第3章 行 列 式

行列式是公元1690年前后诞生的。在传统的线性代数中，行列式都被放在第一章第一节，其中充满着繁琐的数学推导，也是初学者最大的拦路虎之一。

但是，随着高斯消元法和计算机的广泛应用，在方程求解软件中已经嵌入了主元非零的判解条件，完全可以避开行列式传统讲法中的多种概念和复杂公式，大大节约了篇幅，也降低了工科读者的入门难度。

3.1 二、三阶行列式的意义

3.1.1 二阶行列式

行列式的主要用途是判断线性方程组的解是否存在和唯一。

例3.1 求下面二元线性方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 (乘\, a_{21}/a_{11}) \Rightarrow a_{21}x_1 + a_{21}a_{12}/a_{11}\, x_2 = a_{21}b/a_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

解: 用第二个方程减去第一个方程乘 a_{21}/a_{11}，写成矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & (a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - a_{21}b_1/a_{11} \end{bmatrix} \qquad (3.1.1)$$

当两个主元都不等于零时，由第2式解出 $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

再代入第1式，得到:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

二阶行列式的定义

- 为了便于记忆，引入双竖线记号：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right)=\det(\mathbf{A}) \quad (3.1.2)$$

称为该系数矩阵A的行列式(Determinant)。把a_{11},a_{22}的连线称为主对角线，a_{12},a_{21}的连线称为其副对角线，则二阶行列式等于主对角线元素乘积减副对角线元素的乘积。

- 方程组(3.1.1)的解可表示成$x_1=D_1/D$，$x_2=D_2/D$，其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \qquad (3.1.3)$$

分别为将方程常数列b取代矩阵A中1,2列所得的行列式。

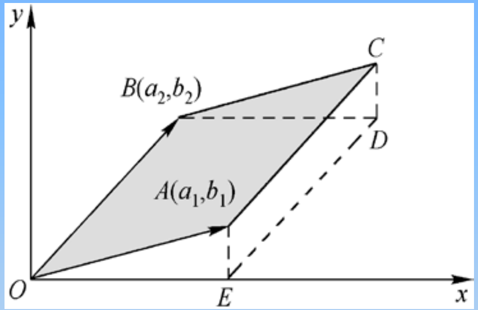
由此得到判定二元非齐次方程组(3.1.1)解的存在判据：

其系数矩阵的行列式det(A)必须不等于零。

例3.2　二阶行列式的几何意义

平面上有一个平行四边形*OACB*，*A*、*B*两点的坐标分别为$(a_1,b_1)(a_2,b_2)$，如图所示，求平行四边形*OACB*的面积。

解：作辅助线，从图上可得：



$$S_{OACB}=S_{OEDB}+S_{CDB}-S_{AEO}-S_{AEDC}$$

$$=S_{OEDB}-S_{AEDC}=a_1b_2-a_2b_1$$

说明该平行四边形的面积刚好等于以*A*、*B*两点坐标所构成的二阶行列式。

由此可见，如果两个向量共线，它们构成的平行四边形面积为零，其行列式也为零，方程无唯一解的几何与代数判据就得到了统一。

下一讲　三阶行列式

3.1.2 三阶行列式

- 例3.3 求下面三元线性方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

- 解: 利用高斯消元法可以得到

$$\left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\right)x_1$$

$$= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}$$

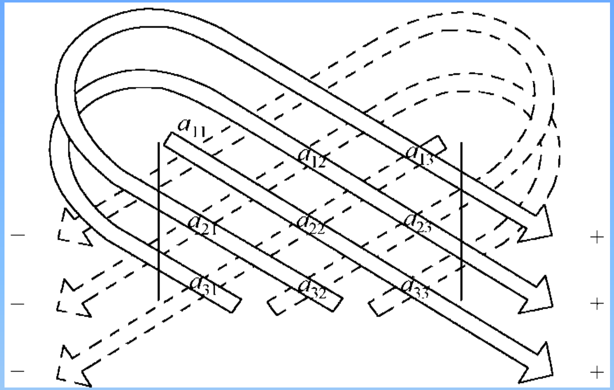
定义：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

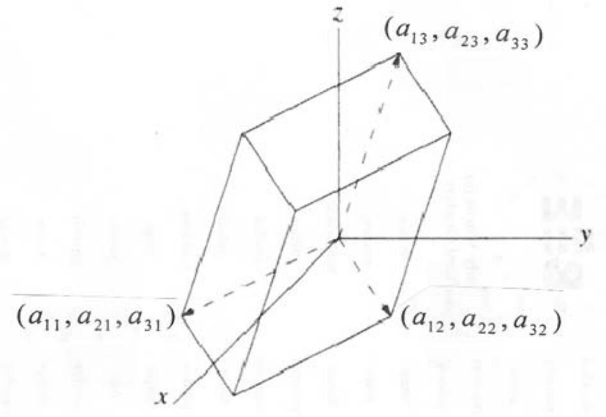
为A的三阶行列式，

三阶行列式的几何意义

* 它是6项的代数和，每一项都是3个元素的乘积，其中3项为正，另3项为负。为了便于记忆，图3-2给出了它的计算规则。左上到右下的三个实线箭头所经的三个元素连乘积取正号，右上到左下的虚线箭头所经的三个元素的连乘积取负号。



* 三阶行列式的几何意义是以三个三维列向量为三条边构成的平行六面体的体积，如图3-3，



三阶行列式的代数特征

- 根据三阶行列式的定义，可以把式(3.1.5)的右端定义为D1，再扩展到x_2,x_3，写出

$$Dx_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D_1,\ Dx_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=D_2\quad Dx_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=D_3$$

- 当此方程组的系数行列式D≠0时，可以得到它的解为：$x_1=D_1/D$，$x_2=D_2/D$，$x_3=D_3/D$。其中 D_1、D_2、D_3是用常数项列b分别替换*D*中的第1、2、3列所得到的三阶行列式。如果分母上的行列式*D*等于零，那么解的分母就为零，其结果是无穷大(常数/0)，说明其解不存在。
- 所以，系数行列式不等于零det(A) ≠0也是三阶非齐次线性方程组的解存在的必要条件。

下一讲　高阶行列式

3.2 n阶行列式定义之一：显式法

从前述的低阶行列式可以演绎出高阶行列式的定义。目前，有三种不同的演绎方法，可形成三种定义。

(1)显式法：根据行列式的结构直接进行演绎。二阶行列式(3.1.1)由两项之和组成，每项为两个元素相乘；三阶行列式(3.1.6)由六项（即3的阶乘3！）之和组成，每项为三个元素相乘；

依此类推，n阶行列式应该由n！项之和组成，每项为n个元素相乘。照此式计算时，需要做的乘法次数为(n-1)*n!。当n=4时，3*4!=72，n=5时，4*5!=480...，阶数略高一些，运算量更大。而演绎各项的符号规则更加复杂，必须引入“逆序数”等概念...，很繁琐。行列式的“可畏”，源头就在这里。

行列式定义之二：代数余子式法

(2) 它的思路是把显式法的表达式降阶，通过行列式按行展开的特性，可以把n阶行列式降为n个(n-1)阶行列式。比如，上述的三阶行列式就可以写成三个二阶行列式之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

用这个方法把n阶行列式降为n个(n-1)阶，每个(n-1)行列式又展开成(n-1)个(n-2)阶的，...也很繁琐。可以算出，其计算量比显式法约减少n/2倍，确定各项的正负号的规则也简化一些，但要引入更多新名词和新概念，如随伴矩阵等。

行列式定义之三：对角主元连乘法

(3)三阶方程组作高斯消后的行阶梯形式为

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})/a_{11} & a_{23}-a_{13}a_{21}/a_{11} \\ 0 & 0 & (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})/(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \end{bmatrix}$$

其主对角线上前两个主元的乘积为$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，恰好是二阶方阵的行列式；而前三个主元连乘积恰好等于其系数矩阵的三阶行列式。

由此可以推想，将n阶系数方阵用高斯消元法变换为行阶梯形，其对角线上所有主元的连乘积就是该方阵的行列式。这个推想得到了数学家的证实。

下一讲　三种行列式定义的比较

*3.2.2 三种定义的比较

数值计算中通常用所需的乘法次数来标志计算的复杂度，下表给出了三种定义方法在不同阶数下计算行列式的计算量。

表3-1 行列式的三种定义方法所需乘法次数

阶数n	2	3	4	5	10	25
显式法	2	12	72	480	32659200	3.7*10^26
代数余子式法	2	9	40	205	7257600	3.1*10^25
主元连乘	4	13	24	45	342	5233

拿1,3两种方法所需的乘法次数加以比较，可以看出，只有N=2时，用显式法求行列式才比消元法方便。n=3时，两者的计算量基本相同。n=5时，用显式法算的计算量为480次乘法，用笔算是工程上无法接受的。

维数灾难(Curse of Dimensionality)

n更大时，定义一的运算量不仅超越了人们笔算可能性，也超越了计算机的能力。一个25阶的行列式若按显式法来算，乘法的次数为3.72×10^26次。用每秒1万亿（10^12）次的超级计算机，也要算1200万年才能得出结果。

2013年11月，中国的“天河二号”超级计算机以其计算速度33.86千万亿次(10^16)两次连获全球之冠，用这样的计算机来算仍然要400年。

* 这种计算量随维数呈指数增长的现象称为“维数灾难”，是科学计算的大敌，前两种定义方法都存在着这个致命弱点，没有人会用前两种定义计算四阶以上的行列式的，因而在在现代大矩阵计算中没有实用价值。

主元连乘法的优越性

- 对角主元连乘法的计算量小得多，由它实现上三角矩阵所需的乘法次数约为N≈n^3/3，n=10时，N=333次，n=25时，N≈5200次，用现有的微机可以在毫微秒级的时间内完成。主元连乘法的计算公式可由高斯消元法直接导出，不引入任何其他概念，所以行列式计算软件都是用这个方法编程的。
- 它的缺点是主元和各个元素之间的数学关系不明确，不容易进行基本理论的推导。所以很多行列式数学推理还得依靠前两种定义方法,前两种方法在数学理论发展过程中起过历史作用，对今天爱搞理论的学生培养推理能力也许有一定的用处。而真正的工程应用和MATLAB等软件的开发，都采用主元连乘法。

高斯消元与行列式计算的统一

* 由于诸主元的计算是在消元法求解过程中自动完成的，不需要增加额外的计算量，解方程时就不必专门求行列式了。
* 为了使定义(3.2.2)不出现歧义，还必须对所用的消元法提出一个要求，那就是消元过程中只许采用消法矩阵E，不得使用交换矩阵P。因为交换矩阵会使某些主元变号，从而造成行列式改变正负号。如果行阶梯变换软件中使用了交换变换，则不难让程序记住使用交换矩阵P的次数r，在结果中乘以(-1)^r，则(3.2.2)式应改为 $D=(-1)^r p_{11}p_{22}\cdots p_{\mathbf{nn}}$

结果就全面了。

但用行列式或主元判解时，关心的只是它是否等于零，其正负号没有什么价值，可以不管，只看其绝对值就行。

主元连乘定义与解的唯一性

用行阶梯型对角线主元连乘积：

$$D = p_{11}p_{22}\cdots p_{\mathbf{nn}} \qquad (3.2.2)$$

来定义行列式，可以很自然地把解的存在、唯一性与行列式是否为零联系起来。

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{cccc:c} p_{11} & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & p_{22} & \cdots & 0 & d_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & p_{nn} & d_n \end{array}\right]$$

消元法解方程时，先把系数方阵变为上三角矩阵，再经回代变为对角矩阵。方程的解为:

$$x_1 = d_1/p_{11},\ x_2 = d_2/p_{22},\cdots,x_n = d_n/p_{nn}$$

各主元若都不为零，就可以把主元分别除各行的增广项求得其解。按这个定义，若行列式不等于零，就意味着所有n个主元都不等于零，因而方程组的解存在并唯一。反之，若行列式等于零，就意味其中至少有一个主元为零，方程组就不会有解，因此行列式不为零就可以成为判别解的存在与唯一性的判据。

3.2.3 本书采用的方法

* 从本书的对象和特色出发，我们将采用主元连乘法作为行列式的基本定义和实际计算。有个别难证的定理将不作严格数学证明，而是利用数学家们的证明结果，或者用MATLAB做数字验证。比如行列式的乘法定理：det(A*B)=det(A)*det(B)
* 看似简单，其严格证明却要用一些新的数学概念和公式，花很多时间。科学需要继承并且是有分工的，数学家已经证明了的定理，搞应用的读者可以利用这些定理，不必自己都去补数学基础，重证一遍。工科应该利用数学的成果，发挥自己的优势来搞创新。数学界也可以利用别人的程序来验算公式的正确性，不必自己再去重编程序。

下一讲　行列式的性质

研究行列式的性质和计算主要是帮助判零，因为行列式是否等于零决定的方程的解的性质

3.3 行列式的性质

- 在采用主元连乘法定义行列式时，较方便的是用初等变换矩阵变为行阶梯型，用它来推导行列式的性质，为此先要知道初等矩阵的行列式，以及方阵乘积的行列式。
- 性质1. 根据定义，上三角方阵、下三角方阵和对角方阵的行列式等于其对角元素的连乘积。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{\mathbf{nn}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{\mathbf{nn}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{\mathbf{nn}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{\mathbf{nn}}$$

- 推论1：n阶单位矩阵的行列式等于一。

行列式的乘法定理

性质2 方阵乘积AB的行列式是A和B的行列式的乘积。

det(AB)=det(A)det(B)

证：如果A,B都已化成为行阶梯型，证明是容易的：

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_{11} & * & * & * \\ 0 & b_{22} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3.3.1)$$

因此 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|=(a_{11}a_{22}\cdots a_{nn})(b_{11}b_{22}\cdots b_{nn})=a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}\cdots a_{nn}b_{nn}=|\mathbf{AB}|$

在一般情况下要证明这个关系，要用更多的数学术语和概念，本书就不做了。建议读者把这个命题用MATLAB进行数值验证。

行列式的性质（续）

- **性质3** 消法矩阵E的主对角元素均为一， 故Det(E)=1。
- **性质4** 行交换矩阵P的行列式等于-1，即 Det(P)= -1
- 证：用一个将2，4行进行交换的4×4矩阵为例，做两次消法变换。先在第2行上加上第4行，再在第4行上减去新的第2行，得到右端的上三角阵，其主元连乘积等于-1：

$$\det \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{2行衎4}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{4行新行2}]{} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

- **推论1**：方阵中任意i,j两行交换，相当于乘P,行列式反号。
- **推论2**：将矩阵A化为行阶梯形时，由于只采用消法变换和交换变换，其行列式的绝对值不变。

行列式的性质（续）

- **性质5** 按行列式定义，数乘变换方阵D的行列式等于k。
  推论：矩阵A中任一行乘以k后，其行列式也乘以k。

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = k\cdot\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = k\det(\mathbf{A})$$

- 要注意这只是对一行数乘，对多行都作同样数乘时，行列式也得乘多次，所以对三阶方阵A：

$$\det(k\mathbf{A}) = \left|k\mathbf{A}\right| = \det\left(\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{32} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}\right) = k^3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k^3\det(\mathbf{A})$$

下一讲　行列式的其他性质

3.3.2 行列式的其他性质

* **性质6** 方阵中若有一个全零行，其行列式为零。
* 证：n×n方阵若有一行全零，消元时应移到最下面，方阵的秩r=n-1，系数矩阵的有效部分成为(n-1)×n维，则其n维主对角线上至少有一个零元素，故其行列式为零。
* **推论：**方阵的行阶梯形中若出现任何不在主对角线上的主元，则此行阶梯型的下方必有全零行出现（如下式），其行列式必为零。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n\,n}=0 \end{vmatrix} = 0$$

行列式的其他性质（续）

- **性质7** 如果A中两行的元素相同或成比例，行列式等于零。

证：对这两行进行消法变换，将得出一个全零行，根据性质6，其行列式为零。

- **性质8** 如果A不可逆，则其行最简形不可能化为单位矩阵，最下方必有全零行出现，故det(A)=0；如果A可逆，则行阶梯形对角主元必全不为零，故其连乘积det(A)≠0。
- **性质9** 方阵A与它的转置A^T的行列式相等，即。

证：由$A=L*U$，$A^T=(L*U)^T=U^T*L^T$，因为U，L都是三角矩阵，转置不改变主对角线上主元的值，故其行列式也不变。$det(A)=det(L*U)=det(U^T*L^T)=det(A^T)$

- 行列式的这些性质主要用来帮助手工计算。实际工程问题中几乎没有计算行列式的需求，而计算行列式的软件又十分成熟可靠，手算行列式的实际意义已经不大了。

3.3.3 克莱姆法则

定理3.1 设n阶方程组Ax=b的系数行列式 D≠0，则该方程组有唯一解：

$$x_1=D_1/D, x_2=D_2/D, \ldots, X_n=D_n/D \qquad （3.3.8）$$

其中，Dj是把*D*中第*j*列的元素用常数项b代替后所得到的*n*阶行列式。

推论：*n*×*n*非齐次方程组的解存在和唯一的条件是其系数行列式不等于零，D=det(A)≠0。

定理3.2 (定理3.1的逆否) 如果线性方程组无解或有超过一个以上的解，则它的系数行列式必为零。 , …,

把常数项全为零的方程组称为齐次线性方程组；从定理3.2可以得到关于齐次线性方程组的两个推论。

- 推论1 对于*n*×*n*齐次线性方程组，当系数行列式det(A)≠0时，只有一个零解。
- 推论2 若齐次线性方程组有非零解，则必有det(A)≠0。

克莱姆法则最早证明了线性代数方程组解的存在和唯一性，具有历史意义。但因其计算量太大，在工程上应用价值不大。

下一讲　行列式的计算机算法

3.4 行列式的计算机算法

- 工程上要解的线性系统，至少在三阶以上，能用消元法求出解，就足以证明其行列式不为零，没有再求其行列式判解的必要。万一需要，也绝不可能笔算，真正有用的是用计算机来算行列式。此时，必须考虑的问题主要是计算速度和计算精度。
- 根据计算量小，计算方法单一的特点，主元连乘法最适合计算机。主元连乘法计算行列式只需要两个步骤：一是进行消元；使原系数矩阵变为行阶梯方阵；二是将对角主元连乘起来。
- 下面提供两种方法，第一个方法是自编程序，其好处是原理清楚，其缺点是程序不可靠，只宜在课堂上用；第二个方法是调用MATLAB的商用程序，好处是可靠，同时适用于数值矩阵和符号矩阵，缺点是程序长，难以读懂。

自编MATLAB程序计算行列式

第一步

将矩阵变换为行阶梯形，这可以用lu函数，它可以把任意矩阵分解为一个主元均为1的准下三角矩阵L和上三角矩阵U的乘积A=L*U。其调用格式为：

```
[L,U]=lu(A)
```

由于L的行列式为1，故U的主元连乘积就是A的行列式。

也可用求行阶梯形的函数U1=ref1(A)或U2=ref2(A)，用它们代替U。

第二步

取U的对角元素(用diag)进行连乘(用prod)，得到行列式D.

```
D=prod(diag(U))      % 也可用U1或U2代替U
```

由于lu分解 (以及ref1,ref2)函数运行过程中可能出现过行交换，所以求出的D正负号可能不正确，不过这并不要紧。另外自编的程序不能求符号矩阵的行列式。

用MATLAB内部函数计算行列式

最简单的是用MATLAB中计算方阵行列式的函数det.m，它可以兼用于数字矩阵和符号矩阵，且给出的结果从数值上和正负号上都是正确的，缺点是看不到其原理。其调用格式为D=det(A)。此函数要求输入矩阵A为方阵，不然系统会给出“出错警告”。

* 例3.4 求下列矩阵的行列式

$$A=\begin{bmatrix}10 & 8 & 6 & 4\\ 2 & 5 & 8 & 9\\ 6 & 0 & 9 & 9\\ 5 & 8 & 7 & 4\end{bmatrix}$$

解：程序pla304如下： ：

```
A = [10,8,6,4; 2,5,8,9; 6,0,9,9; 5,8,7,4];
[L,U] =lu(A),              % 把作lu分解
% 也可用U=ref1(A)或U=ref2(A)求U
D =prod(diag(U))    % 求U的主对角元素的连乘积
```

程序运行结果为：D = 1428

若直接输入语句D1=det(A)即可得到D1= - 1428。

例3.5　范德蒙矩阵的行列式

证明：$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$

证：这要用到符号运算，只能用内部函数det

```
syms a1 a2 a3 a4
A=[ones(1,4);a1 a2 a3 a4;[a1 a2 a3 a4].^2;[a1 a2 a3 a4].^3]
% 注意用元素群运算赋值
D4=det(A) , simple(D4)          % simple是化简函数
```

运行结果：

D4= (-a4+a3)*(a2-a4)*(a2-a3)*(-a4+a1)*(a1-a3)*(a1-a2)

可见只要ai互不相同，D4就不为零。

此结果也可推广至n阶情况。

下一讲　应用实例

3.5 应用实例

行列式有以下一些用途：(1) 判别线性方程组解的存在性和唯一性；(2)求平行四边形面积或平行多面体体积；(3)建立特征方程，求特征值，这将在第五章中介绍。

- 例3.7 试证插值理论中一个基本结论：设函数y=f(x)在*n*个互不相同的点x1,x2,...,xn处的函数值为y1,y2,...,yn，则存在着次数不超过*n*-1的多项式

满足 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ ，$P_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n-1)$

且此结果是唯一的。

证明：把*n*个点代入多项式中，得到方程组

$$\begin{cases} a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_{n-1}x_1^{n-1}=y_1 \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_{n-1}x_2^{n-1}=y_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_{n-1}x_n^{n-1}=y_n \end{cases} \qquad (3.5.1)$$

例：插值函数的存在和唯一性

- 方程组(3.5.1)是以a0,a1,...,an为未知量的方程组，其系数行列式Dn是*n*阶范德蒙行列式的转置，在例3.5中已求出它的表达式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} \left(x_i - x_j \right)$$

- 由例3.5知道，当xi互不相同时，Dn≠0。故知方程组(3.5.1)有唯一解，即满足条件的多项式存在且唯一。
- 用消元法解线性方程组时，在求解的同时，就求出了主元，也完成了主元是否不为零的判别，用户感觉不到用行列式判解的工作。只在行列式接近于零的准奇异条件下，计算结果的可靠性可能受到威胁时，计算机会发出警告，

例3.8　奇异矩阵不存在逆阵

* 设A=[-16,-4,-6;15,-3,9;18,0,9],，试求其逆阵 $V=A^{-1}$。
* 解: 输入*A*的数据后，键入V=inv(A)，程序为:
* A=[-16,-4,-6;15,-3,9;18,0,9], V=inv(A)
* 运行后得到警告信息：
* Warning: Matrix is close to singular or badly scaled
* Results may be inaccurate. RCOND = 4.531523e-18.
* 它警告说：“此矩阵接近奇异，数据尺度很差，结果可能不准确。逆条件数RCOND = 4.531523×10^-18”。“逆条件数”是标志精度下降程度的数量指标，这意味着算出的数据精度要下降18位十进制。MATLAB中的数据本身只有16位有效数，所以算出的结果完全没有意义。实际上，算一下本题所给矩阵的行列式就可知道，det(**A**)=0。所以它是一个奇异矩阵，其逆矩阵不存在。

3.5.2 用行列式计算面积

例3.9 设三角形三个顶点的坐标为$(x1,y1)$, $(x2,y2)$, $(x3,y3)$,

（1）试求此三角形的面积公式。

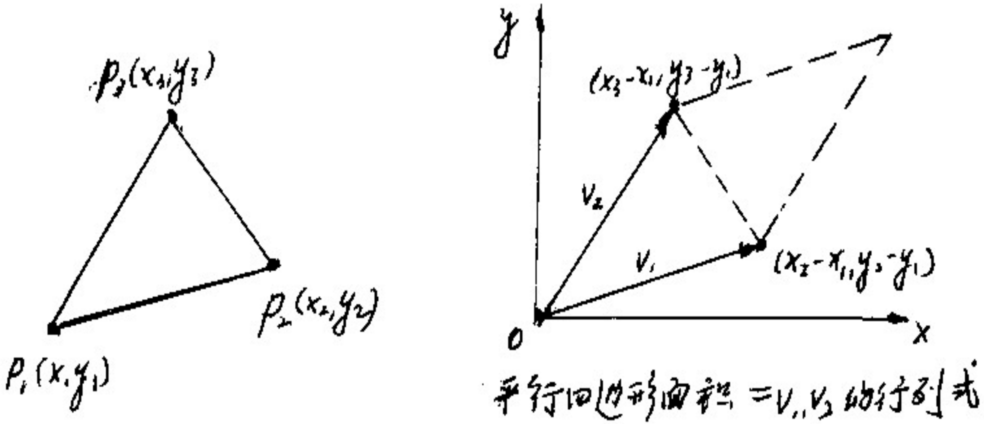
（2）用此结果计算四个顶点坐标为(0,1),(3,5),(4,3),(2,0)的四边形的面积。

（3）将此结果推广至任意多边形。

解:（1）三角形面积为对应的平行四边形面积之半，利用行列式等于两向量所构成的平行四边形面积的关系，可求出三角形面积与顶点坐标之间的关系。

将三角形的一个顶点$(x1,y1)$移到原点，则其余两个顶点的坐标分别为（$x2$-$x1$,$y2$-$y1$）和（$x3$ -$x1$,$y3$-$y1$），根据式（3.1.4），此两个顶点所对应的向量构成的平行四边形面积绝对值为

用行列式计算面积(续)



$$S_p = \|a_1b_2 - a_2b_1\| = \|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\|$$

三角形面积 $S = 0.5 \times S_p$

（2）求此四边形面积

* 画出此四边形如图3-6所示，可以将它划分为两个三角形，分别计算其面积再相加即可。
* 三角形*ABD*的面积为：

S1=0.5×|(2-0)×(5-1) -(3-0)×(0-1)|

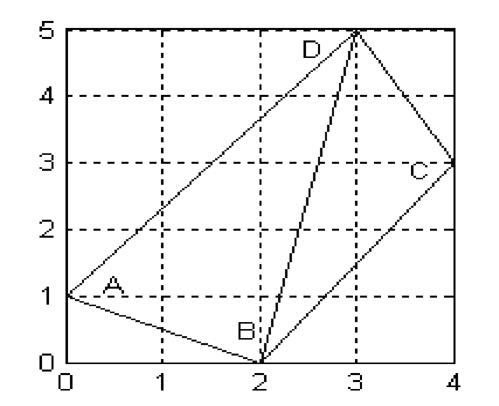
=0.5×(8+3)=5.5

* 三角形*CBD*的面积为：

S2=0.5×|(4-2)×(5-0) - (3-2)×(3-0)|

=0.5×(10-3)=3.5

* 此四边形的面积为*S*=*S*1+*S*2=9。



（3）*N*边多边形必可划分为*N*-2个三角形，用类似的方法可以求出其面积。

3.5.3 特征行列式及其计算*

- 行列式的一个重要应用是求方阵A的特征值和特征向量。满足特征方程Ax= λx的λ定义为方阵的特征值，对应于该λ的特征方程(A-λI)x=0的解x称为特征向量。特征值和特征向量的几何意义及用途将在第五章介绍。
- 实际上即使是低至三阶的特征值和特征向量的 问题，也不可能由笔算行列式解决。其内容超过了大一的知识水平，真正解决问题只能靠调用LINPACK和MATLAB等软件工具提供的专门的函数。在这个问题上本书的讨论就到此为止。

3.6 第三章要求掌握的概念和计算

1. 二阶三阶方阵行列式的来源和表达式的几何意义，
2. 高阶行列式的主元连乘法定义及好处，和消元法及lu分解的关系。
3. 非齐次方程组Ax=b解存在和唯一的必要条件是det(A)≠0，齐次方程组Ax=0有非零解的条件是det(A)=0
4. 行列式的主要性质及其利用上三角阵特性的证明，特别是如何快速判断行列式为零。
5. 知道行列式计算的原理，会用软件工具计算行列式。
6. 知道行列式的三个用途，判解、求面积（体积）、解特征方程。
7. MATLAB实践：符号矩阵的行阶梯和主元连乘求行列式，面积计算子程序。
8. MATLAB函数： det, lu, ref1, diag, prod, syms, poly, roots, null