

# 1 - Integrali Indefiniti

## Primitive

### ✓ Definizione

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f$  è dotata di primitive in  $(a, b)$  se  $\exists F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

1.  $F$  è derivabile in  $(a, b)$
2.  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

### ⚠ Nota

- Non tutte le funzioni hanno primitive (es. la funzione segno)
- Una funzione continua ha primitive. Una funzione non continua non implica il non avere primitive. La continuità è una condizione sufficiente, ma non necessaria.

## Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo

### ✓ Enunciato

#### Ipotesi

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dotata di primitive in  $(a, b)$

$F$  primitiva di  $f$  in  $(a, b)$

#### Tesi

Tutte e sole le funzioni primitive di  $f$  in  $(a, b)$  sono le funzioni del tipo:

$$F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

### 🔗 Dimostrazione

1. Dimostro che tutte le funzioni del tipo  $F(x) + c$ , con  $c \in \mathbb{R}$  sono primitive di  $f$  in  $(a, b)$

$$\exists D[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

2. Dimostro che tutte le funzioni del tipo  $F(x) + c$  sono le sole primitive.

Se  $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è un'altra primitiva di  $f$  in  $(a, b)$  allora  $\exists c \in \mathbb{R}$  tale che  $G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in (a, b)$

Consideriamo la funzione  $G(x) - F(x)$ . Essa è derivabile in  $(a, b)$  e

$$D[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Il 2° corollario di Lagrange dice: "se due funzioni hanno la stessa derivata in un intervallo, esse differiscono per una costante".

Quindi,  $G(x) - F(x) = \text{costante} \rightarrow G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$

## Integrale Indefinito

### ✓ Definizione

Si chiama **Integrale indefinito** di  $f$  l'insieme formato dalle primitive di  $f$  in  $(a, b)$  se  $f$  è dotata di primitive, l'insieme vuoto se  $f$  non ha primitive in  $(a, b)$ .

$$\int f(x) dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha primitive in } (a, b) \\ F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} & \text{se } F \text{ è una primitiva di } f \text{ in } (a, b) \end{cases}$$

## Integrali Indefiniti Notevoli

$(c \in \mathbb{R})$

- $\int 0 dx = c$
- $\int 1 dx = x + c$
- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq 0$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \alpha \neq 1$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

## Integrali di Funzioni Composte

- $\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- *gli altri sono uguali a quelli notevoli ma con  $x = f(x)$ , tutto per  $f'(x)$ .*

## Proprietà di Omogeneità

### ✓ Enunciato

#### Ipotesi

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dotata di primitive in  $(a, b)$

$k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

#### Tesi

1.  $kf$  è dotata di primitive in  $(a, b)$
2.  $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$

### 🔗 Dimostrazione

1. Per ipotesi  $f$  è dotata di primitive in  $(a, b)$  e sia  $F$  una sua primitiva.

$$\exists D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

2. Per provare la 2 si dimostrano le due inclusioni.

Si prova che  $\int k \cdot f(x) dx \subseteq k \cdot \int f(x) dx$

$$G \in \int k \cdot f(x) dx$$

$$\exists G'(x) = k \cdot f(x)$$

Dobbiamo provare che  $G \in k \cdot \int f(x) dx$ , quindi  $G = k \cdot$  primitiva di  $f$

Se  $k \neq 0$  possiamo dire che  $G(x) = k \cdot \left[ \frac{G(x)}{k} \right]$

Se proviamo che  $\left[ \frac{G(x)}{k} \right]$  è uguale a una primitiva di  $f$  in  $(a, b)$ , allora abbiamo provato che  $G(x) \in k \cdot \int f(x) dx$ .

$$D \left[ \frac{G(x)}{k} \right] = \frac{1}{k} \cdot G'(x) = \frac{1}{k} \cdot [k \cdot f(x)] = f(x)$$

In conclusione,  $\frac{G(x)}{k}$  è primitiva di  $f$  in  $(a, b)$ , quindi  $G \in k \cdot \int f(x) dx$

Proviamo adesso l'altra inclusione  $k \cdot \int f(x) dx \subseteq \int k \cdot f(x) dx$

$$G \in k \int f(x) dx, \text{ quindi } G(x) = k \cdot F(x)$$

Devo provare che  $G$  è una primitiva di  $k \cdot f(x)$

$$G'(x) = D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$$

Abbiamo dimostrato che  $G$  è una primitiva di  $k \cdot f$

## Proprietà di Linearità

### ✓ Enunciato

#### Ipotesi

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dotate di primitive in  $(a, b)$

#### Tesi

1.  $f + g$  è dotata di primitive in  $(a, b)$
2.  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

#### ⚠ Osservazione

Al secondo membro avviene la somma tra due insiemi, che di norma non è definita. Si intende invece l'insieme formato dalle funzioni che sono la somma di una delle primitive di  $f$  e una delle primitive di  $g$ .

3.  $\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + \int g(x) dx$ , con  $F$  primitiva di  $f$

#### ⚠ Osservazione

Al secondo membro si intende che, quando si tratta di una somma con un integrale, è possibile omettere la costante.

## Integrazione per decomposizione in somma

### ✓ Enunciato

#### Ipotesi

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dotate di primitive

$h, k \in \mathbb{R}$  non entrambi nulli ( $h^2 + k^2 > 0$ )

#### Tesi

1.  $h \cdot f + k \cdot g$  è dotata di primitive in  $(a, b)$
2.  $\int [h \cdot f(x) + k \cdot g(x)] dx = h \cdot \int f(x) dx + k \cdot \int g(x) dx$

## Integrazione indefinita per parti

### ✓ Enunciato

#### Ipotesi

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili

$f' \cdot g$  dotata di primitive in  $(a, b)$

#### Tesi

1.  $f \cdot g'$  è dotata di primitive in  $(a, b)$
2.  $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$

### 🔗 Dimostrazione

$f$  e  $g$  sono derivabili, quindi lo è anche  $f \cdot g$ .

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

Spostando di membro si ottiene:  $f'(x) \cdot g(x) = D[f(x) \cdot g(x)] + f(x) \cdot g'(x)$

Si integrano entrambi i membri e per la proprietà di linearità si ottiene:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) + \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$f(x)$  è detto **fattore finito**

$g(x)$  è detto **fattore differenziale**

## Integrali indefiniti *ciclici*

### 🔗 Metodo risolutivo

Per risolvere un integrale del tipo:

$$\int f(x) dx = H(x) + \alpha \cdot \int f(x) dx, \quad \alpha \neq 1$$

È sufficiente portare al primo l'integrale e risolvere l'equazione isolandolo.

## Metodo di Sostituzione

## ✓ Enunciato

### Ipotesi

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dotata di primitive in  $(a, b)$

$\phi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $(\alpha, \beta)$

$\phi'$  continua in  $(\alpha, \beta)$

$Im \phi \subseteq (a, b) \quad [ \iff \phi(x) \in (a, b) \forall x \in (\alpha, \beta) ]$

### Tesi

1ª Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = \left( \int f(y) dy \right)_{y=\phi(x)}$$

## Integrali di Polinomi Trigonometrici

### Prerequisiti di Trigonometria

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$
- $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

$\int \cos^n x dx$  oppure  $\int \sin^n x dx$

**$n$  pari**

1. Si scompone  $\int \sin^{2n} x dx$  in  $\int (\sin^2 x)^n dx$
2. Si trasforma  $\sin^2 x$  in  $\frac{1 - \cos(2x)}{2}$  e si divide la frazione in  $\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se  $n = 2$ , il cubo di binomio se  $n = 3$ , ecc
4. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
5. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

**$n$  dispari**

1. Si scompone  $\int \sin^n x dx$  in  $\int \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx$
2. Si scompone  $\sin^{n-1} x$  in  $(1 - \cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se  $\frac{n-1}{2} = 2$ , il cubo di binomio se  $\frac{n-1}{2} = 3$ , ecc
4. Si moltiplica ogni membro della parentesi appena svolta per il  $\sin x$  iniziale.
5. Si procede utilizzando l'integrazione composta  $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c$  e i vari metodi risolutivi.

$\int \cos^n x \cdot \sin^m x dx$

**$n = m$**

1. Si trasforma  $\int \sin^n x \cdot \cos^n x dx$  in  $\int (\sin x \cdot \cos x)^n dx$
2. Si trasforma  $\sin x \cdot \cos x$  in  $\frac{1}{2} \sin 2x$
3. Si svolge la potenza elevando entrambi i fattori e ottenendo  $\int \frac{1}{2^n} \sin^n 2x dx$
4. Si può portare fuori la costante  $\frac{1}{2^n}$
5. Procedere ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

### $n \neq m$ con $n$ e $m$ entrambi pari

1. Si prende  $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$  e si sceglie  $\sin^n x$  oppure  $\cos^n x$  di grado inferiore, scomponendolo in  $(1 - \cos^2)^{\frac{n}{2}}$
2. Si svolge il quadrato di binomio se  $\frac{n}{2} = 2$ , il cubo di binomio se  $\frac{n}{2} = 3$ , ecc
3. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
4. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

### $n \neq m$ con almeno $n$ oppure $m$ dispari

1. Si prende  $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$  e si sceglie  $\sin^n x$  oppure  $\cos^n x$  con il grado dispari. Se sono entrambi dispari è preferibile quello con il grado inferiore.  
*supponiamo si sia scelto  $\sin^n x$*
2. Si scompone  $\sin^n x$  in  $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$ .
3. Si procede come nel caso di  $\int \sin^n x \, dx$  con  $n$  dispari dallo step 2

## Integrali di Fratti Semplici

**Caso 1:**  $\frac{1}{(ax+b)^n}$   $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$

#### Metodo risolutivo

$n = 1$  :

$$\frac{1}{(ax+b)^1} = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{(ax+b)} \cdot a \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |ax+b| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$n > 1$  :

$$\frac{1}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a} \cdot \int (ax+b)^{-n} \cdot a \, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Caso 2:**  $\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$   $p, q \in \mathbb{R} : \Delta = p^2 - 4q < 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$

#### Metodo risolutivo

Il denominatore può essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot \frac{px}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = & (4q - p^2 = -\Delta) \\ &= \frac{(2x+p)^2}{4} + \frac{-\Delta}{4} = \\ &= \frac{-\Delta}{4} \cdot \left[ \frac{(2x+p)^2}{-\Delta} + 1 \right] = \\ &= \frac{-\Delta}{4} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 \right] & (-\Delta > 0) \end{aligned}$$

Quindi si può svolgere l'integrale facendo riferimento all'uguaglianza precedente e all'integrazione notevole dell'arctan:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{1}{-\frac{\Delta}{4} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 \right]} dx = \quad \left( D \left[ \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} \right] = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \right) \\
 &= \frac{\cancel{4}}{-\Delta} \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{\cancel{2}} \cdot \int \frac{1}{1 + \left( \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2} \cdot D \left[ \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} \right] dx = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \cdot \left( \int \frac{1}{1 + y^2} dy \right)_{y=\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}} = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \cdot \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} + c, \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

**Caso 3:**  $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$   $a, b \in \mathbb{R}, \quad p, q \in \mathbb{R} : \Delta = p^2 - 4q < 0, n \in \mathbb{N}$

### Metodo risolutivo

#### Nota

Se il numeratore è derivata del denominatore è sufficiente utilizzare l'integrazione fondamentale del  $\ln$ .

Se il numeratore non è derivata del denominatore, bisogna fare in modo che lo diventi.

Si procede quindi effettuando moltiplicazioni o somme di costanti e si procede utilizzando i vari metodi risolutivi sopra citati.

## Integrali di Equazioni Razionali Fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

**grado**  $[N(x)] \geq$  **grado**  $[D(x)]$

### Metodo risolutivo

È sufficiente effettuare la divisione tra polinomi finché non si ottiene un polinomio di grado inferiore al denominatore.

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

Si può quindi procedere con gli altri metodi risolutivi

**grado**  $[N(x)] <$  **grado**  $[D(x)]$

#TODO