02/03/2023

E2. Determinare il minimo e il massimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy + x$$

nel triangolo di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(0,-1)$.

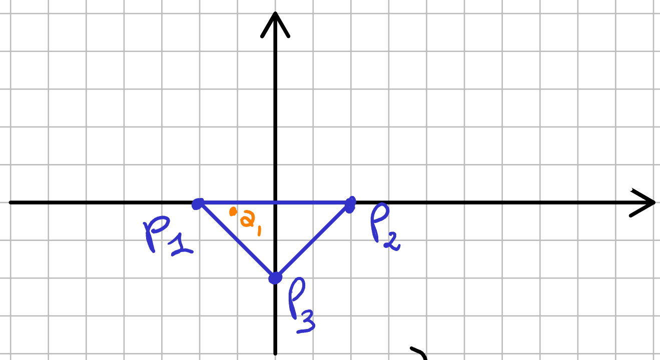
Per il teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in quanto f è chiuso e limitato.

Calcolo A_1

$f_x(x,y) = 2x - y + 1$ $\qquad$ $f_y(x,y) = +4y - x$

Cerco i punti in cui il gradiente si annulla

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4y - x = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - \frac{1}{4}x + 1 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x \end{cases} \to \begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases}$$



$a_1 = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right) \in T$

dove T è il triangolo $(1,0)$, $(-1,0)$ e $(0,1)$

$$A_1 = \left\{\left(-\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right)\right\}$$

A_2

$A_2 = \emptyset$ in quanto $f(x,y)$ è continua

A_3

P_1P_2 Studio $\varphi_1(x) = f|_{P_1P_2}(x,y) = f(x,0) = x^2 + x$

$\forall x \in [-1,1]$

$\varphi_1'(x) = 2x + 1$ $\varphi_1' = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \in]-1, 1[$

I punti candidati sono: $(-1,0), (1,0)$ e $(-\frac{1}{2}, 0)$

P_1P_3

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Studio la retta passante per i punti P_1 e P_3

$$\frac{x-(-1)}{0-(-1)} = \frac{y-0}{-1-0} \longrightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} \rightarrow \underset{\shortparallel\; t}{y} = \underset{\shortparallel\; t}{-x} - 1$$

E2.Determinare il minimo e il massimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy + x$$

nel triangolo di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(0,-1)$.

$$\begin{cases} y = t \\ x = -1 - t \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = F_{|P_1P_3}(x,y) = F(-1-t, t) = \quad \forall t \in [-1, 0]$$

$$= (-1-t)^2 + 2t^2 - t(-1-t) - 1 - t =$$

$$= t^2 \cancel{+1} + 2t + 2t^2 + t^2 \cancel{+t} \cancel{-1} \cancel{-t} =$$

$$= 4t^2 + 2t$$

$$\varphi_2'(t) = 8t + 2 = 0 \iff t = -\frac{1}{4}$$

$$\left(-1+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) \in P_1P_3 \subset T \text{ perché } -\frac{1}{4} \in]-1, 0[$$

Si aggiungono tra i candidati $(0,-1)$ e $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

P_2P_3

Studio la retta passante per i punti P_2 e P_3

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{-1-0} \rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-1} \rightarrow y = x - 1$$

$$\begin{cases} y = t \\ x = t+1 \end{cases}$$

$$\varphi_3(t) = f_{|P_2P_3}(x,y) = f(t+1, t) = \quad \forall t \in [-1, 0]$$

$$= (t+1)^2 + 2t^2 - (t+1)t + t + 1 =$$

$$= \cancel{t^2} + 1 - 2t - 2t^2 - \cancel{t^2} - \cancel{t} + \cancel{t} + 1 =$$

$$= -2t^2 - 2t + 2$$

$$\varphi_3'(t) = -4t - 2 = 0 \iff t = -\frac{1}{2} \in]-1, 0[$$

Si aggiunge $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ come candidato

E2.Determinare il minimo e il massimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy + x$$

nel triangolo di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(0,-1)$.

Elenco candidati

$$f(P_1) = f(-1,0) = 0$$

$$f(P_2) = f(1,0) = 2$$

$$f(P_3) = f(0,-1) = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$f\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16} + 2\frac{1}{16} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{11}{16} + \frac{3}{16} - \frac{4}{16} = \frac{5}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Punto di max: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Punto di min: $(-1, 0)$

:)

05/07/2023

T2. Siano f una funzione reale di classe C^2 nell'aperto A di $\mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in A$ un punto stazionario per f. Fra le seguenti affermazioni, individuare l'unica corretta.

a) se $H(x_0, y_0) < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo per f

b) se $H(x_0, y_0) = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f

~~c)~~ se $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ e $f_{xy}(x_0, y_0) \neq 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f

d) se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo per f

$H(x,y) < 0$ in quanto $\underbrace{f_{xx} \cdot f_{yy}}_{=0} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{>0} < 0$

18/09/2023

T1. Siano f una funzione reale definita nell'aperto A di $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un punto di A. Dire quando, per definizione, la funzione f è detta differenziabile nel punto (x_0, y_0). Dimostrare che, se f è differenziabile nel punto (x_0, y_0), allora esiste $f_x(x_0, y_0)$ ed è uguale a........ℓ............... (completare).

(PAG 25 Dispense)

13 / 06/2023

E2. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x,y) = 3x^2y - x - \log(xy^2)$$

nel punto $(1,1)$, lungo la direzione della retta di equazione $2x - y + 3 = 0$

$$f_x(x,y) = 6xy - 1 - \frac{1}{x\cancel{y^2}} \cdot \cancel{y^2} = 6xy - \frac{1}{x} - 1$$

$$f_y(x,y) = 3x^2 - x - \frac{1}{\cancel{x}y^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{x}\cancel{y} = 3x^2 - x - \frac{2}{y}$$

$$\nabla f(1,1) = (4,0)$$

Fisso 1

$y = 2x + 3$ è parallela al vettore $(1, 2)$

$\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} \neq 1$

Il versore è quindi $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$$D_{v_1} f(1,1) = (4,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

:)

21/04/2023

T2. Siano f una funzione reale dotata di derivate parziali prime e seconde nell'aperto X di $\mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) un punto di X.

i) Cosa vuol dire che (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo? $\to \exists \delta > 0 : I_\delta($ ------

ii) Definire l'hessiano di f nel punto (x_0, y_0). $H = | f_{xx}$ ...

iii) Dire sotto quali condizioni il punto (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo per f.

Cond. suff.: $H(x_0, y_0) > 0 \wedge f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

22/06/2021

[**T3**] Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$. Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) f dotata di derivata lungo una qualsiasi direzione in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ dotata di derivate parziali in (x_0, y_0); VERO

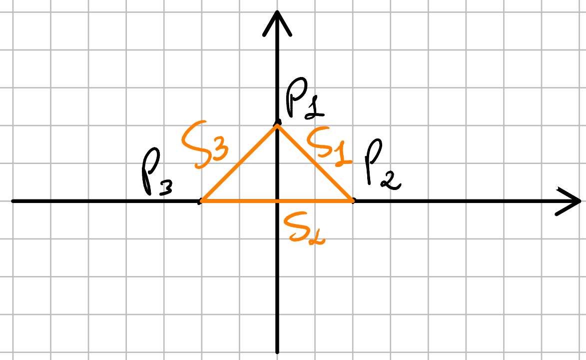
b) f dotata di derivate parziali in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ dotata di derivata lungo una qualsiasi direzione in (x_0, y_0); NO $\Rightarrow$ SOLO SE CONTINUE

[**E2**] Determinare gli eventuali estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = 3x^2y - y^2 + x^3$$

nel triangolo di vertici $\underset{P_1}{(0,1)}, \underset{P_2}{(1,0)}, \underset{P_3}{(-1,0)}$.

Sia T il triangolo delimitato da S_1, S_2 e S_3



$\overset{\circ}{T} = T$
$\partial T = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ $\Rightarrow$ T è chiuso e limitato

$\Downarrow$ weierstrass

siccome f è continua, ammette max e min assoluti

Assoluti:

Si studia A_1

$$f_x(x,y) = 6xy + 3x^2 \qquad f_y(x,y) = 3x^2 - 2y$$

Si cercano i punti stazionari (dove $\nabla F(x,y) = 0$)

$$\begin{cases} 6xy+3x^2=0 \\ 3x^2-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}\cancel{6}_3 x^3+3x^2=0 \\ y=\frac{3}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2(3x+1)=0 \\ // \end{cases}$$

① $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $(0,0)\in \mathring{T}$

② $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{1}{6}$ $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)\in\mathring{T}$

I punti $(0,0)$ e $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$ sono stazionari.

(candidati come estremi)

A_2

$A_2=\emptyset$ in quanto $\exists f_x(x,y)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$
$\exists f_y(x,y)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

A_3

Si studia ∂T

S_1

$P_1=(0,1)$ $P_2=(1,0)$

$S_1=P_1P_2$

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{0-1} \Rightarrow \overset{t}{\underset{}{x}}=\overset{t}{\underset{}{1-y}} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases}$$

$$\varphi_1(t)=f_{|P_1P_2}(x,y)=f(t,1-t)\quad \forall t\in[0,1]$$

$$\varphi_1(t)=3t^2(1-t)-(1-t)^2+t^3$$

$= 3t^2 - 3t^3 - 1 - t^2 + 2t + t^3 =$

$= -2t^3 + 2t^2 + 2t - 1$

$\varphi_1'(t) = -6t^2 + 4t + 2$

$\varphi_1'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta = 16 + 48 = 64$

$t = \dfrac{-4 \pm 8}{-12} \begin{cases} 1 \notin]0,1[\\ -\dfrac{1}{3} \notin]0,1[\end{cases}$

Altri candidati: $\overset{P_1}{(0,1)}, \overset{P_2}{(1,0)}$

S_2

$P_2 = (1,0) \quad P_3 = (-1,0)$

$S_2 = P_2P_3 \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$

$\varphi_2(t) = f_{|S_2}(x,y) = f(t,0) \quad \forall t \in [-1,1]$

$\varphi_2(t) = t^3$

$\varphi_2'(t) = 3t^2 = 0 \iff t = 0 \in]-1,1[$

Altri candidati. $(0,0), \overset{P_3}{(-1,0)}$

S_3

$S_3 = P_1P_3 \qquad P_1 = (0,1) \quad P_3 = (-1,0)$

$\dfrac{x-0}{-1-0} = \dfrac{y-1}{0-1} \rightarrow -x = 1 - y \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \end{cases}$

$$\varphi_3(t) = f_{|S_3}(x,y) = f(t, t+1) \quad \forall t \in [-1, 0]$$

$$\varphi_3(t) = 3t^2(t+1) - (t+1)^2 + t^3 =$$
$$= 3t^3 + 3t^2 - t^2 - 1 - 2t + t^3 =$$
$$= 4t^3 + 2t^2 - 2t - 1$$

$$\varphi_3'(t) = 12t^2 + 4t - 2$$

$$\Delta = 16 + 96 = 112 = 4\sqrt{7}$$

$$t = \frac{-\cancel{4} \pm \cancel{4}\sqrt{7}}{\cancel{24}\,6} \quad \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{7}}{6} \in \,]-1, 0[\\[2ex] \dfrac{-1+\sqrt{7}}{6} \in \,]-1, 0[\end{cases}$$

Altri candidati: $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{6}, \frac{5-\sqrt{7}}{6}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}, \frac{5+\sqrt{7}}{6}\right)$

Candidati

$f(0,1) = \alpha$ $\qquad\qquad$ $f(0,0) = \delta$

$f(1,0) = \beta$

$f(-1,0) = \gamma$

$\max = \max\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$\min = \min \text{—}$

26/01/2021

3. Data la funzione definita dalla legge

$$f(x,y) = 8y - 2x^2 - 2y^2$$

- determinare gli estremi relativi in $\mathbb{R}^2$
- calcolarne la derivata direzionale nel punto (1,1) lungo la direzione del vettore $(1,-2)$.

Si trovano i punti stazionari

$f_x(x,y) = -4x$ $\quad$ $f_y(x,y) = 8-4y$

$$\begin{cases} -4x=0 \\ 8-4y=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

Il punto $(0,2)$ è un punto stazionario.

Vediamo se è un estremo relativo o un punto di sella

$f_{xx}(x,y) = -4$ $\quad$ $f_{xy}(x,y) = 0$

$f_{yy}(x,y) = -4$

$$H(0,2) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} H(0,2) > 0 \\ f_{xx}(0,2) < 0 \end{array}\right| \Longrightarrow (0,2) \text{ è un punto di massimo relativo}$$

calcolarne la derivata direzionale nel punto (1,1) lungo la direzione del vettore $(1,-2)$.

$$\nabla f(1,1) = (-4,4)$$

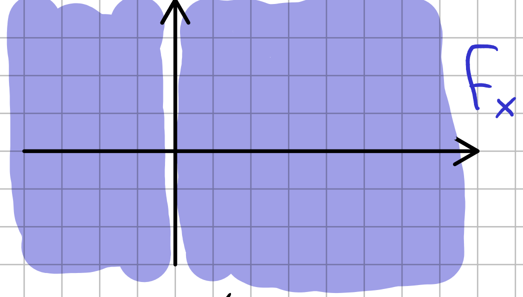
$\sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5} \neq 1 \Rightarrow$ Il versore è $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

La derivata direzionale è $-\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{5}} = -\frac{12}{\sqrt{5}}$

Studio differenziabilità

1) Studiare l'esistenza delle derivate parziali prime e la differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y)=|x|y^2(2x+3y)$$



$\exists\, F_x(x,y) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ con $x\neq 0$

$\exists\, F_y(x,y) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$F_x(x,y)=\frac{|x|}{x}y^2(2x+3y)+|x|y^2\cdot 2=$$

$$=|x|y^2\left(\frac{2x+3y}{x}+2\right)$$

$$F_y(x,y)=|x|\cdot 2y(2x+3y)+|x|\cdot y^2\cdot 3=$$

$$=|x|\cdot y\,(4x+6y+3y)$$

$\exists\, f_x(0,a)$ con $a\in\mathbb{R}$?

$$\exists\, f_x(0,a) \iff \exists\left[D\, f(x,a)\right]_{x=0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,a)-f(0,a)}{x}=\frac{|x|\cdot a^2(2x+3a)-0}{x}=$$

$$=\begin{cases}\lim \dfrac{\cancel{x}\cdot a^2(2x+3a)}{\cancel{x}} & x>0\\[2ex] \lim \dfrac{\cancel{x}\cdot a^2(2x+3a)}{\cancel{x}} & x<0\end{cases}=$$

$$= \begin{cases} 3\,\alpha^3 & x \geq 0 \\ -3\,\alpha^3 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sim = \lim_{x \to 0^-} \sim \iff 3\alpha^3 = -3\alpha^3 \iff \alpha = 0$$

$\exists f_x(0, \alpha)$ con $\alpha = 0$

$\nexists f_x(0, \alpha)$ con $\alpha \neq 0$

Le derivate parziali esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ esclusa la retta $(0, \alpha)$ con $\alpha \neq 0$.

f è diff $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$ in quanto f_x e f_y sono continue (Teo diff Totale)

Studiare differenziabilità in (0, 0

Limiti

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

- $\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$
- $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$
- $|xy| \leq \frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)$

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| = g(x)$$

$$\lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) \leq \lim_{x\to 0} \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} + 1 \right| = \lim_{x\to 0} \left| x \frac{x^2}{x^2+y^2} + 1 \right| \leq$$

$$\leq \lim_{x\to 0} |x \cdot 1 + 1| = 1$$

Proviamo a vedere se non esiste

$$E_m = \{(x,y) : x \neq 0 \land y = mx\}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + m^2 \cdot x^2}{x^2 + m^2 \cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(x+m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = 0$$

$$E_0 = \{(x,y) : x = 0,\ y \neq 0\}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1 \to \text{il limite non esiste}$$

18/09/2023

Studio derivate parziali differenziabilità

$$f(x,y) = |x|(y^2+x) = |x|y^2 + |x|x$$

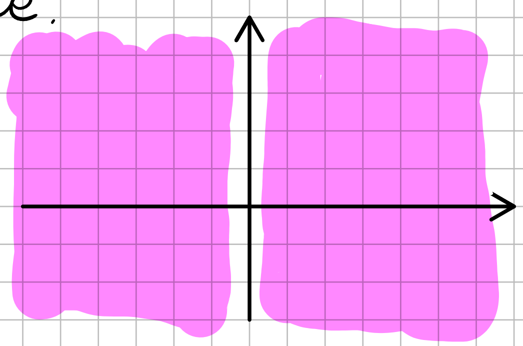
$\exists f_x \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$

$$f_x(x,y) = \frac{|x|}{x}y^2 + \frac{|x|}{\cancel{x}}\cancel{x} + |x| = 2|x| + \frac{|x|}{x} \cdot y^2$$

$\exists f_y \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_y(x,y) = 2|x|y$$

F è dotata di entrambe le derivate parziali $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$. Sono anche continue quindi in quei punti f è differenziabile.



$\exists f_x(0,\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$?

$$\Updownarrow$$

$$\exists \left[D f(x,\lambda) \right]_{x=0}$$

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\varphi = \lim_{h \to 0} \frac{|h| \cdot \lambda^2 + |h| \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} |h| \cdot \frac{\lambda^2 + h}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \cancel{h} \frac{\lambda^2 + h}{\cancel{h}} = \lambda^2$$

$$\lim_{h\to 0^-} -h\,\frac{2^2+h}{h} = -2^2$$

$$\lim_{h\to 0^-} \varphi = \lim_{h\to 0^+} \varphi \iff 2=0$$

Teo. diff. totale

Si! f_y è continua

$\exists f_x(0,0)=0$

$\nexists f_x(0,2)$ con $2\neq 0$

f è differenziabile in $(0,0)$?

Se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=0 \Rightarrow f$ è differenziabile in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x| + \frac{|x|}{x}\cdot y^2 =$$

$$= \lim \begin{cases} 2x+y^2 & x\geq 0 \\ -2x-y^2 & x<0 \end{cases} = 0 \Rightarrow f \text{ è differenziabile in } (0,0)$$

Se fosse venuto un numero $\neq 0$ bisognava ricorrere al seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-[\underbrace{l}_{f_x(x_0,y_0)=0}\,h+\underbrace{m}_{f_y(x_0,y_0)=0}\,k]}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\lim_{\dots} \frac{|h|(k^2+h)-0-[0+0]}{\sqrt{h^2+k^2}} = \varphi_1$$

$0 \leq |\varphi_1| \leq \varphi_2$

$$0 \leq \frac{|h|\,|(k^2+h)|}{\sqrt[2]{h^2+k^2}} \leq \frac{\cancel{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot |k^2+h|}{\cancel{\sqrt{h^2+k^2}}} \to 0$$

$\Downarrow$

f è differenziabile