1

Teorema delle Matrici Invertibili

Data una matrice $M \in K^{n,n}$

a) è invertibile $\Longleftrightarrow \det M \neq 0$

b) se il $\det M \neq 0$, l'inverso della matrice $= \frac{1}{\det M} \cdot M_a = \frac{1}{\det M} (M_{ij})^T$

c) se M è invertibile allora $\det M^{-1} = \frac{1}{\det M}$

Partiamo dal punto a

$\Rightarrow$ IP. M è invertibile T. $\det M \neq 0$

1 Siccome M è invertibile $M \cdot M^{-1} = I$

2 Applichiamo il determinante $\det(M \cdot M^{-1}) = \det I$

3 Applichiamo il Teorema di Binet $\underbrace{\det M \cdot \det M^{-1}}$ $= 1$

$\det I = 1$

sia $\det M$

sia $\det M^{-1}$

devono essere $\neq 0$

c.v.d

$\Leftarrow$ IP. $\det M \neq 0$ T. M è invertibile

DIMOSTRIAMO CHE: 1 $M \cdot \frac{1}{\det M} \cdot (M_{ij})^T = I$

NEL PRODOTTO TRA MATRICI LA PR. COMMUTATIVA NON VALE, MA QUI SI TRATTA DI PRODOTTO PER SCALARE

$$3 = \frac{1}{\det M} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} =$$

$$4 = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} m_{11} \cdot M_{11} + m_{12} \cdot M_{12} + m_{13} M_{13} \to \det M & 0 & 0 \\ m_{21} \cdot M_{11} + m_{22} M_{12} + m_{23} M_{13} \to 0 & \det M & 0 \\ 0 & 0 & \det M \end{pmatrix} = I$$

Laplace N° 1

Laplace N° 2

Punto a e Punto b

c.v.d Abbiamo dimostrato implicitamente il punto b usando la formula

Punto c

$$\det B \cdot \det B^{-1} = 1 \to$$

$$\to \det B^{-1} = \frac{1}{\det B}$$

Teorema sulle Basi

- Tutte le basi di un K-spazio vettoriale hanno la stessa dimensione.

Supponiamo di prendere due basi qualunque:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ n \text{ vettori}}}{B_1} \quad e \quad \underset{\substack{\downarrow \\ m \text{ vettori}}}{B_2}$$

Per il Teorema che caratterizza una base:

un insieme di vettori è base $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{i vettori sono L.I.} \\ \text{i vettori sono Generatori} \end{cases}$

Quindi

$$\underset{n}{B_1} \Leftrightarrow \begin{cases} L.I. \\ GEN \end{cases} \qquad \underset{m}{B_2} \Leftrightarrow \begin{cases} L.I \\ GEN \end{cases}$$

Per il Lemma di Steinitz abbiamo che:

$$\dim L.I. \leq \dim GEN$$

$$\underset{n}{B_1} = \begin{cases} L.I. \\ GEN \end{cases} \qquad \begin{matrix} n \leq m \\ n \geq m \end{matrix} \qquad \underset{m}{B_2} = \begin{cases} L.I \\ GEN \end{cases}$$

$$n = m$$

Teorema di Cramer   n-inc. e n.eq.u

det A ≠ 0 ⟺ il sistema è determinato

L'unica soluzion si calcola con

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det B_1}{\det A} \\ x_2 = \dfrac{\det B_2}{A} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{\det B_n}{\det A} \end{cases}$$

B_i = Matrice A sostituendo nella i-esima riga B

⇒ IP. det A ≠ 0   T: Il sistema ammette una soluzione

Dimostriamo unicità

Assumiamo che esistano due soluzioni distinte X_1, X_2

Avremo quindi in forma contratta:

$$AX_1 = B \quad e \quad AX_2 = B$$

quindi $AX_1 = AX_2$

Siccome det A ≠ 0 allora $\exists A' \mid A'A = I$

$$\underbrace{A'A}_{I} \cdot X_1 = \underbrace{A' \cdot A}_{I} X_2$$

$$\Downarrow$$

$$X_1 = X_2 \quad c.v.d$$

Dimostriamo l'esistenza

$$AX = B \to \exists A' \mid A \cdot A' = I \to A' \cdot A \cdot X = A'B \to X = \overbrace{A'B}^{\text{ESISTONO SEMPRE}}$$

Proviamo la formula

$X = A^{-1} \cdot B$

↓ Teorema matrici invertibili

$$X = \frac{1}{\det A'} \cdot A_a \cdot B = \frac{1}{\det A'} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{23} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A'} \cdot \begin{pmatrix} \overbrace{A_{11} b_0 + A_{21} b_1 + A_{31} b_2}^{\det} \\ // \\ // \end{pmatrix} = \qquad \det \begin{pmatrix} b_0 & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & a_{22} & a_{23} \\ b_2 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det B_1 \\ \det B_2 \\ \det B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\det B_1}{\det A_1} \\ \frac{\det B_2}{\det A} \\ \frac{\det B_3}{\det A} \end{pmatrix}$$

c.v.d

$\Leftarrow$ IP. $\exists!$ soluzione TS $\det A \neq 0$

Il teorema di Rouché Capelli N° 2 diceva che un sistema lineare ammette ∞^{n-p} soluzioni

Per ipotesi $\infty^{n-p} = 1 \Rightarrow n-p = 0 \Rightarrow n = p$ quindi $\det A \neq 0$

c.v.d

Immagine Sottospazio del Codominio

- Chiuso rispetto alle somme

$w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f$

$\exists z_1, z_2 \mid f(z_1) = w_1$ e $f(z_2) = w_2$

$$f(z_1) = w_1$$
$$f(z_2) = w_2$$

SOMMA MEMBRO A MEMBRO

$$f(z_1) + f(z_2) = w_1 + w_2$$

1° PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

$$f(z_1 + z_2) = w_1 + w_2 \qquad \text{c.v.d}$$

- Chiuso rispetto al prodotto esterno

$w_1 \in \operatorname{Im} f \qquad a \in K$

$\exists z_1 \mid f(z_1) = w_1$

$$f(z_1) = w_1$$

$$a \cdot f(z_1) = a \cdot w_1$$

2° PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

$$f(a \cdot z_1) = a \cdot w_1 \qquad \text{c.v.d}$$

Nucleo sottospazio del dominio

- Chiuso rispetto alla somma

$w_1, w_2 \in \ker f$

$$f(w_1) = 0$$

$$f(w_2) = 0$$

$$f(w_1) + f(w_2) = 0$$

$$f(w_1 + w_2) = 0 \quad c.v.d$$

- Chiuso rispetto al prodotto esterno

$w \in \ker f \qquad a \in K$

$$f(w) = 0$$

$$a \cdot f(w) = 0$$

$$f(a \cdot w) = 0 \quad c.v.d$$

Teorema sul nucleo e iniettività

Un'applicazione lineare f è iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$

$\Rightarrow$ Ip. f è iniettiva   Ts $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

Prendo un qualsiasi vettore del nucleo e dimostro che è uguale a 0_W

$w \in \operatorname{Ker} f$ $f(w) = 0_W$ Essendo f iniettiva a immagini uguali corrispondono vettori uguali.

$f(0_V) = 0_W$

Quindi $w = 0_V$ c.v.d

$\Leftarrow$ IP. $\operatorname{Ker} = \{0\}$ Ts. f è iniettiva

Prendiamo le immagini di due vettori del dominio e dimostriamo che sono uguali

$v_1, v_2 \in V$ $f(v_1) = f(v_2)$

$f(v_1) - f(v_2) = 0$

$f(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} f$

Siccome $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ allora $v_1 - v_2 = 0_W \Rightarrow v_1 = v_2$

c.v.d

Teorema Autospazio

$$V_\lambda = \ker f_\lambda$$

Si dimostra che $V_\lambda \subseteq \ker f_\lambda$ e che $V_\lambda \supseteq \ker f_\lambda$

$v \in V_\lambda \Rightarrow f(v) = \lambda v$

$f(v) - \lambda v = 0$

APPLICO LA DEFINIZIONE

$f_\lambda(v) = 0 \Rightarrow v \in \ker f_\lambda$

c.v.d

$v \in \ker f \Rightarrow f_\lambda(v) = 0$

$f(v) - \lambda v = 0$

$f(v) = \lambda v \Rightarrow v \in V_\lambda$ c.v.d

Quindi $V_\lambda = \ker f_\lambda$