Abbiamo portato un esempio di funzione discontinua e non dotata di primitive.

Attenzione: Esistono funzioni discontinue dotate di primitive.

PERÒ, dimostreremo che

$$\boxed{f \text{ continua in } (a,b) \Rightarrow f \text{ è dotata di primitive in } (a,b)}$$

Def 1. Si chiama integrale indefinito di f l'insieme formato dalle primitive di f in (a,b) se f è dotata di primitive, l'insieme vuoto se f non ha primitive in (a,b)

L'integrale indefinito si indica con il simbolo

$$\int f(x)\,dx$$

Dunque,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha primitive in } (a,b) \\ \{F(x)+c,\ c \in \mathbb{R}\} & \text{se } F \text{ è una primitiva di } f \text{ in } (a,b) \end{cases}}$$

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha primitive in } (a,b) \\ \{F(x)+c,\ c \in \mathbb{R}\} & \text{se } F \text{ è una primitiva di } f \text{ in } (a,b) \end{cases}$$

Integrali indefiniti notevoli

$$\int 0 \cdot dx = \{c,\quad c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int 1 \cdot dx = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq -1$ $\displaystyle\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$a > 0$ $a \neq 1$ $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

infatti:

$$D\left(a^x/\log a\right) = a^x \cancel{\log a} / \cancel{\log a} = a^x$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Usando la regola di derivazione delle funzioni composte:

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b)

Allora

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq -1$

$$\boxed{\int [f(x)]^{\alpha}\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

$$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \ln|f(x)| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{\ln a}\, a^{f(x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int [\operatorname{sen} f(x)] \cdot f'(x)\,dx = -\cos f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int [\cos f(x)] \cdot f'(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)\, dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esempi

- $$\int \boxed{2x}\,(x^2+5)^{2023}\, dx = \int (x^2+5)^{2023}\, \boxed{D(x^2+5)}\, dx = \frac{(x^2+5)^{2024}}{2024} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

- $$\int \frac{2x}{x^2+5}\, dx = \int \frac{1}{x^2+5}\, \boxed{D(x^2+5)}\, dx = \ln(x^2+5) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{\operatorname{sen} x}\, \underbrace{\boxed{\cos x}}_{D \operatorname{sen} x}\, dx = \int e^{\operatorname{sen} x} \cdot (D \operatorname{sen} x)\, dx = e^{\operatorname{sen} x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{\operatorname{sen} x + x^2}\, \underbrace{\boxed{(\cos x + 2x)}}_{D(\operatorname{sen} x + x^2)}\, dx = \int e^{\operatorname{sen} x + x^2}\, D(\operatorname{sen} x + x^2)\, dx =$$

$$= e^{\operatorname{sen} x + x^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x\, dx = \int (-1)\, e^{\cos x}\, (-\operatorname{sen} x)\, dx$$

$$\int k\, f(x)\, dx \overset{?}{=} k \int f(x)\, dx$$

Proprietà di omogeneità

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive su (a,b)

$k \in \mathbb{R}$ $k \neq 0$

Allora

1) kf è dotata di primitive su (a,b)

2) $\boxed{\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx}$

Oss 1 $k \int f(x)\, dx$ indica l'insieme formato dalle funzioni del tipo $k F(x)$ con F primitiva di f in (a,b)

Oss 2. l'uguaglienza 2) NON vale nel caso in cui $k = 0$.

Infatti, se $k=0$ allora $k f(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$

$$\int k f(x)\, dx = \int 0 \cdot dx = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Invece

$k \int f(x)\, dx = 0 \cdot \int f(x)\, dx$ è l'insieme formato dalle funzioni del tipo $0 \cdot F(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ con F primitiva di f in (a,b) quindi:

$$0 \cdot \int f(x)\, dx$$

è l'insieme formato dalla sola funzione nulla su (a,b)

Se $K=0$ posso dire che

$$K \int f(x)\,dx \subsetneq \int K f(x)\,dx$$

Se A e B sono due insiemi

$$A \subseteq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall a \in A \Rightarrow a \in B$$

$$A \subsetneq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} i)\ \forall a \in A \rightarrow a \in B \\ ii)\ \exists b \in B : b \notin A \end{array}$$

Dim della proprietà di omogeneità.

Per ipotesi f è dotata di primitive in (a,b) e sia F una sua primitiva.

$$\exists\ D[K F(x)] = K \cdot F'(x) = K f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

$\downarrow$

$F'(x) = f(x)$
perchè F è primitiva di f in (a,b)

$\Downarrow$

$K f(x)$ è dotata di primitive in (a,b)

2) Per provare la 2) devo dimostrare le due inclusioni

Ricordo che devo provare:

$$\int K f(x)\,dx = K \int f(x)\,dx$$

Provo che

$$\int K f(x)\,dx \subseteq K \int f(x)\,dx$$

Sia

$$G \in \int K f(x)\,dx \overset{def}{\Longleftrightarrow} G \text{ è una primitiva di } K f$$

$G \in \int k f(x)dx \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ G è una primitiva di kf in (a,b)

$\overset{def}{\Updownarrow}$

$\exists\ G'(x) = k f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

Vorrei trovare che $G \in k \int f(x)\,dx$

$G = k\,?$ $\quad$ Se $k \neq 0$: $\quad G(x) = k \cdot \left[\frac{G(x)}{k}\right] \quad \forall x \in (a,b)$

$\downarrow$

primitiva di F

Provo che $\frac{G(x)}{k}$ è primitiva di f in (a,b)

$$D\left[\frac{G(x)}{k}\right] = \frac{1}{k}\,G'(x) = \frac{1}{\cancel{k}}\left[\cancel{k} f(x)\right] = f(x)$$

$\downarrow$

G è primitiva di kf

$\forall x \in (a,b)$

Conclusione: $\frac{G(x)}{k}$ è primitiva di f in (a,b)

$\Downarrow$

$$G \in k \int f(x)\,dx$$

- Proviamo l'altra inclusione:

$$k \int f(x)\,dx \subseteq \int k f(x)\,dx$$

Sia

$G \in k \int f(x)\,dx \overset{def}{\Longleftrightarrow} G(x) = k F(x) \quad \forall x \in (a,b)$ ⊛

essendo $F(x)$ una primitiva di f in (a,b)

Devo provare che G è una primitiva di $k f(x)$

$$\underbrace{G'(x)}_{} = D[k F(x)] = k F'(x) = \underbrace{k f(x)}_{} \quad \forall x \in (a,b)$$

$\downarrow$ (*)

perché F è primitiva di f

$\Downarrow$

G è primitiva di $k f$

$$\int e^{3\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = \int \left(-\frac{1}{3}\right) e^{3\cos x} (-3 \operatorname{sen} x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int e^{3\cos x} D(3\cos x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{3} e^{3\cos x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$D(3x^3+1) = 9x^2$

$$\frac{1}{9} \int \underbrace{9x^2}_{= D(3x^3+1)} \operatorname{sen}(3x^3+1) \, dx = \frac{1}{9}\left(-\cos(3x^3+1)\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Proprietà di linearità

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive in (a,b)

Allora

1) $f+g$ è dotata di primitive in (a,b)

2) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

dove il 2° membro è l'insieme formato dalle funzioni che sono somma di una primitiva di f e di una primitiva di g.

3) $\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + \int g(x) dx$ con F primitiva di f

dove l'insieme al 2° membro è l'insieme formato dalle funzioni che si ottengono sommando a F una qualsiasi primitiva di g.