Esercizi 19 dicembre

martedì 19 dicembre 2023 16:33

1. Data la funzione definita da

$$f(x,y)= x^2+y^2+xy+x$$

i) determinare gli eventuali estremi relativi in $\mathbb{R}^2$

ii) determinare, se esistono, gli estremi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$ e $(2,0)$

- f è dotata di derivate parziali di ogni ordine continue in $\mathbb{R}^2$
- Cerco i punti stazionari

> Domanda: I punti candidati ad essere di estremo relativo sono solo i punti stazionari? No!
>
> $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$
>
> $\nexists\ f_x(0,0)\quad f_y(0,0)$
>
> $(0,0)$ è candidato ad ess. di estremo
>
> $f(0,0)=0 \qquad \sqrt{x^2+y^2}\geq 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$
>
> $f(x,y)\geq f(0,0)$
>
> $(0,0)$ è un punto di minimo ass.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$f_x(x,y)=2x+y+1$

$f_y(x,y)=2y+x$

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+1=0\\ 2y+x=0\end{cases} \iff \begin{cases} -4y+y+1=0\\ x=-2y\end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1/3\\ x=-\frac{2}{3}\end{cases} \qquad A=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) \text{ è un punto stazionario}$$

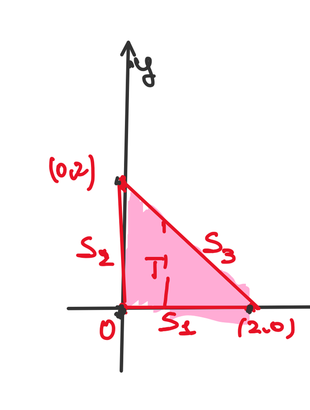
- Studio la natura di $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ usando le condizioni del 2° ordine:

$f_{xx}(x,y)=2 \qquad f_{xy}(x,y)=1 \qquad f_{yy}(x,y)=2$

$$H\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\begin{vmatrix} \overset{>0}{\boxed{2}} & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3>0 \implies$$

$\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ è un punto di minimo relativo di f.

ii) T: Triangolo di vertici $(0,0)$ $(0,2)$ $(2,0)$



f è continua in T, T è chiuso e limitato $\implies \exists \min_T f,\ \max_T f$

$A_1=\{(x,y)\in \overset{\circ}{T} : \exists\ \nabla f(x,y)=\underline{0}\}$

$\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\notin \overset{\circ}{T} \implies A_1=\emptyset$

$A_2=\{(x,y)\in\overset{\circ}{T} : \nexists\ \nabla f(x,y)\}=\emptyset$

$A_3=\partial T$

Studio $f_{|\partial T}$

$\partial T = S_1\cup S_2\cup S_3$

$S_1: \begin{cases} x=t\\ y=0\end{cases} \quad t\in[0,2]$

$S_2: \begin{cases} x=0\\ y=t\end{cases} \quad t\in[0,2]$

S_3: Scrivo l'eq. della retta passante per $(2,0)$ e $(0,2)$

$$\frac{x-2}{0-\cancel{2}}=\frac{y-0}{\cancel{2}}$$

$x-2=-y \iff y=2-x$

$S_3: \begin{cases} x=t\\ y=2-t\end{cases} \quad t\in[0,2]$

$\varphi_1=f_{|S_1} \qquad \varphi_1(t)=f(t,0)=t^2+t \quad \forall t\in[0,2]$

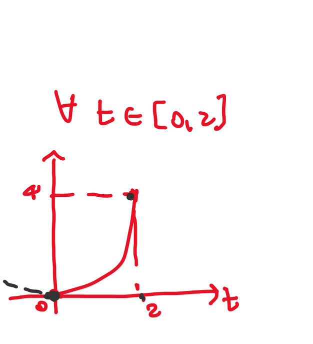
$\varphi_1'(t)=2t+1=0 \iff t=-\frac{1}{2}\notin[0,2]$

Punti candidati ad essere di estremo assoluto

$(0,0)\quad (2,0)$

Sia

$\varphi_2=f_{|S_2} \qquad \varphi_2(t)=f(0,t)=t^2 \quad \forall t\in[0,2]$



Punti candidati ad essere di estremo assoluto

$(0,0)\quad (0,2)$

Infine

$\varphi_3=f_{|S_3} \qquad \varphi_3(t)=f(t,2-t)=$

$=t^2+(2-t)^2+t(2-t)+t=$

$=t^2+4-4t+\cancel{t^2}+2t-\cancel{t^2}+t$

$=t^2-t+4 \qquad \forall t\in[0,2]$

$\varphi_3'(t)=2t-1=0 \iff t=\frac{1}{2}\in\,]0,2[$

Punti candidati

$(0,2)\quad (2,0)\quad \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

I punti candidati ad essere di estremo assoluto sono

$(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

$f(0,0)=0$

$f(0,2)=4$

$f(2,0)=6$

$f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{13}{4}+\frac{1}{2}=\frac{15}{4}$

$\exists \min_T f=0 \qquad \exists \max_T f=6$

2. Data la funzione definita da

$$f(x,y)=|x|\,\boxed{y^2}\,(2x+3y)$$

$\text{dom} f=\mathbb{R}^2$

$\exists\ D|t|=\frac{|t|}{t}=\frac{t}{|t|} \quad \forall t\neq 0$

Se $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x\neq 0$

$\exists\ f_x(x,y)=y^2\left[\frac{|x|}{x}(2x+3y)+|x|2\right]=$

$=y^2|x|\left[\frac{2x+3y}{x}+2\right]=$

$=y^2|x|\frac{2x+3y+2x}{x}=y^2\frac{|x|}{x}(4x+3y)$

L'esistenza di $f_x(0,\alpha)$ con $\alpha\in\mathbb{R}$ deve essere studiata con la definizione.

Per definizione

$\exists\ f_x(0,\alpha) \iff \exists\left[D f(x,\alpha)\right]_{x=0}$

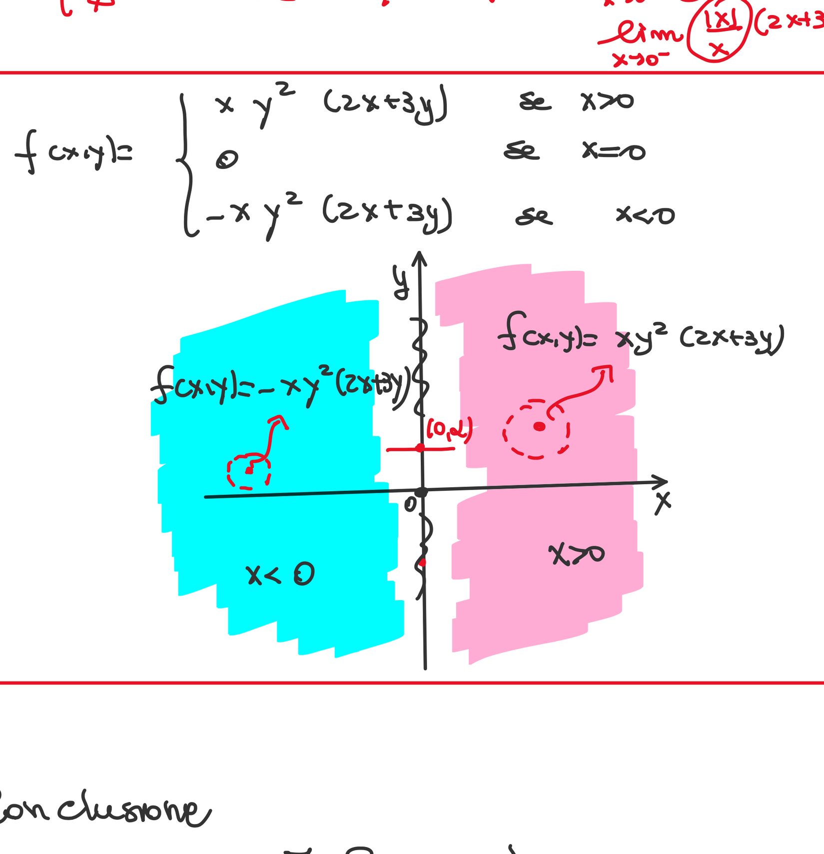
$f(x,\alpha)=|x|\alpha^2(2x+3\alpha)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,\alpha)-f(0,\alpha)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\alpha^2(2x+3\alpha)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}(2x+3\alpha)\cdot\alpha^2$$

$\begin{cases} =0 & \text{se } \alpha^2=0 \iff \alpha=0\\ \nexists & \text{se } \alpha^2\neq 0 \text{ perché } \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}(2x+3\alpha)\alpha^2=3\alpha^3,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}(2x+3\alpha)\alpha^2=-3\alpha^3\end{cases}$

$$f(x,y)=\begin{cases} x y^2(2x+3y) & \text{se } x>0\\ 0 & \text{se } x=0\\ -x y^2(2x+3y) & \text{se } x<0\end{cases}$$



Conclusione

$\exists\ f_x(0,0)$ ma $\nexists\ f_x(0,\alpha)$ con $\alpha\neq 0$

- $f(x,y)=|x|\,y^2(2x+3y)$

$\exists\ f_y(x,y)=|x|\left[2y(2x+3y)+3y^2\right]=$

$=|x|\,y\left[4x+6y+3y\right]=$

$=|x|\,y\left[4x+9y\right] \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

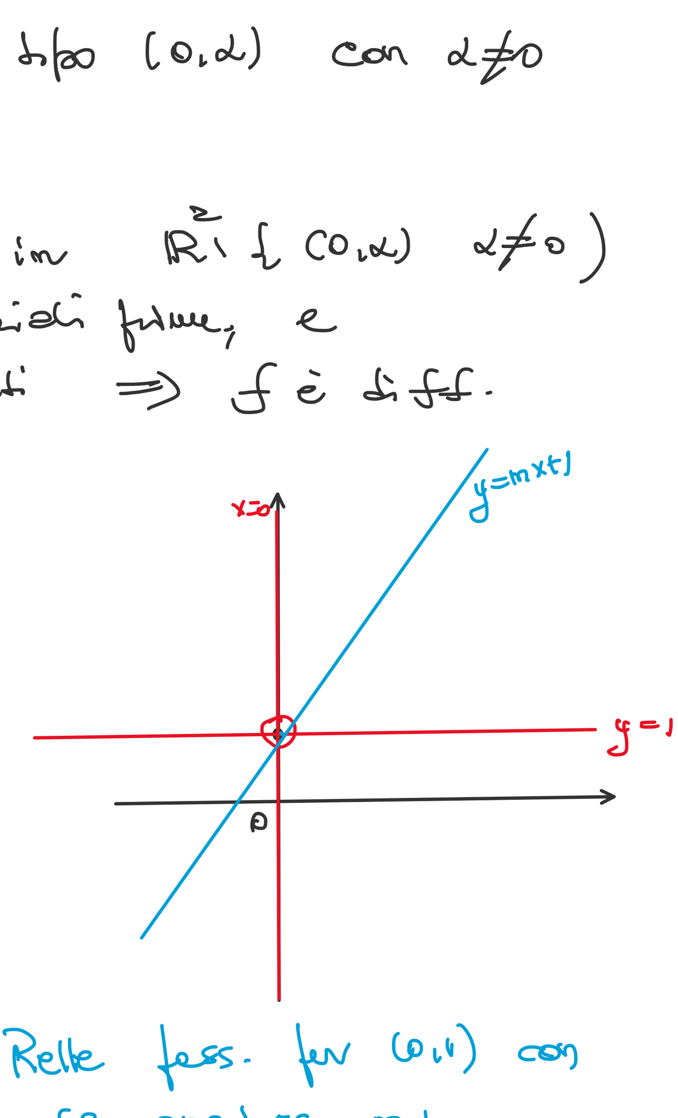
- f_y è continua in $\mathbb{R}^2$

f non è diff. nei punti del tipo $(0,\alpha)$ con $\alpha\neq 0$ perché $\nexists\ f_x(0,\alpha)$

In tutti gli altri punti (cioè in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,\alpha)\ \alpha\neq 0\}$) esistono entrambe le derivate parziali prime, e f_y è continua in tali punti $\implies f$ è diff. in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,\alpha)$ con $\alpha\neq 0\}$

3. Calcolare, se esiste il

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x\log y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$$



Rette pass. per $(0,1)$ con coeff angolare m:

$y-1=m(x-0)$

$y=mx+1$

$E_0=\{(x,y): x=0 \quad y\neq 1\}$

$f_{|E_0}=0$

$E_1=\{(x,y): y=1 \quad x\neq 0\}$

$f_{|E_1}=0$

$E_m=\{(x,y): y=mx+1 \quad x\neq 0\}$

$$f_{|E_m}(x,y)=\frac{x\log(1+mx)}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}=\frac{x}{|x|}\frac{\boxed{\log(1+mx)}}{\sqrt{1+m^2}}\to 0$$

$\frac{x}{|x|}$: limitata

$\log(1+mx) \xrightarrow{(x,y)\to(0,1)} \log 1=0$

Ricordo che

$|x|\leq\sqrt{x^2+(y-1)^2} \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}\leq 1 \qquad \forall (x,y)\neq(0,1)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}}\ \boxed{\log y}=0$$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$ è limitata; $\log y \xrightarrow{(x,y)\to(0,1)} 0$

Altra possibilità

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,1)}|f(x,y)|=0$$

$$0\leq|f(x,y)|=\underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}}_{\leq 1}|\log y|\leq|\log y|$$

$0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0$