4. Domande compiti

Come disse *Matteo Galletta*, gentilmente offerti da *Marco Gionfriddo*.

Parte Teoria

$T1$ (Compito 2 marzo 2023)

Sia $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie a segni alterni, con $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Fra le seguenti affermazioni individuare l'unica corretta e portare un controesempio per una a scelta di quelle non corrette.

$a)$ la serie non può divergere
$b)$ se $a_n \to 0$ la serie è convergente
$c)$ se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ la serie è divergente
$d)$ se $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ la serie può convergere

$T2$ (Compito 19 giugno 2023)

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.
Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa e portare un controesempio per una a scelta di quelle false.

$a)$ se $\{a_n\}$ è crescente, la serie diverge
$b)$ se $\{a_n\}$ è decrescente, la serie converge
$c)$ se la serie è convergente, allora è assolutamente convergente
$d)$ se $a_n \to 0$, la serie converge

$T3$ (Compito 21 aprile 2023)

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi, monotona.
Cosa si può dire del carattere della serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$?
Giustificare la risposta dimostrando quanto affermato.

$T4$ (Compito 22 giugno 2021)

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, dimostrando quelle vere e portando un controesempio per quelle false.

$a)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergente;
$b)$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente.

$T5$ (Compito 31 gennaio 2023)

Fra le seguenti serie individuare quelle geometriche.

$a)$ $\sum_{n=1}^{\infty}(x-4)^n$

$b)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n+2}$

$c)$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}$

$d)$ $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{nx^2+2}$

$e)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

$f)$ $\sum_{n=1}^{\infty}(n-3)^{n-1}$

$T6$ (Compito 17 settembre 2021)

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi e sia

$$l = \lim \sqrt[n]{a_n}$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Per quelle false portare un controesempio.

$i)$ se $0 \leq l < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge;
$ii)$ se $l > 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ diverge.

$T7$ (Compito 1 settembre 2021)

$i)$ Scrivere la serie armonica generalizzata e dire in quali casi converge e in quali casi diverge.

$ii)$ Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi, entrambe convergenti. Costruire un esempio in cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ è convergente e. un esempio in cui essa è divergente.

$T8$ (Compito 26 febbraio 2021)

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie numeriche tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Per quelle false, portare un controesempio.

$a)$ se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

$b)$ se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

$c)$ se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$d)$ se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Parte Esercizi

$E1$ (Compito 5 luglio 2023)

Stabilire il carattere della seguente serie numerica al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+3} x^n$$

$E2$ (Compito 26 gennaio 2021)

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{(n+1)^2}}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}$$

$E3$ (Compito 29 marzo 2021)

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^4 \frac{3^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$$

$E4$ (Compito 31 agosto 2023)

$i)$ Stabilire il carattere della seguente serie numerica al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^x+1}$$

$ii)$ Stabilire il carattere della seguente serie numerica al variare di $x \in \mathbb{R}$ e, in caso di convergenza, calcolarne la somma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nx^2-n+4x}$$

$E5$ (Compito 13 luglio 2021)

Stabilire il carattere della seguente serie numerica, al variare del parametro reale x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+2)\sqrt{n^6+2}} x^n$$

$E6$ (Compito 1 settembre 2021)

Studiare, al variare del parametro reale x il carattere delle seguenti serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(nx^2), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^n \log(1+\frac{x^2}{n^2})$$