#university #studying #subject-2103

Elementi di Analisi Matematica 2

1. Integrali

Primitive

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
f è dotata di primitive in (a, b) se $\exists F : (a, b) \to \mathbb{R}$ tale che

1. F è derivabile in (a, b)
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a, b)$

Nota

- Non tutte le funzioni hanno primitive (es. la funzione segno)
- Una funzione continua ha primitive. Una funzione non continua non implica il non avere primitive. La continuità è una condizione sufficiente, ma non necessaria.

Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
F primitiva di f in (a, b)

Tesi
Tutte e sole le funzioni primitive di f in (a, b) sono le funzioni del tipo:

$$F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

1. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ sono primitive di f in (a, b)

$$\exists\, D[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

2. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$ sono le sole primitive.
Se $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f in (a, b) allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che
$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in (a, b)$

Consideriamo la funzione $G(x) - F(x)$. Essa è derivabile in (a, b) e

$$D[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Il 2° corollario di Lagrange dice: "*se due funzioni hanno la stessa derivata in un intervallo, esse differiscono per una costante*".

Quindi, $G(x) - F(x) = \text{costante} \quad \rightarrow \quad G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$

Integrale Indefinito

✓ **Definizione**

Si chiama **Integrale indefinito** di f l'insieme formato dalle primitive di f in (a, b) se f è dotata di primitive, l'insieme vuoto se f non ha primitive in (a, b).

$$\int f(x)\, dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha primitive in } (a, b) \\ \{F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}\} & \text{se } F \text{ è una primitiva di } f \text{ in } (a, b) \end{cases}$$

Integrali Indefiniti Notevoli

($c \in \mathbb{R}$)

- $\int 0\, dx = c$
- $\int 1\, dx = x + c$
- $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq 0$
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x\, dx = e^x + c$
- $\int \alpha^x\, dx = \frac{\alpha^x}{\ln|x|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \alpha \neq 0$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$

Integrali di Funzioni Composte

- $\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- *gli altri sono uguali a quelli notevoli ma con $x = f(x)$, tutto per $f'(x)$.*

Proprietà di Omogeneità

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
$k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

Tesi

1. kf è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

Dimostrazione

1. Per ipotesi f è dotata di primitive in (a, b) e sia F una sua primitiva.

$$\exists\, D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

2. Per provare la 2 si dimostrano le due inclusioni.
   Si prova che $\int k \cdot f(x)\, dx \subseteq k \cdot \int f(x)\, dx$

$G \in \int k \cdot f(x)\, dx$
$\exists G'(x) = k \cdot f(x)$

Dobbiamo provare che $G \in k \cdot \int f(x)\, dx$, quindi $G = k \cdot \text{primitiva di f}$
Se $k \neq 0$ possiamo dire che $G(x) = k \cdot \left[\frac{G(x)}{k}\right]$

Se proviamo che $\left[\frac{G(x)}{k}\right]$ è uguale a una primitiva di f in (a, b), allora abbiamo provato che $G(x) \in k \cdot \int f(x)\, dx$.

$D\left[\frac{G(x)}{k}\right] = \frac{1}{k} \cdot G'(x) = \frac{1}{\cancel{k}} \cdot [\cancel{k} \cdot f(x)] = f(x)$

In conclusione, $\frac{G(x)}{k}$ è primitiva di f in (a, b), quindi $G \in k \cdot \int f(x)\, dx$

Proviamo adesso l'altra inclusione $k \cdot \int f(x)\, dx \subseteq \int k \cdot f(x)\, dx$

$G \in k \int f(x)\, dx$, quindi $G(x) = k \cdot F(x)$

Devo provare che G è una primitiva di $k \cdot F(x)$

$G'(x) = D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$
Abbiamo dimostrato che G è una primitiva di $k \cdot f$

Proprietà di Linearità

✓ Enunciato

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive in (a, b)

Tesi

1. $f + g$ è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

⚠ Osservazione

Al secondo membro avviene la somma tra due insiemi, che di norma non è definita. Si intende invece l'insieme formato dalle funzioni che sono la somma di una delle primitive di f e una delle primitive di g.

3. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = F(x) + \int g(x)\, dx$, con F primitiva di f

⚠ **Osservazione**
Al secondo membro si intende che, quando si tratta di una somma con un integrale, è possibile omettere la costante.

Integrazione per decomposizione in somma

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive
$h, k \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli ($h^2 + k^2 > 0$)

Tesi

1. $h \cdot f + k \cdot g$ è dotate di primitive in (a, b)
2. $\int [h \cdot f(x) + k \cdot g(x)]\, dx = h \cdot \int f(x)\, dx + k \cdot \int g(x)\, dx$

Integrazione indefinita per parti

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili
$f' \cdot g$ dotata di primitive in (a, b)

Tesi

1. $f \cdot g'$ è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$

Dimostrazione

f e g sono derivabili, quindi lo è anche $f \cdot g$.
$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \forall x \in (a, b)$

Spostando di membro si ottiene: $f'(x) \cdot g(x) = D[f(x) \cdot g(x)] + f(x) \cdot g'(x)$

Si integrano entrambi i membri e per la proprietà di linearità si ottiene:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) + \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

$f(x)$ è detto **fattore finito**
$g(x)$ è detto **fattore differenziale**

Integrali indefiniti *ciclici*

Metodo risolutivo

Per risolvere un integrale del tipo:

$$\int f(x)\, dx = H(x) + \alpha \cdot \int f(x)\, dx, \quad \alpha \neq 1$$

È sufficiente portare al primo l'integrale e risolvere l'equazione isolandolo.

Metodo di Sostituzione

1^a Formula

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
$\phi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ derivabile in (α, β)
ϕ' continua in (α, β)
$Im\, \phi \subseteq (a, b) \qquad [\iff \phi(x) \in (a, b)\, \forall\, x \in (\alpha, \beta)]$

Tesi
1^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\, dx = \left(\int f(y)\, dy\right)_{y=\phi(x)}$$

2^a Formula

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
$\phi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ derivabile in (α, β)
ϕ' continua in (α, β)
$Im\, \phi = (a, b)$
ϕ invertibile in (α, β)

Tesi
2^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt\right)_{t=\phi^{-1}(x)}$$

#todo come risolvere esercizio

Integrali di Polinomi Trigonometrici

Prerequisiti di Trigonometria

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
- $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\int \cos^n x\,dx$ oppure $\int \sin^n x\,dx$

n pari

1. Si scompone $\int \sin^n x\,dx$ in $\int(\sin^2 x)^{\frac{n}{2}}\,dx$
2. Si trasforma $\sin^2 x$ in $\frac{1-\cos(2x)}{2}$ e si divide la frazione in $\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n}{2}=2$, il cubo di binomio se $\frac{n}{2}=3$, ecc
4. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
5. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

n dispari

1. Si scompone $\int \sin^n x\,dx$ in $\int \sin^{n-1} x\cdot\sin x\,dx$
2. Si scompone $sin^{n-1}x$ in $(1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n-1}{2}=2$, il cubo di binomio se $\frac{n-1}{2}=3$, ecc
4. Si moltiplica ogni membro della parentesi appena svolta per il $\sin x$ iniziale.
5. Si procede utilizzando l'integrazione composta $\int[f(x)]^n\cdot f'(x)=\frac{f(x)^{n+1}}{n+1}+c$ e i vari metodi risolutivi.

$\int cos^n x\cdot\sin^m x\,dx$

$n=m$

1. Si trasforma $\int \sin^n x\cdot\cos^n x\,dx$ in $\int(\sin x\cdot\cos x)^n\,dx$
2. Si trasforma $\sin x\cdot\cos x$ in $\frac{1}{2}\sin 2x$
3. Si svolge la potenza elevando entrambi i fattori e ottenendo $\int\frac{1}{2^n}\sin^n 2x\,dx$
4. Si può portare fuori la costante $\frac{1}{2^n}$
5. Procedere ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n\neq m$ con n e m entrambi pari

1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\, dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ di grado inferiore, scomponendolo in $(1-\cos^2 x)^{\frac{n}{2}}$
2. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n}{2}=2$, il cubo di binomio se $\frac{n}{2}=3$, ecc
3. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
4. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con almeno n oppure m dispari

1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\, dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ con il grado dispari. Se sono entrambi dispari è preferibile quello con il grado inferiore.
   supponiamo si sia scelto $\sin^n x$
2. Si scompone $\sin^n x$ in $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$.
3. Si procede come nel caso di $\int \sin^n x\, dx$ con n dispari dallo step 2

Integrali di Fratti Semplici

Caso 1: $\frac{1}{(ax+b)^n} \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

Metodo risolutivo ($n=1$)

$$\frac{1}{(ax+b)^1} = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{(ax+b)} \cdot a\, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Metodo risolutivo ($n>1$)

$$\frac{1}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a} \cdot \int (ax+b)^{-n} \cdot a\, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Caso 2: $\frac{1}{x^2+px+q} \quad p, q \in \mathbb{R} : \Delta = p^2 - 4q < 0$

Metodo risolutivo

Il denominatore può essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
x^2+px+q &= x^2 + 2\cdot\frac{px}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\
&= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} = && (4q-p^2=-\Delta) \\
&= \frac{(2x+p)^2}{4} + \frac{-\Delta}{4} = \\
&= \frac{-\Delta}{4} \cdot \left[\frac{(2x+p)^2}{-\Delta} + 1\right] = \\
&= \frac{-\Delta}{4} \cdot \left[1 + \left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right] && (-\Delta > 0)
\end{aligned}$$

Quindi si può svolgere l'integrale facendo riferimento all'uguaglianza precedente e all'integrazione notevole dell'$\arctan$:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{-\frac{\Delta}{4}\cdot\left[1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right]}\,dx = \qquad \left(D\left[\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right] = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

$$= \frac{\cancel{4}}{-\Delta}\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{\cancel{2}}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}\cdot D\left[\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\left(\int \frac{1}{1+y^2}\,dy\right)_{y=\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Caso 3: $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ $\quad a,b\in\mathbb{R}, \quad p,q\in\mathbb{R}:\Delta = p^2-4q<0,\ n\in\mathbb{N}$

Caso Particolare

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{\cancel{1+x^2}}{(1+x^2)^{\cancel{2}}}\,dx + \int \frac{-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2}\int x\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2}\int x\cdot D\left[\frac{1}{1+x^2}\right]dx =$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Metodo risolutivo

Se il numeratore è derivata del denominatore è sufficiente utilizzare l'integrazione fondamentale del $\ln$.

Se il numeratore non è derivata del denominatore, bisogna fare in modo che lo diventi.

1. Si moltiplica il numeratore per 2 se a è dispari. Ricordarsi di aggiungere $\frac{1}{2}$ fuori dalla frazione per compensare il fattore appena aggiunto.
2. Fai sì di avere tra parentesi la derivata del denominatore, raccogliendo sulla base di a. Ignora il fattore b, metti p al suo posto e compensa fuori dalle parentesi il valore aggiunto, annullandolo. Formalmente: $\frac{a}{2}(2x+p) - \frac{a}{2}p + b$.
3. Si divide la frazione in due e si procede in i vari metodi.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{5x+8}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = && (1)\\
=&\frac{1}{2}\cdot\int \frac{10x+16}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = && (2)\\
=&\frac{1}{2}\cdot\int \frac{5(2x+9)-45+16}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = && (3)\\
=&\frac{5}{2}\cdot\int \frac{2x+9}{(x^2+9x+1)^2}\,dx - 29\int \frac{1}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = \\
=&\frac{5}{2}\cdot\frac{(x^2+9+1)^{-1}}{-1} - \cdots
\end{aligned}
$$

Integrali di Equazioni Razionali Fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$$

grado $[N(x)] \geq$ grado $[D(x)]$

Metodo risolutivo

È sufficiente effettuare la divisione tra polinomi finché non si ottiene al numeratore un polinomio di grado inferiore al denominatore.

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

Si può quindi procedere con gli altri metodi risolutivi

grado $[N(x)] <$ grado $[D(x)]$

Scomposizione di Polinomi

Ogni polinomio di grado n ha n radici in $\mathbb{C}$. Si consideri $P(x)$ polinomio:

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ una radice reale con molteplicità n di $P(x)$. Allora $P(x)$ può essere diviso per

$$(x-\alpha)^n$$

2. Sia $\alpha = a \pm ib$ una radice complessa con molteplicità n di $P(x)$. Allora $P(x)$ si può dividere per

$$\{[x-(a+ib)]\cdot[x-(a-ib)]\}^n = [(x-a)^2+b^2]^n$$

Si tratta della potenza di un polinomio di secondo grado con $\Delta < 0$ ed equazione del tipo:

$$(x^2+px+q)^n$$

Quindi, ogni polinomio si può fattorizzare nel prodotto di potenze di polinomi di 1° grado (punto 1) e potenze di polinomi di 2° grado con $\Delta < 0$ (punto 2).

Fattorizzazione di Frazione

Si può dimostrare che una frazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ è la somma dei fratti semplici del tipo:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

Ad esempio:

$$\frac{\dots}{(x+1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x^2+x+1)^3} =$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Hx+J}{(x^2+x+1)^3}$$

Metodo risolutivo

Per risolvere gli integrali di razionali fratti con numeratore inferiore a denominatore è necessario:

1. Scomporre in fratti semplici la frazione. Trovare $A, B, \dots$ tramite sistema.
2. Utilizzare la proprietà della linearità degli integrali per separare ogni frazione.
3. Utilizzare gli altri metodi d'integrazione.

Trucchetti

$D[\tan x] = \frac{1}{cos^2 x} = \frac{sin^2 x + cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{sin^2 x}{cos^2 x} + 1 = \tan^2 x + 1$

Topologia in $\mathbb{R}^2$

Rettangolo

Definizione

Si definisce rettangolo di $\mathbb{R}^2$ limitato il seguente insieme: $(a, b) \times (c, d)$.

Calcolo Area

La formula per il calcolo dell'area del rettangolo è la seguente: $\text{area} = (b-a) \cdot (d-c)$

Plurirettangolo

Definizione

Si definisce plurirettangolo l'unione di un numero finito di rettangoli a due a due privi di punti interni comuni.

Calcolo Area

Sia $P = \bigcup_{i=1}^{r} R_i$ con R_i rettangolo limitato e $R_i \cap R_j \neq \emptyset \quad i \neq j$

$$\text{area } P = \sum_{i=1}^{r} \text{area } R_i$$

$\underline{\mathscr{P}}$ e $\overline{\mathscr{P}}$

Enunciato

Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^2$ dotato di punti interni e limitato, si definiscono due insiemi numerici $\underline{\mathscr{P}}$ e $\overline{\mathscr{P}}$.

$$\begin{aligned} \underline{\mathscr{P}} &= \{P : \quad P \subseteq X \text{ plurirettangolo}\} \\ \overline{\mathscr{P}} &= \{P : \quad P \supseteq X \text{ plurirettangolo}\} \end{aligned}$$

Essi sono entrambi non vuoti.

Misurabilità e calcolo area

Enunciato

Ipotesi

Siano A e B due insiemi così definiti:
$A = \{\text{area } P : \quad P \in \underline{\mathscr{P}}\}$
$B = \{\text{area } P : \quad P \in \overline{\mathscr{P}}\}$
$\sup A = \inf B$

Tesi

X è misurabile secondo Peano-Jordan e la sua area è così definita:

$$\text{area } X \overset{\text{def}}{=} \sup A = \inf B$$

Dimostrazione

#todo

Integrale Definito

Decomposizione

Definizione

Dato un intervallo $[a,b]$ limitato, si chiama **decomposizione** di $[a,b]$ un insieme

$$\mathscr{D}=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\quad \text{con}\quad x_i\in\mathbb{R},\quad a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$$

I punti $x_1,x_2,\dots,x_n$ si chiamano **capisaldi** della decomposizione.

Ampiezza di decomposizione

✓ **Definizione**

$$|\mathscr{D}|\overset{\text{def}}{=}\min\{(x_i-x_{i-1},\quad i=1,\dots,n)\}$$

Somma Inferiore e Superiore

✓ **Definizione**

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$.
Si consideri una sua decomposizione $\mathscr{D}=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$.
Siano $y_i,z_i\in[x_{i-1},x_i]$

$$\begin{aligned}f(y_i)&=\min_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\\ f(z_i)&=\max_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\end{aligned}$$

Si definiscono rispettivamente *somma inferiore e somma superiore di f relative a $\mathscr{D}$* i seguenti numeri:

$$\begin{aligned}s(\mathscr{D},f)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i,x_{i-1})\cdot f(y_i)\\ S(\mathscr{D},f)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i,x_{i-1})\cdot f(z_i)\end{aligned}$$

$\underline{\mathscr{S}}$ e $\overline{\mathscr{S}}$

✓ **Definizione**

Si definiscono due insiemi numerici $\underline{\mathscr{S}}$ e $\overline{\mathscr{S}}$.

$$\begin{aligned}\underline{\mathscr{S}}&=\{s(\mathscr{D},f),\qquad \mathscr{D}\text{ decomposizione di }[a,b]\}\\ \overline{\mathscr{S}}&=\{S(\mathscr{D},f),\qquad \mathscr{D}\text{ decomposizione di }[a,b]\}\end{aligned}$$

$\underline{\mathscr{S}}$ e $\overline{\mathscr{S}}$ sono contigui

✓ **Enunciato**

Gli insiemi $\underline{\mathscr{S}}$ e $\overline{\mathscr{S}}$ sono contigui.

99 **Dimostrazione**

#todo

✓ **Definizione**

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$, si chiama **integrale definito** tra a e b di f il seguente numero:

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \sup \underline{\mathscr{S}} = \inf \overline{\mathscr{S}} & \text{se } a < b \\ 0 & \text{se } a = b \\ -\int_b^a f(x) & \text{se } a > b \end{cases}$$

Proprietà

Proprietà Distributiva

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ continue
$\alpha, \beta \in [a, b]$
$h, k \in \mathbb{R}$

Tesi
$\int_\alpha^\beta [h \cdot f(x) + k \cdot g(x)]\,dx = h \cdot \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + k \cdot \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

Proprietà Additiva

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua
$\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$

Tesi
$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$

Teorema della Media

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua

Tesi

1. $m(b-a) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq M(b-a)$ con $m = \min_{[a,b]} f$ e $M = \max_{[a,b]} f$
2. $\exists\, c \in [a, b] : \quad \frac{1}{b-1} \cdot \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(c)$

Dimostrazione

#todo

Proprietà di Monotonia

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ continue
$f(x) \leq g(x) \quad \forall a, x \in [a, b]$

Tesi
$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

In particolare, se $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x) \geq 0$.
Inoltre, $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \iff f(x) = 0$

Funzione Integrale

✓ **Definizione**

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e un punto $x_0 \in (a, b)$.
Si consideri $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt \quad \forall\, x \in (a, b)$
$F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = 0$

F si chiama **funzione integrale** di punto iniziale x_0.

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua

$x_0 \in (a, b)$
$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \forall x \in (a, b)$

Tesi

1. $F(x)$ è derivabile in (a, b)
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Si può enunciare come

> **Ogni funzione continua in un intervallo è dotata di primitive.**

> **Dimostrazione**
>
> #todo

Formula Fondamentale per il Calcolo degli Integrali Definiti

Enunciato

Ipotesi
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua
G primitiva di f in $[a, b]$

Tesi

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) = [G(t)]_a^b$$

> **Dimostrazione**
>
> #todo

Risoluzione esercizi

Valore assoluto

Metodo risolutivo

$$\int_a^b f(x, |g(x)|)\, dx$$

Si studia il segno di $g(x)$ se tra a e b la funzione ha sempre lo stesso segno, allora la risoluzione è immediata e si procede sostituendo $|g(x)|$ con $\pm g(x)$ a seconda del segno di g.

Mettiamo caso che la funzione sia positiva in $[a, c]$ e negativa in $[c, b]$.
L'integrale si scompone come segue: $\int_a^c f(x, +g(x))\, dx + \int_c^b f(x, -g(x))\, dx$.

Si procede in maniera simile anche a segni invertiti o nel caso in cui ci siano più punti in cui la funzione cambia segno.