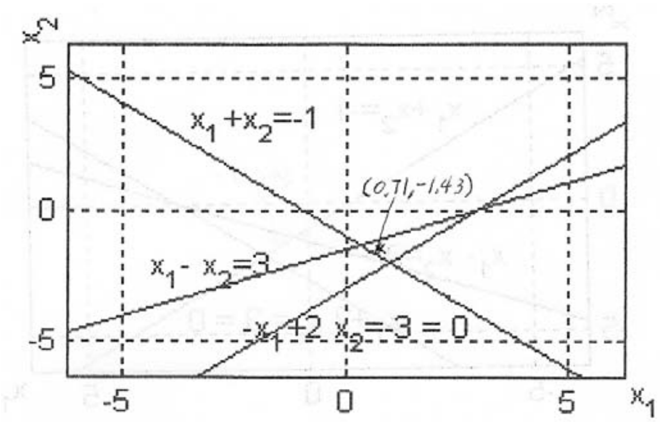
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

(c) 有无数解

超定二元方程组的近似解

三个方程，只有两个变量。它们所对应的三根直线并不共点，即方程组不相容，称为超定方程组。它没有精确解，但有近似解——最小二乘解(第四章介绍)。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$$



例1.3 求解下列三元方程组

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -5x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 4 \\ -5y + 3z = -5 \\ 7y - 7z = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 4 \\ -5y + 3z = -5 \\ -2.8z = 14 \end{cases}$$

从第2个方程中减去第1个方程的2倍，得到x系数为零的新的第2方程，再从第3个方程中减去第1个方程的-5倍，得到x系数为零的新的第3个方程。

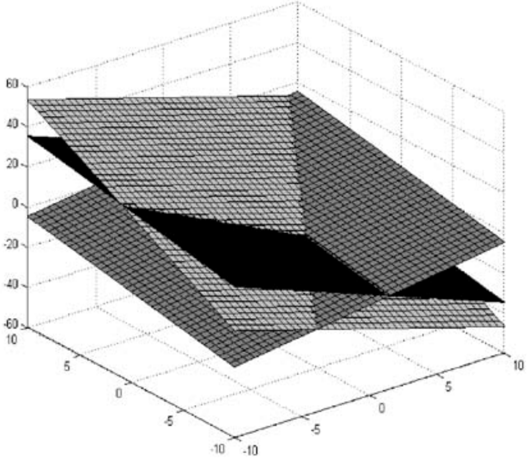
•再将第2个方程乘7/5与第3个方程相加，在第3个方程中消去y。

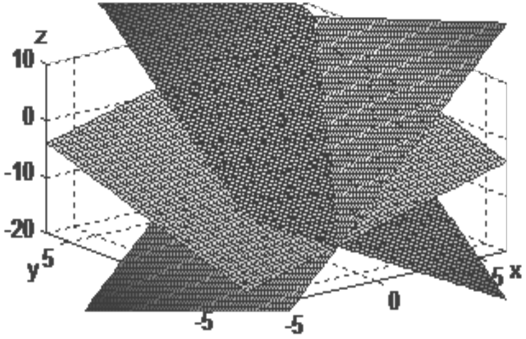
•于是形成了阶梯形的结构。可以由下而上地回代解出z, y, x，这是解线性方程组的规范方法。

例1.3的解的几何意义

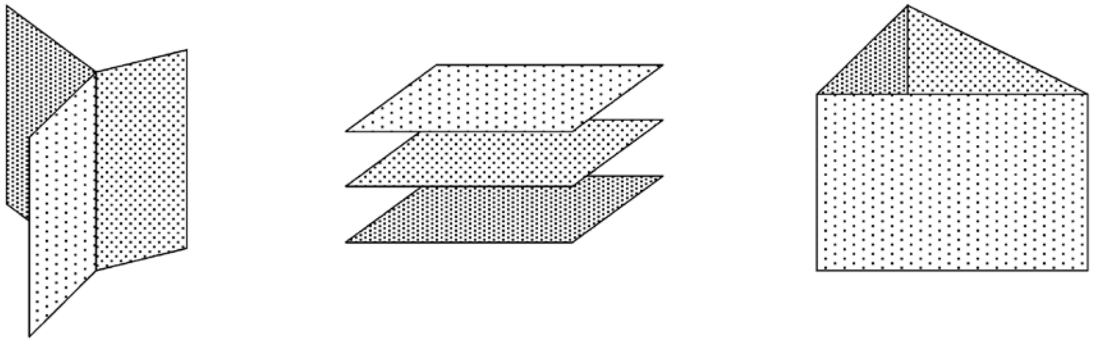
这三个方程在笛卡尔坐标系中的图形是三个平面，方程组的解就是它们的交点坐标，如下左图。
若将第三个方程改一下，消元后剩了两个方程，交点就成了交线，说明有无数个解，构成了一根直线，如下右图。

$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-3y+z=3 \\ 4x-y-z=11 \end{cases} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1} \begin{cases} x+y-z=4 \\ -5y+3z=-5 \\ -5y+3z=-5 \end{cases} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{cases} x+y-z=4 \\ -5y+3z=-5 \\ 0=0 \end{cases}$$





三元方程无解和多解的几何意义



对于更多元的线性方程组，不可能想象出其空间的几何图形，但关于欠定、适定和不相容方程的基本概念是一脉相承的，它们的解的特性也都可以推广到高维空间。

1.3 高斯消元法与阶梯形方程组

将上面的方法推广到高阶系统。这就要借助于矩阵，用计算机解决问题，这是线性代数与初等代数的区别。设m为方程数，n为变元数，一般情况下，变量的个数*n*与方程的个数*m*不一定相等。则n元方程组可表为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.3.1)$$

式（1.3.1）称为n元线性方程组。

高阶线性方程组的形式

- 线性方程组（1.3.1）中解的全体称为它的解集合。解方程组就是求其全部解，亦即求出其解集合。如果两个方程组有相同的解集合，就称它们为同解方程组。
- 消元法的基本思想是：通过消元变换把方程组化为容易求解的阶梯形结构的同解方程组。下面通过一个三元方程组的例题来说明消元法的具体步骤。

例1.4方程组的消元过程

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=-4 \\ 3x_1+3x_2-x_3=-5 \\ 2x_1+2x_2-x_3=4 \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

解：将式中的第一个方程分别乘以-3/3($-a_{21}/a_{11}$)及-2/3($-a_{31}/a_{11}$)，加到第二、三方程上，可以消去后两个方程中的变量x_1，

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=-4 \\ x_2+x_3=-1 \\ 2/3x_2+1/3x_3=20/3 \end{cases} \qquad (1).3.3$$

将式（1.3.3）中的第二个方程乘-2/3($-a_{32}/a_{22}$)，加到第三个方程中，消去其中的x_2，得

例1.4方程组的消元过程(续)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ \qquad x_2 + x_3 = -1 \qquad\qquad (1.3.4) \\ \qquad -1/3x_3 = 22/3 \end{cases}$$

形如式（1.3.4）的方程组称为**行阶梯形方程组**。这样的阶梯形方程组可以用回代法方便地逐个求出它的解。回代过程如下：由最后一个方程解出x_3= -22，代入第二个方程，解得x_2=-1+22=21，再将x_2，x_3代入第一个方程，得到：x1=(-4-2x2+2x3)/3=-30。

从编程来看，回代过程也可以像消元一样进行，不过是自下而上，自右至左，把主对角线右上方的元素都消成零而已。

例1.4方程组的消元过程(续)

- 把第三个方程分别乘以-6, 3，依次加到第一、二两方程中，消去这两个方程中x3的系数，再将第二个方程乘2，加到第一个方程中，得到仅含变量x1的方程，方程组依次成为：

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2 \qquad = -48 \\ \qquad x_2 \qquad = 21 \\ \qquad\qquad -1/3x_3 = 22/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 \qquad\qquad = -90 \\ \qquad x_2 \qquad = 21 \\ \qquad\qquad -1/3\,x_3 = 22/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -30 \\ \qquad x_2 \qquad = 21 \\ \qquad\qquad x_3 = -22 \end{cases}$$

最后的行阶梯形方程组只保留了系数均为1的对角项。得到它就等于求出了方程组的解。消元法的任务已经完成。

三种同解变换

- 在消元过程中，主要对原方程组进行了三种变换：
- ① 互换两个方程的位置；称为位置变换。
- ② 用一个非零数k乘某个方程；称为数乘变换。
- ③ 把一个方程的k倍加到另一个方程上。称为消元变换。
- 这三种变换称为线性方程组的**同解变换**。因为对方程组而言，这些变换不会改变方程组的解。
- 消元法规则刻板，容易程序化，其计算量又是最少的，所以可以利用计算机用简明的程序实现。成为一切线性方程组求解的基础。

1.4 矩阵及矩阵的初等变换

- 重新观察例1.4，可以发现，从方程组（1.3.2）变换到方程组（1.3.5）的全过程中，方程组中的变量并没有参与任何运算，参与运算的只是方程组的系数和常数。于是可省略变量，提取方程组（1.3.2）的等式左端的系数和右端常数，分别写成如下系数数表A和常数数表b

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- 其中，数表A的行号表示方程的序号，列号表示变量x的序号。由数表A、b很容易恢复出方程组原型。所以可以通过这两个数表来研究线性方程组。该矩形数表就称为矩阵。学习线性代数的主要目标就是要学会利用矩阵来描述系统，并用矩阵软件工具去解决各种问题。

1.4.1 矩阵的概念和定义

- 定义1.1　由m×n个数(i=1,2,…,m; j= 1,2,…,n）排成的m行n列的矩形数表(右方为对应的MATLAB表示法)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \left(a=\begin{bmatrix} a(1,1) & a(1,2) & \cdots & a(1,n) \\ a(2,1) & a(2,2) & \cdots & a(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(m,1) & a(m,2) & \cdots & a(m,n) \end{bmatrix} \right)$$

- 称为m行n列矩阵，简称m×n(阶)矩阵，通常用黑体大写字母来表示。矩阵中的m×n个数称为矩阵A的元素，其中a_{ij}表示矩阵A的第i行第j列元素。在MATLAB中表为a(i,j)，元素全是实数的矩阵称为实矩阵；元素含复数的矩阵称为复矩阵。

几种特殊矩阵

- 只有一行的矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$ ，称为行矩阵，又称为行向量。
- 只有一列的矩阵 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_m\end{bmatrix}$ 称为列矩阵，又称为列向量。
- 如果两个矩阵的行数与列数相等，则称它们为同型矩阵。
- 若A、B是同型矩阵，且所有对应位置的元素值均相等，则称矩阵A与矩阵B相等，记为A=B。
- 元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作O。
- 行数与列数相同的矩阵称为n阶方阵，简记为A_n。

几种特殊矩阵(续)

- 一个n阶方阵的左上角与右下角之间的连线称为它的主对角线。主对角线下方的元素全为零的方阵称为上三角矩阵，主对角线上方的元素全为零的方阵称为下三角矩阵，即

$$\text{上三角 } \mathbf{A_n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{下三角} \boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 主对角线以外的元素全为零的方阵称为对角阵。在对角方阵中，主对角线以外的零元素可不必写出。
- 主对角线上全为1的n阶对角方阵称为单位矩阵，记作：

$$\text{对角矩阵} \boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{单位矩阵} \boldsymbol{I}_n=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

线性方程组用增广矩阵表示

由线性方程组所有系数所构成的矩阵，称为线性方程组的系数矩阵。系数矩阵为n阶方阵的方程组也称为n阶方程组。三阶线性方程组（1.3.2）的系数矩阵为;

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- 把A, b并排起来组成的矩阵C称为增广矩阵，知道C也就知道了线性方程组的全部参数。对方程所做的消元变换都可以表示为对系数增广矩阵的行变换。

前向消元过程

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=-4 \\ 3x_1+3x_2-x_3=-5 \\ 2x_1+2x_2-x_3=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=-4 \\ x_2+x_3=-1 \\ 2/3x_2+1/3x_3=20/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=-4 \\ x_2+x_3=-1 \\ -1/3x_3=22/3 \end{cases}$$

系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 20/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3 \end{bmatrix}$$

回代过程的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -48 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -90 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \end{bmatrix}$$

1.4.3 矩阵的初等行变换

- 定义1.2 下面三种变换称为矩阵的初等行变换：（以下的r是英文行(row)字的缩写）

（1）交换两行的位置（交换第i，j行，记作$r_i \longleftrightarrow r_j$）；

（2）以非零数k乘某行（以k乘第i行，记作kr_i）；

（3）把某一行的k倍加到另一行上（把第j行的k倍加到第i行上，记作r_i+kr_j）

- 矩阵的这三种初等行变换就对应于方程组的三种初等变换（位置、数乘和消元）。它们都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换，由此可知，初等行变换是同解变换。
- 如果矩阵A经有限次初等行变换变成矩阵B，就称矩阵A与矩阵B等价。

方程消元等价于行变换

- 线性方程组和它的增广矩阵是一一对应的，对线性方程组进行初等行变换就是对其增广矩阵进行初等行变换。于是解方程组（1.3.2）的过程可用矩阵的初等行变换来一一对照。

$$\mathbf{C}=\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 3 & 3 & -1 & -5\\ 2 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2/3r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2/3 & 1/3 & 20/3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2/3r_2]{}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & -48\\ 0 & 1 & 0 & 21\\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & -90\\ 0 & 1 & 0 & 21\\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & -90\\ 0 & 1 & 0 & 21\\ 0 & 0 & -1/3 & 22/3\end{bmatrix}$$

- 这样得到了行阶梯矩阵，它对应于方程组（1.3.5）。
- 对该矩阵还可以继续进行初等行变换，它对应于消元法中的回代过程。
- 回代后系数矩阵成为对角矩阵。最后一步是将各行都除以对角元素，使系数矩阵成为一个单位矩阵，其最右边一列就是方程组（1.3.2）的解。

1.5 利用MATLAB来解方程组

线性代数最基本的运算函数：rref

(Reduced Row Echelon Form—rref)

作用：把矩阵化为行最简形，有以下具体功能：

（1）解线性方程组；

（2）求矩阵的秩；

（3）求矩阵行最简形首元所在的列数。

例1.6 用计算机解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -11 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -12 \end{cases}$$

解:A=[2,-2,2,6;2,-1,2,4;3,-1,4,4;1,1,-1,3],
b=[-16;-10;-11;-12
U0c=rref([A,b])
系统立即给出:

$$\mathrm{U0c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

U0c矩阵的最后一列就是方程组的解。

例1.7 设方程组的系数矩阵A, b如下：

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 2 & 2 & -2\\ 1 & -5 & 1 & -3 & -1\\ -1 & 2 & -5 & 6 & 5\\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$$

- **判断它解的性质及A的秩。**
- **解:A=[-2,-2,2,-2,2;1,-5,1,-1,-3;-1,2,-5,5,6;-1,2,1,-1,0]**
- **b=[-2;-1;2;0],[U0c,ip]=rref([A,b])**
- **得到：U0c =**

1	0	0	0	0	-2/9
0	1	0	0	0	2/9
0	0	1	-1	0	-2/3
0	0	0	0	1	-1/3

- **ip= 1 2 3 5**

例1.7的解（欠定方程组）

- ip的长度为4，说明有4个主元和主元行，即矩阵A的秩r=4。由于系数矩阵A与增广矩阵[A,b]具有同样的秩，方程组是相容的。它有四个方程和五个变量。故方程组又是欠定的，其中x4是可以任选的自由变量，取不同的值就有不同的解，故有无穷多组解：

$$x_1 = -2/9,\quad x_2 = 2/9,\quad x_3 = -2/3 + x_4,\quad x_5 = -1/3,$$

- 按适定方程那样求解，使x=A\b，可以得到答案。

- 其中x4可以任意赋值，可设为常数x4=c，于是，方程组有无穷多组解。

第二章复习要求及习题

2.7.1　本章要求掌握的概念和计算

(1) 矩阵乘法(包括分块乘法)的定义，特别是要弄懂三种初等矩阵与按行分块矩阵的乘积。

(2) 行初等变换和左乘初等矩阵的等价性，高斯消元法与 LU 分解的等价性。

(3) 如何用单列 $m\times 1$ 向量乘单行 $1\times n$ 向量构成 $m\times n$ 矩阵以简化矩阵赋值。

(4) 弄清增广矩阵[***A*,*I***]经 rref 函数行化简后求逆矩阵的原理；掌握矩阵求逆函数 inv(A)。

(5) 掌握逆矩阵的定义及用逆矩阵求方程组解的方法，特别是左除和右除的概念和用法。

(6) LU 分解将 *A* 分解为下三角矩阵 ***L*** 乘上三角矩阵 ***U***，弄清 ***L*** 和 ***U*** 的特点。

(7) 矩阵乘积的逆与逆矩阵的乘积次序要颠倒，inv(A*B)=inv(B)*inv(A)，转置也是如此。

(8) MATLAB 实践：矩阵的四则运算和元素群运算，分块运算，用矩阵乘法求解方程组，LU 分解。

(9) MATLAB 函数：eye、triu、tril、diag、lu、inv、sum 矩阵运算符：^、\ (左除)、/ (右除)。

2.7.2　计算题

2.1　MATLAB 提供了上三角、下三角、对角矩阵的生成函数 triu,tril 和 diag，读者可试用它们及 randintr 函数来生成随机的特殊矩阵。

(a) 生成两个 4×4 的上三角随机方阵 **T**1 和 T2，求 T1*T2 及 T2*T1，说明为何上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵；为什么矩阵乘法不满足交换律；其对角线元素的乘积为何等于乘积的对角线元素。并说明这些规则是否适用于下三角矩阵，是否适用于任意方阵。

(b) 求上述两个上三角方阵 T1 和 T2 的转置 T3=T1′和 T4=T2′；说明其为何成为下三角矩阵；验证 (T1*T2)’=T1’*T2’是否成立？应该是什么关系式；求 T1 和 T2 的逆阵 V1 和 V2，验证其乘积的逆阵与逆阵的乘积应满足何种关系。

2.2　构建一个 4×4 的随机正整数矩阵 ***A***，取三次不同的 ***A***，检验下式是否满足：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}$$

再生成三个 4×4 的随机正整数矩阵 ***B***。然后检验下式是否满足：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$$

检验的方法可以靠读数比较。而更好的方法是列出“左端-右端”的语句，看结果是否为零。

2.3　试证明：$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22}b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & a_{mm}b_{mm} \end{bmatrix}$，即两下三角矩阵的乘积仍为下三角矩阵，乘积的对角元素为两矩阵对应元素的乘积。消元初等矩阵 ***E*** 也有类似特性，设 ***E*** 为消元初等矩阵，说明 $\boldsymbol{L}=\mathrm{inv}\left(\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_1\right)$ 为什么为下三角矩阵。

2.4　用题 2.3 的结论说明消元回代时矩阵主对角线上的元素为何不变，即 U1=ref1(A)和 U2=ref2(A)的对角元素相同。用 MATLAB 生成 5 阶随机方阵来验证这一点。

2.5　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 8 & -8 & -9 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$，则什么样的 $\boldsymbol{E}_{21}$ 和 $\boldsymbol{E}_{31}$ 能使乘积 $\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{A}$ 的(2,1)和 $\boldsymbol{E}_{31}\boldsymbol{A}$ 的(3,1)处生成零？找出一个 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{E}_{31}$，使得 ***EA*** 能同时在第一列下方生成两个零。

2.6　用分块乘积法可把第一列的下方消元为零：$\boldsymbol{EA}=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -c/a & \mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ \mathbf{0} & d-cb/a \end{bmatrix}$，对于上题

所示矩阵 $\boldsymbol{A}$，以及本题中的 c、d 和 $d-cb/a$ 都是什么值？试用 MATLAB 检验其正确性。

2.7　设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 4 & 2\\2 & 1 & 4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\\1 & 2 & 1\\5 & 3 & -2\end{bmatrix}$，用列乘行分块乘法 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\end{bmatrix}+\cdots$ 计算乘积 $\boldsymbol{AB}$，并对结果进行检验。读者也可自行生成四阶随机方阵进行检验。

2.8　随机生成三个 3 × 3 同阶整数方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，验证公式：(a) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+AC$；(b) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；(c) $(\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；(d) $(\boldsymbol{ABC})^{-1}=C^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。

2.9　设 $f(x)=x^5+4x^4-3x^3+2x-7$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\2 & 3 & 4 & 1\\3 & 4 & 5 & 1\\4 & 5 & 6 & 1\end{bmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$。

2.10　表 2-8 为某高校 2005 和 2006 年入学新生人数统计表。(1)求 2006 年与 2005 年相比，对应类别入学人数的增加情况。(2)若 2007 年与 2006 年入学相比，其增长人数比 2006 年相对于 2005 年入学的增长人数上再增加 10%，求 2007 年入学新生的人数分布情况。

表 2-8　题 2.10 的数据表

2005 年新生人数统计表					
类别	一系	二系	三系	四系	五系
本科	200	200	150	150	180
硕士	25	20	30	20	18
2006 年新生人数统计表					
类别	一系	二系	三系	四系	五系
本科	220	210	200	160	200
硕士	35	28	30	26	28

2.11　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 4 & 2\\6 & 3 & 5\end{bmatrix}$，则用什么样的 $\boldsymbol{E}$ 乘以 $\boldsymbol{A}$ 能使 $\boldsymbol{A}$ 变成三角形式 $\boldsymbol{U}$? 将 $\boldsymbol{A}$ 分解为 $\boldsymbol{LU}$ 中的 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 有何关系？

2.12　图 2-4 为五个城市之间的空运航线，用有向图表示。问：

(1) 从城市 2 出发，最多经过 4 次转机(最多坐 5 次航班)，到达城市 5，有几种不同的方法？

(2) 从城市 5 出发，想到达城市 3，最少经过几次转机。

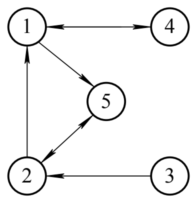


图 2-4　航站分布

2.13　求矩阵的逆矩阵

(a) $\begin{bmatrix}2 & 5 & 7\\6 & 3 & 4\\5 & -2 & -3\end{bmatrix}$,；(b) $\begin{bmatrix}3 & -4 & 5\\2 & -3 & 1\\3 & -5 & -1\end{bmatrix}$；

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$；(d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & & \\ 2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$。

2.14 (a) 计算图 2-5 所示网络的传输函数；

(b) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4/3 & -12 \\ -1/4 & 3 \end{bmatrix}$，设计一个三级梯形网络，使它的合成传输函数等于 $\boldsymbol{A}$。

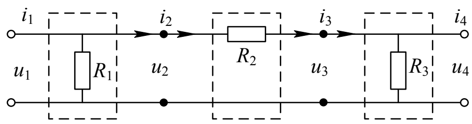


图 2-5 三级梯形网络

2.15 解矩阵方程：

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$；　　(b) $\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$；

(c) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

1.6 应用实例

- 1.6.1 求插值多项式 $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$ 的各系数，使它能通过表中各点。

t_i	0	1	2	3
$f(t_i)$	3	0	–1	6

- 解：列方程

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_0 & & & & = 3 \\ a_0 & + a_1 & + a_2 & + a_3 & = 0 \\ a_0 & +2a_1 & +4a_2 & + 8a_3 & = -1 \\ a_0 & +3a_1 & +9a_2 & +27a_3 & = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{AX}=\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{X}=\mathbf{A}\setminus\mathbf{b}$$

程序为：A=[1,0,0,0;1,1,1,1;1,2,4,8;1,3,9,27]
b=[3;0;-1;6], U0=rref([A,b])

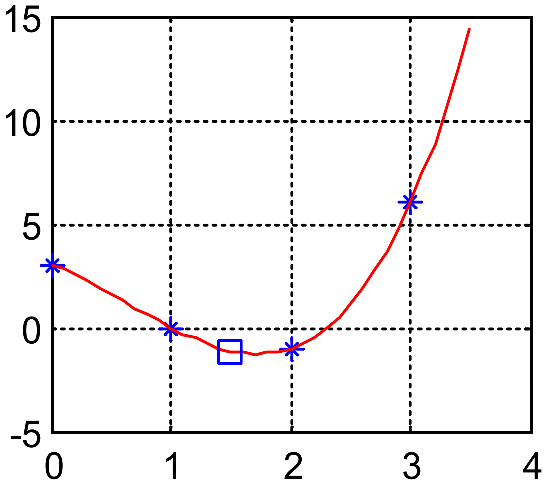
插值多项式系数计算

$$U0 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

X=A\b=[3, −2, −2, 1]^T

即a0=3, a1=−2, a2=−2, a3=1代入

$$p(t) = 3 - 2t - 2t^2 + t^3$$

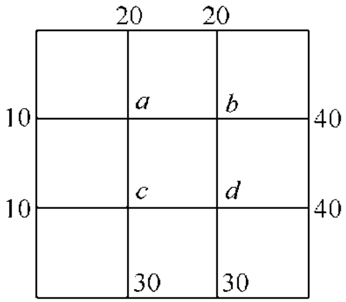


求t=1.5处多项式的值：

$$p(1.5) = 3 - 2(1.5) - 2(1.5)^2 + (1.5)^3 = -1.125$$

1.6.2 平板稳态温度的计算

$$x_a = (10 + 20 + x_b + x_c)/4$$
$$x_b = (20 + 40 + x_a + x_d)/4$$
$$x_c = (10 + 30 + x_a + x_d)/4$$
$$x_d = (40 + 30 + x_b + x_c)/4$$



- 写成规范的矩阵方程AX=b：

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.25 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 1.00 & 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0 & 1.00 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & -0.25 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 15 \\ 10 \\ 17.5 \end{bmatrix}$$

平板温度问题的解

- A=[1,-.25,-0.25,0;-0.25,1,0,-0.25;-0.25,0,1, -0.25; 0,-0.25, -0.25,1]
- b=[7.5;15;10;17.5], U0=rref([A,b])

运行结果为：

- U0 = 1 0 0 0 20
- 0 1 0 0 27.50
- 0 0 1 0 22.5000
- 0 0 0 1 30.0000
- 即xa=20度，xb=27.5度，xc=22.5度，xd=30度

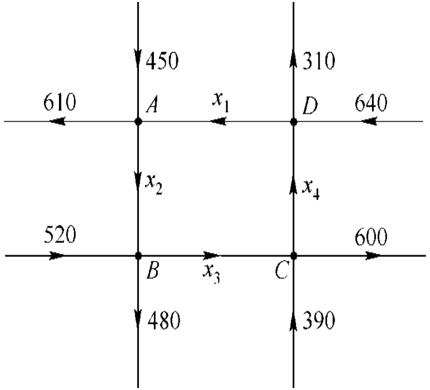
1.6.3 交通流量的分析

节点A: $x1+450=x2+610$

节点B: $x2+520=x3+480$

节点C: $x3+390=x4+600$

节点D: $x4+640=x1+310$



$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad\qquad &= 160 \\ x_2 - x_3 \qquad &= -40 \\ x_3 - x_4 &= 210 \\ -x_1 \qquad\qquad + x_4 &= -330 \end{aligned}$$

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ -40 \\ 210 \\ -330 \end{bmatrix}$$

交通流量的分析计算机解

- A=[1,-1,0,0;0,1,-1,0;0,0,1,-1;-1,0,0,1]
- b=[160;-40;210;-330]，U0=rref([A,b])

$$\mathrm{U0}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} 330 \\ 170 \\ 210 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}x_4$$

- 这是一个欠定方程组，如果用X=A\b,得出的是非数NaN，即得不出解，所以用rref来解概念比较清楚。它的秩为3，设x4是自由变量，将它移到增广项位置，就可以求出上述的解。其物理意义就是可以有任意数量的车绕行而不影响方程组，但同时影响x1~x4。

1.6.4 化学方程的配平

$$(x_1)C_3H_8+(x_2)O_2\rightarrow(x_3)CO_2+(x_4)H_2O$$

四种物质的成分列向量 $C_3H_8:\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix},\ O_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},\ CO_2\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\ H_2O\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$

配平方程为: $x_1\cdot\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix}+x_2\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}=x_3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+x_4\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$

移项化后可知: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&-1&0\\8&0&0&-2\\0&2&-2&-1\end{bmatrix}\quad\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

化学反应方程配平的解

这是一个欠定方程组，用行阶梯变换求解，

A=[3,0,-1,0;8,0,0,-2;0,2,-2,-1]，U0=rref(A)

得到：
$$U0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \end{bmatrix}$$

第四行看做0=0或x4＝x4，第四列是x4的系数，将它看做自由变量，得到的解必须是最小正整数，x4应取４，配平后方程：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} (x_4 \text{取} 4)$$

$$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$$

第一章要求掌握的概念和计算

1.了解二阶和三阶线性方程组在笛卡尔坐标系中的图形及几何意义。

2. 掌握利用初等变换把增广矩阵化为行最简形。

3. 秩表明独立方程的个数。系数矩阵与增广矩阵的秩相等是线性方程组有解的充分必要条件。

4、MATLAB实践：

（1）能够利用MATLAB软件构造矩阵；

（2）能够利用MATLAB软件求解线性方程组的解；

（3）能够利用MATLAB软件求矩阵的秩；