#university #studying #subject-2103

Guida su Teoria ed Esercizi

Elementi di Analisi Matematica 2

1 - Integrali Indefiniti

Primitive

Definizione

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.
f è dotata di primitive in (a,b) se $\exists F:(a,b)\to\mathbb{R}$ tale che

1. F è derivabile in (a,b)
2. $F'(x)=f(x)\quad\forall x\in(a,b)$

Nota

- Non tutte le funzioni hanno primitive (es. la funzione segno)
- Una funzione continua ha primitive. Una funzione non continua non implica il non avere primitive. La continuità è una condizione sufficiente, ma non necessaria.

Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo

Enunciato

Ipotesi
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ dotata di primitive in (a,b)
F primitiva di f in (a,b)

Tesi
Tutte e sole le funzioni primitive di f in (a,b) sono le funzioni del tipo:

$$F(x)+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

Dimostrazione

1. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x)+c$, con $c\in\mathbb{R}$ sono primitive di f in (a,b)

$$\exists\, D[F(x)+c]=F'(x)+0=f(x)$$

2. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x)+c$ sono le sole primitive.
Se $G:(a,b)\to\mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f in (a,b) allora $\exists\, c\in\mathbb{R}$ tale che $G(x)=F(x)+c\quad\forall x\in(a,b)$
Consideriamo la funzione $G(x)-F(x)$. Essa è derivabile in (a,b) e

$$D[G(x)-F(x)]=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

Il 2° corollario di Lagrange dice: "*se due funzioni hanno la stessa derivata in un intervallo, esse differiscono per una costante*".

Quindi, $G(x) - F(x) = \text{costante} \quad \rightarrow \quad G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$

Integrale Indefinito

Definizione

Si chiama **Integrale indefinito** di f l'insieme formato dalle primitive di f in (a, b) se f è dotata di primitive, l'insieme vuoto se f non ha primitive in (a, b).

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha primitive in } (a, b) \\ \{F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}\} & \text{se } F \text{ è una primitiva di } f \text{ in } (a, b) \end{cases}$$

Integrali Indefiniti Notevoli

($c \in \mathbb{R}$)

- $\int 0\,dx = c$
- $\int 1\,dx = x + c$
- $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq 0$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^x}{\ln|x|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \alpha \neq 0$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

Integrali di Funzioni Composte

- $\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- *gli altri sono uguali a quelli notevoli ma con $x = f(x)$, tutto per $f'(x)$.*

Proprietà di Omogeneità

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
$k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

Tesi

1. kf è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

Dimostrazione

1. Per ipotesi f è dotata di primitive in (a,b) e sia F una sua primitiva.

$$\exists\, D[k\cdot F(x)] = k\cdot F'(x) = k\cdot f(x) \quad \forall x\in(a,b)$$

2. Per provare la 2 si dimostrano le due inclusioni.
   Si prova che $\int k\cdot f(x)\,dx \subseteq k\cdot\int f(x)\,dx$

$G\in\int k\cdot f(x)\,dx$
$\exists G'(x) = k\cdot f(x)$

Dobbiamo provare che $G\in k\cdot\int f(x)\,dx$, quindi $G = k\cdot \text{primitiva di f}$
Se $k\neq 0$ possiamo dire che $G(x) = k\cdot\left[\frac{G(x)}{k}\right]$

Se proviamo che $\left[\frac{G(x)}{k}\right]$ è uguale a una primitiva di f in (a,b), allora abbiamo provato che $G(x)\in k\cdot\int f(x)\,dx$.

$D\left[\frac{G(x)}{k}\right] = \frac{1}{k}\cdot G'(x) = \frac{1}{\cancel{k}}\cdot[\cancel{k}\cdot f(x)] = f(x)$

In conclusione, $\frac{G(x)}{k}$ è primitiva di f in (a,b), quindi $G\in k\cdot\int f(x)\,dx$

Proviamo adesso l'altra inclusione $k\cdot\int f(x)\,dx\subseteq\int k\cdot f(x)\,dx$

$G\in k\int f(x)\,dx$, quindi $G(x) = k\cdot F(x)$

Devo provare che G è una primitiva di $k\cdot F(x)$

$G'(x) = D[k\cdot F(x)] = k\cdot F'(x) = k\cdot f(x)$
Abbiamo dimostrato che G è una primitiva di $k\cdot f$

Proprietà di Linearità

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ dotate di primitive in (a,b)

Tesi

1. $f+g$ è dotata di primitive in (a,b)
2. $\int[f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

   ⚠ **Osservazione**
   Al secondo membro avviene la somma tra due insiemi, che di norma non è definita. Si intende invece l'insieme formato dalle funzioni che sono la somma di una delle primitive di f e una delle primitive di g.

3. $\int[f(x)+g(x)]\,dx = F(x) + \int g(x)\,dx$, con F primitiva di f

   ⚠ **Osservazione**
   Al secondo membro si intende che, quando si tratta di una somma con un integrale, è possibile omettere la costante.

Integrazione per decomposizione in somma

Enunciato

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive
$h, k \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli ($h^2 + k^2 > 0$)

Tesi

1. $h \cdot f + k \cdot g$ è dotate di primitive in (a, b)
2. $\int [h \cdot f(x) + k \cdot g(x)]\, dx = h \cdot \int f(x)\, dx + k \cdot \int g(x)\, dx$

Integrazione indefinita per parti

Enunciato

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili
$f' \cdot g$ dotata di primitive in (a, b)

Tesi

1. $f \cdot g'$ è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$

Dimostrazione

f e g sono derivabili, quindi lo è anche $f \cdot g$.
$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \forall x \in (a, b)$

Spostando di membro si ottiene: $f'(x) \cdot g(x) = D[f(x) \cdot g(x)] + f(x) \cdot g'(x)$

Si integrano entrambi i membri e per la proprietà di linearità si ottiene:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) + \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

$f(x)$ è detto **fattore finito**
$g(x)$ è detto **fattore differenziale**

Integrali indefiniti *ciclici*

Metodo risolutivo

Per risolvere un integrale del tipo:

$$\int f(x)\, dx = H(x) + \alpha \cdot \int f(x)\, dx, \quad \alpha \neq 1$$

È sufficiente portare al primo l'integrale e risolvere l'equazione isolandolo.

Metodo di Sostituzione

Enunciato

Ipotesi
$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ dotata di primitive in (a,b)
$\phi:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ derivabile in (α,β)
ϕ' continua in (α,β)
$Im\,\phi\subseteq(a,b) \qquad [\iff \phi(x)\in(a,b)\,\forall\,x\in(\alpha,\beta)]$

Tesi
1^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\,dx=\left(\int f(y)\,dy\right)_{y=\phi(x)}$$

Integrali di Polinomi Trigonometrici

Prerequisiti di Trigonometria

- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$
- $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
- $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\int\cos^n x\,dx$ oppure $\int\sin^n x\,dx$

n pari

1. Si scompone $\int\sin^{2n}x\,dx$ in $\int(\sin^2 x)^n\,dx$
2. Si trasforma $\sin^2 x$ in $\frac{1-\cos(2x)}{2}$ e si divide la frazione in $\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $n=2$, il cubo di binomio se $n=3$, ecc
4. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
5. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

n dispari

1. Si scompone $\int\sin^n x\,dx$ in $\int\sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx$
2. Si scompone $sin^{n-1}x$ in $(1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n-1}{2}=2$, il cubo di binomio se $\frac{n-1}{2}=3$, ecc
4. Si moltiplica ogni membro della parentesi appena svolta per il $\sin x$ iniziale.
5. Si procede utilizzando l'integrazione composta $\int[f(x)]^n\cdot f'(x)=\frac{f(x)^{n+1}}{n+1}+c$ e i vari metodi risolutivi.

$\int cos^n x\cdot\sin^m x\,dx$

$n=m$

1. Si trasforma $\int\sin^n x\cdot\cos^n x\,dx$ in $\int(\sin x\cdot\cos x)^n\,dx$
2. Si trasforma $\sin x\cdot\cos x$ in $\frac{1}{2}\sin 2x$
3. Si svolge la potenza elevando entrambi i fattori e ottenendo $\int\frac{1}{2^n}\sin^n 2x\,dx$

4. Si può portare fuori la costante $\frac{1}{2^n}$
5. Procedere ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con n e m entrambi pari

1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ di grado inferiore, scomponendolo in $(1 - cos^2)^{\frac{n}{2}}$
2. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n}{2} = 2$, il cubo di binomio se $\frac{n}{2} = 3$, ecc
3. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
4. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con almeno n oppure m dispari

1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ con il grado dispari. Se sono entrambi dispari è preferibile quello con il grado inferiore.
   supponiamo si sia scelto $\sin^n x$
2. Si scompone $\sin^n x$ in $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$.
3. Si procede come nel caso di $\int \sin^n x \, dx$ con n dispari dallo step 2

Integrali di Fratti Semplici

Caso 1: $\frac{1}{(ax+b)^n} \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

Metodo risolutivo

$n = 1:$

$$\frac{1}{(ax+b)^1} = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{(ax+b)} \cdot a \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$n > 1:$

$$\frac{1}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a} \cdot \int (ax+b)^{-n} \cdot a \, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Caso 2: $\frac{1}{(x^2+px+q)^n} \quad p, q \in \mathbb{R} : \Delta = p^2 - 4q < 0,\ n \in \mathbb{N}$

Metodo risolutivo

Il denominatore può essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot \frac{px}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\
&= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = && (4q - p^2 = -\Delta) \\
&= \frac{(2x+p)^2}{4} + \frac{-\Delta}{4} = \\
&= \frac{-\Delta}{4} \cdot \left[\frac{(2x+p)^2}{-\Delta} + 1\right] = \\
&= \frac{-\Delta}{4} \cdot \left[1 + \left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right] && (-\Delta > 0)
\end{aligned}$$

Quindi si può svolgere l'integrale facendo riferimento all'uguaglianza precedente e all'integrazione notevole dell'$\arctan$:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{-\frac{\Delta}{4}\cdot\left[1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right]}\,dx = \qquad \left(D\left[\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right] = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

$$= \frac{\cancel{4}}{-\Delta}\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{\cancel{2}}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}\cdot D\left[\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\left(\int \frac{1}{1+y^2}\,dy\right)_{y=\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Caso 3: $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ $\quad a,b\in\mathbb{R}, \quad p,q\in\mathbb{R}:\Delta=p^2-4q<0,\ n\in\mathbb{N}$

Metodo risolutivo

> **Nota**
>
> Se il numeratore è derivata del denominatore è sufficiente utilizzare l'integrazione fondamentale del $\ln$.

Se il numeratore non è derivata del denominatore, bisogna fare in modo che lo diventi.
Si procede quindi effettuando moltiplicazioni o somme di costanti e si procede utilizzando i vari metodi risolutivi sopra citati.

Integrali di Equazioni Razionali Fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$$

grado $[N(x)] \geq$ grado $[D(x)]$

Metodo risolutivo

È sufficiente effettuare la divisione tra polinomi finché non si ottiene un polinomio di grado inferiore al denominatore.

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

Si può quindi procedere con gli altri metodi risolutivi

grado $[N(x)] <$ grado $[D(x)]$

#TODO