第4章 平面和空间向量

线性系统的许多重要特性可以用向量的概念来描述，因为向量可以描述两个或两个以上的实数组成的数组特征。二维和三维空间中的向量有鲜明的几何意义，也有广泛的应用价值，掌握它们的基本特性就可更好地从几何空间概念来理解线性代数方程组的某些性质，同时也可帮助人们去抽象推想高维的向量空间。这一章介绍向量的基本概念和平面与空间向量的变换运算。既可使线性代数为三维工程实际问题服务，又可从几何概念过渡到代数推理，进而用数学软件来解决它们的计算问题。

4.1 向量的类型

物理向量：向量这个术语起源于物理，用以表示既有大小又有方向的物理量，如力，位移和速度等。那些只需用一个实数来表示的物理量，如温度、压力和质量等就称为标量。向量还可以有更广泛的意义，可以把**任何由多个参数描述的变量视为向量**。如：

1）一个班的学生本学期学了五门课，则每人的成绩就可用五个分数组成的五维向量来反映，这比用一个平均分的标量来表示包含了丰富得多的信息。

2）一种产品的成本可以分解为材料成本、生产成本和管理成本等几个分量组成的向量，用成本向量代替总成本就可便于对成本进行细致的分析；

3）t的2次多项式 $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$ 由3个参数 a_1,a_2,a_3 确定。把直角坐标系的三个轴分别取为 t^0,t^1,t^2 ,则空间坐标系中任何一点（即一个向量）的三个分量就代表了一个多项式。

4.1 向量的类型

4）一个飞行质点的速度向量可以用它的三个速度分量表示，为了得知更完整的运动状态，可以把三个位置分量也加进去，组成的6维的运动向量；如果再把质点看作刚体而考虑飞行器的三个姿态角，它的运动就要用9维向量来表示。

5）.把人口按年龄分别统计可以得到一个具有100多维的向量，如再按性别分开，得到的是200多维的向量。

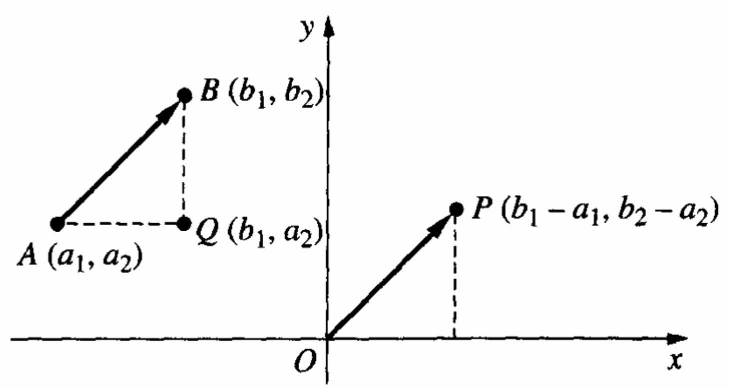
6）一个经济体中若有几十个生产部门，它们各有自己的产值，则整个经济体的的产值就是一个几十维的向量，各部门的投入也都是多种多样的，也可以用向量表示。

不难看出，向量的引入极大地扩展了对象建模的深度和广度。

几何向量和位置向量

几何向量:把平面上的向量的箭尾A的坐标值取为(a_1,a_2)，而把箭头所处的点B的坐标值取为(b_1,b_2)，联接A点到B点的箭头就称为**几何向量**。可以表示为：

$$v = \overrightarrow{AB}$$



A称为向量的起点，而**B**称为向量的终点。这样的几何向量，要用a_1,a_2,b_1,b_2四个实数才能定量描述。

把向量的箭尾A移到原点，箭头B就移到P点。这时的向量作用线通过了原点，称为**位置向量**。

代数向量

代数向量：把平面中的几何向量**v**用它在x和y两个方向的分量v_x和v_y来表示，写成表示式：

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

这就是平面中用线性代数表示向量的方法。粗看起来，它与几何向量的表示法没有太大的差别，但到了三维以上，几何向量将失去意义，而代数向量的维数可以无限地扩展，以满足工程和经济模型分析的需要。从几何到代数，也就是从三维向高维抽象的线性代数方法论。

n维向量

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

4.2 向量及其线性组合

4.2.1 平面和空间向量的矩阵表示

平面中的向量**v**用它在x和y两个方向的分量v_1和v_2来表示，

行向量写成$[v_1, v_2]$，列向量时为 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ ，为了节省篇幅，

有时按矩阵转置的规则，把列向量写成$[v_1, v_2]^T$。

例4.1 设

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

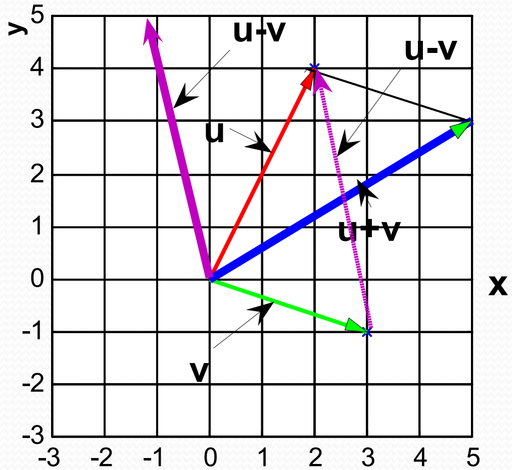
画出这两个向量的图形。

解：**u**和**v**都是二维空间的列向量。可以用平面坐标系中的两个点，或从坐标原点引向这两点的箭头来表示。

绘制平面向量的程序

也可以用程序pla401来画，得到的图形见右图。图中也给出了：

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}-\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\end{bmatrix}$$



程序pla401的核心语句为：

```
u=[2;4],v=[3;-1]
drawvec(u),hold on
drawvec(v,'b'),hold on
drawvec(u+v,'g'),hold on
drawvec(u-v,'m'),hold off
grid on
```

向量的加减法

几何向量的加减按平行四边形法则进行，它在笛卡儿坐标中的分量则满足简单的代数加减法。对于如图所示的平面上的二维向量，写成代数形式，为：

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{u}-\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_1-v_1 \\ u_2-v_2 \end{bmatrix}$$

向量的线性组合　设c,d为任意数（标量），则 $c\mathbf{u}+d\mathbf{v}$ 表示了向量**u,v**的任意线性组合。取例题4.1中的**u**和**v**，得到：

$$\mathbf{b}=c\mathbf{u}+d\mathbf{v}=c\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2c+3d \\ 4c-d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

如果c=d=1，则$b_1=5,b_2=3$。在图4- 2 中也画出了c=1和d=-1时的这两个合成向量。不管c,d取什么值，合成向量**b**一定是处在x-y平面上；具有这种性质向量b的全体称为一个二维的**向量空间**。

三维空间的向量加减

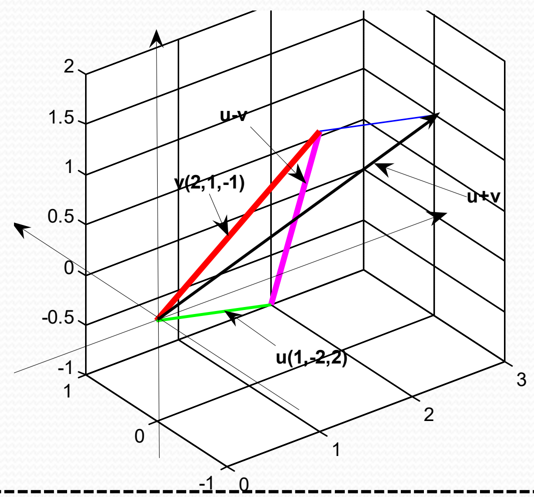
对于空间向量，用下标1,2,3分别表示笛卡儿坐标x,y,z方向的分量，可类似地推得：

若 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$。 $,\mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix},$ 则 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}-\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\\u_3-v_3\end{bmatrix}$

例4.2 设列向量**u**=[1;-2;2], **v**=[-2;3;-1]，求u+v, u-v，

解：写成列向量：$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},$

$$\mathbf{w1}=\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{w2}=\mathbf{u}-\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-1\\-3\\3\end{bmatrix}$$



三维空间中的两维向量空间

我们希望读者在学习线性代数时，把三维向量的矩阵表达式与它们的在三维空间的形状结合起来，所以给出了向量**u**,**v**,$\mathbf{w_1}$,$\mathbf{w_2}$的立体图。读者可以自己在草稿纸上练习。

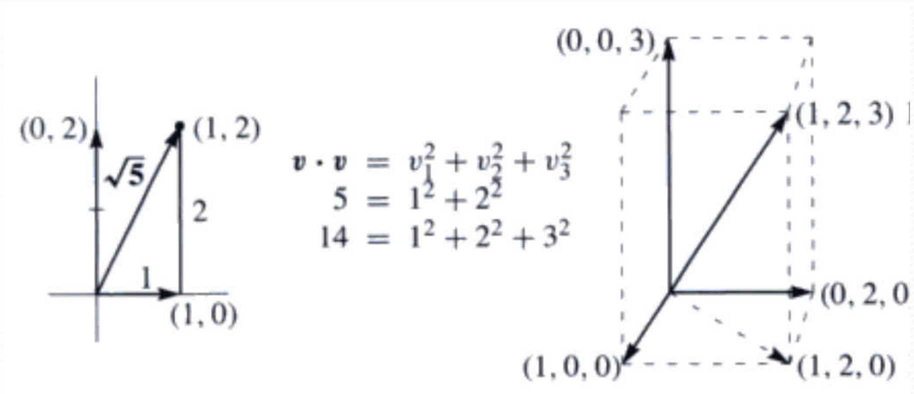
要注意图中**u**,**v**两个向量在三维空间组成一个平面，它们的合成向量$\mathbf{w_1}$,$\mathbf{w_2}$必定也在这个平面上，这在几何上可以想象，但图示就不易看清。在本书的程序集中，收藏了它的三维图形，文件名是fpla402a.fig，读者可以在MATLAB命令或图形窗中调出这个文件，然后点击其三维旋转按钮，将能观察到空间向量**u**,**v**,$\mathbf{w_1}$,$\mathbf{w_2}$都处在一个平面上。也可以说这个平面是一个二维向量空间，向量**u**,**v**,$\mathbf{w_1}$,$\mathbf{w_2}$处在同一个向量空间中。

（切换到MATLAB图形窗观察）

以上约14:00

4.2.2 向量的几何长度和方向余弦

4.2.2 向量的几何长度和方向余弦

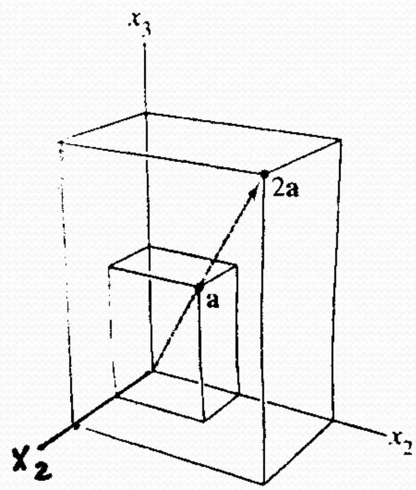


向量几何长度的符号为 $\|\mathbf{v}\|$，在直角坐标系中，几何长度为它的各个分量的平方和的算术开方根。图4-4表示二维向量(1,2)的几何长度为 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(1^2 + 2^2)} = \sqrt{5}$，三维向量(1,2,3)的几何长度为$\sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2)} = \sqrt{14}$ 线性代数中常常把向量中所包含的元素数称为长度，二维向量的长度为2，三维向量的长度为3。MATLAB中用length命令求向量的元素数，而用norm（译为“范数”）命令来求几何长度，读者要注意避免把这两者相混淆。

向量的数乘

几何向量乘以标量后，其几何长度改变相应的倍数， 如果乘数为正数，则向量的方向不变。如果乘数为负数，则向量的方向反转，但仍与原向量共线。用代数方法表示时，设乘数λ为标量

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{则} \qquad \lambda\mathbf{v}=\begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{bmatrix},$$



经过数乘后的向量几何长度也为原几何长度的数乘：

$$\|\lambda\mathbf{v}\|=\sqrt{(\lambda v_1)^2+(\lambda v_2)^2+(\lambda v_2)^2}=\lambda\|\mathbf{v}\|$$

向量空间

一般地，向量的集合V满足：

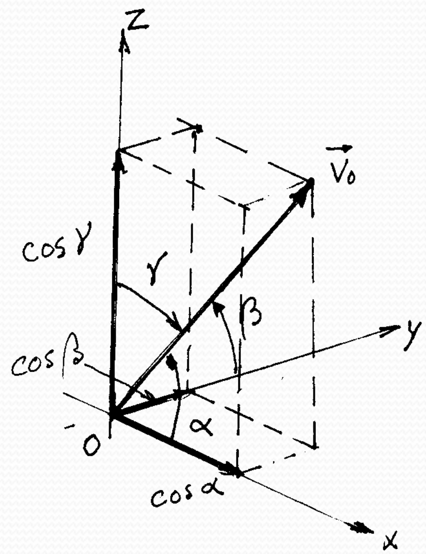
V中的任意两个向量的和向量仍在V中；V中的任意向量与任意数的乘积仍在V中，这样的向量的集合V称为向量空间。

例如，全体二维向量组成二维向量空间；全体三维向量组成三维向量空间；全体n维向量组成n维向量空间。

又如，平面坐标系中的一个过原点的直线上的向量构成向量空间；空间坐标系中的一个过原点的直线上的向量，一个过原点的平面上的向量都构成向量空间。

单位向量和方向余弦

单位向量指几何长度为一的向量。**v**的单位向量通常写成$\mathbf{v_0}$，$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$，平面单位向量的两个分量是该向量在x-y轴上的投影，也就是该向量与x,y轴夹角的方向余弦。对于三维向量也是如此，因此单位向量$\mathbf{v_0}$的各个分量标志了该向量在坐标系中的方向。只要x,y,z是直角坐标系，$\mathbf{v_0}$与各坐标轴的夹角就一定满足；



$$\mathbf{v}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma\end{bmatrix} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma^2 = 1$$

下一段　4.2.3 数量积及其应用（11）

4.2.3 数量积及其应用

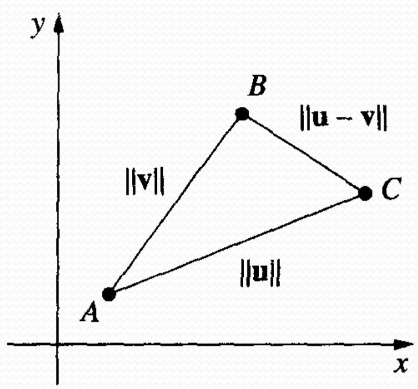
两向量**u**和**v**的**数量积**，也称为**点乘**（dot product）。其定义为

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cos\theta=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \qquad (4.2.1)$$

其中θ为两个向量**u**和**v**之间的夹角。数量积的几何意义是把**u**乘以**v**在**u**方向的投影，也是**v**乘以**u**在**v**方向的投影。

右图，用余弦定理得

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$



移项得到：

$$\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cos\theta=u_1v_1+u_2v_2$$

若用列矩阵表示向量**u**和**v**，则可写成

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2=\begin{bmatrix}u_1 & u_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$$

对于空间向量,同样有：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} \qquad (4.2.4b)$$

向量正交条件

两个有重要应用价值的结果：

（1）两向量**u, v**之间的夹角：　$\cos\theta = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_0$

（2）两向量**u, v相互正交**的条件为：　$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = <\mathbf{u}, \mathbf{v}> = 0$

例4.3 设**u**=[4;2]，**v**=[-1.5;3]，求**u**和**v**的几何长度及它们的单位向量，并求此两个向量与x轴的夹角，画图说明。

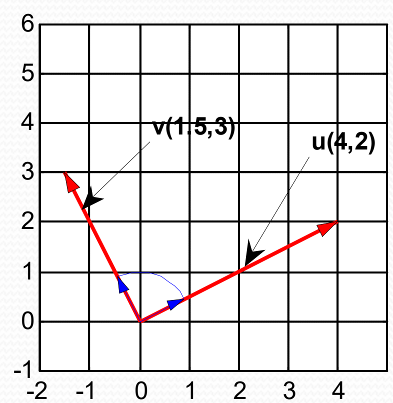
解　**u**的几何长度为 $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.47$

v的几何长度为 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-1.5)^2 + 3^2} = 3.39$

单位向量

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 4/4.47 \\ 2/4.47 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} -1.5/3.39 \\ 3/3.39 \end{bmatrix}$$

因 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = 0$，知**u,v**正交。



解本题的MATLAB程序pla403

```
u=[4;2],v=[-1.5;3],x0=[1;0], % 输入向量数据
u0=u/normu, v0=v/norm(v)          % 求u,v的单位向量
thetau=acos(u0’*x0),              % 求u,v与x轴夹角
thetav=acos(v0’*x0)
thetauv=acos(u0’*v0)          % 求u,v之间的夹角
plotangle(x,y)                % 绘制向量夹角
```

程序运行结果为：

thetau＝acos（u0T*x0）=0.4636【弧度】

thetav＝acos（u0T*y0）=2.0344【弧度】

空间向量的夹角

例4.4 求两空间向量u=[1;-2;2], v=[2;1;-1] 之间的夹角。

解 u的单位向量为：

$$\mathbf{u}_0=\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|=\mathbf{u}\Big/\sqrt{1+(-2)^2+2^2}=[1/3;-2/3;2/3]$$

v的单位向量为：

$$\mathbf{v}_0=\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|=\mathbf{v}\Big/\sqrt{(2)^2+1^2+(-1)^2}=[2/\sqrt{6};1/\sqrt{6};-1/\sqrt{6}]$$

其夹角的余弦$\cos\theta=\mathbf{u}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_0=-2/3\sqrt{6}=-0.2722$

求得θ=153度。

求向量间夹角的公式（4.2.5）也可推广到高维空间，只是θ被抽象化了，可看下例。

例4.5的程序pla405

例4.5 设有三个四维向量v_1=[7;-4;-2;9]; v_2=[-4;5;-1;-7]; v_3=[9;4;4;-7]，求它们的单位向量v_{10},v_{20},v_{30}，并分别求它们之间的夹角。

解 阶数较高的题目，应当用计算机编程求解。

程序pla405如下：

```
v1=[7;-4;-2;9]; v2=[-4;5;-1;-7]; v3=[9;4;4;-7];    % 输入参数
v 10=v1/norm(v1), v20=v2/norm(v2),
v20=v3/norm(v3),                                   % 求单位向量
theta12=acos(v10'*v20),    % 求向量v1,v2间的夹角
theta13=acos(v20'*v30),    % 求向量v2,v3间的夹角
theta23= acos(v30'*v10)    % 求向量v1,v3间的夹角
```

从三维向量向n维的抽象

这个例题涉及到四维空间中的向量以及它们之间的夹角，这是常人从来不会遇到因而也无法想象的。这是线性代数中的抽象，而且这种抽象也在新技术发展中起到了重要的作用。

比如在现代文献检索中，需要对被搜索的文献进行分类，如果我们只取文献的三个特性作为定量指标，那么就可以画出一个三维向量，可以选某一个向量为标准，把与它夹角小于某个角度（比如30°）的向量都归为一类。但实际上只取三个特性是太少了，往往需要用几十、几百个特性来分类，那就必须要用几十、几百维的向量空间来作为聚类的标准，空间的夹角也就有了超越几何夹角的内涵。

以上约16

下一段　**4.2.4** 向量积及其应用（**7:40**）

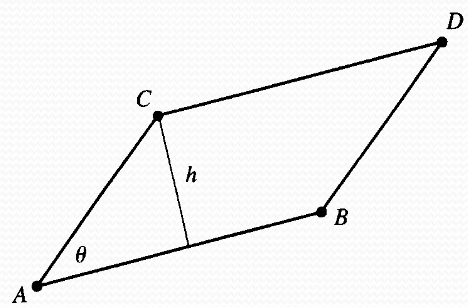
4.2.4 向量积及其应用

向量积的定义 向量积也称为叉乘(cross product)，两向量**u, v**的向量积u×v是一个新向量**z**，它与**u, v**正交，按右手法则确定它的方向，即令右手食指沿**u**，弯曲的中指指**v**，则拇指指向**z**的方向。其几何长度为：

$$\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\sin\theta \qquad (4.2.6)$$

的几何意义如图，若向量u长为$\|\mathbf{u}\|$，是平行四边形的底，向量v长为 $\|\mathbf{v}\|$，则 $h = \|\mathbf{v}\|\sin\theta$ 是它的高，所以$\|\mathbf{z}\|$是此平行四边形的面积。

根据例3.2的推导，这个平行四边形面积等于$u_1v_2-u_2v_1$，因此 $\|\mathbf{z}\| = u_1v_2 - u_2v_1$ ，其方向则按照右手法则确定。



两向量的向量积和混合积

由此外推，对于三维空间的向量**u**和**v**，向量积如下：

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix},\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{bmatrix} \qquad (4.2.7)$$

这个公式全面地反映了向量的几何长度和方向，平面向量可以看作它的特例。

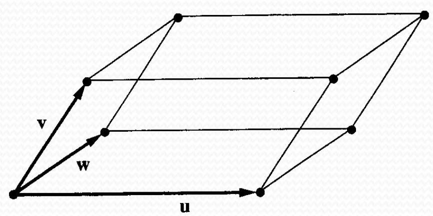
两个向量先做叉乘，再与第三个向量**w**点乘，得到的称为这三个向量的混合积，它是一个标量。

$$V=\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{z}=\begin{bmatrix}w_1 & w_2 & w_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{bmatrix}$$

三个空间向量混合积的几何意义

$$V = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

右图表示了它的几何意义。为它们两者组成的平行四边形面积**z**，其方向与**u,v**组成的平面垂直。就是用**w**在**z**方向的投影（即高）乘以底面积，得出的是这个平行六面体的体积。将(4.2.7)式与(3.1.6)式对比，



可以看出，把**w,u,v**看作三个列向量，V就是由它们组成的方阵的行列式D=det([**w,u,v**])。三阶行列式的几何意义为三向量构成的平行六面体体积也由此得证。

4.3 向量组的线性相关性

什么样的向量组可以作为坐标系的基础呢？在笛卡尔坐标系中，三个三维基础向量取为i,j,k，将它们分别乘以c,d,e后相加，得到新向量b。

$$\mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{b}=c\mathbf{i}+d\mathbf{j}+e\mathbf{k}=\begin{bmatrix}c\\d\\e\end{bmatrix}$$

它表示以这三个单位向量为基础。给c,d,e赋以任意值就可以使向量**b**到达三维空间的任何点，这三个向量i,j,k就称为三维空间的一组**基**。研究向量空间问题，可以取各种基来组成坐标轴系，但必须满足一个条件，那就是向量之间互不相关；也就是其维数满三维。才能使其线性组合覆盖整个三维空间。

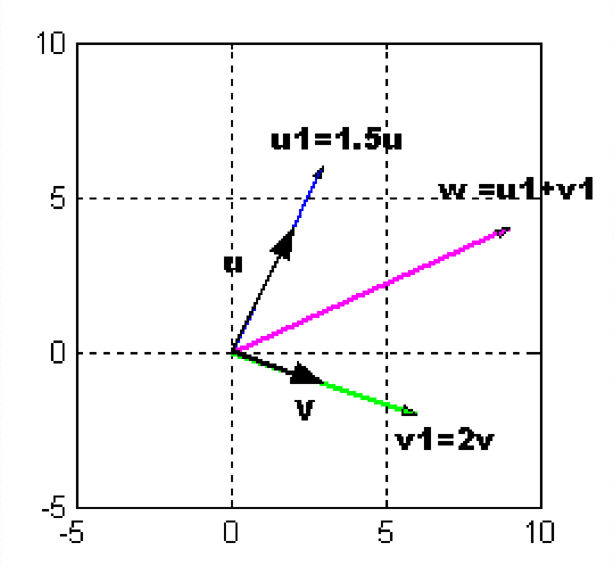
4.3.1 平面向量组的线性相关性

取例4.1中的**u**和**v**，设平面上的向量**w**=1.5**u**+2**v**，则可求得

$$\mathbf{w} = 1.5 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

可见，**u**和**v**经过数乘和加法运算的合成向量**w**仍然在原来的二维空间之内。

向量经过加法和数乘仍在原$\mathbf{R}^2$空间内的特性称为‘**对加法和数乘的封闭性**’，**u**和**v**所有线性组合构成的向量**w**的集合**W**也称为**u**和**v**张成(Span)的向量空间。



平面上线性相关的意义

可以提出一个反问题，平面上的任何向量$[w_1;w_2]$是不是一定能用**u**和**v**的线性组合来实现？换句话说，是否一定能找到一组常数$[c_1,c_2]$，使得

$$c_1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}$$

要回答这个问题，只要解这个二元方程组就行了。把它写成矩阵形式，有：

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{Ac}=\mathbf{w}$$

对于现在的系数矩阵**A=[u,v]**，由于det(**[u,v]**)不为零，c_1和c_2是肯定可以求出的。因此，平面上的任何向量$[w_1;w_2]$ 一定能用u和v线性表示。

平面上线性相关的意义

如**v**改为$[1,2]^T$，则

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Ac}=\mathbf{w}$$

此时**u**和**v**向量的各个分量**对应成比例**， det([**u,v**]) =0，以上方程组无解。从几何上看这两个向量是共线的，不管把它们乘以什么实数并相加，合成的向量只能在一条直线上，不可能张成整个二维向量空间。这种情况下，也称**u,v**之间**线性相关。**

一般地，设**u**和**v** 是平面向量，若存在不全为零的数k_1与k_2，使得

$$K_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{v}=0$$

则称向量u，v**线性相关**，否则，称向量u，v**线性无关。**

从上面的分析中可以看出，向量组$u=[2,4]^T,v=[3,-1]^T$线性无关;

而向量组$u=[2,4]^T,v=[1,2]^T$线性相关。

下一段　　4.3.2 空间向量组的线性相关性

4.3.2 空间向量线性相关性

类似平面向量，对于空间向量也可以定义线性相关性

定义 设几何（三维）空间$\mathbf{R}^3$中的三个向量$\mathbf{v_1,v_2,v_3}$，若存在不全为零的数k_1，k_2，k_3 使得

$$K_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$$

则称向量组$\mathbf{v_1,v_2,v_3}$线性相关，否则，称向量组$\mathbf{v_1,v_2,v_3}$线性无关。

空间$\mathbf{R}^3$中的三个向量v1,v2,v3线性相关的充要条件是

$\det([v_1,v_2,v_3])=0$

事实上，将 $k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+k_3\boldsymbol{v}_3=\mathbf{0}$ 写成矩阵方程，

$$\left.\begin{aligned} v_{11}k_1+v_{12}k_2+v_{13}k_3&=0\\ v_{21}k_1+v_{22}k_2+v_{23}k_3&=0\\ v_{31}k_1+v_{32}k_2+v_{33}k_3&=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13}\\ v_{21} & v_{22} & v_{23}\\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1\\ k_2\\ k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{V}*\mathbf{k}=0$$

即这个齐次方程组有**非零解**充要存在的条件为$\det(\boldsymbol{V})=0$，也就是向量组$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$和$\boldsymbol{v}_3$线性相关的条件。

空间向量线性相关的意义

设三维空间$\mathbf{R}^3$中的三个向量$\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}$，及任意向量$\mathbf{b}$

$$\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix} \mathrm{v}_{11} \\ \mathrm{v}_{21} \\ \mathrm{v}_{31} \end{bmatrix},\ \mathbf{v_2}=\begin{bmatrix} \mathrm{v}_{12} \\ \mathrm{v}_{22} \\ \mathrm{v}_{32} \end{bmatrix},\ \mathbf{v_3}=\begin{bmatrix} \mathrm{v}_{13} \\ \mathrm{v}_{23} \\ \mathrm{v}_{33} \end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

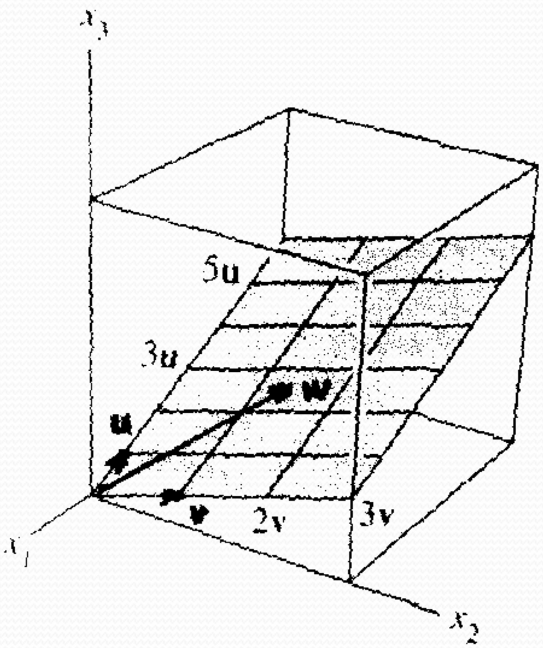
$\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$和$\mathbf{v_3}$可以用空间坐标中的三个点，或从坐标原点引向这三点的箭头来表示。现在研究能否找到适当的k_1, k_2, k_3，使得$k_1*v_1+ k_2*v_2+ k_3*v_3=b$ 。将这个式子改写一下，向量组的线性相关性的讨论其实就归结为下列矩阵方程的解$\mathbf{k}$ = [k_1;k_2;k_3]是否存在的问题：

$$\left.\begin{aligned} v_{11}k_1+v_{12}k_2+v_{13}k_3&=b_1 \\ v_{21}k_1+v_{22}k_2+v_{23}k_3&=b_2 \\ v_{31}k_1+v_{32}k_2+v_{33}k_3&=b_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V}*\mathbf{k}=\mathbf{b}$$

空间向量线性相关的意义

这是一个非齐次线性方程组，它有唯一解的充分必要条件是其系数行列式不等于零，即det(V)≠0。它与向量线性无关的条件相一致。这是从空间几何的概念可以想象的。空间向量的线性组合与平面向量相仿，它们同样服从平行四边形法则，同时也符合矩阵相加和数乘的规则。如果三个向量之间线性无关，那么它们的线性组合可以覆盖整个三维空间，因此，这三个向量就可以构成几何空间的一组**基**。如果它们线性相关，即共面或共线时，那么它们的线性组合将只能构成一个二维子空间（含原点的平面）或一维子空间（含原点的直线）。因为各基向量线性组合的系数k_1,k_2,k_3可以同时为零。

向量u,v,w相关时张成的向量空间



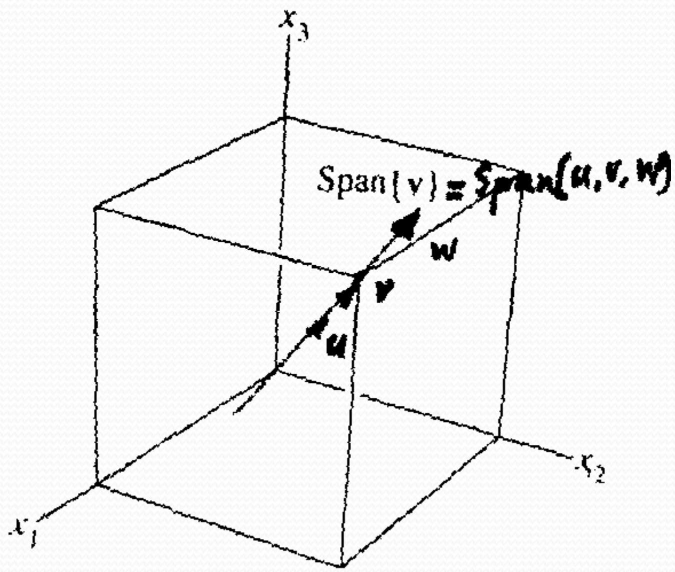


图4-12　向量**u,v,w** 张成的子空间，共面（左），共线（右）

判断多个向量的线性相关性

例4.6 设三维空间**R**^{3}中的三个向量**v1,v2,v3,**及任意向量**b，**

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-9\\7\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}3\\34\\-24\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-6\\-4\\-9\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-10\\13\\19\end{bmatrix},$$

问$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$，$\mathbf{v}_3$是否张成**R**^{3}？即就是**b**是否可用$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$，$\mathbf{v}_3$线性表示？也就是向量$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$，$\mathbf{v}_3$是否线性相关？

判断三个向量的线性相关性

判断三个向量的线性相关性，就不像二维向量那么简单地用观察法来做，此时要利用前面线性方程组的理论。

方法一：行列式法；

方法二：利用最简行阶梯变换；

方法三：求向量组秩的方法。

判断方法之一：**行列式法**

把三个向量并排，构成3×3向量组（或矩阵）**V**，求它的行列式D = det(V)：如果D≠0，它们能合成任意空间向量**b**，也就是它们将张成一个三维空间。若D=0，则这三个向量线性相关，它们将是共面甚至共线的，只能张成二维或一维空间，不可能组合成任意三维向量**b**。

解例4.6　按此方法编出的程序pla406如下：

```
v1=[-9,7,-3]',v2=[3,34,-24]',v3=[-6,-4,-9]',V=[v1,v2,v3]
b=[-10,13,19]',D=det(V),K=V\b
```

在format rat条件下运行此程序得到如下结果：

D=4239,　K=[7/3, -1/3, -2]′

从中可以看出$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$和$\mathbf{v}_3$构成线性无关向量组，它们线性组合为**b**的系数是K=[7/3, -1/3, -2]’，即

$$k_1\mathbf{v_1}+k_2\mathbf{v_2}+k_3\mathbf{v_3}=7/3\mathbf{v_1}-1/3\mathbf{v_2}-2\mathbf{v_3}=\mathbf{b}$$

方法之二：**用行最简形**

利用最简行阶梯形变换，因为它可以给出更多的信息。比如还给出了第四个向量v_4=[4;9;-7]，想在四个列向量中找到几个互不相关向量组。若用行阶梯形变换，就可把所有的列排成一个宽的数据矩阵$A=[v_1,v_2,v_3,v_4,b]$,对它求最简行阶梯形，

在程序pla406中增加以下语句：

```
v4=[4,9,-7]',A=[v1,v2,v3,v4,b], U0=rref(A)
```

运行的结果是

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -9 & 3 & -6 & 4 & -10 \\ 7 & 34 & -4 & 9 & 13 \\ -3 & -24 & -9 & -7 & 19 \end{bmatrix},\ \mathbf{U_0}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

方法之二：**用行最简形（续）**

A=[-9,3,-6,4,-10;7,34,-4,9,13;-3,-24,-9,-7,19]; U0=rref(A)

得

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -9 & 3 & -6 & 4 & -10 \\ 7 & 34 & -4 & 9 & 13 \\ -3 & -24 & -9 & -7 & 19 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U_0}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

从U0的左 3 列可以看出，v_1,v_2和v_3化简成单位矩阵，行列式不为零，故它们是取为基向量的线性无关组。也存在着其他的线性无关组，如把U0中的1,3,4列和2,3,4列分别组成3×3方阵，因无全零行，知其行列式均不为零，所以（v_1, v_3, v_4)，（v_2, v_3, v_4）也都是线性无关向量组。

如果取U0的1,2,4列组成方阵，则第三行为全零，其行列式为零，故v_4是可以由v_1和v_2线性组合而成：$-1/3v_1 +1/3v_2=v_4$，可见（v_1, v_2, v_4)不是线性无关组，它们张成的只是一个二维空间。

方法之三：**用秩的概念**

利用“秩”。当向量组中的向量数n很大时，它们可以排列组合成很多个3×3子方阵，其行列式有的为零，有的不为零。为了表达全局概念，可把矩阵“秩”的概念推广到向量组，秩表示了向量组中所有行列式不为零的子方阵中的最大阶数。例4.6中向量组V的最简形有3行，其秩就是3。秩为3表明了这些向量可张成三维空间。用r=rank(V)可算出向量组V的秩。如果此向量组的秩为2，则这些向量都在一个平面上。如果向量组的秩为1,说明诸向量共线，见图4-12。

4.3.3 n维向量组的线性相关性

前面例题中只讨论了三维向量组的线性无关组。在m个n维向量组的情况，通常要找出**最大线性无关组**。即这些向量之间不但线性无关，而且数目最多，或者说有最大的秩，足以张成维数最大的向量空间。找的方法和例4.6的三维情况相仿。

定义　设空间R^n中的m个向量$v_1,v_2,\ldots,v_m$，若存在不全为零的数k_1，k_2，…，k_m，使得

$$K_1v_1+k_2v_2+\ldots+k_mv_m=0$$

则称向量组$v_1,v_2,\ldots,v_m$线性相关，否则，称向量组$v_1,v_2,\ldots,v_m$线性无关。因此，**R^n中的m个向量$v_1,v_2,\ldots,v_m$线性相关的充要条件是**

$$\det([v_1,v_2,\ldots,v_m])=0$$

对高维系统，行列式方法工作量很大，用rref函数或“求秩”的方法更有优越性。

4.4 从向量空间看线性方程组的解

n个标量沿纵向排列成为列向量，由列向量线性组合张成的空间称为**向量空间**，也称为**线性空间**。**用**$\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3,\ldots$表示，$\mathbf{R}^n$的上标n表示向量空间的维数。n维向量空间是线性代数理论研究的较深层次，在应用入门阶段只讨论到n=3的三维空间。从向量空间的角度可以把线性方程组的解看得更深刻。

在线性方程组$\mathbf{Ax=b}$中，**A**中的列向量是方程组的系数向量，等式右端的向量b是常数向量。本节研究适定、欠定和超定三种方程组的系数向量和常数向量有什么特点，特别是通过这个研究可以推导出超定方程最小二乘解的公式。讨论在二、三维空间用几何方法进行，把它弄清楚就可以为研究n维问题打下基础。

4.4.1 适定方程组解的几何意义

第1章中得知，二元线性方程组在适定的条件下的解，是平面上两条直线的交点；而三元线性方程组在适定的条件下的解，是三维空间中三个平面的交点。解的存在唯一的条件是系数行列式不等于零。

从向量空间的角度来看线性方程组，对二元方程组：

$$\begin{cases} v_{11}k_1 + v_{12}k_2 = \mathrm{b}_1 \\ v_{21}k_1 + v_{22}k_2 = \mathrm{b}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} k_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_1}\mathrm{k}_1 + \mathbf{v_2}\mathrm{k}_2 = \mathbf{b}$$

提出的问题是能否找到适当的k_1,k_2，使得列向量**v1,v2**的线性组合等于常数列向量**b**，从向量空间的概念，就是**v1,v2**应线性无关,它们可张成一个二维空间，**v1,v2**和**b**三个向量必须共处于同一个平面，即二维向量空间内。

4.4.1 适定方程组解的几何意义

$$\left.\begin{aligned} v_{11}k_1+v_{12}k_2+v_{13}k_3&=b_1\\ v_{21}k_1+v_{22}k_2+v_{23}k_3&=b_2\\ v_{31}k_1+v_{32}k_2+v_{33}k_3&=b_3 \end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix} v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}k_1+\begin{bmatrix} v_{12}\\ v_{22}\\ v_{32}\end{bmatrix}k_1+\begin{bmatrix} v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix}k_1=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

$$k_1\mathbf{v_1}+k_2\mathbf{v_2}+k_3\mathbf{v_3}=\mathbf{b}$$

k1,k2,k3有唯一解的条件就是$\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}$必须线性无关，而论$\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3},\mathbf{b}$**必须**在同一个三维向量空间的问题。于是讨论的中心转移到系数矩阵的列，探索几个列向量之间是否线性相关，同样引导到系数行列式是否为零和系数矩阵的秩。得出的结论和前三章以行变换为主的理论是一致的，但给出了新的理解问题的角度。

4.4.3 欠定方程组解的几何意义

当适定方程组的系数向量出现线性相关，就产生了欠定方程组。

例4.7 解下列方程组，说明其解的特性。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 = -4 \end{cases} \qquad (4.4.1)$$

解 画出这两个方程的图形，它们是两根重叠直线，这根直线就是方程组的通解。从向量空间来理解它，就是三个向量：

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

共线，它们张不成二维向量空间，共同处在一维向量空间中。因此可以有无穷多个解。可写成并见图。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x_0} + \mathbf{x_b}$$

例4.7 欠定方程组解的几何意义

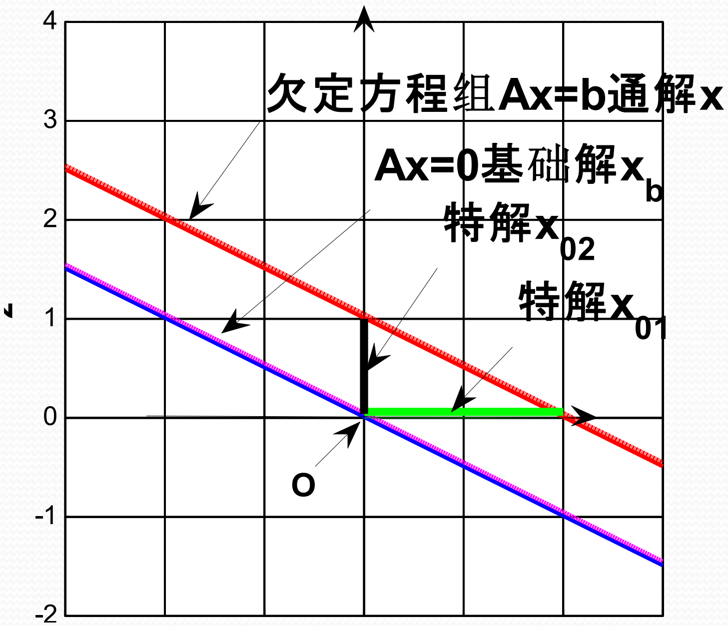


图4-13　　例4.7中的特解,基础解和通解

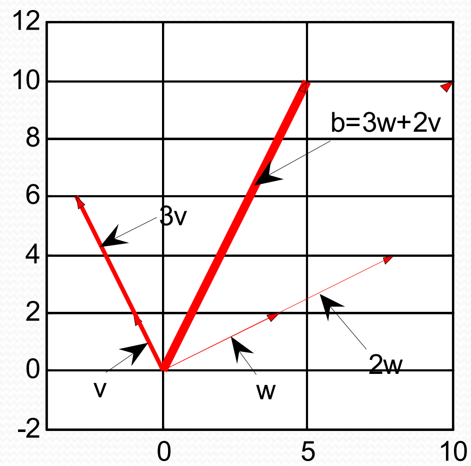
欠定方程组无工程用途

- 欠定方程组**Ax=b**的独立方程数少于变量数，因此有无穷多个解。把全部解（称为通解）**x**分成特解x_o和基础解x_b两部分$A(x_o+x_b)=b$，分别满足方程$\mathbf{Ax_o=b}$及$Ax_b=o$。后者是齐次方程组，因$|A|=o$，解$\mathbf{x_b}$构成一个子空间，所以解$x=x_o+x_b$就有无穷多个，这便于把欠定方程组的解当成数学问题来研究。
- 通常工程中要解决的问题，在数学上的解都应具有“唯一性”，如果出现了无穷多解，那就是命题条件有缺漏。工程师解决这类问题的方法应该是去寻找命题中的毛病，而不是去找那些错误命题造成的“解集合”。比如所有的“化学方程配平”题，必定都是欠定方程。其配平常数乘任何常数都对。命题方若规定解必须取最小正整数，就会得到唯一的解。如果去研究它的无穷多的通解，甚至画出它的子空间，那只能被人当做书呆子取笑。

我至今还没找到有工程价值的欠定方程的解集，特请高手指教。

4.4.4 超定方程解的几何意义

设 $\mathbf{w}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}, \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}, \mathbf{b}=\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}$



求满足联立方程：cw+dv=b

的c,d，解得c=2，d=3，其图形如右。

如果给出的是三维空间向量

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix}, \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}, \mathbf{b}=\begin{bmatrix}5\\10\\1\end{bmatrix}$$

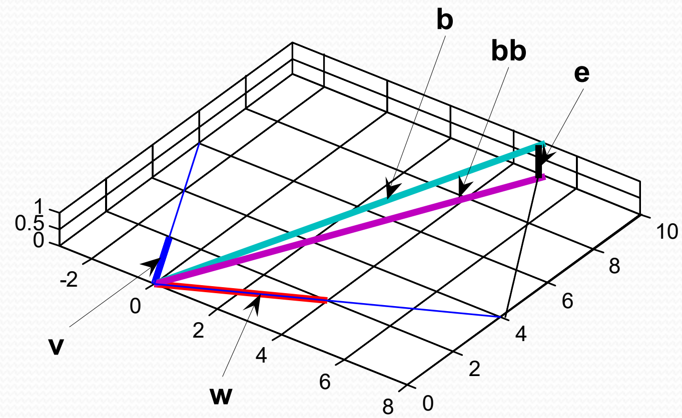
问能否找到满足cw+dv=b的c和d ？

此时w,v都在xy平面上，联立方程组为：$c\mathbf{w}+d\mathbf{v}=\mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases}4c-d=5\\2c+2d=10\\0c+0d=1\end{cases}$

b的端点的z_b=1，它脱离了xy平面，

而w,v的线性组合绝不能跑到z=0以外的空间位置去，故而第三个方程是矛盾方程，这也就是超定方程无解的几何解释，

超定方程的最小二乘解的几何意义



令w,v的合成向量为cw+dv=**bb**，bb不可能超出xy平面，**最小二乘解**不要求bb准确等于**b**，只希望使bb尽可能地接近**b**。

由于bb的可取范围是整个**w-v**平面，其中与向量**b**的矢端最接近的点应该是从**b**端向**w-v**平面作垂线的垂足。这时两者的误差**e**就是垂线的长度，它也是平面上所有可能的bb中与**b**最小的误差。确定**e**的条件就是它与**v**和**w**都正交：

$$\mathbf{v}^{T}\cdot\mathbf{e}=0,\qquad \mathbf{w}^{T}\cdot\mathbf{e}=0$$

写成

$$\mathbf{A}^{T}\cdot\mathbf{e}=\begin{bmatrix}\mathbf{w}^{T}\\ \mathbf{v}^{T}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{e}=0$$

最小二乘解的几何意义(续)

因为**e=b-bb，**确定了**e**，也就是得到了**w**和**v**线性组合而成的近似值**bb，**方程中的c和d就有解了，最小二乘解的基本思路就在此。

如果**v**和**w**不在xy平面上，它们组成的是任意的倾斜平面，那么最小二乘误差**e**的特征仍然是与**v**和**w**组成的平面垂直，也就是与**v**和**w**都满足正交条件。因为**e=b-bb**，其中**b**是方程组右端常数向量，**bb**则是基本列向量的线性组合**bb**=cw+dv，将常数向量c,d写成x的估值xhat，可写出

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}hat = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{及} \mathbf{bb} = \mathbf{A}\mathbf{x}hat$$

将**bb**代入正交条件得到

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}hat\right) = 0, \Rightarrow \ \mathbf{x}hat = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

这就是最小二乘解xhat的估值公式。

最小二乘解的估值公式

虽然推导过程是在二三阶图形下进行的，但过程中并未有任何一步对维数有过限制，这个公式在高维的超定方程中同样适用。

在MATLAB中，把运算$(A^TA)^{-1}A^T$单独编成一个子程序，称为pinv函数，它是Psuedoinverse（译作伪逆或广义逆）的缩称。于是超定方程解的MATLAB调用形式可以写成xhat=pinv(A)*b，和适定方程解的形式x=inv(A)*b可相类比记忆。

也可以从形式上记忆它的推导：对于适定方程组，**Ax=b**,有 **x=A\b**。而对于超定方程组，**A**不是方阵，不能放在左除的分母上，因此把等式两边都左乘一个A^T，得到$A^TAx=A^Tb$, A^TA是可逆的方阵，故可解得：

$$x=(A^TA)\backslash A^Tb=(A^TA)^{-1}A^Tb$$

用最小二乘解拟合参数

超定方程在参数拟合问题中有广泛的应用。假如已知x与y之间大体的函数关系为$y= k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\ldots+k_mf_m(x)$，未知系数$k_1,k_2,\ldots,k_m$需要通过n次实验来近似地确定。设实验数据是$(x_1,y_1),\ldots, (x_n,y_n)$。将这些数据代入，得到n个方程，将它们写成矩阵形式：

$$\left.\begin{array}{c} k_0f_0(x_1)+\cdots+k_mf_m(x_1)=y_1 \\ \cdots \\ k_0f_0(x_n)+\cdots+k_mf_m(x_n)=y_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_0(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0(x_n) & \cdots & f_m(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A*K=b}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_0(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_m(x_n) \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

参数拟合的最小二乘解(续)

- 其中**A**称为设计矩阵，**b**称为观测向量，**K**是参数向量，实验的次数n通常大于待定参数的数目m。所以它是一个超定方程组，等式左右不可能真正相等。只能求得一个最小二乘解。这个解将能保证各方程误差均方和为最小。这种命题太多了，在大数据时代，要研究任何两个或几种数据之间的相关性或近似函数关系，都要用到参数拟合，都要用到最小二乘法，所以更显得重要。本书例题4.8,6.8,6.10均属此类命题。
- 这个漂亮的最小二乘解是数学家兼天文学家高斯1809年在研究行星轨道的过程中发明的。奇怪的是数学家们不太宣传，大部分线性代数书都不讲。有人说是大一数学无法证明这公式，所以不讲。我倒觉得，证明并不太难，关键是谁善于用它，谁就要讲它。

超定方程例题之一

例4.8　弹簧的刚度系数k乘以其伸长量y等于其上加的力F，F=ky。为了测量k，在弹簧上施加[3,5,8]公斤的力F，测得到的伸长量y为[4,7,11]毫米，试求出误差最小的k值

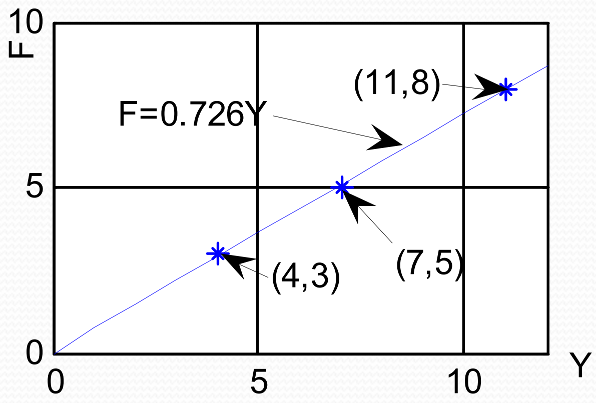
解　三次测量的方程：4k=3, 7k=5, 11k=8，其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}4\\7\\11\end{bmatrix}k=\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix},\Rightarrow\ \mathbf{A}k=\mathbf{b}$$

代入公式求解k值及误差e：

$$k=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}=\frac{135}{186}=0.7258$$

$$\mathbf{e}=\mathbf{A}k-\mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\7\\11\end{bmatrix}\times0.7258-\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0968\\0.0806\\-0.0161\end{bmatrix}$$



将结果画成图形如右。

最小二乘误差向量的范数为norme=norm(e)

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} = 0.1270$$

用此参数画出的最小二乘估值直线如图4-16所示。

如果假设F与x之间的关系为F=k0+k1x，即用不通过原点的直线来拟合，则将有：

$$\left.\begin{array}{l} k_0 + k_1 * 4 = 3 \\ k_0 + k_1 * 7 = 5 \\ k_0 + k_1 * 11 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A1} * \mathbf{K} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k0 \\ k1 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}1^{\mathrm{T}} \mathbf{A}1) * \mathbf{A}1^{\mathrm{T}} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.0811 \\ 0.7162 \end{bmatrix}$$

即拟合方程成为：F=0.0811+0.7162x，其拟合误差为：e1=A1*K-b，最后norm(e1)=0.1162，读者可用程序验算。实际上，两根直线差别是很小的，只是为使读者掌握方法。

超定方程例题之二

例4.9 把例1.1(d)中的超定方程按最小二乘的公式解出。

解 其原始方程组与系数矩阵：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix},$$

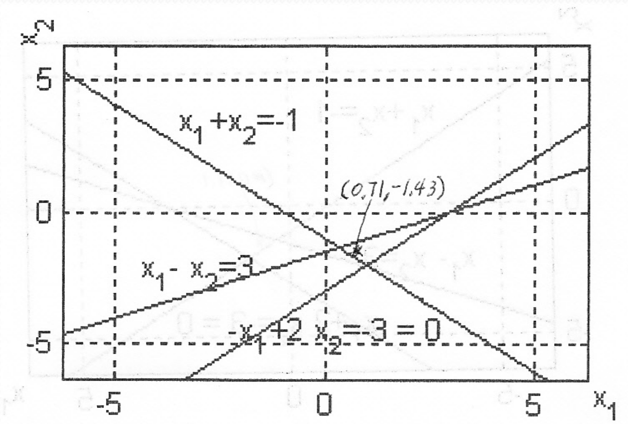
代入最小二乘解的公式pla409 ：

A=[1,1;1,-1;-1,2], b=[-1 ;3;-3]

xhat=inv(A' A)*A' *b

得到

$$\mathbf{xhat} = \begin{bmatrix} 0.7143 \\ -1.4286 \end{bmatrix}$$



将最小二乘解xhat画到图中

可以看出此图形。

4.5 用MATLAB解线性方程组综述

线性方程组的基本矩阵形式为**Ax=b**，已知**A,b**求**x**是解方程组最直接的任务。从矩阵运算的角度看很简单，只要把等式两边都左乘以A^{-1}，求解的算式可写成：

$$x=A^{-1}*b=A\backslash b$$

其最后一步，把“左乘以逆阵A^{-1}”的算法看作“左除”，是MATLAB的创新。

在解方程组时，它是最常用的命令。不过要清楚，矩阵除法并没有理论的定义，左除符号只是MATLAB对解方程的一个表达形式。

线性方程组有三种类型：适定、欠定和超定。MATLAB的左除运算符可以用于所有情况。但实际上其内部的运算是随方程类型的不同而不同的，读者务必注意这一点，以便对结果有正确的理解。

4.5.1　适定方程的解A\b

适定方程组的系数矩阵**A**为m阶方阵，表明其方程及变量的数目相同。设m=4，系数矩阵**A**为方阵，且其行阶梯形的四个对角线主元均不为零，即行列式不为零。增广矩阵为4×5阶，其化为对角形的行最简型如下，

$$\mathrm{rref}([\mathbf{A},\mathbf{b}])=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & d_1/p_{11}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & d_2/p_{22}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & d_3/p_{33}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_4/p_{44}\end{bmatrix}$$

如果系数矩阵**A**的秩是4，即主元都不等于零，det(A)≠0，解就存在并可以用简单的除法解得。

在工程中遇到的大多数问题都属于这种情况。只要**A,b**已赋值，键入**x**= **A\b**后，将得出解**x**的列向量

$$[x_1,x_2,x_3,x_4]^T=\left[d_1/p_{11},d_2/p_{22},d_3/p_{33},d_4/p_{44}\right]^T$$

4.5.2 欠定方程的解A\b

方程数m<变量数n可作为欠定方程组的标志。这样的**A**也称宽矩阵，设m=3,n=4,则：

$$\mathbf{Ax}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\mathbf{b}$$

欠定方程组通常具有无穷多组解，执行命令**x=A\b**时，MATLAB会给出无穷多解中的一组特解,它是一个n×1的列向量，其中有n-m个值为零的自由变量元素。

若要求出欠定方程组全部解，还必须加上齐次方程$\mathbf{Ax_0=0}$的基础解$\mathbf{x_0}$，它可由MATLAB中的null函数求得。故通解$\mathbf{x_t}$可写成

$\mathbf{x_t}$=**A\b**+ null(A,‘r’)*c，

（null中的变元‘r’表示基础解系取整数），**c**为表示无穷多解的任意常数。 因为欠定方程的解没有工程用途，我们不作更多讨论。

4.5.3 超定方程的解A\b

系数矩阵A的m>n可作为超定方程组的标志，A也称为高矩阵。设方程数为4，变量数为3，则方程组如下：

$$\mathbf{AX}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}=\mathbf{b} \qquad (4.5.3)$$

方程数多于变量数，通常都会形成矛盾方程组，这是由于干扰因素或测量误差在同一物理模型中反复不断地出现造成的。键入**x=A\b**时，系统先判定m>n后，执行求最小二乘解的运算 $\hat{\mathbf{x}}=(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^{T}\mathbf{b})=\mathrm{pinv}(\mathbf{A})*\mathbf{b}$

如果**A**是m×n阶，则**A**^{T}是n×m阶，**A**^{T}**A**应该是n阶方阵，**A**^{T}**b**则是n×1列向量， 于是可知解也是n×1列向量。只要**A**非奇异，即其秩等于列数n，最小二乘解就存在而且唯一。

使用语句x=A\b的注意事项

归纳起来，使用语句**x=A\b**时，所用的**A**的秩r应该等于min(m,n)，否则屏幕会显示出错警告。det(A)不能为零（ det(A) =0时要用null命令）。总之，这个傻瓜式公式虽然简单易用，但有时不能应付一些奇异的情况，

那时读者还是要用本书所讲的基本概念和对应的MATLAB函数来解决问题。

4.6 应用实例

4.6.2 三维空间中的平面方程

4.6.4 混凝土配料中的应用

4.6.5 行星轨道参数的测量与估值

4.6.2 三维空间中的平面方程

线性代数用于空间解析几何可以很方便解题。

例4.11 给出空间四个点的坐标如表4-2所示，问：

表4-2 例4.11的数据表

	点1	点2	点3	点4
x	-2	5	0	3
y	0	1	-2	-1
z	-5	-1	-1	-2

问：(a) 由前三点决定的平面的方程具有何种形式？该平面的法线的三个方向余弦为多大？

(b) 由原点引一根法线到该平面，试求该法线到该平面的垂足坐标，并确定该法线的长度。

(c) 求点4向该平面所引法线的方程、垂足坐标及法线长度。

由三点坐标确定平面方程

解：(a) 平面方程的标准形式为：$c_1x+c_2y+c_3z=1$，先求三个方向余弦c。

将前三点的坐标代入以上方程，得出关于c_1，c_2，c_3的三个方程，用矩阵表示此方程组：

$$\left.\begin{array}{llll} -2c_1 & +0 & -5c_3 & =1 \\ 5c_1 & +c_2 & -c_3 & =1 \\ 0 & -2c_2 & -c_3 & =1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A_1 c = B_1}$$

程序为：A1=[-2,0,-5;5,1,-1; 0,-2,-1]; B1=ones(3,1); c=A1\B1

求得：c_1= 0.2143, c_2= -0.3571, c_3= -0.2857

于是得到该平面的方程：0.2143x -0.3571y+-0.2857z=1

移项将z归一化，写成： z=0.75x-1.25y+3.5

求原点到平面的垂足坐标

(b) 设从原点O（0,0,0)到该平面的垂足坐标为P(x_d,y_d,z_d)，它必须在此平面上，因此满足方程：

$$0.2143x_d - 0.3571y_d + -0.2857z_d = 1$$

且它的向径OP的方向余弦与此平面法向量的方向余弦相同，此向径要满足空间直线的对称方程：

$$\frac{x_d}{c_1} = \frac{y_d}{c_2} = \frac{z_d}{c_3},$$

由此补充了两个方程 :$c_2 x_d - c_1 y_d = 0, \quad c_3 x_d - c_1 z_d = 0$

写成求x_d,y_d,z_d的三阶矩阵方程：

$$\left.\begin{array}{llll} c_1 x_d & + c_2 y_d & + c_3 z_d & =1 \\ c_2 x_d & -c_1 y_d & & =0 \\ c_3 x_d & & -c_1 z_d & =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & -c_1 & 0 \\ c_3 & 0 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_\mathbf{d} = \mathbf{B}_2$$

求原点到平面的垂线长度

其计算程序pla461如下：

A2=[c';c(2),-c(1),0;c(3),0,-c(1)]；

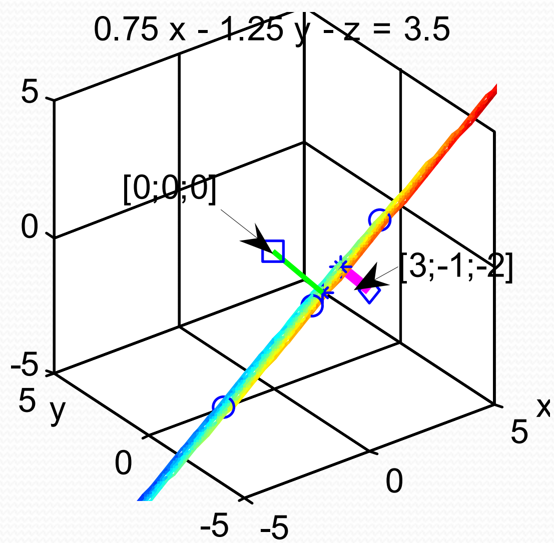
B2=[1;0;0], Xd=A2\B2,

L=norm(Xd)

得到：X_d =[0.84, -1.40, -1.12]^T

长度为L= 1.979899

绘出平面的三维图形如右。



求点4到平面的垂线的方程与垂足坐标

(c) 设从点 $Q(x_0,y_0,z_0)$到该平面的垂足坐标为$P(x_d,y_d,z_d)$，它必须在此平面上，因此满足方程 $c_1x_d+c_2y_d+c_3z_d=1$：

且向量 $\overrightarrow{QP}$ 的方向余弦与此平面法向量的方向余弦相同，$\overrightarrow{QP}$ 所在的空间直线的对称方程：

$$\frac{x_d-x_0}{c_1}=\frac{y_d-y_0}{c_2}=\frac{z_d-z_0}{c_3},$$

由此补充了两个方程：

$$c_2x_d-c_1y_d=c_2x_0-c_1y_0,$$
$$c_3x_d-c_1z_d=c_3x_0-c_1z_0$$

写成求x_d,y_d,z_d的三阶矩阵方程：

$$\left.\begin{array}{llll} c_1x_d & +c_2y_d & +c_3z_d & =1 \\ c_2x_d & -c_1y_d & & =c_2x_0-c_1y_0 \\ c_3x_d & & -c_1z_d & =c_3x_0-c_1z_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & -c_1 & 0 \\ c_3 & 0 & -c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ c_2x_0-c_1y_0 \\ c_3x_0-c_1z_0 \end{bmatrix}$$

求点4到平面的垂线长度

求从Q点引向此平面的法线垂足和垂线长度，可在方程中

设$x_0=3$，$y_0=-1$，$z_0=-2$

$$\left.\begin{array}{l} c_1x_d + c_2y_d + c_3z_d = 1 \\ c_2x_d \quad -c_1y_d \qquad\qquad = -1.2856 \\ c_3x_d \qquad\qquad -c_1z_d = -1.2857 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & -c_1 & 0 \\ c_3 & 0 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2856 \\ -1.2857 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_2\mathbf{X}_d = \mathbf{B}_2$$

其计算程序pla462如下：

```
A2=[c';c(2),-c(1),0;c(3),0,-c(1)]；
B2=[1;-1.2856;-1.2857；0], Xd=A2\B2, X0=[3;-1;-2]
L=norm(Xd-X0)
```

得到：X_d =[2.52, -0.20, -1.36]^T

长度为L= 1.1314

4.6.4 混凝土配料中的应用

混凝土由五种主要的原料组成：水泥、水、砂、石和灰，不同的成分影响混凝土的不同特性。例如，水与水泥的比例影响混凝土的最终强度，沙与石的比例影响混凝土的易加工性，灰与水泥的比例影响混凝土的耐久性等，所以不同用途的混凝土需要不同的原料配比。

	超强型A	通用型B	长寿型C
水泥c	20	18	12
水w	10	10	10
沙s	20	25	15
石g	10	5	15
灰f	0	2	8

例4.13 假如一个混凝土生产企业的设备只能存储三种基本类型的混凝土，即超强型、通用型和长寿型。它们的配方如右表。

于是每一种基本类型混凝土就可以用一个五维的列向量来表示，公司希望，客户所订购的其他混凝土都由这三种基本类型按一定比例混合而成。

混凝土配料问题(续)

（1）假如某客户要求的混凝土的五种成分为16,10,21,9,4，试问A,B,C三种类型应各占多少比例？如果客户总共需要5000公斤混凝土，则三种类型各占多重？

（2）如果客户要求的成分为16,12,19,9,4，则这种材料能用A,B,C三种类型配成吗？为什么？

解：从数学上看，这三种基本类型的混凝土相当于三个基向量$\mathbf{v}_A$、$\mathbf{v}_B$、$\mathbf{v}_C$，两种待配混凝土相当于两个合成向量$\mathbf{w}_1$、$\mathbf{w}_2$，其数值如下：

$$\mathbf{v}_A=\begin{bmatrix}20\\10\\20\\10\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_B=\begin{bmatrix}18\\10\\25\\5\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_C=\begin{bmatrix}12\\10\\15\\15\\8\end{bmatrix},\ \mathbf{w}_1=\begin{bmatrix}16\\10\\21\\9\\4\end{bmatrix},\ \mathbf{w}_2=\begin{bmatrix}16\\12\\19\\9\\4\end{bmatrix}$$

混凝土配料问题（续）

现在的问题归结为$\mathbf{w}_1$、$\mathbf{w}_2$是否是$\mathbf{v}_A$、$\mathbf{v}_B$、$\mathbf{v}_C$的线性组合？或$\mathbf{w}_1$、$\mathbf{w}_2$是否在$\mathbf{v}_A$、$\mathbf{v}_B$、$\mathbf{v}_C$所张成的向量空间内？用行最简形解此问题，研究这五个向量组的最简形：

输入向量组后，键入U0=rref([vA,vB,vC,w1,w2])，得到

$$U0=\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0.08 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.56 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

从中看出，$\mathbf{v}_A,\mathbf{v}_B,\mathbf{v}_C$组成的向量组的秩为3，加上$\mathbf{w}_1$后秩仍然是3，加上$\mathbf{w}_2$后秩变成4。这就意味着$\mathbf{w}_1$是在$\mathbf{v}_A,\mathbf{v}_B,\mathbf{v}_C$张成的向量空间内。所以$\mathbf{w}_1$可以由三种基本类型的混凝土混合而成，$\mathbf{w}_1$所需的混合比例也可从U0中看出。对应于$\mathbf{w}_1$的列向量[0.08:0.56:0.36]，说明应按8%，56%，36%的比例调配。但$\mathbf{w}_2$则不行，它不可能由$\mathbf{v}_A,\mathbf{v}_B,\mathbf{v}_C$线性组合而成，因为它的含水量无法通过配方改变。

混凝土配料问题（续）

对于w_2得到的是一组矛盾方程，说明方程组无解，这是不难想象的。混凝土由五种原料配成，如果要能配成任何比例，那末至少要自由地改变四种原料的分量，也就是说每一种混凝土是四维空间中的一个点。现在想用改变三个常数来凑成四维空间的任意点，那是做不到的。对于四维空间的问题，一般地说，很难从物理意义上想象。不过就本题而言，却是可以说清的。请读者注意，在这三种基本混凝土中，水的含量都是1/6。所以不管怎么混合，合成的混凝土的含水量必然仍是1/6。如果客户要求的混凝土含水量不是1/6，那是无论如何也配不出来的，w_2要求的成分就属于这种情况。另外，既然水的比例不能变，就没有必要把它列为客户可选的五个成分之一，向量组可以减少一维。

r

4.6.5 行星轨道参数的测量与估值

根据开普勒第一定律，当忽略其他天体的重力吸引时，一个天体应该取椭圆、抛物线或双曲线轨道。在适当的极坐标(θ, r) 中，天体的位置应满足下列方程 $r = \beta + e(r \cdot \cos\theta)$。其中β 为轨道常数而ε是轨道的偏心率，对于椭圆0<ε<1, 对抛物线ε=1, 而对双曲线 ε>1 。对一个新发现的天体的观测得到了表中的数据，试确定其轨道的性质。

θc	0.88	1.10	1.42	1.77	2.14
rc	3.00	2.30	1.65	1.25	1.01

解：将原始天体运动方程改写为参数估值形式：被估值的参数为β和ε。

$$\beta + e(\mathbf{r} \cdot \cos\boldsymbol{\theta}) = r \Rightarrow [1 \quad \mathbf{r}\cos\boldsymbol{\theta}]\begin{bmatrix} \beta \\ e \end{bmatrix} = \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{X} * \mathbf{K} = \mathbf{Y}$$

设计矩阵$\mathbf{X} = [1 \quad \mathbf{r}\cos\boldsymbol{\theta}]$，参数向量$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \beta \\ e \end{bmatrix}$，观测向量$\mathbf{Y} = \mathbf{r}$

$$\begin{bmatrix}3.00\\2.30\\1.65\\1.25\\1.01\end{bmatrix}=b+\begin{bmatrix}3.00\cos(0.88)\\2.30\cos(1.10)\\1.65\cos(1.42)\\1.25\cos(1.77)\\1.01\cos(2.14)\end{bmatrix}*e\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}3.00\cos(0.88)\\2.30\cos(1.10)\\1.65\cos(1.42)\\1.25\cos(1.77)\\1.01\cos(2.14)\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}b\\e\end{bmatrix}}_{\mathbf{K}}=\underbrace{\begin{bmatrix}3.00\\2.30\\1.65\\1.25\\1.01\end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}}$$

MATLAB程序pla645

```
rc= [3.00;2.30;1.65;1.25;1.01],
theta=[0.88;1.10;1.42;1.77;2.14],
X=[ones(5,1),  rc.*cos(theta)],
Y=rc, K=X\Y
```

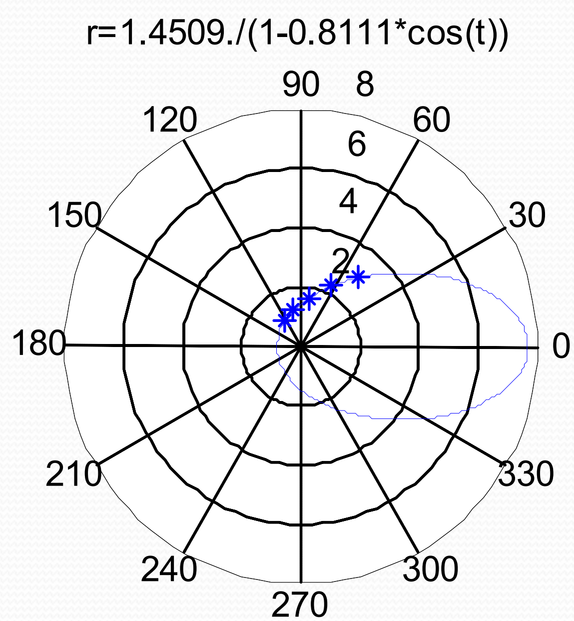
程序运行结果为：

K=[1.4509; 0.8111]

该行星轨道方程为：

r=1.4509./(1-0.8111*cos(t));

画出曲线及五个测量点如右图。



卫星轨道的测定和估值程序pla465

```
clear,close all
rc= [3.00;2.30;1.65;1.25;1.01],         % 测试点轨道角
thetac=[0.88;1.10;1.42;1.77;2.14],    %测试点斜距
X=[ones(5,1), rc.*cos(thetac)],          % 设计矩阵
Y=rc, K=X\Y
% beta=K(1),epsilon=K(2)
% 绘图程序为
t = 0:.01:2*pi;
rt=K(1)./(1-K(2)*cos(t));
polar(t,rt),hold on                     % 画出全部轨道
polar(thetac,rc,‘*’)                     % 画出测试点
set(gcf,'color','w')
title('r=1.4509./(1-0.8111*cos(t))')
hold off
```

第四章要求掌握的概念和计算

1. 掌握二、三维向量线性组合和向量空间的定义，为什么要求其各基量必须线性无关。

2. 向量点乘、叉乘的定义，与平面向量四边形的面积、三维向量六面体的体积有何关系？

3. 行列式为什么能表示体积，与向量组线性无关有何关系？

4. 向量的归一化及两向量夹角计算公式来源及意义。**v，w**正交条件

5. 如何用rref函数判断多个向量组合的线性相关或线性无关，如何判断多个向量之间的正交性？

6. 从向量线性组合的角度，看待线性方程组的几何意义，分别就适定、欠定或超定进行讨论，超定方程中点与平面的最小距离为何等价于最小二乘误差。

7. 线性方程组**Ax=b**的解写成**x=A\b**，可适用于适定、欠定或超定吗？三种情况如何判别，它的实际计算内容有些什么不同？

8. MATLAB实践：四个以上三维向量的相关性分析，欠定方程组通解的MATLAB求法，超定方程组解法。

9. MATLAB函数： rank, norm, null, zeros, pinv, drawvec, dot, cross