$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$$\Downarrow$$

$\underline{\mathcal{S}}$, $\overline{\mathcal{S}}$ sono contigui

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{Sup} \underline{\mathcal{S}} = \operatorname{Inf} \overline{\mathcal{S}}$$

Def. Il numero

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{def}{=} \operatorname{Sup} \underline{\mathcal{S}} = \operatorname{Inf} \overline{\mathcal{S}}$$

si chiama integrale definito tra a e b di f

Siano $\alpha, \beta \in [a,b]$

Se $\alpha < \beta$ $\quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ è definito

come $\operatorname{Sup} \underline{\mathcal{S}} = \operatorname{Inf} \overline{\mathcal{S}}$

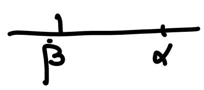
essendo

$$\underline{\mathcal{S}} = \{ s(\mathcal{D}, f) \ , \ \mathcal{D} \text{ decomp di } [\alpha,\beta] \}$$

$$\overline{\mathcal{S}} = \{ S(\mathcal{D}, f) \ , \ \mathcal{D} \text{ decomp. di } [\alpha,\beta] \}$$

Si pone poi:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = \beta \\ -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx & \text{se } \alpha > \beta \leftarrow \end{cases}$$



• Proprietà dell'integrale definito

1) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

$\alpha, \beta \in [a,b]$

$h, k \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$$\int_\alpha^\beta [h f(x) + k g(x)]\,dx = h\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + k\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

(prop. distributiva . . .)

2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$

$$\Downarrow$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

(proprietà additiva)

Teorema della media

3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$$\Downarrow$$

i) $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

essendo

$$m = \min_{[a,b]} f \qquad M = \max_{[a,b]} f$$

ii) $$\exists\, c \in [a,b] : \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

Dim Per definizione

$$s(\mathcal{D}_1, f) \le \int_a^b f(x)\,dx \le S(\mathcal{D}_2, f) \quad (*)$$

$\forall\, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ decomposizioni di $[a,b]$

Sia

$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \{a, b\}$

$$s(\mathcal{D}, f) = (b-a)\min_{[a,b]} f \quad (**)$$

$$S(\mathcal{D}, f) = (b-a)\max_{[a,b]} f$$

(*) + (**)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \quad \text{che ha} \Downarrow$$

$$m \leq \boxed{\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}} \leq M$$

$\Downarrow$ 2° teorema di Weierstrass

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$ è un valore assunto di f

cioè:

$$\exists\, c \in [a,b] : \quad f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

4 Proprietà di monotonia

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

In particolare, se $\cdot\ f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

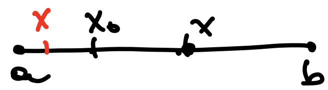
e $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \iff f(x) = 0$

Funzione integrale

Siano $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e $x_0 \in (a, b)$

Considero

$$F : (a,b) \to \mathbb{R}$$



definita da

$$F(x) \overset{def}{=} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall x \in (a, b)$$

$$F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$$

F si chiama funzione integrale di punto iniziale x_0.

Sia $x_1 \in [a, b]$ e consideriamo la funzione integrale di pto iniziale x_1

$$G(x) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{x_1}^{x_0} f(t)\,dt}_{\text{costante}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}_{= F(x)} =$$

uso la prop. addittiva

$$\Rightarrow \quad G(x) = F(x) + \text{costante} \qquad \forall x \in (a, b)$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale.

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ continua

$x_0 \in (a, b)$

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in (a, b)$

$\Rightarrow$

i) $F(x)$ è deriv in (a, b)

ii) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Cioè: $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in (a, b)

Il teorema può enunciarsi così:

Ogni funzione continua in un intervallo è dotata di primitive.

Dim

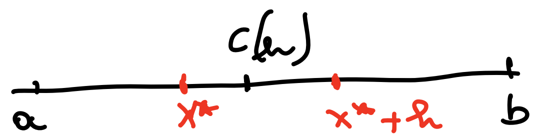
Sia $x^* \in (a,b)$

Proviamo che

$$\exists\, F'(x^*) = f(x^*)$$

Scrivo il rapporto incrementale di F in x^*

$$\frac{F(x^*+h) - F(x^*)}{h}$$



con $h \neq 0$: $x^*+h \in (a,b)$

Supponiamo che $h>0$.

$$\frac{F(x^*+h) - F(x^*)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x^*+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x^*} f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{\int_{x_0}^{x^*} f(t)\,dt} + \int_{x^*}^{x^*+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_{x_0}^{x^*} f(t)\,dt}}{h}$$

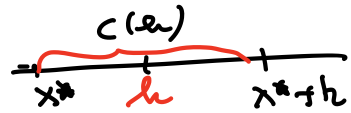
prop. additiva intercalando x^*

Quindi:

$$\frac{F(x^*+h) - F(x^*)}{h} = \frac{\int_{x^*}^{x^*+h} f(t)\,dt}{h}$$

Per il Teorema della media

$\exists\ c(h) \in [x^*, x^* + h]$ tale che:



$$\frac{\int_{x^*}^{x^*+h} f(t)\,dt}{h} = f(c(h))$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x^*+h)-F(x^*)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} f(c(h)) = f(x^*)$$

perchè $c(h) \to x^*$ per $h \to 0$
e f è continua in x^*

Anal. si prova che

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x^*+h)-F(x^*)}{h} = f(x^*)$$

e quindi la tesi.