LÓGICA

Cód:30829840

Turma: SI

Prof. Dr. João Paulo I. F. Ribas

- Uma sentença aberta de uma variável em um conjunto A (ou apenas, sentença aberta em A) é uma expressão p(x) tal que p(a) pode ser falsa (F) ou verdadeira (V) para todo a ∈ A.
- A é chamado conjunto universo (ou domínio) da variável x – conjunto de valores que a variável x pode assumir.
- Qualquer elemento a ∈ A é um valor da variável x.

- Em outros termos, p(x) é uma sentença aberta em A se p(x) pode ser F ou V todas as vezes que se substitui a variável x por qualquer a∈A.
- Se a∈A é tal que p(a) é uma proposição verdadeira (V), então a satisfaz ou verifica p(x).
- As sentenças abertas não são verdadeiras nem falsas; podemos dizer apenas que são satisfeitas para certos valores das variáveis, e não satisfeitas para outros.

- Uma sentença aberta em A também é chamada função proposicional em A (ou ainda, condição em A).
- Exemplos: São sentenças abertas em N={1,2,3,...} as seguintes expressões:
- a) x+1>8
- \cdot c) x+5=9
- e) x é primo

- b) $x^2-5x+6=0$
- d) x é divisor de 10
- f) x é múltiplo de 3

- O Conjunto-Verdade de uma sentença aberta p(x) em A é o conjunto de todos os elementos a∈A tais que p(a) é uma proposição verdadeira (V) - elementos em A que satisfazem p(x)
- O conjunto-verdade é denotado por Vp, ou seja:

$$Vp = \{x \in A \mid p(x)\}$$

▶ Obviamente, Vp ⊂ A

Exemplo: Seja N={1,2,3,...}, apresente o Conjunto-Verdade Vp de cada uma das sentenças abertas em N:

- a) p(x): x+1>8
- b) p(x): x+7<5
- c) p(x): x+5>3
- d) p(x): x é divisor de 10
- e) p(x): $x^2-2x>0$

- Exemplo: Seja N={1,2,3,...}, apresente o Conjunto-Verdade Vp de cada uma das sentenças abertas em N:
- a) p(x): x+1>8 $Vp=\{x \in N \mid x+1>8\} = \{8,9,10,...\}$
- **b**) p(x): x+7<5 $Vp=\{x∈N \mid x+7<5\} = \emptyset$
- ► c) p(x): x+5>3 $Vp=\{x \in N \mid x+5>3\} = \{1,2,3,...\} = N$
- d) p(x): x é divisor de 10
 Vp={x∈N | x é divisor de 10} = {1,2,5,10}
- e) p(x): $x^2-2x>0$ $Vp=\{x\in N\mid x^2-2x>0\}=\{3,4,5,...\}=N-\{1,2\}$

- Exercício: Apresente o Conjunto-Verdade Vp de cada uma das sentenças abertas:
- ▶ a) p(x): $9x^2-1=0$ em R (conjunto dos reais)
- b) p(x): $x^2-6x+5=0$ em Z (conjunto dos inteiros)
- ightharpoonup c) p(x): $x^2+4x+3=0$ em N (conjunto dos naturais)
- d) p(x): x é primo em A={1,2,3,4,5,6,7}
- e) p(x): $15x^2+2x-8=0$ em R

- Exercício: Apresente o Conjunto-Verdade Vp de cada uma das sentenças abertas:
- a) p(x): $9x^2-1=0$ em R (conjunto dos reais) $Vp=\{x \in R \mid 9x^2-1=0\} = \{-1/3, 1/3\}$
- b) p(x): $x^2-6x+5=0$ em Z (conjunto dos inteiros) $Vp=\{x\in Z\mid x^2-6x+5=0\}=\{1,5\}$
- c) p(x): $x^2+4x+3=0$ em N (conjunto dos naturais) $Vp=\{x\in N\mid x^2+4x+3=0\}=\varnothing \text{ , pois }\{-1,-3\}\not\in N$
- ▶ d) p(x): x é primo em A= $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ Vp= $\{x \in A \mid x \text{ é primo}\} = \{1,2,3,5,7\}$
- e) p(x): $15x^2+2x-8=0$ em R Vp={x \in Z | $15x^2+2x-8=0$ } = {2/3, -4/5}

- Se p(x) é uma sentença aberta em A, três casos podem ocorrer, dependendo do universo adotado:
- 1- p(x) é verdadeira para todo x∈A, ou seja Vp=A. Neste caso p(x) é uma condição universal.
- > 2- p(x) é verdadeira para alguns x∈A, ou seja Vp⊂A. Neste caso p(x) é uma condição possível.
- > 3- p(x) não é verdadeira para nenhum x∈A, ou seja Vp=Ø. Neste caso p(x) é uma condição impossível.

- Dados dois conjuntos A e B, uma sentença aberta de duas variáveis em um conjunto AxB (ou apenas, sentença aberta em AxB) é uma expressão p(x,y) tal que p(a,b) pode ser falsa (F) ou verdadeira (V) para todo par ordenado (a,b) ∈ AxB.
- AxB é o produto cartesiano entre A e B.
- AxB é o conjunto universo (ou domínio) das variáveis x e y – conjunto de pares ordenados que as variáveis x e y podem assumir.
- Qualquer par ordenado (x,y)∈AxB são valores que as variáveis x e y podem assumir.

- Em outros termos, p(x,y) é uma sentença aberta em AxB se p(x,y) pode ser F ou V todas as vezes que se substitui as variáveis x e y, respectivamente, por qualquer (a,b)∈AxB.
- Se (a,b)∈AxB é tal que p(a,b) é uma proposição verdadeira (V), então (a,b) satisfaz ou verifica p(x).
- Uma sentença aberta em AxB também é chamada função proposicional em AxB (ou ainda, condição em AxB).

- Exemplo: Sejam os conjuntos A={1,2,3} e B={5,6} são sentenças abertas em AxB:
- ▶ a) x < y</p>
- b) y mod x = 0 (x é divisor de y)
- \rightarrow c) y=2x
- \rightarrow d) mdc(x,y)=1
- e) $x^2 = y + 1$

- O Conjunto-Verdade de uma sentença aberta p(x,y) em AxB é o conjunto de todos os elementos (a,b)∈AxB tais que p(a,b) é uma proposição verdadeira (V) - elementos em AxB que satisfazem p(x,y)
- O conjunto-verdade é denotado por Vp, ou seja:

$$Vp = \{(x,y) \in AxB \mid p(x,y)\}$$

▶ Obviamente, $Vp \subset AxB$

- Exemplos:
- ▶ a) Sejam os conjuntos A={1,2,3,4} e B={1,3,5}, apresente o conjunto-verdade da sentença aberta x<y em AxB:</p>

- Exemplos:
- a) Sejam os conjuntos A={1,2,3,4} e B={1,3,5}, apresente o conjunto-verdade da sentença aberta x<y em AxB:</p>

$$AxB = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5),$$

$$(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$$

$$Vp = \{(x,y) \in AxB \mid x < y\} = \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,5),(4,5)\}$$

- Exemplos:
- b) Sejam os conjuntos A={2,3,4,5} e B={3,6,7,10}, apresente o conjunto-verdade da sentença aberta y mod x=0 em AxB:

- Exemplos:
- b) Sejam os conjuntos $A=\{2,3,4,5\}$ e $B=\{3,6,7,10\}$, apresente o conjunto-verdade da sentença aberta y mod x=0 em AxB:

$$AxB = \{(2,3),(2,6),(2,7),(2,10),(3,3),(3,6),(3,7),(3,10), ...,(5,3),(5,6),(5,7),(5,10)\}$$

 $Vp = \{(x,y) \in AxB | ymodx = 0\} = \{(2,6),(2,10),(3,3),(3,6),(5,10)\}$

- Exemplos:
- c) Sejam os conjuntos A={1,2,3} e B={3,4}, apresente o conjunto-verdade da sentença aberta x+1 < y em AxB:</p>

- Exemplos:
- c) Sejam os conjuntos A={1,2,3} e B={3,4}, apresente o conjunto-verdade da sentença aberta x+1 < y em AxB:</p>

$$AxB = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$$

$$Vp = \{(x,y) \in AxB | x+1 < y\} = \{(1,3),(1,4),(2,4)\}$$

- Exemplos:
- → d) Sejam os conjuntos A={2,3,4} e B={1,2,6}, apresente o conjunto-verdade da sentença aberta mdc(x,y)=2 em AxB:

- Exemplos:
- → d) Sejam os conjuntos A={2,3,4} e B={1,2,6}, apresente o conjunto-verdade da sentença aberta mdc(x,y)=2 em AxB:

$$AxB = \{(2,1),(2,2),(2,6),(3,1),(3,2),(3,6),(4,1),(4,2),(4,6)\}$$

$$Vp = \{(x,y) \in AxB \mid mdc(x,y) = 2\} = \{(2,2),(2,6),(4,2),(4,6)\}$$

Exemplos:

e) Apresente o conjunto-verdade da sentença aberta 2x + y=10 em NxN (númereos naturais):

- Exemplos:
- e) Apresente o conjunto-verdade da sentença aberta 2x + y=10 em NxN (númereos naturais):

$$AxB = \{(1,1),(1,2),(1,3),...\}$$

 $Vp = \{(x,y) \in AxB | 2x+y=10\} = \{(1,8),(2,6),(3,4),(4,2)\}$

- Exemplos:
- f) Apresente o conjunto-verdade da sentença aberta 2x + y=10 em NxN (númereos naturais):

- Exemplos:
- f) Apresente o conjunto-verdade da sentença aberta 2x + y=10 em NxN (números naturais):

$$AxB = \{(1,1),(1,2),(1,3),...\}$$

 $Vp = \{(x,y) \in AxB | 2x+y=10\} = \{(1,8),(2,6),(3,4),(4,2)\}$

- Exemplos:
- g) Apresente o conjunto-verdade da sentença aberta $x^2 + y^2 = 1$ em ZxZ (números inteiros):

- Exemplos:
- g) Apresente o conjunto-verdade da sentença aberta x² + y²=1 em ZxZ (números inteiros):

$$AxB = \{(-\infty, -\infty), ..., (\infty, \infty)\}$$

$$Vp = \{(x,y) \in AxB | x^2 + y^2 = 1 \} = \{(-1,0), (0,-1), (0,1), (1,0)\}$$

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas

- As operações lógicas já definidas aplicam-se também às sentenças abertas:
 - Conjunção (^)
 - Disjunção (v)
 - Negação (~)
 - \rightarrow Condicional (\rightarrow)
 - ▶ Bicondicional (↔)

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas - Conjunção

- Sejam duas sentenças abertas p(x) e q(x) em um conjunto A, a conjunção entre elas é dada por p(x) ^ q(x).
- Exemplo: p(x): x>2 em R; q(x): x<8 em R $p(x) \land q(x)$: $x>2 \land x<8$ em R

Ou seja, p(x) ^ q(x) é dado por 2<x< 8 ou]2,8[

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas - Conjunção

O conjunto-verdade que satisfaz p(x) ^ q(x) é dado por todos os elementos que satisfazem ao mesmo tempo as duas sentenças, ou seja:

$$V_{p \land q} = Vp \cap Vq = \{x \in A | p(x)\} \cap \{x \in A | q(x)\}$$

Exemplo: Sejam as sentenças abertas em Z:

$$\begin{array}{lll} p(x): \, x^2 + x \, -2 = 0 & e & q(x): \, x^2 \, -4 = 0 \\ V_{p \wedge q} = Vp \, \cap \, Vq \\ V_{p \wedge q} = \{x \in Z | \, \, x^2 \, + \, x \, -2 = 0 \, \} \, \cap \, \{x \in Z | \, \, x^2 \, -4 = 0 \} \\ V_{p \wedge q} = \{-2, 1\} \, \cap \, \{-2, 2\} = \{-2\} \end{array}$$

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas - Disjunção

- Sejam duas sentenças abertas p(x) e q(x) em um conjunto A, a disjunção entre elas é dada por p(x) v q(x).
- Exemplo: p(x): x<2 em R; q(x): x>8 em R p(x) v q(x): x<2 v x>8 em R
- Exemplo: p(x): x<5 em R; q(x): x=5 em R p(x) v q(x): x<2 v x=5 em R Ou seja, p(x) v q(x) é dado por $x\le 5$ ou $[-\infty, 5]$

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas - Disjunção

O conjunto-verdade que satisfaz p(x) v q(x) é dado por todos os elementos que satisfaz pelo menos uma das duas sentenças, ou seja:

▶
$$V_{pvq} = Vp \cup Vq = \{x \in A | p(x)\} \cup \{x \in A | q(x)\}$$

Exemplo: Sejam as sentenças abertas em Z:

$$\begin{aligned} p(x): \ x^2 + x - 2 &= 0 & e & q(x): \ x^2 - 4 &= 0 \\ V_{pvq} &= Vp \cup Vq \\ V_{pvq} &= \{x \in Z | \ x^2 + x - 2 &= 0 \ \} \cup \{x \in Z | \ x^2 - 4 &= 0 \} \\ V_{pvq} &= \{-2,1\} \cup \{-2,2\} &= \{-2,1,2\} \end{aligned}$$

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas - Negação

- Seja uma sentenças abertas p(x) em um conjunto A, a negação de p(x) é dada por ~p(x).
- Exemplo: p(x): x<2 em R ~p(x): x≥2 em R
- Exemplo: p(x): x=5 em R $\sim p(x)$: $x \neq 5$ em R

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas - Negação

O conjunto-verdade que satisfaz ~p(x) é dado por todos os elementos que NÃO satisfaz p(x) contidos no conjunto universo A, ou seja:

$$V_{p} = \overline{V}p = \{x \in A | p(x)\}$$

Exemplo: Seja a sentença abertas em Z: p(x): x ≥ 2

$$\begin{array}{l} V_{\sim p} = \overline{V}p \\ V_{\sim p} = \{x \in Z \mid \sim (x \geq 2)\} = \{x \in Z \mid x < 2\} \\ V_{\sim p} = \{-\infty, ..., -2, -1, 0, 1\} \end{array}$$

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas - Condicional

- Sejam duas sentenças abertas p(x) e q(x) em um conjunto universo A, a condicional entre elas é dada por $p(x) \rightarrow q(x)$.
- ▶ Lembrando que: $p(x) \rightarrow q(x) \Leftrightarrow \sim p(x) \vee q(x)$.
- Exemplo: p(x): x<2 em R; q(x): x<8 em R $p(x) \rightarrow q(x)$: $x<2 \rightarrow x<8$ em R

Ou seja,

$$p(x) \rightarrow q(x)$$
: $\sim (x < 2) \ v \ x < 8$

$$p(x) \rightarrow q(x)$$
: $x \ge 2 \ v \ x < 8 = [2,8[$

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas - Condicional

▶ O conjunto-verdade que satisfaz $p(x) \rightarrow q(x)$ é dado por :

$$V_{p\rightarrow q} = V_{\sim pvq} = \overline{V}p \cup Vq = \{x \in A | \sim p(x)\} \cup \{x \in A | q(x)\}$$

Exemplo: Sejam as sentenças abertas em Z:

$$\begin{array}{lll} p(x): \ x \geq 0 & e & q(x): \ x^2 - 4 = 0 \\ V_{p \rightarrow q} = \ V_{\sim p \vee q} = \overline{V} p \cup V q \\ V_{p \rightarrow q} = \{x \in Z | \ \sim (x \geq 0)\} \cup \{x \in Z | \ x^2 - 4 = 0\} \\ V_{p \rightarrow q} = \{-\infty, ..., -2, -1\} \cup \{-2, 2\} = \{-\infty, ..., -2, -1, 2\} \end{array}$$

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas - Bicondicional

- ▶ Sejam duas sentenças abertas p(x) e q(x) em um conjunto universo A, a bicondicional entre elas é dada por $p(x) \leftrightarrow q(x)$.
- Lembrando que:

$$p(x) \leftrightarrow q(x) \Leftrightarrow (\sim p(x) \vee q(x)) \wedge (\sim q(x) \vee p(x))$$

Exemplo: p(x): x>-5 em Z; q(x): x<0 em Z $p(x) \leftrightarrow q(x)$: $x>-5 \leftrightarrow x<0$ em Z

Ou seja,

 $p(x) \leftrightarrow q(x)$: ($\sim (x > -5) \vee x < 0) \wedge (\sim (x < 0) \vee x > -5)$

 $p(x) \leftrightarrow q(x)$: $(x \le -5 \ v \ x < 0) \land (x \ge 0 \ v \ x > -5)$

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas - Bicondicional

O conjunto-verdade que satisfaz p(x) ↔q(x) é dado por :

$$\begin{array}{ll} V_{p\leftrightarrow q} = V_{(\sim pvq) \wedge (\sim qvp)} = (\overline{V}p \cup Vq) \cap (\overline{V}q \cup Vp) \\ \{\{x \in A | \sim p(x)\} \cup \{x \in A | \ q(x)\}\} \cap \\ \{\{x \in A | \sim q(x)\} \cup \{x \in A | \ p(x)\}\} \end{array}$$

▶ Exemplo: Sejam as sentenças abertas em Z: $p(x): x \ge 0 \quad e \quad q(x): x^2 - 4 = 0$ $V_{p \leftrightarrow q} = V_{(\sim p \lor q) \land (\sim q \lor p) =} (\overline{V}p \cup Vq) \land (\overline{V}q \cup Vp)$ $V_{p \leftrightarrow q} = \{\{x \in Z \mid \sim (x \ge 0)\} \cup \{x \in Z \mid x^2 - 4 = 0\}\} \land \{\{x \in Z \mid \sim (x^2 - 4 = 0)\} \cup \{x \in Z \mid x \ge 0\}\}$ $V_{p \leftrightarrow q} = \{\{-\infty, ..., -2, -1\} \cup \{-2, 2\}\} \land \{Z - \{-2, 2\} \cup \{0, 1, ..., \infty\}\} = \{-\infty, ..., -2, -1, 2\} \land \{Z - \{-2\}\} = \{-\infty, ..., -3, -1, 2\}$

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas – Exercícios

1-Determine o conjunto-verdade em A={1,2,3,...,9,10} das sentenças abertas composta:

b)
$$(x+4) \in A \land (x^2-5) \notin A$$

c) x é primo
$$v(x+5) \in A$$

d)
$$x^2 \ge 16 \ v \ x^2 - 6x + 5 = 0$$

a) x é par
$$\to x^2 - 1 = 0$$

b)
$$x^2-6x+5<0 \rightarrow x^2-9=0$$

Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas – Exercícios

3-Determine o conjunto-verdade em A={0,1,2,3,4,5} das sentenças abertas composta:

a) x é primo
$$\leftrightarrow$$
 (x+3) \in A b) $x^2 > 12 \leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

4-Sejam as sentenças abertas em R (conjunto dos números reais):

$$p(x): 15x^2+2x-8=0$$
 e $q(x): 5x^2+19x+12=0$

Determine $V_{p\leftrightarrow q}$