Lezione del 2 ottobre 2023

lunedì 2 ottobre 2023 10:25

Primitive di una funzione.

Sia

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$

Definizione

Diremo che f è dotata di primitive in (a,b) se esiste una funzione

$F : (a,b) \to \mathbb{R}$

tale che

i) F derivabile in (a,b)

ii) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

La funzione F si chiama primitiva di f in (a,b).

Quindi:

$$\boxed{F \text{ primitiva di } f \text{ in } (a,b) \overset{def}{\iff} \exists F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)}$$

Ex 1.

$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = 1 \quad " \qquad F(x) = x + c, \quad "$

$f(x) = x^4 \quad " \qquad F(x) = \frac{x^5}{5} + c \quad "$

$f(x) = e^x \quad " \qquad F(x) = e^x + c, \quad "$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \qquad F(x) = \log|x| + c \quad "$

$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad F(x) = -\cos x + c \quad "$

$f(x) = \cos x \qquad F(x) = \operatorname{sen} x + c \quad "$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad F(x) = \operatorname{arctg} x + c \quad "$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad F(x) = \operatorname{arcsen} x + c$

Teorema 1 (Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo.)

Hp:

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a,b)

F primitiva di f in (a,b)

$\Downarrow$

Ts: Tutte e sole le primitive di f in (a,b) sono le funzioni del tipo:

$F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Dim.

1) Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x)+c$, con $c \in \mathbb{R}$ sono primitive di f in (a,b)

$$\exists D(F(x)+c) = F'(x) + 0 = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

F è derivabile, $c \in \mathbb{R}$ $\Downarrow$ $F+c$ è derivabile.

regola di derivazione della funzione somma

perché F è primitiva di f. per ipotesi

$\Downarrow$

$F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$ è primitiva di f in (a,b)

2) dimostro che le funzioni del tipo $F(x)+c$ sono le $\boxed{\text{SOLE}}$

Questo equivale a provare che se

$G : (a,b) \to \mathbb{R}$

è un'altra primitiva di f in (a,b)

allora

$\exists c \in \mathbb{R} : \quad G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in (a,b)$

Considero la funzione

$G(x) - F(x)$

Essa è derivabile in (a,b) e $\forall x \in (a,b)$ si ha

$$D[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$\Downarrow$

perché G e F sono entrambe primitive di f in (a,b)

Per uno dei corollari del th. di Lagrange.

$\Downarrow$

$G(x) - F(x) = \text{cost} \quad \forall x \in (a,b)$