LEZIONE 3

3.1 IL METODO MASTER

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \quad , a, b \text{ cost.}$$

Driving function: $f(n)$

Watershed function: $\boxed{w(n) = n^{\log_b a}}$

(THM MASTER): Siano $a>0$ e $b>1$ costanti, $f(n)$ driving function definita e nonnegativa su tutti i reali suff. grandi.

Sia $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, $\quad (\star)$

con $aT\left(\frac{n}{b}\right) = a' T\left(\lceil \frac{n}{b} \rceil\right) + a'' T\left(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor\right)$, $\exists\, a', a'' > 0 : a' + a'' = a$.

Allora:

1. Se $\exists$ una costante $\varepsilon > 0$: $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;
2. Se $\exists$ una costante $k \geq 0$: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log^k n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log^{k+1} n)$;
3. Se $\exists$ una costante $\varepsilon > 0$: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ + f soddisfa la condizione di regolarità, $\exists\, c < 1$: $a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$.

ALBERO DI RICORSIONE

caso 1 $\Leftrightarrow$ la watershed function cresce asintoticamente più velocemente della driving function $\leftrightarrow$ il costo dei livelli cresce almeno geometricamente dalla radice alle foglie e il costo delle foglie domina il costo totale dei nodi interni.

$w(n)$ deve essere polinomialmente più grande (asintoticamente) di $f(n)$, di un fattore $\Theta(n^{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$

caso 2 $\leftrightarrow$ la watershed function cresce asintoticamente in maniera simile alla driving function. $\leftrightarrow$ Tutti i livelli dell'albero hanno approssimativamente lo stesso costo, $\Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$ – e ci sono $\Theta(\log n)$ livelli.

La driving function cresce più rapidamente della watershed function di un fattore $\Theta(\log^k n)$ per $k>0$.

caso 3 $\leftrightarrow$ la watershed function cresce asintoticamente più lentamente della driving function + condizione di regolarità $\leftrightarrow$ Il costo del livello diminuisce almeno geometricamente, il costo della radice domina quello dei nodi interni.

La driving function è asintoticamente più grande della watershed function di un fattore polinomiale $\Theta(n^{\varepsilon})$, $\varepsilon>0$

<u>Oss</u>: Nei casi 1 e 3 $w(n)$ e $f(n)$ devono essere polinomialmente separate, ovvero separate da $\Theta(n^{\varepsilon})$, $\varepsilon>0$

<u>Esempio</u>:

$$T(n) = 4\,T\left(\frac{n}{2}\right) + \underbrace{n^{1.99}}_{f(n)}$$

$$w(n) = n^{\log_2 4} = n^2$$

$$\varepsilon = 0.01$$

$$f(n) = n^{1.99} = n^{2-0.01} = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right).$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

3.2 Esercizi

Ex 1:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + \underbrace{n}_{f(n)}$$

$$w(n) = n^{\log_3 9} = n^2$$

$$f(n) = O(n^{2-\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon}}}) \xrightarrow[\text{caso 1}]{\varepsilon \le 1} T(n) = \Theta(n^2)$$

Es: $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + \underbrace{n \log n}_{f(n)}$, $w(n) = n^{\log_4 3} = n^{0.793}$

$$f(n) = n \log n = n^{0.793 + \overset{0.207}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon}}} \cdot \underset{\overset{\vee}{1}}{\log n} = \Omega(n^{0.793+\varepsilon}) \qquad \varepsilon \approx 0.207$$

$\exists\, c < 1$:

$$a f\left(\frac{n}{b}\right) \le c f(n)$$

$$3 \frac{n}{4} \log \frac{n}{4} \le c \; n \log n$$

$$\frac{3}{4} n (\log n - \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\log 4}) \le c \; n \log n \qquad c = \frac{3}{4}$$

$\rightarrow$ caso 3 $\rightarrow$ $T(n) = \Theta(n \log n)$

Ex 3:

$$T(n) = T\left(\frac{2}{3} n\right) + \underbrace{1}_{f(n)}$$

$$w(n) = n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0 = 1$$

$$f(n) = 1 = \Theta(1 \cdot \log^0 n) \xrightarrow[\text{caso 2}]{k=0} T(n) = \Theta(\log n)$$

Ex 4 (eq. ricorrenze di merge sort)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \underbrace{\Theta(n)}_{f(n)}$$

$$w(n) = n^{\log_2 2} = n$$

$$k = 0$$

$$f(n) = \Theta(n) = \Theta(\underset{w(n)}{\underset{\parallel}{n}} \cdot \log^{k} n) \xrightarrow[\text{caso 2}]{} T(n) = \Theta(n \log n).$$