

Guida su Teoria ed Esercizi

Elementi di Analisi Matematica 2

1 - Integrali Indefiniti

Primitive

✓ Definizione

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

f è dotata di primitive in (a, b) se $\exists F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. F è derivabile in (a, b)
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

⚠ Nota

- Non tutte le funzioni hanno primitive (es. la funzione segno)
- Una funzione continua ha primitive. Una funzione non continua non implica il non avere primitive. La continuità è una condizione sufficiente, ma non necessaria.

Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo

✓ Enunciato

Ipotesi

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)

F primitiva di f in (a, b)

Tesi

Tutte e sole le funzioni primitive di f in (a, b) sono le funzioni del tipo:

$$F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

1. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ sono primitive di f in (a, b)

$$\exists D[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

2. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$ sono le sole primitive.

Se $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f in (a, b) allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in (a, b)$

Consideriamo la funzione $G(x) - F(x)$. Essa è derivabile in (a, b) e

$$D[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Il 2° corollario di Lagrange dice: "se due funzioni hanno la stessa derivata in un intervallo, esse differiscono per una costante".

Quindi, $G(x) - F(x) = \text{costante} \rightarrow G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$

Integrale Indefinito

✓ Definizione

Si chiama **Integrale indefinito** di f l'insieme formato dalle primitive di f in (a, b) se f è dotata di primitive, l'insieme vuoto se f non ha primitive in (a, b) .

$$\int f(x) dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha primitive in } (a, b) \\ \int F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} & \text{se } F \text{ è una primitiva di } f \text{ in } (a, b) \end{cases}$$

Integrali Indefiniti Notevoli

$(c \in \mathbb{R})$

- $\int 0 dx = c$
- $\int 1 dx = x + c$
- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq 0$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \alpha \neq 1$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

Integrali di Funzioni Composte

- $\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- gli altri sono uguali a quelli notevoli ma con $x = f(x)$, tutto per $f'(x)$.

Proprietà di Omogeneità

✓ Enunciato

Ipotesi

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)

$k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

Tesi

1. kf è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$

1. Per ipotesi f è dotata di primitive in (a, b) e sia F una sua primitiva.

$$\exists D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

2. Per provare la 2 si dimostrano le due inclusioni.

Si prova che $\int k \cdot f(x) dx \subseteq k \cdot \int f(x) dx$

$$G \in \int k \cdot f(x) dx$$

$$\exists G'(x) = k \cdot f(x)$$

Dobbiamo provare che $G \in k \cdot \int f(x) dx$, quindi $G = k \cdot$ primitiva di f

Se $k \neq 0$ possiamo dire che $G(x) = k \cdot \left[\frac{G(x)}{k} \right]$

Se proviamo che $\left[\frac{G(x)}{k} \right]$ è uguale a una primitiva di f in (a, b) , allora abbiamo provato che $G(x) \in k \cdot \int f(x) dx$.

$$D \left[\frac{G(x)}{k} \right] = \frac{1}{k} \cdot G'(x) = \frac{1}{k} \cdot [k \cdot f(x)] = f(x)$$

In conclusione, $\frac{G(x)}{k}$ è primitiva di f in (a, b) , quindi $G \in k \cdot \int f(x) dx$

Proviamo adesso l'altra inclusione $k \cdot \int f(x) dx \subseteq \int k \cdot f(x) dx$

$$G \in k \int f(x) dx, \text{ quindi } G(x) = k \cdot F(x)$$

Devo provare che G è una primitiva di $k \cdot f(x)$

$$G'(x) = D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$$

Abbiamo dimostrato che G è una primitiva di $k \cdot f$

Proprietà di Linearità

✓ Enunciato

Ipotesi

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotate di primitive in (a, b)

Tesi

1. $f + g$ è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

⚠ Osservazione

Al secondo membro avviene la somma tra due insiemi, che di norma non è definita. Si intende invece l'insieme formato dalle funzioni che sono la somma di una delle primitive di f e una delle primitive di g .

3. $\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + \int g(x) dx$, con F primitiva di f

⚠ Osservazione

Al secondo membro si intende che, quando si tratta di una somma con un integrale, è possibile omettere la costante.

Integrazione per decomposizione in somma

✓ Enunciato

Ipotesi

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotate di primitive

$h, k \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli ($h^2 + k^2 > 0$)

Tesi

1. $h \cdot f + k \cdot g$ è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int [h \cdot f(x) + k \cdot g(x)] dx = h \cdot \int f(x) dx + k \cdot \int g(x) dx$

Integrazione indefinita per parti

✓ Enunciato

Ipotesi

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili

$f' \cdot g$ dotata di primitive in (a, b)

Tesi

1. $f \cdot g'$ è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$

🔗 Dimostrazione

f e g sono derivabili, quindi lo è anche $f \cdot g$.

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

Spostando di membro si ottiene: $f'(x) \cdot g(x) = D[f(x) \cdot g(x)] + f(x) \cdot g'(x)$

Si integrano entrambi i membri e per la proprietà di linearità si ottiene:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) + \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$f(x)$ è detto **fattore finito**

$g(x)$ è detto **fattore differenziale**

Integrali indefiniti *ciclici*

🔗 Metodo risolutivo

Per risolvere un integrale del tipo:

$$\int f(x) dx = H(x) + \alpha \cdot \int f(x) dx, \quad \alpha \neq 1$$

È sufficiente portare al primo l'integrale e risolvere l'equazione isolandolo.

Metodo di Sostituzione

1^a Formula

✓ Enunciato

Ipotesi

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)

$\phi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (α, β)

ϕ' continua in (α, β)

$Im \phi \subseteq (a, b) \quad [\iff \phi(x) \in (a, b) \forall x \in (\alpha, \beta)]$

Tesi

1^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = \left(\int f(y) dy \right)_{y=\phi(x)}$$

2^a Formula

✓ Enunciato

Ipotesi

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)

$\phi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (α, β)

ϕ' continua in (α, β)

$Im \phi = (a, b)$

ϕ invertibile in (α, β)

Tesi

2^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(x) dx = \left(\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt \right)_{t=\phi^{-1}(x)}$$

Integrali di Polinomi Trigonometrici

📅 Prerequisiti di Trigonometria

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$
- $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

$\int \cos^n x dx$ oppure $\int \sin^n x dx$

n pari

1. Si scompone $\int \sin^{2n} x dx$ in $\int (\sin^2 x)^n dx$
2. Si trasforma $\sin^2 x$ in $\frac{1 - \cos(2x)}{2}$ e si divide la frazione in $\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $n = 2$, il cubo di binomio se $n = 3$, ecc

4. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
5. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

n dispari

1. Si scompone $\int \sin^n x \, dx$ in $\int \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx$
2. Si scompone $\sin^{n-1} x$ in $(1 - \cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n-1}{2} = 2$, il cubo di binomio se $\frac{n-1}{2} = 3$, ecc
4. Si moltiplica ogni membro della parentesi appena svolta per il $\sin x$ iniziale.
5. Si procede utilizzando l'integrazione composta $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c$ e i vari metodi risolutivi.

$$\int \cos^n x \cdot \sin^m x \, dx$$

$$n = m$$

1. Si trasforma $\int \sin^n x \cdot \cos^n x \, dx$ in $\int (\sin x \cdot \cos x)^n \, dx$
2. Si trasforma $\sin x \cdot \cos x$ in $\frac{1}{2} \sin 2x$
3. Si svolge la potenza elevando entrambi i fattori e ottenendo $\int \frac{1}{2^n} \sin^n 2x \, dx$
4. Si può portare fuori la costante $\frac{1}{2^n}$
5. Procedere ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con n e m entrambi pari

1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ di grado inferiore, scomponendolo in $(1 - \cos^2)^{\frac{n}{2}}$
2. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n}{2} = 2$, il cubo di binomio se $\frac{n}{2} = 3$, ecc
3. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
4. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con almeno n oppure m dispari

1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ con il grado dispari. Se sono entrambi dispari è preferibile quello con il grado inferiore.
supponiamo si sia scelto $\sin^n x$
2. Si scompone $\sin^n x$ in $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$.
3. Si procede come nel caso di $\int \sin^n x \, dx$ con n dispari dallo step 2

Integrali di Fratti Semplici

Caso 1: $\frac{1}{(ax+b)^n}$ $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}$

🔗 Metodo risolutivo ($n = 1$)

$$\frac{1}{(ax+b)^1} = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{(ax+b)} \cdot a \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |ax+b| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

🔗 Metodo risolutivo ($n > 1$)

$$\frac{1}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a} \cdot \int (ax+b)^{-n} \cdot a \, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Caso 2: $\frac{1}{x^2+px+q}$ $p, q \in \mathbb{R} : \Delta = p^2 - 4q < 0$

🔗 Metodo risolutivo

Il denominatore può essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot \frac{px}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = & (4q - p^2 = -\Delta) \\ &= \frac{(2x + p)^2}{4} + \frac{-\Delta}{4} = \\ &= \frac{-\Delta}{4} \cdot \left[\frac{(2x + p)^2}{-\Delta} + 1 \right] = \\ &= \frac{-\Delta}{4} \cdot \left[1 + \left(\frac{2x + p}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 \right] & (-\Delta > 0) \end{aligned}$$

Quindi si può svolgere l'integrale facendo riferimento all'uguaglianza precedente e all'integrazione notevole dell'arctan:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{1}{-\frac{\Delta}{4} \cdot \left[1 + \left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 \right]} dx = & (D \left[\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} \right] = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}) \\ &= \frac{\cancel{4}}{-\Delta} \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{\cancel{2}} \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2} \cdot D \left[\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} \right] dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \cdot \left(\int \frac{1}{1 + y^2} dy \right)_{y=\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \cdot \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Caso 3: $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ $a, b \in \mathbb{R}, \quad p, q \in \mathbb{R} : \Delta = p^2 - 4q < 0, n \in \mathbb{N}$

⚠️ Caso Particolare

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \\ &= \int \frac{\cancel{1+x^2}}{(1+x^2)\cancel{1}} dx + \int \frac{-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} dx = \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \int x \cdot D \left[\frac{1}{1+x^2} \right] dx = \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \left[\frac{x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

🔗 Metodo risolutivo

Se il numeratore è derivata del denominatore è sufficiente utilizzare l'integrazione fondamentale del \ln .

Se il numeratore non è derivata del denominatore, bisogna fare in modo che lo diventi.

1. Si moltiplica il numeratore per 2 se a è dispari. Ricordarsi di aggiungere $\frac{1}{2}$ fuori dalla frazione per compensare il fattore appena aggiunto.
2. Fai sì di avere tra parentesi la derivata del denominatore, raccogliendo sulla base di a . Ignora il fattore b , metti p al suo posto e compensa fuori dalle parentesi il valore aggiunto, annullandolo. Formalmente: $\frac{a}{2}(2x + p) - \frac{a}{2}p + b$.
3. Si divide la frazione in due e si procede in i vari metodi.

$$\int \frac{5x + 8}{(x^2 + 9x + 1)^2} dx = \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{10x + 16}{(x^2 + 9x + 1)^2} dx = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{5(2x + 9) - 45 + 16}{(x^2 + 9x + 1)^2} dx = \quad (3)$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \int \frac{2x + 9}{(x^2 + 9x + 1)^2} dx - 29 \int \frac{1}{(x^2 + 9x + 1)^2} dx =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{(x^2 + 9 + 1)^{-1}}{-1} - \dots$$

Integrali di Equazioni Razionali Fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

$$\text{grado } [N(x)] \geq \text{grado } [D(x)]$$

Metodo risolutivo

È sufficiente effettuare la divisione tra polinomi finché non si ottiene al numeratore un polinomio di grado inferiore al denominatore.

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

Si può quindi procedere con gli altri metodi risolutivi

$$\text{grado } [N(x)] < \text{grado } [D(x)]$$

Scomposizione di Polinomi

Ogni polinomio di grado n ha n radici in \mathbb{C} . Si consideri $P(x)$ polinomio:

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ una radice reale con molteplicità n di $P(x)$. Allora $P(x)$ può essere diviso per

$$(x - \alpha)^n$$

2. Sia $\alpha = a \pm ib$ una radice complessa con molteplicità n di $P(x)$. Allora $P(x)$ si può dividere per

$$\{[x - (a + ib)] \cdot [x - (a - ib)]\}^n = [(x - a)^2 + b^2]^n$$

Si tratta della potenza di un polinomio di secondo grado con $\Delta < 0$ ed equazione del tipo:

$$(x^2 + px + q)^n$$

Quindi, ogni polinomio si può fattorizzare nel prodotto di potenze di polinomi di 1° grado (punto 1) e potenze di polinomi di 2° grado con $\Delta < 0$ (punto 2).

Fattorizzazione di Frazione

Si può dimostrare che una frazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ è la somma dei fratti semplici del tipo:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^n}, \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}$$

Ad esempio:

$$\frac{\dots}{(x+1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x^2+x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Hx+J}{(x^2+x+1)^3}$$

Metodo risolutivo

Per risolvere gli integrali di razionali fratti con numeratore inferiore a denominatore è necessario:

1. Scomporre in fratti semplici la frazione. Trovare A, B, \dots tramite sistema.
2. Utilizzare la proprietà della linearità degli integrali per separare ogni frazione.
3. Utilizzare gli altri metodi d'integrazione.