Matrizes inversíveis

$A \in M_n$ é inversível

se existe $B \in M_n$

$$A\underline{B} = I_n = \underline{B}A$$

$$A\underline{A^{-1}} = I_n = \underline{A^{-1}}A$$

$$\Downarrow$$

inversa de A.

A é inversível $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

Como encontrar A^{-1} quando ela existe?

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

$$\mathrm{adj}(A) = \bar{A}^{t}$$

$$\bar{A} = (\Delta_{ij})$$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

$(-3)L_2 + L_1 \to L_1$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

Regra de Cramer

Seja

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

um sistema $\underline{n} \times n$.

Podemos formar as seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

$n \times \underline{n} \quad \underline{n} \times 1$

$n \times 1$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Note que com isso temos que o sistema S pode ser identificado como a eq. matricial

$$\underline{\underline{A \cdot X = B.}}$$

Se A é inversível, temos $AX = B$

$$\Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow I_n X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

e com isso o sistema é compatível e determinado, cuja solução é $A^{-1}B$.

Ex. $S: \begin{cases} x+3y=2 \\ x+2y=7 \end{cases}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Como $\det(A) \neq 1$, A é inversível cuja inversa

$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Logo pela regra de Cramer a solução de S é

$A^{-1}B=\begin{pmatrix} 17 \\ -5 \end{pmatrix}$,

ou seja, $(17,-5)$ é a única solução de S.

Ex. Utilizando a regra de Cramer, resolva o sistema linear

$$S: \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 4x - y + z = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 18$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \leftarrow ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$(-3)L_1 + 2L_2 \rightarrow L_2$

$(-2)L_1 + L_3 \rightarrow L_3$

$3L_2 + L_3 \rightarrow L_3$ $\quad (-5)\frac{1}{18}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -11 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{18}L_3 \rightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11/18 & 1/3 & 1/18 \end{array}\right)$$

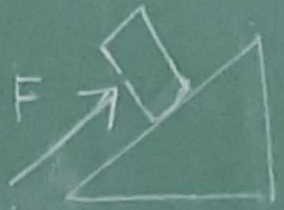
$(-5)L_3 + L_2 \rightarrow L_2$

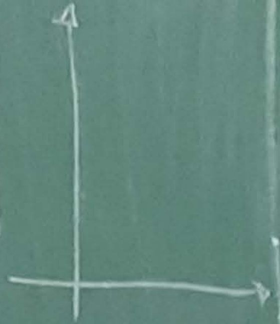
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{18} & 1/3 & -\frac{5}{18} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{18} & 1/3 & 1/18 \end{array}\right)$$

Vetores

Algumas grandezas naturais têm seu comportamento descrito utilizando direção, sentido e magnitude, como por exemplo o conceito de força em física.

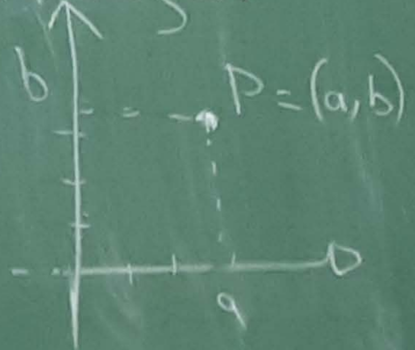
Essas grandezas são expressas em geral por flechas, que motivam o conceito de vetores que veremos a seguir:





Vetores no plano

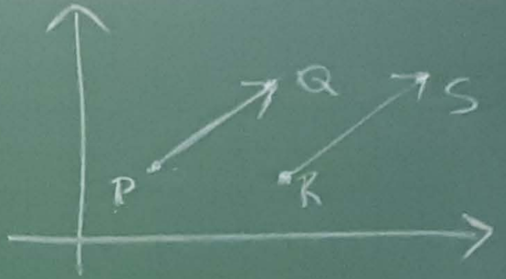
Consideremos o plano cartesiano, que consiste em sistema de coordenada dado por um par de retas ortogonais com orientação.



Fixada uma unidade de medida, um ponto P no plano pode ser indentificado como um par (a,b) de números reais, que serão as suas coordenadas.

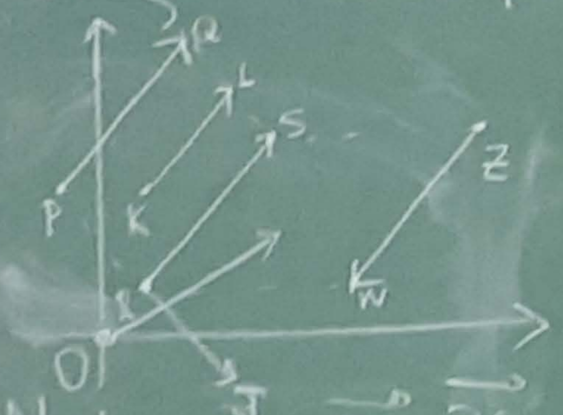
Dados P e Q pontos do plano, podemos considerar o segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$, com ponto inicial P e ponto final Q.

Observe que embora $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QP}$ sejam os mesmos segmentos de reta, eles são distintos como segmentos orientados



Neste caso, dizemos que são opostos.

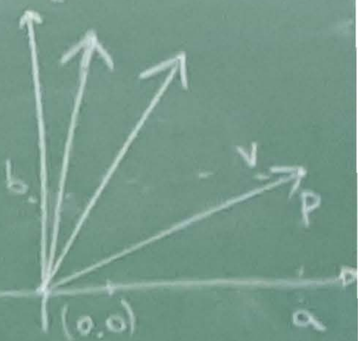
Vamos estabelecer que dois segmentos orientados são equivalentes se possuem o mesmo comprimento e direção. Por exemplo,



Note que $\vec{PQ}$, $\vec{RS}$ e $\vec{ZW}$ têm o mesmo comprimento, mas apenas $\vec{PQ}$ e $\vec{RS}$ têm a mesma direção.

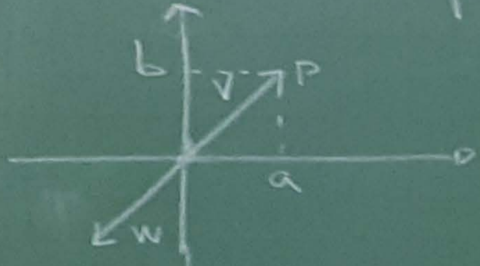
Logo, $\vec{PQ}$ e $\vec{RS}$ são equivalentes.

Note que todo segmento orientado é equivalente a um outro cujo ponto inicial é origem O. Com isso, passamos a considerar segmentos orientados cujo ponto inicial é a origem O, que chamaremos de vetores no plano.



Assim, cada vetor $\vec{OP}$ no plano pode ser descrito por seu ponto final P. Com isso, temos uma correspondência entre vetores do plano e os pontos do plano.

Por isso, representamos um vetor $v=\overrightarrow{OP}$ por $v=(a,b)$



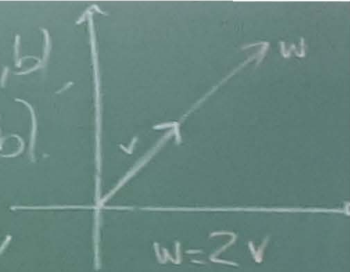
O oposto de um vetor $v=(a,b)$ é o vetor $w=(-a,-b)$. Dessa forma, denotamos $w=-v$.

- Operações com vetores no plano.

- Multiplicar um vetor por um número.

Multiplicar v por $\underline{\alpha>0}$ é considerar o novo vetor $w=\alpha v$ que possui a mesma direção de v e comprimento α vezes o comprimento de v.

Se $v=(a,b)$, $\alpha v=(\alpha a,\alpha b)$.



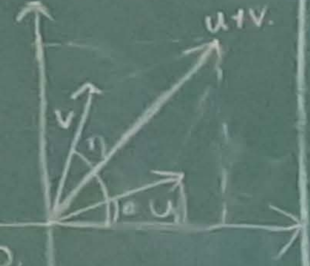
Se $\alpha<0$, o vetor $w=\alpha v$ será igual ao oposto do vetor $\underline{|\alpha| v}$.

$$\boxed{|\alpha| = \begin{cases}\alpha, \alpha\ge 0\\ -\alpha, \alpha<0\end{cases}}$$

Se $\alpha=0$, então $w=\alpha v$ será o vetor nulo $0=(0,0)$.

+ Adição de vetores.

Somar dois vetores u e v do plano, é considerar um novo vetor $w=u+v$ como segue: se $u=(a,b)$ e $v=(c,d)$, as coordenadas de $w=u+v$ são $u+v=(a+c,\ b+d)$



Observe que, como definidos, o espaço V dos vetores do plano junto às operações geométricas, está em correspondência com

$$\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2)\ ;\ x_i\in\mathbb{R}\}$$

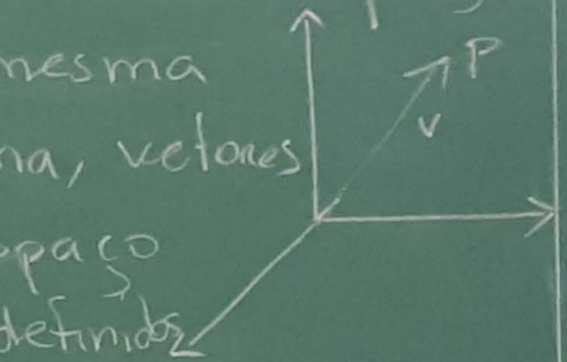
onde

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$$

$$\alpha(a,b)=(\alpha a,\alpha b).$$

$\alpha\in\mathbb{R}$.

- Vetores no espaço



Da mesma forma, vetores no espaço são definidos como segmentos orientados com ponto inicial na origem.

De forma análoga, cada vetor no espaço é representado por seu ponto final $P=(x_1, x_2, x_3)$.

Com isso, definimos as seguintes operações com vetores no espaço: para $u=(x_1, x_2, x_3)$, $v=(y_1, y_2, y_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

- $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$
- $u+v = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

Observe que tanto para vetores no plano, quanto para vetores no espaço, as operações definidas satisfazem as seguintes propriedades:

1) $u+v = v+u$;

2) $(u+v)+w = u+(v+w)$;

3) $\exists\, 0 \in V$ com $u+0=u$ (vetor nulo)

iv) $\exists\, -u \in V$ tal que (oposto) $u+(-u)=0$;

v) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$;

vi) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$;

vii) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;

viii) $1 \cdot u = u$.

Note a semelhança dessas propriedades com as propriedades das operações com matrizes.