Diseq. ed Eq. Complesse (Es. 1)

▼ 30th June 2021

Risolvi la seguente disequazione

$$2\log(2x+3) - \log(x+1) > 0$$

Svolgimento

- Determino le condizioni di esistenza per gli argomenti dei due logaritmi

$$C.E.$$
$$\begin{cases} (2x+3)^2 > 0 & x > -\frac{3}{2} \\ x+1 > 0 & x > -1 \end{cases}$$

- Sviluppo la disequazione logaritmica

$$\log[(2x+3)^2] - \log(x+1) > 10^0$$
$$\frac{4x^2+12x+9}{x+1} - 1 > 0$$
$$\frac{4x^2+12x+9-x-1}{x+1} > 0$$
$$\frac{4x^2+11x+8}{x+1} > 0$$

- Pongo Numeratore >0

$$\Delta = 121 - 128$$
$$\text{Numeratore definito su tutto } \mathbb{R}$$

- Risolvo per il denominatore

$$x > -1$$

▼ 27st July 2021

Dare la definizione di maggiorante per un insieme numerico. Determinare poi i maggioranti della funzione definita dalla legge

$$\sqrt{x^2 - 2|x|}$$

Svolgimento :

Definizione di Maggiorante :

$$M \in \mathbb{R} \text{ ''}maggiorante\text{''} \;\; di \;\; X \iff \forall x \in X, M \geq x$$

- Considero Campo d'esistenza, tenendo conto che la x compare due volte, una come valore assoluto e l'altro con esponente pari, il che mi permette di eliminare il valore assoluto

$$C.E.$$
$$\begin{cases} x^2 - 2|x| \geq 0 \quad x(x-2) \geq 0 \end{cases}$$
$$regola \;\; del \;\; D.I.C.E.$$
$$\begin{cases} x \geq 0, x \geq 2 \quad\quad x \leq 0 \cup x \geq 2 \end{cases}$$

- Applico la definizione di maggiorante a questa funzione. Essendo continua, nell'intervallo in cui è definita non presenta nessun asintoto all'infinito, ne a $-\infty$, né a $+\infty$, quindi la funzione non ammette maggioranti.

▼ 9th September 2021

Dare la definizione di maggiorante di un insieme numerico. Determinare poi i maggioranti della funzione definita dalla legge

$$\frac{|x|}{x^2 + 1}$$

Svolgimento:

Definizione di maggiorante:

$$M \in \mathbb{R} \text{ ''}maggiorante\text{''} \;\; di \;\; X \iff \forall x \in X, M \geq x$$

27th September 2021

Dare la definizione di insieme numerico limitato. Stabilire poi se
l’insieme delle soluzioni della disequazione qui riportata sia limitato oppure no.

$$\sqrt{3x-2} < 2(x-1)$$

25th January 2022

Dare la definizione di funzione inversa. Determinare poi il più ampio intervallo centrato nell’origine in cui la funzione definita dalla legge qui riportata risulti invertibile.

$$\sin^3 x$$

10th February 2022

Dare la definizione di funzione inversa. Spiegare poi se esiste un intorno dell’origine in cui la funzione definita dalla legge qui riportata risulti invertibile

$$\sin^2 x + e^{-}|x|$$

12th April 2022

Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x \sin(e^{-x} \sin \frac{2}{x})$$

6th July 2022

Risolvere l’equazione

$$|z|^2 = 3z$$

nel campo complesso e rappresentarne graficamente le soluzioni.

Svolgimento

- Si sostituisce il modulo mediante la definizione e si pone $z = a + ib$.

$$\sqrt{a^2 + b^2}^2 = 3a + i3b \tag{1}$$
$$\rightarrow a^2 + b^2 = 3a + i3b \tag{2}$$

- A questo punto si pongono a sistema la parte reale e la parte immaginaria

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3a \\ 3b = 0 \rightarrow b = 0 \end{cases} \tag{3}$$
$$\rightarrow \begin{cases} a^2 - 3a = 0 \rightarrow a(a-3) = 0 \\ b = 0 \end{cases} \tag{4}$$
$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 \ \vee \ a = 3 \\ b = 0 \end{cases} \tag{5}$$

- Le soluzioni sono quindi:

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 3$$

▼ 28th July 2022

Risolvi l'equazione nel campo complesso e rappresentarne graficamente le soluzioni

$$\frac{z^2}{|z|} = 2$$

Svolgimento

- Si moltiplicano entarmbi i membri per $|z|$ per togliere la frazione.

$$z^2 = 2|z| \quad \text{con} \quad |z| \neq 0$$

- Si pone $z = a + ib$ e si sostituisce il modulo mediante la definizione.

$$(a+ib)^2 = 2\sqrt{a^2+b^2} \tag{6}$$
$$a^2 - b^2 + i2ab = 2\sqrt{a^2+b^2} \tag{7}$$

- Si pongono a sistema la parte reale e la parte mmaginaria

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2\sqrt{a^2+b^2} \\ 2ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0 \end{cases} \tag{8}$$

- Nella prima equazione si pone una volta $a = 0$ e un'altra volta $b = 0$. E' importante ricordare che $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\begin{cases} -b^2 = 2\sqrt{b^2} \to b^2 + 2|b| = 0 \to b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \tag{9}$$
$$\begin{cases} a^2 = 2\sqrt{a^2} \to a^2 - 2|a| = 0 \to a = 0 \vee a = 2 \vee a = -2 \\ b = 0 \end{cases} \tag{10}$$

- Le coppie trovate concidono con i numeri complessi soluzione dell'equazione iniziale. Sono quindi

$$z_1 = 2, \qquad z_2 = -2$$

La soluzione $z = 0$ va contro la condizione iniziale $|z| \neq 0$, quindi va scartata.

▼ 5th September 2022

Risolvi l'equazione nel campo complesso e rappresentane graficamente le soluzioni

$$z^2 = \sqrt{3} + i$$

Svolgimento

- Si trasforma z in forma esponenziale ponendolo $= \rho e^{i\theta}$

$$(\rho e^{i\theta})^2 = \sqrt{3} + i$$

- Trasformiamo anche il secondo membro in forma esponenziale usando le opportune formule di passaggio da formale cartesiana a forma esponenziale

$$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$$
$$\arg(\sqrt{3}+i) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$(\rho e^{i\theta})^2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

- Per la proprietà delle potenze possiamo togliere il ^{2} al primo membro elevando i due fattori al quadrato.

$$\rho^2 e^{i2\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

- Si pongono a sistema modulo e argomento (quest'ultimo a meno della periodicità). k si pone 0 e 1 in quanto il coefficente che precede θ è 2 (si itera da 0 a $n-1$).

$$\begin{cases} \rho^2 = 2 \\ 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k = 0,1 \end{cases} \tag{11}$$
$$\rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k = 0,1 \end{cases} \tag{12}$$

- Le soluzioni sono quindi

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

▼ 26th September 2022

Risolvi la disquazione

$$\sqrt{(3^{-x}-1)(3^{x^2}+1)} > 0$$

▼ 31th January 2023

Risolvi l'equazione nel campo complesso e rappresenta graficamente le eventuali soluzioni

$$iz^2 + 1 = 2(z^2 - i)$$

Svolgimento

- Svolgiamo il prodotto a secondo membro, portiamo tutto al primo e raggruppiamo per z^2.

$$\begin{gathered} iz^2+1-2z^2+2i=0 \\ (i-2)z^2+(1+2i)=0 \end{gathered}$$

- Si utilizza la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado intendendo la radice di Δ come radice complessa.

$$\begin{aligned} \Delta[&=b^2-4ac] && (13)\\ &=0-4(i-2)(1+2i) && (14)\\ &=(-4i+2)(1+2i) && (15)\\ &=-4i+8+2+4i && (16)\\ &=10 && (17) \end{aligned}$$

- Le due soluzioni sono quindi (da verificare le soluzioni ancora)

$$z=\frac{\pm\sqrt{10}}{2(i-2)}=\frac{\pm\sqrt{10}(-2-i)}{2(-2+i)(-2-i)}=\frac{\pm\sqrt{10}(-2-i)}{10}=\pm\left(\frac{\sqrt{10}}{5}+\frac{\sqrt{10}}{10}i\right)$$

▼ 17th February 2023

Risolvere l'equazione nel campo complesso e rappresentarne graficamente le soluzioni

$$\frac{z+|z|}{(z+\overline{z})^2}=1$$

Svolgimento

- Portiamo al secondo membro il denominatore del primo

$$z+|z|=(z+\overline{z})^2 \quad \text{con} \quad (z+\overline{z})^2\neq 0$$

- Vediamo quando $(z+\overline{z})^2\neq 0$

$$
\begin{gathered}
(z+\overline{z})^2 = 0 \iff z+\overline{z} = 0 \\
z = a+ib, \qquad \overline{z} = a-ib \\
z+\overline{z} = a+ib+a-ib = 2a \\
a = 0
\end{gathered}
$$

- Avendo trovato $a \neq 0$ vuol dire che tra le soluzioni non possiamo prendere numeri immaginari puri (con parte reale $= 0$) o 0.
- Sostituiamo $z = a+ib$ nell'equazione

$$
\begin{gathered}
a+ib+\sqrt{a^2+b^2} = (2a)^2 \\
a+ib+\sqrt{a^2+b^2} = 4a^2
\end{gathered}
$$

- Poniamo a sistema la parte reale e quella immaginaria

$$
\begin{cases} a+\sqrt{a^2+b^2} = 4a^2 \\ b = 0 \end{cases} \tag{18}
$$

$$
\begin{cases} 4a^2 - a - |a| = 0 \\ b = 0 \end{cases} \tag{19}
$$

- Si pone una volta $a > 0$ e un'altra $a < 0$.

$$
a \geq 0 \qquad 4a^2 - 2a = 0 \to 2a(2a-1) = 0 \to a = 0 \lor a = \frac{1}{2} \tag{20}
$$

$$
a < 0 \qquad 4a^2 = 0 \to a = 0 \tag{21}
$$

- La soluzione quindi è unica (ricordiamo di dover scartare $a = 0$), ed è

$$
z = \frac{1}{2}
$$

▼ 4th April 2023

Risolvere l'equazione nel campo complesso e rappresentarne graficamente le soluzioni

$$
z^2 + |z| = z
$$

Svolgimento

- Consideriamo $z = a + ib$ e riscriviamo l'equazione. Per semplicità isoliamo il modulo a secondo membro.

$$(a+ib)^2 - a - ib = -\sqrt{a^2+b^2} \tag{22}$$

$$\rightarrow a^2 - b^2 + i2ab - a - ib = -\sqrt{a^2+b^2} \tag{23}$$

- Si pone a sistema la parte reale del primo membro con la parte reale del secondo membro, e la parte immaginaria del primo membro con la parte immaginaria del secondo membro (che essendo il modulo ha la parte immaginaria nulla).

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - a = -\sqrt{a^2+b^2} \\ i2ab - ib = i0 \end{cases} \tag{24}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ,,,, \\ b(2a-1) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ,,,, \\ b = 0 \ \vee \ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{26}$$

- A questo punto nel primo membro si sostituisce una volta $b = 0$ e un'altra volta $a = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a^2 - a = -a \\ b = 0 \end{cases} \tag{27}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} (\frac{1}{2})^2 - b^2 - \frac{1}{2} = -\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + b^2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{29}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} - b^2 = -\sqrt{\frac{1}{4} + b^2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{30}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b^2 + \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{4} + b^2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{31}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (b^2 + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} + b^2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{32}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b^4 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{4} + b^2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{33}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b^4 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{3}{16} = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{34}$$

- Essendo la prima equazione del sistema una biquadratica, si pone $b^2 = t$ e si usa la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{16} = 0$$
$$\Delta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 > 0$$
$$t = \frac{\frac{1}{2} \pm 1}{2}$$
$$t_1 = \frac{3}{4}, \quad t_2 = -\frac{1}{4}$$

- Si trova b

$$b_1^2 = \frac{3}{4}, \qquad b_2^2 = -\frac{1}{4}$$
$$b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad b_2 = -\frac{1}{2}$$

- A questo punto basta mettere insieme tutte le coppie ottenute; ogni coppia rappresenta un numero complesso. Le soluzioni sono quindi:

$$z_1 = (0,0) = 0 \tag{35}$$

$$z_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{36}$$

$$z_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \tag{37}$$