Si consideri l'equazione di ricorrenza $T(n) = aT\left(\frac{n}{4}\right) + 3\sqrt{n}$. Si risolva l'equazione al variare del parametro reale $a \geq 1$, utilizzando il metodo Master e si stabilisca per quali valori di b la soluzione $T(n)$ all'equazione soddisfa le seguenti condizioni

$$\text{(i.) } T(n) = \Theta(n) \qquad \text{(ii.) } T(n) = \mathcal{O}(n^2) \qquad \text{(iii.) } T(n) = o\left(\sqrt{n}\log(n)\right).$$

Infine, si disegni uno sketch dell'albero di ricorrenza associato all'equazione data per $a = 2$.

$f(n) = 3\sqrt{n} = \Theta(\sqrt{n})$

$w = n^{\log_4 a}$

La comparazione tra $f(n)$ e $w(n)$ dipende da:

$$n^{\log_4 a} \gtreqless n^{\frac{1}{2}} \iff \log_4 a \gtreqless \frac{1}{2} \iff a \gtreqless 2$$

$a > 2$: $w(n)$ cresce asintoticamente più velocemente di $f(n)$.

$\exists \varepsilon > 0: f(n) = O(n^{\log_4 a - \varepsilon})$

Si prende $0 < \varepsilon < \log_4 a - \frac{1}{2}$

Caso 1 Thm. Master $\Rightarrow T(n) = \Theta(w(n)) = \Theta(n^{\log_4 a})$

$a = 2$: $\exists K \geq 0$:

$f(n) = \Theta(w(n) \cdot \log^K n)$. Si prende $k = 0$

Caso 2 Thm. Master $\Rightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n} \cdot \log n)$

$0 < a < 2$: $\exists \varepsilon > 0$:

$f(n) = \Omega(n^{\log_4 a + \varepsilon})$

Si prende $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} - n^{\log_4 a}$

Caso 3 Thm. Master $\Rightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n})$

Bisogna verificare la cond. di regolarità

? $\exists c<1: \quad a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$ $\qquad f(n) = 3\sqrt{n}$

$$a f\left(\frac{n}{4}\right) \leq c \cdot f(n)$$

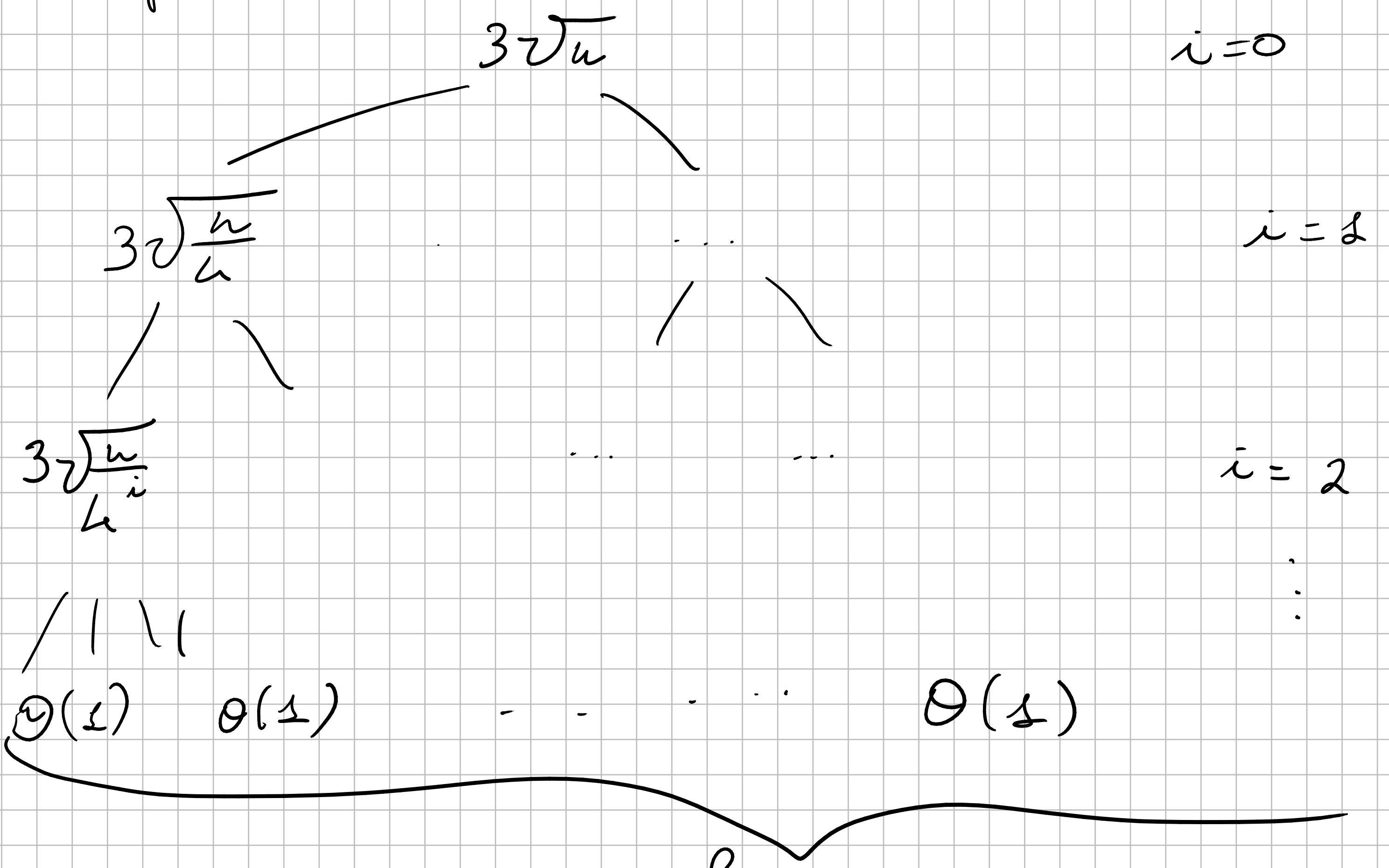
$$3a\sqrt{\frac{n}{4}} \leq 3c \cdot \sqrt{n}$$

$$a\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2} \leq c\sqrt{n} \implies c \geq \frac{1}{2}a$$

Siccome $a < 2 \implies \frac{1}{2}a < 1$

Con $c = \frac{1}{2}a$ la cond. è verificata

Albero per $a=2$



con $h = \log_4 n$ $\implies 2^h \to 2^{\log_4 n} = n^{\log_4 2} = \sqrt{n}$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_4 a}) & a > 2 \\ \Theta(\sqrt{n} \cdot \log n) & a = 2 \\ \Theta(\sqrt{n}) & 0 < a < 2 \end{cases}$$

(i.) $T(n) = \Theta(n)$ (ii.) $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$ (iii.) $T(n) = o(\sqrt{n}\log(n))$.

i) $a > 2$. Per $a = 4$ $\Theta(n) = \Theta(n^{\log_4 a})$

$a = 2$ $\Theta(n) \neq \Theta(n^2)$

$0 < a < 2$ $\Theta(n) \neq \Theta(\sqrt{n})$

$a = 4$

ii) $a > 2$ $n^{\log_4 a} = O(n^2)$ solo per $2 < a \leq 16$

$a = 2$ $\Theta(\sqrt{n} \cdot \log n) \Rightarrow O(n^2)$

$0 < a < 2$ $\Theta(\sqrt{n}) \Rightarrow O(n^2)$

$0 < a \leq 16$

iii) $a > 2$ $n^{\log_4 a} < \sqrt{n}$ per $a < 2 \Rightarrow$ NO

$a = 2$ $\Theta(\sqrt{n} \cdot \log n) \neq o(\sqrt{n} \cdot \log n) \Rightarrow$ NO

$0 < a < 2$ $\Theta(\sqrt{n}) = o(\sqrt{n} \cdot \log n) \Rightarrow$ SI

$0 < a < 2$