#university #studying #subject-1101

# Definizioni

Algebra Lineare e Geometria

## Algebra Lineare

$f : R \to R$ si legge "$f$ definita in $R$ a valori in $R$".

## Strutture Algebriche

- **Insieme**: collezione di un elementi che hanno tutti una stessa caratteristica
- **Funzione**: dati due insiemi $A$ e $B$, si dice $f$ (funzione) una legge che associa ad ogni elemento di $A$ uno di $B$.
- **Gruppo**: insieme su cui è definita un'operazione * (G, *) e valgono le proprietà:
  - **Associativa**, **Esistenza Elemento Neutro**, **Invertibilità**
  - Si dice **Abeliano** se vale anche la **Commutatività**
- **Anello**: insieme su cui sono definite due operazioni + e * (G, +, *) e velgono le proprietà:
  - (G, +) è gruppo,
  - Con * vale associatività
  - Con * distributività
  - Si dice **Commutativo** se vale la **Commutatività** su *.
  - Si dice **Unitario** se esiste l'**elemento neutro** su *.
  - Si dice **Campo** se è **commutativo** e vale l'**Invertibilità** su *.

### Matrici

- **Matrice**: tabella di n-righe e m-colonne:
  - **Diagonale**: se sopra e sotto la diagonale principale ci sono tutti zero.
  - **Triangolare superiore o inferiore**: se sopra o sotto la diagonale principale ci sono tutti zero.
  - **Simmetrica**: se la matrice è uguale alla sua trasposta.
  - **Antisimmetrica**: se la matrica è uguale all'opposta della sua trasposta.
- **Determinante**: numero associato ad ogni matrice quadrata.
- **Rango**: ci sono due definizioni:
  - ordine massimo di un minore non nullo estraibile dalla matrice
  - numero di elementi speciali
- **Teorema Matrici Invertibili** dice che:
  - a) una matrice A è invertibile $\iff \det A \neq 0$
  - b) se $\det A \neq 0$ allora la matrice inversa è: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_a = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{ij})^T$
  - c) se $A$ è invertibile allora $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
  - **Dimostrazione** (1*, L.7): si dimostra con il Teorema di Binet e i due Teoremi di Laplace.

### Spazi Vettoriali

- **Spazio Vettoriale**: si dice spazio vettoriale su un campo K (K-spazio vettoriale) un insieme su cui sono definite due operazioni + e * (G, + *) e valgono le proprietà:
  - (G, +) è gruppo

- Con * vale associatività.
- Con * esiste elemento neutro.
- Vale distributività della somma rispetto al prodotto esterno. $(a+b) \cdot \vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
- Vale distributività del prodotto esterno rispetto alla somma. $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

- **Sottospazio**: $W$ è sottospazio di $V$ se $W \subseteq V$ e $W$ è un $K$ spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e prodotto definite su $V$.
- **Intersezione tra sottospazi**: è sempre un sottospazio
- **Unione tra sottospazi**: è sottospazio solo se uno dei due è sottoinsieme dell'altro (ovvio)
- **Combinazione Lineare**: un vettore è combinazione lineare di $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ se esistono $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tali che $v = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n}$.
- **Insieme di Generatori**: dato un K-spazio vettoriale $V$, un insieme $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ è detto insieme di generatori (indicato con $G\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$) se preso un qualunque vettore $\vec{z} \in V$ esso si può scrivere come combinazione lineare (C.L.) dei vettori di $G$.
- **Base**: un insieme $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ è detto **Base** di $V$ se ogni elemento di $V$ è combinazione lineare (C.L.) di $v_1, v_2, \ldots, v_n$ in modo **unico**.
  - $B$ è base $\iff$ i vettori di $B$ sono L.I. e generatori.
- **Linearmente Indipendenti**: i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti se quando $a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n} = 0$ allora ne deve seguire che $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$
- **Lemma di Steinitz**: numero di vettori generatori $\geq$ numero di vettori linearmente indipendenti.
- **Teorema che caratterizza una base**: dato $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $B$ è un insieme $\iff$ i vettori sono L.I. e generatori.
- **Teorema sulle Basi**: tutte le basi di un K-spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.
  - **Dimostrazione** (2*, L10): Si usa il Lemma di Steinitz.

## Sistemi Lineari

- **Sistema Lineare**: sistema di equazioni a più incognite di massimo 1° grado (c'è il termine noto)
- **Teorema di Rouchè Capelli N°1**: $\rho(A) = \rho(A, B) \iff$ Sistema possibile (ammette almeno una soluzione).
- **Teorema di Rouchè Capelli N° 2**: quando il sistema è possibile ($\rho(A) = \rho(A, B) = \rho$) allora esistono $\infty^{n-\rho}$ soluzioni. $n - \rho$ indica il numero di incognite libere.
- **Teorema di Cramer**: $\det A \neq 0 \iff$ Sistema determinato (ammette una e una sola (∃!) soluzione).
  - L'unica soluzione si calcola con:
  -

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\det B_1}{\det A} \\ x_2 = \frac{\det B_2}{\det A} \\ \ldots \\ x_n = \frac{\det B_n}{\det A} \end{cases}$$

  - $B_1$ si calcola sostituendo la $1^a$ colonna di $A$ con $B$.
  - $B_2$ si calcola sostituendo la $2^a$ colonna di $A$ con $B$.
  - ...
  - $B_n$ si calcola sostituendo la $n^a$ colonna di $A$ con $B$.
  - **Dimostrazione** (3*, L13):
  - Nell'andata si dimostrano unicità, esistenza e formula.
  - L'unicità e l'esistenza si dimostrano con il **Teorema delle matrici invertibili**.
  - La formula si dimostra svolgendo l'equazione dell'esistenza.
  - Il ritorno si dimostra con il teorema di **Rouchè Capelli N°2**.
- **Sistema lineare omogeneo**: sistema lineare con $B$ nullo (non esistono termini noti).

## Applicazioni Lineari

- **Applicazione Lineare**: corrispondenza (funzione) tra due K-spazi vettoriali.
- **Immagine** ($\text{im} f$): insieme del codominio formato dai vettori immagine dei vettori del dominio.
  - L'immagine è sottospazio del codominio, si **dimostra** (4*. L13) provando che è chiusa rispetto alla somma e al prodotto esterno.
  - Studio
    - $\dim imf = \rho$
    - **Base**: vettori L.I. di V (gli stessi che formano il rango)
    - **Equazione Cartesiana**: metodo matrice Z (si mettono in riga i vettori base, nell'ultima riga le incognite, si calcola il determinante)
- **Nucleo** ($\ker f$): insieme del dominio formato dai vettori che hanno come immagine il vettore nullo.
  - Il nucleo è sottospazio del dominio, si **dimostra** (5*, L14) provando che è chiusa rispetto alla somma e al prodotto esterno esterno.
  - Studio
    - $\dim \ker f = \dim V - \dim imf$
    - **Base**: $A \cdot X = 0$
    - **Equazioni Cartesiane**: ricavate dal sistema precedente (o metodo matrice Z)
- **Iniettività**: una funzione si dice iniettiva se presi due qualsiasi vettori del dominio diversi allora ne deve seguire che le loro immagini siano diverse.
- **Suriettività**: una funzione si dice suriettiva se ogni vettore del codominio è raggiunto da almeno un vettore del dominio.
- **Teorema sul Nucleo e Iniettività**: afferma che $f$ è iniettiva $\iff \ker f = \{0\}$
  - **Dimostrazione** (6*, L14)
- **Applicazione Identica**: applicazione lineare cui legge corrisponde a $i(\vec{z}) = \vec{z}$
- **Applicazione Inversa**: Date due applicazioni lineari $f : V \to W$ e $g : W \to V$ se $g \circ f = i_v$ e $f \circ g = i_w$ allora $f$ è invertibile e $g$ è detta applicazione inversa di $f$ $(g = f^{-1})$.
  - $f$ e $g$ devono essere suriettive e iniettive.

## Endomorfismi

- **Endomorfismo**: applicazione lineare dove dominio $=$ codominio.
- **Isomorfismo**: un'applicazione lineare biettiva (iniettiva e suriettiva), quindi necessariamente endomorfismo.
- **Autovalore**: dato un endomorfismo $f : V \to V$, $\lambda$ si dice **autovalore** se esiste un vettore $v \in V$ con $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$. $\quad \lambda \text{ autovalore } \iff \exists v \in V, v \neq 0 \mid f(v) = \lambda v$
- **Autovettore**: dato un endomorfismo $f : V \to V$, $v \in V$, $v \neq 0$ si dice **autovettore** se esiste un $\lambda \in K$ tale che $f(v) = \lambda v$. $\quad v \in V, v \neq 0 \text{ autovettore } \iff \exists \lambda \in K \mid f(v) = \lambda v$
- **Autospazio**: dato un endomorfismo $f : V \to V$, si dice **autospazio** $V_\lambda$ il sottospazio di V definito nel modo seguente: $\quad V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \subseteq V$
- **Polinomio Caratteristico**: data una matrice $A$ il $P.C. = \det(A - T \cdot I)$.
- **Molteplicità Algebrica**: per molteplicità algebrica di $\lambda$ si intende il numero di volte in cui $\lambda$ è soluzione del polinomio caratteristico.
- **Molteplicità Geometrica**: per molteplicità geometrica di $\lambda$ si intende la dimensione dell'autospazio $V_\lambda$.
- **Endomorfismo Associato all'Autovalore**: indichiamo con $f_\lambda$ l'endomorfismo associato all'autovalore $\lambda$. $f_\lambda(v) = f(v) - \lambda v$
- **Teorema sulle Molteplicità**: dato un endomorfismo $f : V \to W$ e un autovalore $\lambda \in K$ allora $0 < g_\lambda \leq m_\lambda$.

- **Endomorfismo Semplice**: un endomorfismo si dice semplice se esiste una base formata interamente da autovettori.
- **Matrici simili**: due matrici $A$ e $B$ si dicono simili se $\exists\, P \in \mathbb{K}^{n,n} \,|\, P^{-1}AP = B$.
- **Teorema sulla diagonalizzazione**: una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è diagonalizzabile $\iff$ $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è semplice oppure se è simile a una matrice diagonale.
    - **Matrice Diagonalizzata**: matrice che ha sulla diagonale principale le molteplicità algebriche degli autovalori.
    - **Matrice Diagonalizzante**: matrice che ha in colonna una base degli autovettori.
- **Teorema Autospazio**: sia $V$ un K-spazio vettoriale e $f : V \to W$ un endormofismo. Allora ne segue che $V_\lambda = \ker f_\lambda$.
    - **Dimostrazione** (7*, L19): si usa la definizione dell'autospazio.

## Geometria

- **Punto Impoprio**: $P_\infty(x', y', 0)$, anche detto "Punto all'infinito $P_\infty$"
- **Individuazione Retta nel Piano**:
    - 1°: **Retta perpendicolare a un vettore e passante per un punto**: $ax + by + c = 0$
    - 2°: **Retta parallela a un vettore e passante per un punto**: $\frac{x-x_0}{l_v} = \frac{y-y_0}{m_v}$
    - 3°: **Retta passante per due punti**: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
- **Individuazione Retta nello Spazio**:
    - 1°: *non più valida*
    - 2°: $\frac{x-x_0}{l_v} = \frac{y-y_0}{m_v} = \frac{z-z_0}{n_v}$
    - 3°: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$
    - 4°: **Piano nello Spazio passante per tre punti**: $ax + by + cz + d = 0$
- **Retta nello spazio**: la retta nello spazio viene vista come **intersezione di piani**.
- **Rette Sghembe**: due rette si dicono sghembe se non esiste alcun piano che le contiene
- **Fascio di rette**: $\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \to \pi_1 + K\pi_2 = 0$ con $\lambda \neq 0$
- **Conica**: luogo geometrico dei punti del piano $Oxy$ che con le loro coordinate $(x, y)$ soddisfano l'equazione di 2° grado in $x$ e $y$: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$
    - **Matrice $B$**: una 3×3 simmetrica (si usa la formula sopra).
    - **Matrice $A$**: le prime due righe e colonne della matrice $B$.
    - **Classificazione**:
        - **Irriducibile** $(\det B \neq 0$, quindi $\rho(B) = 3)$:
            - **Ellisse** $(\det A > 0)$:
                - **Reale** $(\mathrm{Tr}A \cdot \det B < 0)$
                - **Immaginaria** $(\mathrm{Tr}A \cdot \det B > 0)$
            - **Parabola** $(\det A = 0)$
            - **Iperbole** $(\det A < 0)$:
                - **Equilatera** $(\mathrm{Tr}A = 0)$
        - **Riducibile** $(\det B = 0$, quindi $\rho(B) < 3)$:
            - **Rette spezzate distinte** $(\rho(B) = 2)$
            - **Rette spezzate coincidenti** $(\rho(B) = 1)$
- **Punti base**: 4 punti per cui passano infinite coniche.
- **Ellisse**: luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante la somma della distanza da due punti fissi detti fuochi ($F_1$ e $F_2$).
  - **Equazioni**:
  - $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$
  - $F_{1x} = -F_{2x} = \sqrt{a^2 + b^2}$

- $F_{1y} = F_{2y} = 0$
- $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$
- $\alpha$ e $\beta$ sono le soluzioni del P.C. di $A$
- $\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$
- **Centro**:

$$\begin{cases} a_{11}x_C + a_{12}y_C + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_C + a_{22}y_C + a_{23} = 0 \end{cases}$$

- **Circonferenza**: luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante la distanza da un punto fisso detto centro.
  - **Equazione** (due forme):
    - **1°**: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
    - **2°**: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$
      - Centro: $(\alpha, \beta)$
      - Raggio: $r$
  - **Centro**: $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$
  - **Raggio**: $\sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c}$
  - **Condizioni**: $a_{11} = a_{22} \neq 0$ e $a_{12} = 0$.
- **Iperbole**: luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante la differenza della distanza da due punti fissi detti fuochi ($F_1$ e $F_2$).
  - **Equazione** (due forme):
    - $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$
      - $F_{1x} = -F_{2x} = \sqrt{a^2 + b^2}$
      - $F_{1y} = F_{2y} = 0$
    - $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$
      - $\alpha$ e $\beta$ sono le soluzioni del P.C. di $A$
      - $\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$
- **Asintoti**: gli asintoti di un'iperbole sono delle rette che approssimano il comportamento dei rami dell'iperbole all'infinito. Man mano che i rami dell'iperbole si sviluppano, tendono ad avvicinarsi sempre di più agli asintoti senza mai toccarli.
- **Parabola**: luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e una retta detta direttrice.
  - **Equazione Canonica**: $\beta Y^2 = 2\gamma X$.
    - $\beta = \mathrm{Tr} A$
    - $\gamma = +\sqrt{-\frac{\det B}{\mathrm{Tr} A}}$
  - **Centro**: *non esiste*

* vedi file per le dimostrazioni.
L$n$ indica la lezione numero $n$.