#university #studying #subject-1201

Guida su Teoria e Esercizi

Elementi di Analisi Matematica 1

Prerequisiti

Funzioni goniometriche

Angolo	$\sin$	$\cos$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Numeri complessi

- $i \to$ unità immaginaria
- Rappresentazione:
  - Cartesiana: $z = a + ib$
    - Parte reale: $a = \rho \cos \theta$
    - Parte immaginaria: $b = \rho \sin \theta$
  - Polare o Trigonometrica: $z = [\rho \cos \theta + i\rho \sin \theta =]\ \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$
    - Modulo: $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
    - Argomento:

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}), & \text{se } a > 0, \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi, & \text{se } a < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \text{ e } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \text{ e } b < 0. \end{cases}$$

  - Esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$
- Somma:
  - $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Prodotto:
  - $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$
  - $\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$
- Potenza: $z = \rho e^{i\theta} \qquad z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta))$
- Radice di w: $z^n = w \to z = \sqrt[n]{w} \qquad z = \rho e^{i\theta} \qquad w = re^{i\phi}$
  - $|z| = \rho = \sqrt[n]{w}$
  - $\arg z_k = \theta_k = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ con $k = 0, 1, \dots, n - 1$
- Coniugato di z:
  - $z = a + ib \qquad \overline{z} = a - ib$
  - $z = \rho e^{i\theta} \qquad \overline{z} = \rho e^{-i\theta}$
- Potenza unità immaginaria i:
  - $i^{4n} = 1$
  - $i^{4n+1} = i$

- $i^{4n+2} = -1$
- $i^{4n+3} = -i$
  - $\forall n \in \mathbb{N}$

- Risoluzione Equazioni:
  - Si può usare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, intendendo la radice quadrata come radice complessa.
  - Usando la definizione di potenza o radice (nel caso di $z^\alpha = q$ con $z, q \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{N}$)
  - Scomponendo z in $a + ib$ e ponendo un sistema del tipo:
  - (la i scompare, sono calcoli algebrici nel campo reale)

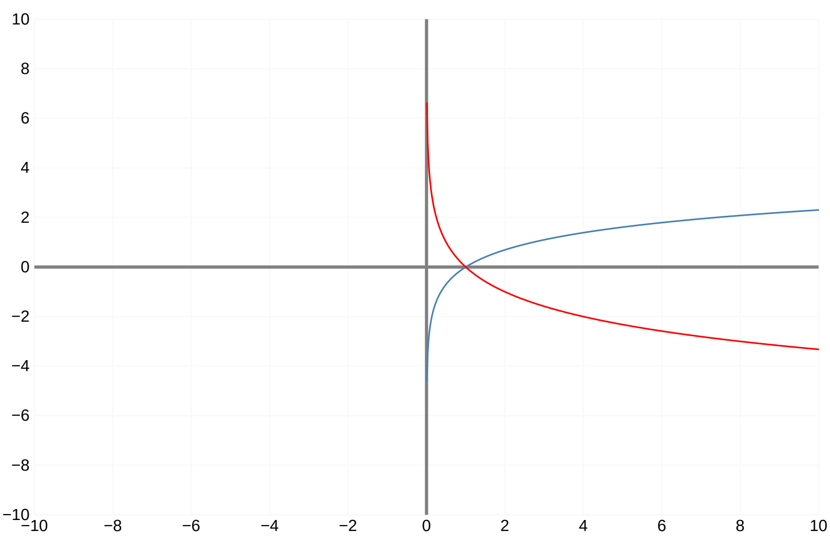
$$\begin{cases} \text{parte reale del primo membro} = \text{parte reale del secondo membro} \\ \text{parte immaginaria del primo membro} = \text{parte immaginaria del secondo membro} \end{cases}$$

Insiemi

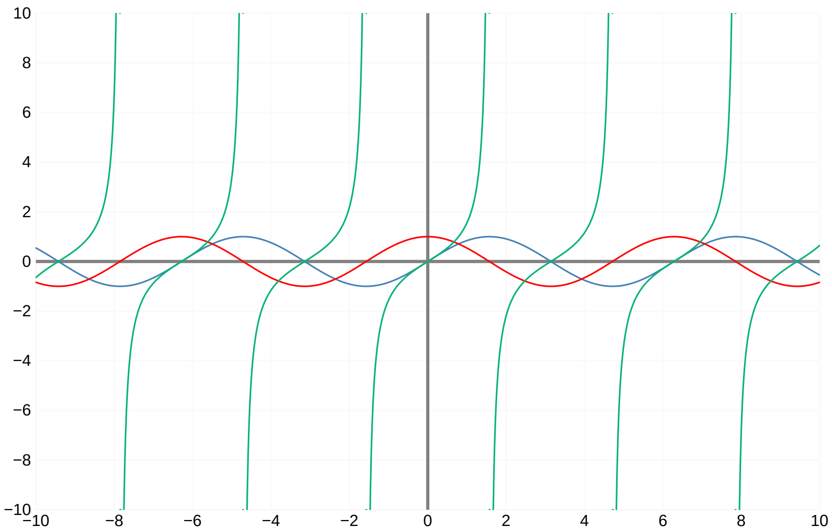
- Definizioni Teoriche
  - **Maggiorante**: dato $X \subseteq \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante** dell'insieme X se $m \geq x \, \forall x \in X$
  - **Estremo Superiore**: dato $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente, $y \in \mathbb{R}$ è un **estremo superiore** di X se y è un maggiorante di X e y è il più piccolo maggiorante di X. Di un insieme non limitato superiormente, l'estremo superiore è $+\infty$. Di un insieme vuoto è $-\infty$.
  - **Massimo** (di un insieme): dato $X \subseteq \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ è il **massimo** di X se y è l'estremo superiore di X e $y \in X$
  - **Massimo Assoluto** (di una funzione): data una funzione f. x_0 è un punto di massimo assoluto di f (e $f(x_0)$ è il massimo assoluto) se per ogni $x \in Dom(f)$ risulta che $f(x) \leq f(x_0)$.
  - **Massimo Relativo** (di una funzione): data una funzione f, x_0 è un punto di massimo relativo di f (e $f(x_0)$ è il massimo relativo) se esiste almeno un intorno $B(x_0, \delta) \subset Dom(f)$ (di raggio δ e centro in x_0) tale che per ogni $x \in B(x_0, \delta)$ risulta che $f(x) \leq f(x_0)$.
  - **Intervallo chiuso a destra**: se l'estremo destro è incluso nell'intervallo
  - **Intervallo aperto a destra**: se l'estremo destro è escluso dall'intervallo
  - **Intervallo illimitato superiormente**: se l'estremo superiore è $+\infty$
  - **Intervallo limitato superiormente**: se l'estremo superiore è $c \in \mathbb{R}$

Funzioni

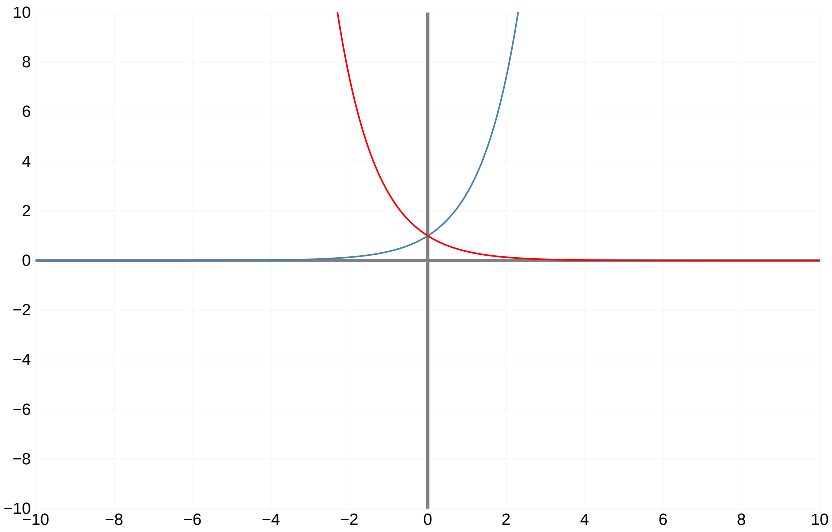
- Logaritmo con base > 1 (blu) e base < 1 (rosso)



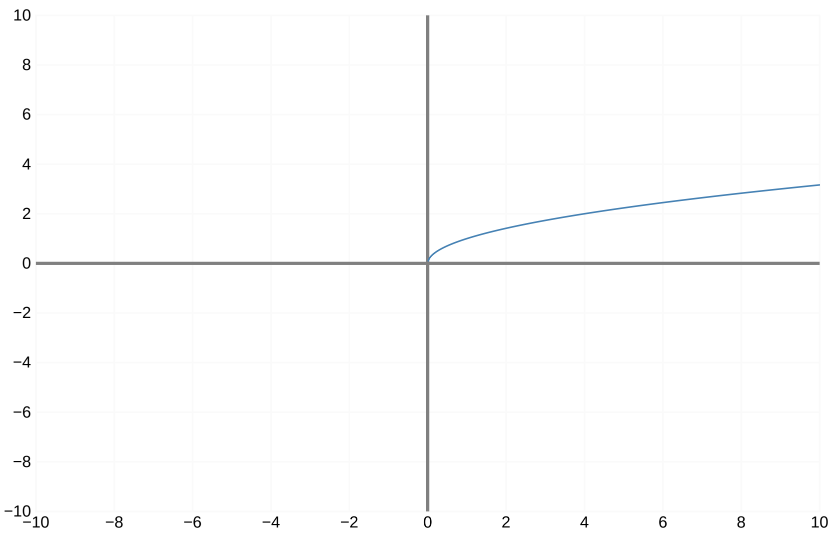
- Seno (blu), coseno (rosso) e tangente (verde)



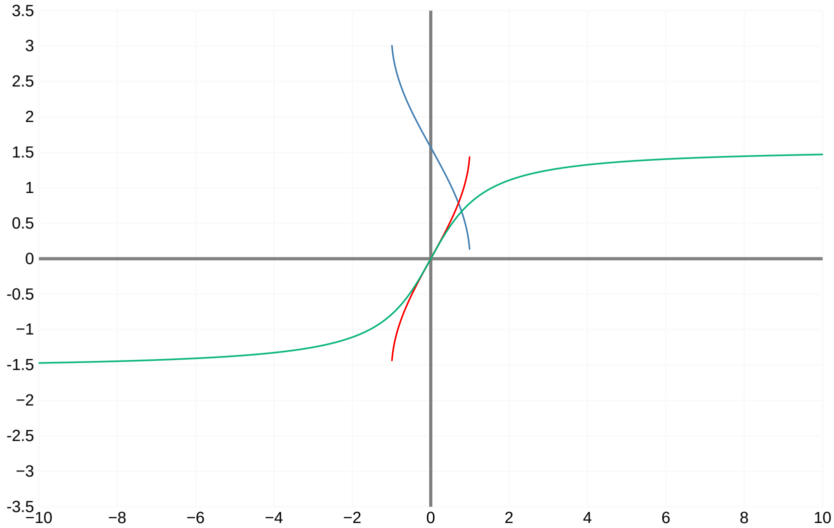
- Potenza con base > 1 (blu) e base < 1 (rosso)



- Radice quadrata



- Arcocoseno (blu), Arcoseno (rosso), Arcotangente (verde)



Limiti

- Definizione
  - $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 : \forall x \in X, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
- Teorema di unicità del limite
- Teorema del confronto (sono tre, il terzo è detto "Teorema dei Carabinieri")
  - se $f(x) \leq g(x)$ allora:
    - 1. se $f(x) \to l$ e $g(x) \to m$ allora $l \leq m$
    - 2. se $f(x) \to +\infty$ allora $g(x) \to +\infty$
  - se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ allora:
    - 3. se $f(x) \to l$ e $h(x) \to l$ allora $g(x) \to l$
- Teorema di Weierstrass
  - Sia f una funzione continua con domino $K \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e limitato, allora f ha massimo e minimo.
- Teoria degli Infinitesimi (o "o piccolo", O "o grande")
- Limiti Notevoli
  - $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
  - $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$
  - $\lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
  - $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
  - $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- Calcolo Limiti
  - Algebra dei limiti (regole):
    - Il limite della somma è uguale alla somma dei limite
    - Il limite del prodotto di una funzione per una costante è uguale alla costante per il limite della funzione
    - Il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti
    - Il limite del rapporto è uguale al rapporto dei limiti
    - Si può passare il limite alla funzione composta
  - Risoluzione per sostituzione
    - Può avvenire se la funzione in questione è continua (e x tende a un valore finito). Si utilizzano le regole dell'algebra dei limiti.
  - Se la funzione non è continua in un punto si calcolano limite destro e sinistro. Se non coincidono il limite non esiste.

- Sviluppi di Taylor

Derivate

- Definizione (limite del rapporto incrementale)
  - $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- Derivate Fondamentali
  - Costante: $f(x) = k \in \mathbb{R} \to f'(x) = 0$
  - Variabile: $f(x) = x \to f'(x) = 1$
  - Potenza: $f(x) = x^s, s \in \mathbb{R} \to f'(x) = sx^{s-1}$
  - Esponenziale: $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R} \to f'(x) = a^x \ln a$
  - Logaritmo: $f(x) = \log_a(x) \to f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
  - Valore Assoluto: $f(x) = |x| \to f'(x) = \frac{|x|}{x}$
  - Seno: $f(x) = \sin(x) \to f'(x) = \cos(x)$
  - Coseno: $f(x) = \cos(x) \to f'(x) = -\sin(x)$
  - Tangente: $f(x) = \tan(x) \to f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- Condizione di derivabilità
  - Una funzione è derivabile quando il limite del rapporto incrementale esiste ed è finito.
  - Se non è derivabile ci si ritrova (nella maggior parte dei casi) in:
    - un punto angoloso (ad esempio $|x|$)
    - una cuspide (ad esempio $\sqrt{|x|}$)
    - un punto di flesso a tangente verticale (ad esempio $\sqrt[3]{x}$)
    - Individuare i punti di non derivabilità:
      1. Se un punto non appartiene al dominio della derivata prima allora non è derivabile.
      2. Vanno verificati i "punti sospetti". I punti sospetti sono quei punti in cui la funzione potrebbe non essere derivabile. Ad esempio, se una funzione f contiene $|x|$, potrebbe non essere derivabile in $x = 0$ (anche se appartiene al dominio!). Si calcola il limite della derivata prima nel punto. Se quest'ultimo esiste ed è finito, allora la funzione è derivabile in quel punto. Non vale il contrario. Devono valore le ipotesi del teorema di Darboux (in EAM1 dovrebbero essere sempre verificate, quindi non viene enunciato)
         - I punti sospetti sono (in $x = 0$) nelle funzioni: $|x|$, $\sqrt{x}$
      3. Se non sono verificate le ipotesi del teorema di Darboux, si è obbligati a calcolare il limite del rapporto incrementale. La funzione è derivabile in quel punto se e solo se esiste il limite ed è finito.
  - La somma/differenza di due funzioni derivabili è derivabile.
  - Il prodotto/quoziente di due funzioni derivabile è derivabile.
  - La composizione di due funzioni derivabili è derivabile.
- Calcolo Derivate
  - La derivata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione
  - La derivata della somma/differenza di funzioni è uguale alla somma/differenza delle singole derivate.
  - La derivata del prodotto di due funzioni è uguale alla somma del prodotto tra la prima funzione derivata per la seconda non derivata, e la prima funzione non derivata per la seconda derivata
    - $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
  - La derivata del quoziente di due funzioni
    - $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
  - La derivata della funzione composta

        - $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
- Teorema di Fermat
    - Se un punto x_0 è estremo relativo allora $f'(x_0) = 0$
- Teorema di Rolle
    - Se in un intervallo $[a, b]$ la funzione f è continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$ allora $\exists\, c$ tale che $f'(c) = 0$
- Teorema di Lagrange
    - Se in un intervallo $[a, b]$ la funzione f è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ allora $\exists\, c$ tale che $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$
- Teorema di Weierstrass
    - Se in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato la funzione f è continua allora f ammette un massimo e un minimo (assoluti)
- Teorema di De L'Hôpital
    - Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ porta a una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Studio di funzione

- Dominio
    - Frazioni: denominatore $\neq 0$
    - Radici a indice pari: argomento ≥ 0
    - Logaritmi: base e argomento > 0, base $\neq 1$
    - arccos, arcsin: argomento in $[-1, +1]$
- Simmetria (facoltativo):
    - La funzione è "dispari" (simmetria rispetto all'origine) se $f(-x) = -f(x)$
    - La funzione è "pari" (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) se $f(-x) = f(x)$
    - *Individuare una simmetria porta un grosso vantaggio: consente di studiare la funzione per $x > 0$ e di considerarla senza valori assoluti, se presenti.*
- Limiti nei punti di frontiera del dominio per il calcolo degli asintoti:
    - Verticale:
        - si verifica quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
        - Equazione: $x = x_0$
        - Possono essere 0, qualsiasi numero o infiniti
    - Orizzontale:
        - si verifica quando $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$
        - Equazione: $y = k$
        - Possono essere 0, 1 o 2.
    - Obliquo:
        - esiste soltanto se non esiste un asintoto orizzontale (se lo cerco a $+\infty$ non deve esistere l'asintoto orizzontale a $+\infty$)
        - si verifica quando:
            - $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$
            - $lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$
        - Equazione: $y = mx + q$
        - Possono essere 0, 1 o 2
- Monotonia
    - si calcola $f'(x)$ e si studia il segno.
    - Dove $f'(x) > 0$ la funzione è crescente (viceversa è decrescente).

- Convessità
    - si calcola $f''(x)$ e si studia il segno
    - Dove $f''(x) > 0$ la funzione è convessa (viceversa è concava).
        - (convessa ha il grafico simile a una **U**)
- Calcolo esplicito di qualche valore:
    - serve ad esempio per sapere il segno della funzione in un punto.

Successioni Ricorsive

$$\begin{cases} a_n = \lambda \\ \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

- Cosa sono le funzioni f e ϕ
    - La funzione f rappresenta la legge della successione ($a_{n+1} = f(a_n)$)
    - La funzione $\phi(t) = f(t) - t$. Non è altro che $a_{n+1} - a_n$.
- Studio di ϕ
    - La funzione ϕ serve per calcolare i punti fissi e la monotonia della successione.
    - **Teorema:** Se la successione non è divergente, converge a un punto fisso della successione.
    - I punti fissi si calcolano ponendo $\phi(t) = 0$ (sono gli zeri di ϕ).
    - Si studia il segno di ϕ per poterne studiare la monotonia.
    - La monotonia suggerisce il possibile limite della successione
- Studio degli intervalli della successione
    - Si studia f' (si calcolano massimi e minimi).
    - Si studia l'intervallo del codominio rispetto a quello del dominio dove si trova λ.
        - Si calcolano massimo e minimo del codominio nell'intervallo di ϕ in cui si trova λ.
        - Se ad esempio otteniamo: $f(]0,1[) =]1,+\infty[$ con $\lambda \in]0,1[$, siamo costretti a calcolare anche massimi e minimi in $]1,+\infty[$. Se $f(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$, allora per ricorsività tutta la successione è contenuta in $]1,+\infty[$.
        - Si guarda quindi a cosa tende la successione nell'intervallo $]1,+\infty[$ (quindi si guarda a cosa tende ϕ)
    - Se è richiesto lo studio della successione al variare di λ, si pone $\lambda \in$ a ogni intervallo di ϕ.

Come capire se c'è un errore

Poniamo caso che $a_0 = 1$.
In seguito allo studio di f si scopre che $f(]0,2[) =]0,3[$

C'è un errore di calcolo. Quando accade che il codominio di un intervallo non è un sott'insieme di nessun intervallo, allora il metodo sopra citato non funziona. Tutti le successioni di EAM1 sono però risolvibili con questo metodo, quindi dev'esserci un errore di calcolo.

Non mettere λ in esercizi che non lo prevedono

Anche per esercitazione, non ha senso mettere λ in esercizi che hanno un numero finito come a_1. Alcuni esercizi sono risolvibili con il metodo sopra citato soltanto per alcuni valori di a_1.