

## Guida su Teoria e Esercizi

### Elementi di Analisi Matematica 1

## Prerequisiti

### Funzioni goniometriche

Angolo	sin	cos
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

## Numeri complessi

- $i \rightarrow$  unità immaginaria
- Rappresentazione:
  - Cartesiana:  $z = a + ib$ 
    - Parte reale:  $a = \rho \cos \theta$
    - Parte immaginaria:  $b = \rho \sin \theta$
  - Polare o Trigonometrica:  $z = [\rho \cos \theta + i \rho \sin \theta] = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ 
    - Modulo:  $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
    - Argomento:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & \text{se } a > 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & \text{se } a < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \text{ e } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \text{ e } b < 0. \end{cases}$$

- Esponenziale:  $z = \rho e^{i\theta}$
- Somma:
  - $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Prodotto:
  - $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$
  - $\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \rho_1 \rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$
- Potenza:  $z = \rho e^{i\theta} \quad z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$
- Radice di  $w$ :  $z^n = w \rightarrow z = \sqrt[n]{w} \quad z = \rho e^{i\theta} \quad w = r e^{i\phi}$ 
  - $|z| = \rho = \sqrt[n]{r}$
  - $\arg z_k = \theta_k = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$  con  $k = 0, 1, \dots, n-1$
- Coniugato di  $z$ :
  - $z = a + ib \quad \bar{z} = a - ib$
  - $z = \rho e^{i\theta} \quad \bar{z} = \rho e^{-i\theta}$
- Potenza unità immaginaria  $i$ :
  - $i^{4n} = 1$
  - $i^{4n+1} = i$

- $i^{4n+2} = -1$
- $i^{4n+3} = -i$
- $\forall n \in \mathbb{N}$
- Risoluzione Equazioni:
  - Si può usare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, intendendo la radice quadrata come radice complessa.
  - Usando la definizione di potenza o radice (nel caso di  $z^\alpha = q$  con  $z, q \in \mathbb{C}$  e  $\alpha \in \mathbb{N}$ )
  - Scomponendo  $z$  in  $a + ib$  e ponendo un sistema del tipo:
  - (la  $i$  scompare, sono calcoli algebrici nel campo reale)

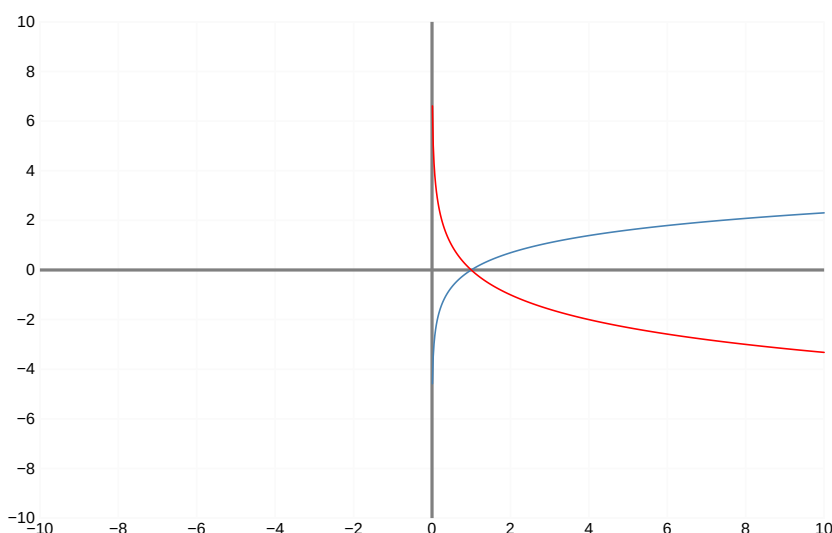
$$\begin{cases} \text{parte reale del primo membro} = \text{parte reale del secondo membro} \\ \text{parte immaginaria del primo membro} = \text{parte immaginaria del secondo membro} \end{cases}$$

## Insiemi

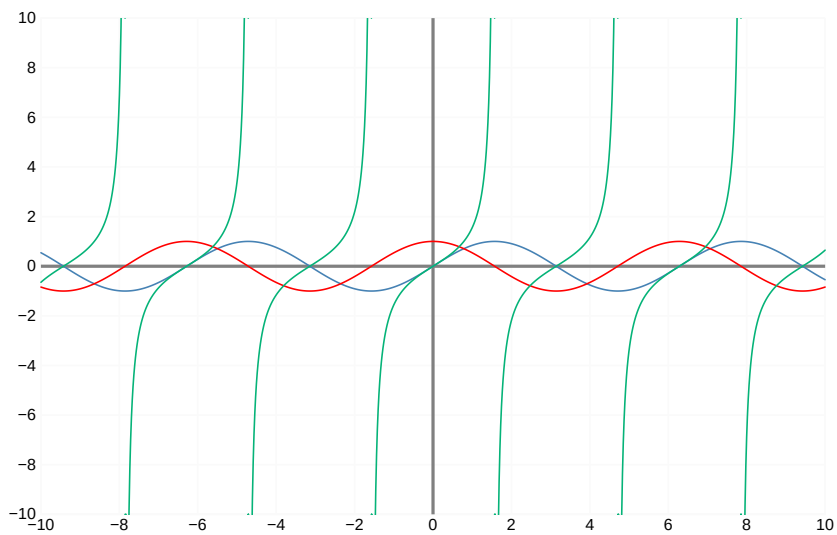
- Definizioni Teoriche
  - **Maggiorante:** dato  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{R}$  è un **maggiorante** dell'insieme  $X$  se  $m \geq x \forall x \in X$
  - **Estremo Superiore:** dato  $X \subseteq \mathbb{R}$  un insieme limitato superiormente,  $y \in \mathbb{R}$  è un **estremo superiore** di  $X$  se  $y$  è un maggiorante di  $X$  e  $y$  è il più piccolo maggiorante di  $X$ . Di un insieme non limitato superiormente, l'estremo superiore è  $+\infty$ . Di un insieme vuoto è  $-\infty$ .
  - **Massimo** (di un insieme): dato  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  è il **massimo** di  $X$  se  $y$  è l'estremo superiore di  $X$  e  $y \in X$
  - **Massimo Assoluto** (di una funzione): data una funzione  $f$ ,  $x_0$  è un punto di massimo assoluto di  $f$  (e  $f(x_0)$  è il massimo assoluto) se per ogni  $x \in \text{Dom}(f)$  risulta che  $f(x) \leq f(x_0)$ .
  - **Massimo Relativo** (di una funzione): data una funzione  $f$ ,  $x_0$  è un punto di massimo relativo di  $f$  (e  $f(x_0)$  è il massimo relativo) se esiste almeno un intorno  $B(x_0, \delta) \subset \text{Dom}(f)$  (di raggio  $\delta$  e centro in  $x_0$ ) tale che per ogni  $x \in B(x_0, \delta)$  risulta che  $f(x) \leq f(x_0)$ .
  - **Intervallo chiuso a destra:** se l'estremo destro è incluso nell'intervallo
  - **Intervallo aperto a destra:** se l'estremo destro è escluso dall'intervallo
  - **Intervallo illimitato superiormente:** se l'estremo superiore è  $+\infty$
  - **Intervallo limitato superiormente:** se l'estremo superiore è  $c \in \mathbb{R}$

## Funzioni

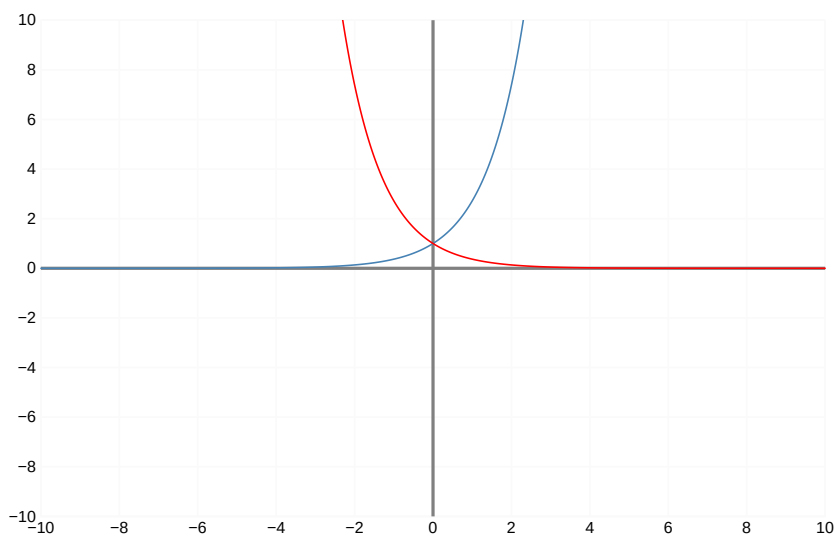
- Logaritmo con base  $> 1$  (blu) e base  $< 1$  (rosso)



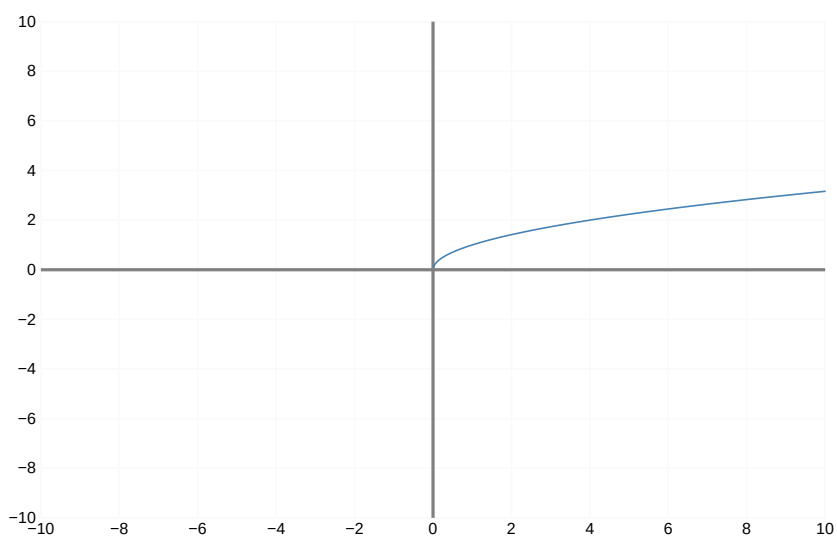
- Seno (blu), coseno (rosso) e tangente (verde)



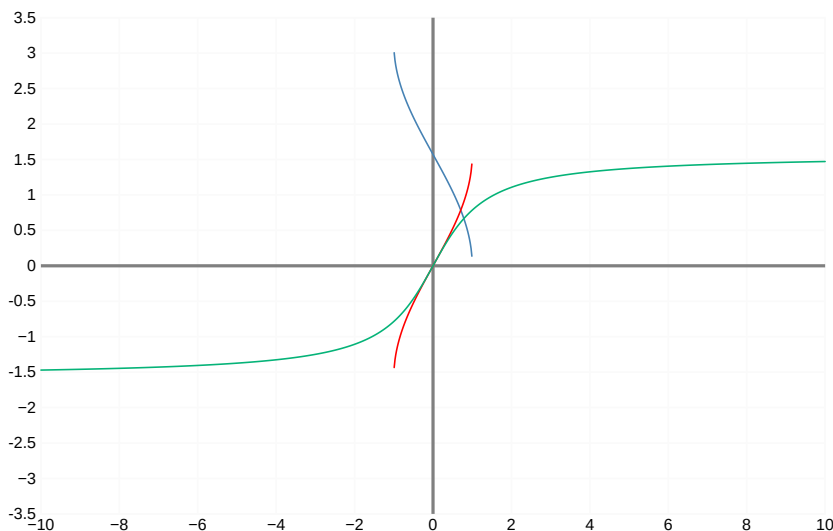
- Potenza con base  $> 1$  (blu) e base  $< 1$  (rosso)



- Radice quadrata



- Arcocoseno (blu), Arcoseno (rosso), Arcotangente (verde)



## Limiti

- Definizione
  - $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
- Teorema di unicità del limite
- Teorema del confronto (sono tre, il terzo è detto "Teorema dei Carabinieri")
  - se  $f(x) \leq g(x)$  allora:
    - se  $f(x) \rightarrow l$  e  $g(x) \rightarrow m$  allora  $l \leq m$
    - se  $f(x) \rightarrow +\infty$  allora  $g(x) \rightarrow +\infty$
  - se  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  allora:
    - se  $f(x) \rightarrow l$  e  $h(x) \rightarrow l$  allora  $g(x) \rightarrow l$
- Teorema di Weierstrass
  - Sia  $f$  una funzione continua con dominio  $K \subseteq \mathbb{R}$  chiuso e limitato, allora  $f$  ha massimo e minimo.
- Teoria degli Infinitesimi (o "o piccolo",  $O$  "o grande")
- Limiti Notevoli
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$
  - $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- Calcolo Limiti
  - Algebra dei limiti (regole):
    - Il limite della somma è uguale alla somma dei limiti
    - Il limite del prodotto di una funzione per una costante è uguale alla costante per il limite della funzione
    - Il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti
    - Il limite del rapporto è uguale al rapporto dei limiti
    - Si può passare il limite alla funzione composta
  - Risoluzione per sostituzione
    - Può avvenire se la funzione in questione è continua (e  $x$  tende a un valore finito). Si utilizzano le regole dell'algebra dei limiti.
  - Se la funzione non è continua in un punto si calcolano limite destro e sinistro. Se non coincidono il limite non esiste.

- Sviluppi di Taylor

## Derivate

- Definizione (limite del rapporto incrementale)
  - $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
- Derivate Fondamentali
  - Costante:  $f(x) = k \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = 0$
  - Variabile:  $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
  - Potenza:  $f(x) = x^s, s \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = s x^{s-1}$
  - Esponenziale:  $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = a^x \ln a$
  - Logaritmo:  $f(x) = \log_a(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
  - Valore Assoluto:  $f(x) = |x| \rightarrow f'(x) = \frac{|x|}{x}$
  - Seno:  $f(x) = \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x)$
  - Coseno:  $f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)$
  - Tangente:  $f(x) = \tan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- Condizione di derivabilità
  - Una funzione è derivabile quando il limite del rapporto incrementale esiste ed è finito.
  - Se non è derivabile ci si ritrova (nella maggior parte dei casi) in:
    - un punto angoloso (ad esempio  $|x|$ )
    - una cuspide (ad esempio  $\sqrt{|x|}$ )
    - un punto di flesso a tangente verticale (ad esempio  $\sqrt[3]{x}$ )
  - Individuare i punti di non derivabilità:
    1. Se un punto non appartiene al dominio della derivata prima allora non è derivabile.
    2. Vanno verificati i "punti sospetti". I punti sospetti sono quei punti in cui la funzione potrebbe non essere derivabile. Ad esempio, se una funzione  $f$  contiene  $|x|$ , potrebbe non essere derivabile in  $x = 0$  (anche se appartiene al dominio!). Si calcola il limite della derivata prima nel punto. Se quest'ultimo esiste ed è finito, allora la funzione è derivabile in quel punto. Non vale il contrario. Devono valere le ipotesi del teorema di Darboux (in EAM1 dovrebbero essere sempre verificate, quindi non viene enunciato)
      - I punti sospetti sono (in  $x = 0$ ) nelle funzioni:  $|x|, \sqrt{x}$
    3. Se non sono verificate le ipotesi del teorema di Darboux, si è obbligati a calcolare il limite del rapporto incrementale. La funzione è derivabile in quel punto se e solo se esiste il limite ed è finito.
  - La somma/differenza di due funzioni derivabili è derivabile.
  - Il prodotto/quotiente di due funzioni derivabili è derivabile.
  - La composizione di due funzioni derivabili è derivabile.
- Calcolo Derivate
  - La derivata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione
  - La derivata della somma/differenza di funzioni è uguale alla somma/differenza delle singole derivate.
  - La derivata del prodotto di due funzioni è uguale alla somma del prodotto tra la prima funzione derivata per la seconda non derivata, e la prima funzione non derivata per la seconda derivata
    - $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
  - La derivata del quoziente di due funzioni
    - $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
  - La derivata della funzione composta

- $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
- Teorema di Fermat
  - Se un punto  $x_0$  è estremo relativo allora  $f'(x_0) = 0$
- Teorema di Rolle
  - Se in un intervallo  $[a, b]$  la funzione  $f$  è continua in  $[a, b]$ , derivabile in  $]a, b[$  e  $f(a) = f(b)$  allora  $\exists c$  tale che  $f'(c) = 0$
- Teorema di Lagrange
  - Se in un intervallo  $[a, b]$  la funzione  $f$  è continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$  allora  $\exists c$  tale che  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$
- Teorema di Weierstrass
  - Se in un intervallo  $[a, b]$  chiuso e limitato la funzione  $f$  è continua allora  $f$  ammette un massimo e un minimo (assoluti)
- Teorema di De L'Hôpital
  - Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  porta a una forma indeterminata del tipo  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$  allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

## Studio di funzione

- Dominio
  - Frazioni: denominatore  $\neq 0$
  - Radici a indice pari: argomento  $\geq 0$
  - Logaritmi: base e argomento  $> 0$ , base  $\neq 1$
  - arccos, arcsin: argomento in  $[-1, +1]$
- Simmetria (facoltativo):
  - La funzione è "dispari" (simmetria rispetto all'origine) se  $f(-x) = -f(x)$
  - La funzione è "pari" (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) se  $f(-x) = f(x)$
  - *Individuare una simmetria porta un grosso vantaggio: consente di studiare la funzione per  $x > 0$  e di considerarla senza valori assoluti, se presenti.*
- Limiti nei punti di frontiera del dominio per il calcolo degli asintoti:
  - Verticale:
    - si verifica quando  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$
    - Equazione:  $x = x_0$
    - Possono essere 0, qualsiasi numero o infiniti
  - Orizzontale:
    - si verifica quando  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$
    - Equazione:  $y = k$
    - Possono essere 0, 1 o 2.
  - Obliquo:
    - esiste soltanto se non esiste un asintoto orizzontale (se lo cerco a  $+\infty$  non deve esistere l'asintoto orizzontale a  $+\infty$ )
    - si verifica quando:
      - $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$
      - $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$
    - Equazione:  $y = mx + q$
    - Possono essere 0, 1 o 2
- Monotonia
  - si calcola  $f'(x)$  e si studia il segno.
  - Dove  $f'(x) > 0$  la funzione è crescente (viceversa è decrescente).

- Convessità
  - si calcola  $f''(x)$  e si studia il segno
  - Dove  $f''(x) > 0$  la funzione è convessa (viceversa è concava).
    - (convessa ha il grafico simile a una **U**)
- Calcolo esplicito di qualche valore:
  - serve ad esempio per sapere il segno della funzione in un punto.

## Successioni Ricorsive

$$\begin{cases} a_n = \lambda \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

- Cosa sono le funzioni  $f$  e  $\phi$ 
  - La funzione  $f$  rappresenta la legge della successione ( $a_{n+1} = f(a_n)$ )
  - La funzione  $\phi(t) = f(t) - t$ . Non è altro che  $a_{n+1} - a_n$ .
- Studio di  $\phi$ 
  - La funzione  $\phi$  serve per calcolare i punti fissi e la monotonia della successione.
  - **Teorema:** Se la successione non è divergente, converge a un punto fisso della successione.
  - I punti fissi si calcolano ponendo  $\phi(t) = 0$  (sono gli zeri di  $\phi$ ).
  - Si studia il segno di  $\phi$  per poterne studiare la monotonia.
  - La monotonia suggerisce il possibile limite della successione
- Studio degli intervalli della successione
  - Si studia  $f'$  (si calcolano massimi e minimi).
  - Si studia l'intervallo del codominio rispetto a quello del dominio dove si trova  $\lambda$ .
    - Si calcolano massimo e minimo del codominio nell'intervallo di  $\phi$  in cui si trova  $\lambda$ .
    - Se ad esempio otteniamo:  $f(]0, 1[) = ]1, +\infty[$  con  $\lambda \in ]0, 1[$ , siamo costretti a calcolare anche massimi e minimi in  $]1, +\infty[$ . Se  $f(]1, +\infty[) = ]1, +\infty[$ , allora per ricorsività tutta la successione è contenuta in  $]1, +\infty[$ .
    - Si guarda quindi a cosa tende la successione nell'intervallo  $]1, +\infty[$  (quindi si guarda a cosa tende  $\phi$ )
  - Se è richiesto lo studio della successione al variare di  $\lambda$ , si pone  $\lambda \in$  a ogni intervallo di  $\phi$ .

### 🔍 Come capire se c'è un errore

Poniamo caso che  $a_0 = 1$ .

In seguito allo studio di  $f$  si scopre che  $f(]0, 2[) = ]0, 3[$

**C'è un errore di calcolo.** Quando accade che il codominio di un intervallo non è un sott'insieme di nessun intervallo, allora il metodo sopra citato non funziona. Tutti le successioni di EAM1 sono però risolvibili con questo metodo, quindi dev'esserci un errore di calcolo.

*Negli esercizi della seconda sessione 2023 in alcuni esercizi risulta che il dominio dell'intervallo è un sottoinsieme del codominio. In questi casi bisogna procedere allargando arbitrariamente gli estremi dell'intervallo del dominio.*

### ⚠ Non mettere $\lambda$ in esercizi che non lo prevedono

Anche per esercitazione, non ha senso mettere  $\lambda$  in esercizi che hanno un numero finito come  $a_1$ . Alcuni esercizi sono risolvibili con il metodo sopra citato soltanto per alcuni valori di  $a_1$ .