

LÓGICA

Cód:30829840

Turma: SI

Prof. Dr. João Paulo I. F. Ribas



Equivalências Notáveis

EQUIVALÊNCIAS NOTÁVEIS				
IDEM	$p \Leftrightarrow p \wedge p$		$p \Leftrightarrow p \vee p$	
COM	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$		$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	
ASSOC	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$		$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	
ID	$p \wedge t \Leftrightarrow p$	$p \wedge c \Leftrightarrow c$	$p \vee t \Leftrightarrow t$	$p \vee c \Leftrightarrow p$
	onde $t = V$ (verdadeiro) e $c = F$ (falso)			
DIST	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$		$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
ABS	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$		$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	

Equivalências Notáveis

EQUIVALÊNCIAS NOTÁVEIS (Continuação)		
DN	$p \Leftrightarrow \sim\sim p$	
DM	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
COND	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$	
BICOND	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
		$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
CP	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$	
EI	$p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
Outras	$p \underline{\vee} q \Leftrightarrow \sim (p \leftrightarrow q)$	
	$p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$	
	$p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	

Forma Normal

Seja $P(p,q,r,\dots)$ uma proposição qualquer, diz-se que ela está na Forma Normal (FN) se e somente se:

- ▶ Contém, quando muito, apenas os conectivos \sim , \wedge e \vee ;
- ▶ Exemplos: $p \wedge q$, $\sim(p \vee q)$, $\sim p \vee q \wedge \sim r$

Forma Normal

- ▶ Toda proposição pode ser levada a uma FN equivalente substituindo-se os conectivos \rightarrow e \leftrightarrow , se houverem.
- ▶ Lembrando que
 - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
 - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
 - Ou ainda: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Forma Normal

- ▶ Exemplo: Apresentar a forma normal da seguinte proposição: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$.

Forma Normal

- ▶ Exemplo: Apresentar a forma normal da seguinte proposição: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$.

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \leftrightarrow r \text{ (Cond)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim(\sim p \vee q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (\sim p \vee q)) \text{ (Bicond)}$$


- ▶ A proposição encontra-se na FN, pois apresenta apenas os conectivos \sim , \wedge e \vee

Forma Normal Conjuntiva

Seja $P(p,q,r,...)$ uma proposição qualquer, diz-se que ela está na Forma Normal Conjuntiva(FNC) se e somente se:

- ▶ Está na FN, ou seja, contém, quando muito, apenas os conectivos \sim , \wedge e \vee ;
- ▶ \sim não aparece repetido (como $\sim\sim$) e não tem alcance sobre \wedge e \vee (como $\sim(p\wedge q)$ ou $\sim(p\vee q)$, por exemplo). Isto é, só incide sobre letras proposicionais.
- ▶ \vee não tem alcance sobre \wedge , isto é, não existe componentes do tipo $p \vee (q \wedge r)$, por exemplo.

Forma Normal Conjuntiva

- ▶ Exemplos:
 - ▶ $(\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee r)$
 - ▶ $\sim p \vee q$
 - ▶ $p \wedge q \wedge r$
 - ▶ $\sim p \wedge \sim q$
 - ▶ $(q \vee \sim r) \wedge (p \vee q) \wedge (\sim r \vee \sim s)$
- 

Forma Normal Conjuntiva

- ▶ Uma proposição pode ser levada a uma FNC equivalente utilizando-se as equivalências notáveis:
- ▶ Lembrando que
 - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ (Cond)
 - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$ (Bicond)
 - $\sim\sim p \Leftrightarrow p$ (DN)
 - $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ (DM)
 - $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (DM)
 - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Dist)
 - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Dist)
 - $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ (Assoc)
 - $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (Assoc)

Forma Normal Conjuntiva

- ▶ Exemplo: Apresentar a FNC da seguinte proposição: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$.

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \leftrightarrow r \text{ (Cond)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim(\sim p \vee q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (\sim p \vee q)) \text{ (Bicond)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (\sim p \vee q)) \text{ (DM)}$$

Forma Normal Conjuntiva

- ▶ Exemplo: Apresentar a FNC da seguinte proposição: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$.

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (\sim p \vee q)) \text{ (DN)}$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)) \wedge (\sim r \vee (\sim p \vee q)) \text{ (Dist)}$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee \sim p \vee q) \text{ (Assoc)}$$

Forma Normal Conjuntiva

- ▶ Exemplo: Apresentar a forma normal conjuntiva (FNC) da seguinte proposição: $(p \wedge q) \leftrightarrow r$.

Forma Normal Conjuntiva

- ▶ Exemplo: Apresentar a forma normal conjuntiva (FNC) da seguinte proposição:
 $(p \wedge q) \leftrightarrow r$.

$$(p \wedge q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (\sim(p \wedge q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (p \wedge q)) \quad (\text{Bicond})$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \vee \sim q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (p \wedge q)) \quad (\text{DM})$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge ((\sim r \vee p) \wedge (\sim r \vee q)) \quad (\text{Assoc, Dist})$$

Forma Normal Conjuntiva

- ▶ Exemplo: Apresentar a forma normal conjuntiva (FNC) da seguinte proposição: $(p \wedge q) \leftrightarrow r$.

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee p) \wedge (\sim r \vee q) \text{ (Assoc)}$$

Forma Normal Conjuntiva

- ▶ Exercício: Apresentar a forma normal conjuntiva (FNC) da seguinte proposição: $(p \vee q) \leftrightarrow r$.

Forma Normal Conjuntiva

- ▶ Exercício: Apresentar a forma normal Conjuntiva (FNC) da seguinte proposição: $(p \vee q) \leftrightarrow r$.

$$(p \vee q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (\sim(p \vee q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (p \vee q)) \quad (\text{Bicond})$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee r) \wedge (\sim r \vee (p \vee q)) \quad (\text{DM})$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee r) \wedge (\sim r \vee p \vee q) \quad (\text{Assoc})$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)) \wedge (\sim r \vee p \vee q) \quad (\text{Dist})$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee p \vee q) \quad (\text{Assoc})$$

Forma Normal Disjuntiva

Seja $P(p,q,r,...)$ uma proposição qualquer, diz-se que ela está na Forma Normal Disjuntiva (FND) se e somente se:

- ▶ Está na FN, ou seja, contém, quando muito, apenas os conectivos \sim , \wedge e \vee ;
- ▶ \sim não aparece repetido (como $\sim\sim$) e não tem alcance sobre \wedge e \vee (como $\sim(p\wedge q)$ ou $\sim(p\vee q)$, por exemplo. Isto é, só incide sobre letras proposicionais.
- ▶ \wedge não tem alcance sobre \vee , isto é, não existe componentes do tipo $p \wedge (q \vee r)$, por exemplo.

Forma Normal Disjuntiva

- ▶ Exemplos:
- ▶ $(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge r)$
- ▶ $\sim p \wedge q$
- ▶ $p \vee q \vee r$
- ▶ $\sim p \vee \sim q$
- ▶ $(q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q) \vee (\sim r \vee \sim s)$

Forma Normal Disjuntiva

- ▶ Uma proposição pode ser levada a uma FND equivalente utilizando-se as equivalências notáveis:
- ▶ Lembrando que
 - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ (Cond)
 - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$ (Bicond)
 - $\sim\sim p \Leftrightarrow p$ (DN)
 - $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ (DM)
 - $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (DM)
 - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Dist)
 - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Dist)
 - $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ (Assoc)
 - $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (Assoc)

Forma Normal Disjuntiva

- ▶ Exemplo: Apresentar a forma normal Disjuntiva (FND) da seguinte proposição: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \quad (\text{Cond})$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p) \quad (\text{Dist})$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee ((\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \quad (\text{Dist})$$

Forma Normal Disjuntiva

- ▶ Exemplo: Apresentar a forma normal Disjuntiva (FND) da seguinte proposição: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee c) \vee (c \vee (q \wedge p)), \text{ onde } c = \text{contradição}$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \quad (\text{ID})$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \quad (\text{Com})$$

Forma Normal Disjuntiva

- ▶ Exercício: Apresentar a forma normal Disjuntiva (FND) da seguinte proposição: $\sim(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$.

Forma Normal Disjuntiva

- ▶ Exercício: Apresentar a forma normal Disjuntiva (FND) da seguinte proposição: $\sim(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$.

$$\Leftrightarrow \sim((p \vee q) \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge r) \quad (\text{DM})$$

$$\Leftrightarrow (\sim(p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \quad (\text{DM})$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \quad (\text{DM})$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \quad (\text{DN})$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)) \wedge (\sim q \vee \sim r) \quad (\text{Dist})$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r) \quad (\text{ID})$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge \sim r) \quad (\text{Dist})$$

Forma Normal Disjuntiva

- ▶ Exercício: Apresentar a forma normal Disjuntiva (FND) da seguinte proposição: $\sim(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$.

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)) \vee ((\sim p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)) \text{ (Dist)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)) \quad \text{(ID)}$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r) \quad \text{(Assoc)}$$

Exercícios

01: Apresentar a Forma Normal Conjuntiva (FNC) das seguintes proposições:

a) $\sim p \downarrow (q \underline{\vee} p)$

b) $p \uparrow (q \underline{\vee} r)$

c) $(\sim(\sim p \uparrow \sim q)) \downarrow (r \rightarrow \sim p)$

Exercícios

02: Apresentar a Forma Normal Disjuntiva (FND) das seguintes proposições:

a) $\sim(p \rightarrow q)$

b) $(p \rightarrow q) \wedge \sim p$

c) $p \leftrightarrow \sim p$

Exercícios

03: Demonstre as relações abaixo utilizando as equivalências notáveis:

- ▶ $p \rightarrow q \wedge r \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
- ▶ $p \rightarrow q \vee r \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
- ▶ $p \wedge (r \vee s \vee t) \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (p \wedge t)$
- ▶ $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- ▶ $\sim(\sim p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p \wedge q$

Exercícios

04: Demonstre as leis de Morgan para três proposições:

▶ $\sim(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$

▶ $\sim(p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

Exercícios

05: Demonstre, utilizando as equivalências notáveis, que as relações de implicação são válidas:

► Regra da simplificação: $p \wedge q \Rightarrow q$ (EXEMPLO)

Para provarmos uma relação de implicação temos que demonstrar que a condicional $p \wedge q \rightarrow q$ é tautológica, ou seja, que a condicional

$$p \wedge q \rightarrow q \Leftrightarrow V$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da equivalência, tem-se:

$$p \wedge q \rightarrow q \Leftrightarrow$$

$$\sim(p \wedge q) \vee q \Leftrightarrow \text{(COND)}$$

$$\sim p \vee \sim q \vee q \Leftrightarrow \text{(DM)}$$

$$\sim p \vee V \Leftrightarrow \text{(ID)}$$

V Portanto, está provado que $p \wedge q \Rightarrow q$ é uma tautologia

Exercícios

05: Demonstre, utilizando as equivalências notáveis, que as relações de implicação são válidas:

- ▶ Regra da adição: $p \Rightarrow p \vee q$
- ▶ Regra do Silogismo Disjuntivo: $(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$
- ▶ Regra de Modus Ponens: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
- ▶ Regra de Modus Tollens: $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

Exercícios

06: Reescreva o teste abaixo reduzindo as condições através das relações de equivalência:

- ▶ SE $(\text{fluxo_ext} > \text{fluxo_int}) \wedge \sim(\text{fluxo_ext} > \text{fluxo_int} \wedge \text{pressão} < 1000)$ ENTÃO
 faça bloco de comandos A
SENÃO
 faça bloco de comandos B

Exercícios

07: Reescreva o teste abaixo reduzindo as condições através das relações de equivalência:

- ▶ SE $\sim(\text{idade} > 21 \vee \text{sexo} = \text{"F"}) \vee (\sim(\text{idade} > 21) \wedge \text{sexo} = \text{"F"})$ ENTÃO
 faça bloco de comandos A
SENÃO
 faça bloco de comandos B

Exercícios

08: Reescreva o teste abaixo reduzindo as condições através das relações de equivalência:

- ▶ SE $(\text{cab} = \text{"loiro"} \wedge \text{pele} = \text{"morena"}) \vee (\text{cab} = \text{"loiro"} \wedge \text{pele} = \text{"branca"})$ ENTÃO
 faça bloco de comandos A
SENÃO
 faça bloco de comandos B

Exercícios

09: Reescreva o teste abaixo reduzindo as condições através das relações de equivalência:

- ▶ SE (cab="loiro" \vee pele="morena") \vee (cab="loiro" \vee pele="branca") ENTÃO
 faça bloco de comandos A
SENÃO
 faça bloco de comandos B

Exercícios

10: Reescreva o teste abaixo reduzindo as condições através das relações de equivalência:

- ▶ SE (cidade="Curitiba") ENTÃO
 SE (bairro="Centro" \vee bairro="Rebouças") ENTÃO
 faça bloco de comandos A.