LÓGICA

Cód:30829840 Turma: SI

Prof. Dr. João Paulo I. F. Ribas

Quantificador Universal

- Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto não vazio A ($A \neq \emptyset$) e seja Vp seu conjunto-verdade:

$$Vp=\{x \in A \mid p(x)\}$$

- Quando Vp=A, ou seja p(x) é uma condição universal – todos os elementos de A satisfazem p(x), então pode-se afirmar:

  (i) Para todo elemento x de A, p(x) é verdadeira, ou simplesmente: Para todo x de A, p(x).

  (ii) Qualquer que seja o elemento x de A, p(x) é verdadeira, ou simplesmente, para qualquer x de A, p(x).

Quantificador Universal

- Simbolicamente:

$$(1)\ (\forall\ x \in A)\ (p(x))$$
$$(2)\ \forall\ x \in A,\ p(x)$$
$$(3)\ \forall\ x \in A : p(x)$$

- Ou ainda, simplesmente (omitindo-se a indicação do domínio A):

$$(1)\ (\forall\ x)\ (p(x))$$
$$(2)\ \forall\ x,\ p(x)$$
$$(3)\ \forall\ x : p(x)$$

- Verifica-se então a seguinte equivalência:

$$(\forall\ x \in A)\ (p(x)) \Leftrightarrow Vp = A$$

Quantificador Universal

- p(x) é uma sentença aberta que pode ser falsa (F) ou verdadeira (V) dependendo do valor assumido pela variável x.

- Porém p(x) com o símbolo $\forall$ antes dela , ou seja $(\forall\ x \in A)\ (p(x))$, torna-se uma proposição e, portanto, possui um valor lógico. Dessa forma:

  (1) Se $V_p = A$, então $(\forall\ x \in A)\ (p(x))$ é Verdadeira (V)

  (2) Se $V_p \neq A$, então $(\forall\ x \in A)\ (p(x))$ é Falsa (F)

- O símbolo $\forall$, referido à variável x, representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta p(x) numa proposição.

- Se $(\forall\ x \in A)\ (p(x))$ exprime uma condição universal, então ela é uma proposição verdadeira (V). Do contrário, ela é falsa (F)

Quantificador Universal

- Se $(\forall\ x \in A)\ (p(x))$ é Verdadeira (V) para um conjunto finito A={a1,a2,...an), então

$$(\forall\ x \in A)\ (p(x)) \quad \Leftrightarrow (p(a1) \wedge p(a2) \wedge \ldots \wedge p(na))$$

- Portanto, num universo finito, o quantificador universal $\forall$ é visto como um operador lógico que equivale a conjunções sucessivas.

- Exemplo: Seja A={3,5,7} e sendo a sentença aberta p(x): x é primo, temos:

$$(\forall\ x \in A)\ (x \text{ é primo}) \Leftrightarrow (3 \text{ é primo} \wedge 5 \text{ é primo} \wedge 7 \text{ é primo})$$

Neste caso, $(\forall\ x \in A)$ (x é primo) é uma proposição verdadeira(V)

Quantificador Universal

- Outro exemplo notacional:

$x+1>x, \forall\ x \in R$ (lê-se $x+1>x$,para todo $x \in R$)

- Exemplo: Sendo N o conjunto dos números naturais, R dos números reais e Z dos inteiros, julgue V ou F as proposições abaixo:

a) $(\forall\ n \in N)\ (n+5>3) = V$

b) $(\forall\ n \in N)\ (n+3>7) = F$

c) $(\forall\ x \in R)\ (x^2 \geq 0) = V$

d) $(\forall\ x \in Z)\ (x+5>4) = F$

Quantificador Existencial

- Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto não vazio A ($A \neq \emptyset$) e seja Vp seu conjunto-verdade:

$$Vp=\{x \in A \mid p(x)\}$$

- Quando Vp não é vazio ($Vp \neq \emptyset$), ou seja p(x) é uma condição possível – pelo menos um elemento de A satisfaz p(x), então pode-se afirmar:

  (i) Existe pelo menos um x de A tal que p(x) é verdadeira, ou simplesmente: Existe x de A tal que p(x).

  (ii) Para algum elemento x de A, p(x) é verdadeira, ou simplesmente, para algum x de A, p(x).

Quantificador Existencial

- Simbolicamente:

$$(1)\ (\exists\ x \in A)\ (p(x))$$
$$(2)\ \exists\ x \in A,\ p(x)$$
$$(3)\ \exists\ x \in A : p(x)$$

- Ou ainda, simplesmente (omitindo-se a indicação do domínio A):

$$(1)\ (\exists\ x)\ (p(x))$$
$$(2)\ \exists\ x,\ p(x)$$
$$(3)\ \exists\ x : p(x)$$

- Verifica-se então a seguinte equivalência:

$$(\exists\ x \in A)\ (p(x)) \Leftrightarrow Vp \neq \emptyset$$

Quantificador Existencial

- p(x) é uma sentença aberta que pode ser falsa (F) ou verdadeira (V) dependendo do valor assumido pela variável x.

- Porém p(x) com o símbolo $\exists$ antes dela , ou seja $(\exists\ x \in A)\ (p(x))$, torna-se uma proposição e, portanto, possui um valor lógico. Dessa forma:

  (1) Se $V_p \neq \varnothing$, então $(\exists\ x \in A)\ (p(x))$ é Verdadeira (V)

  (2) Se $V_p = \varnothing$, então $(\exists\ x \in A)\ (p(x))$ é Falsa (F)

- O símbolo $\exists$, referido à variável x, representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta p(x) numa proposição.

- Se $(\exists\ x \in A)\ (p(x))$ exprime uma condição possível, então ela é uma proposição verdadeira (V). Do contrário, ela é falsa (F)

Quantificador Existencial

- Se $(\exists\ x \in A)\ (p(x))$ é Verdadeira (V) para um conjunto finito A={a1,a2,...an), então

$$(\exists\ x \in A)\ (p(x)) \Leftrightarrow (p(a1)\ v\ p(a2)\ v\ \ldots\ v\ p(na))$$

- Portanto, num universo finito, o quantificador existencial $\exists$ é visto como um operador lógico que equivale a disjunções sucessivas.

- Exemplo: Seja A={1,2,3,...,9,10} e sendo a sentença aberta p(x): x é primo, temos:

$$(\exists\ x \in A)\ (x \text{ é primo}) \Leftrightarrow (1 \text{ é primo v } 2 \text{ é primo v } \ldots \text{ v } 10 \text{ é primo})$$

Neste caso, $(\exists\ x \in A)$ (x é primo) é uma proposição verdadeira(V)

Quantificador Existencial

- Exemplo: Sendo N o conjunto dos números naturais, R dos números reais e Z dos inteiros, julgue V ou F as proposições abaixo:

a) $(\exists\ n \in N)\ (n+4<8) = V$

b) $(\exists\ n \in N)\ (n+5<3) = F$

c) $(\exists\ x \in R)\ (x^2<0) = F$

d) $(\exists\ x \in Z)\ (x-1=0) = V$

Negação de Proposições Com Quantificadores

- O quantificador universal e o quantificador existencial podem ser precedidos pelo símbolo de negação, por exemplo:

(a) $(\forall\ n \in N)\ (n+5>3)$: Para todo n, $n+5>3$

$\sim(\forall\ n \in N)\ (n+5>3)$: Nem para todo n, $n+5>3$

(b) $(\exists\ x \in Z)\ (x-1=0)$: Existe algum x tal que $x-1=0$

$\sim(\exists\ x \in Z)\ (x-1=0)$: Não Existe x tal que $x-1=0$

(c) $(\forall\ x)$ (x fala francês) : Toda pessoa fala francês

$\sim(\forall\ x)$ (x fala francês) : Nem toda pessoa fala francês

(c) $(\exists\ x)$ (x foi à Lua) : Alguém foi à Lua

$\sim(\exists\ x)$ (x foi à Lua) : Ninguém foi à Lua

Negação de Proposições Com Quantificadores

- São evidentes as seguintes equivalências:

$$\sim(\forall\ x)\ (x \text{ fala francês}) \Leftrightarrow :\ (\exists\ x)\ (\sim x \text{ fala francês})$$

e

$$\sim(\exists\ x)\ (x \text{ foi à Lua}) \Leftrightarrow (\forall\ x)\ (\sim x \text{ foi à Lua})$$

Ou seja, simbolicamente:

$$\sim(\forall\ x)\ (p(x)) \Leftrightarrow :\ (\exists\ x)\ (\sim p(x))$$

e

$$\sim(\exists\ x)\ (p(x)) \Leftrightarrow (\forall\ x)\ (\sim p(x))$$

As equivalências acima são conhecidas por : **Segundas Regras de Negação de DE MORGAN.**

Negação de Proposições Com Quantificadores

- Portanto, a negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial (seguido de não) e vice-versa.

- Exemplos:

(1) Seja a proposição: Todo aluno da turma A é bem comportado.

Negação: Existe pelo menos um aluno da turma A que não é bem comportado.

Ou seja: Nem todo aluno da turma A é bem comportado.

(2) Seja a proposição: Existe pelo menos um aluno da turma A que está doente.

Negação: Qualquer que seja o aluno da turma A, ele não está doente.

Ou seja: Nenhum aluno da turma A está doente.

Negação de Proposições Com Quantificadores

- Exercício: Apresente a negação de cada uma das seguintes proposições:

(1) $\sim (\exists\ x \in R)\ (x^2 < 0) \Leftrightarrow$

(2) $\sim(\forall\ x \in R)\ (3x - 5 = 0) \Leftrightarrow$

(3) $\sim(\forall\ x \in R)\ (|x| \geq 0) \Leftrightarrow$

(4) $\sim (\exists\ x \in R)\ (\mathrm{sen}x = 0) \Leftrightarrow$

Negação de Proposições Com Quantificadores

- Exercício: Apresente a negação de cada uma das seguintes proposições:

(1) $\sim(\exists\ x \in R)\ (x^2 < 0) \Leftrightarrow (\forall\ x \in R)\ (x^2 \geq 0)$

(2) $\sim(\forall\ x \in R)\ (3x - 5 = 0) \Leftrightarrow (\exists\ x \in R)\ (3x - 5 \neq 0)$

(3) $\sim(\forall\ x \in R)\ (|x| \geq 0) \Leftrightarrow (\exists\ x \in R)\ (|x| < 0)$

(4) $\sim (\exists\ x \in R)\ (\text{sen}x = 0) \Leftrightarrow (\forall\ x \in R)\ (\text{sen}x \neq 0)$