27 novembre 2023

lunedì 27 novembre 2023 08:47

FUNZIONI COMPOSTE

(1) $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad t \in (a,b) \to \varphi(t) \in \mathbb{R}$

$g: A \to \mathbb{R}\ (a,b)$ $\quad (x,y) \in A \to g(x,y) \in \mathbb{R}\ (a,b)$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x,y) \in A \to g(x,y) \in (a,b) \to \varphi(g(x,y)) \in \mathbb{R}$

$\quad = f(x,y) \quad f: A \to \mathbb{R}$

(2) $\varphi : A \to \mathbb{R}$ $\quad (x,y) \in A \to \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$

$g_1, g_2 : (a,b) \to \mathbb{R}$ tali che $\forall\, t \in (a,b)$ $(g_1(t), g_2(t)) \in A$

$t \in (a,b) \to (g_1(t), g_2(t)) \to \varphi(g_1(t), g_2(t)) \in \mathbb{R}$

$\quad = f(t) \quad f: (a,b) \to \mathbb{R}$

$g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ $\quad g: (a,b) \to A \subseteq \mathbb{R}^2$ funzione vettoriale

$f(t) = \varphi(g(t))$

Per le funzioni composte del tipo (1) abbiamo il teorema sui limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$ Procedimento:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$ $\quad \left(x^2+y^2 < \varepsilon \text{ per } \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ con } \delta = \sqrt{\varepsilon} \right)$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ $\quad \left| \frac{\sin t}{t} - 1 \right| < \varepsilon$ per $|t| < \delta$

basta fare in modo che $x^2+y^2 < \delta$

cioè $\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\delta}$

il teorema allora sarà del tipo

$\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$

$g: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad g(x,y) \in (a,b)$ $\forall (x,y) \in A$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = t_0 \\ &\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \ell \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(g(x,y)) = \ell$$

PUÒ BASTARE SCRITTO COSÌ ? No !

TEOREMA

$\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$

$g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad g(x,y) \in (a,b)$ $\forall (x,y) \in A$

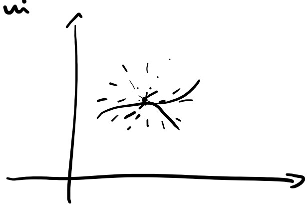
$(x_0,y_0) \in \mathcal{D}A$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = t_0 \in D(a,b) \qquad (\text{se } (a,b) \text{ è limitato})$$

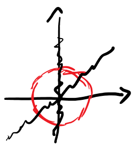
$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \ell$$

Allora, posto $f(x,y) = \varphi(g(x,y))$ si ha $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$

Restrizioni



$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (x_0,y_0) = (0,0)$$



cons. la restriz. alla retta di eq. $x=0$ $\quad f(0,y) = 0 \to 0$ $\neq$

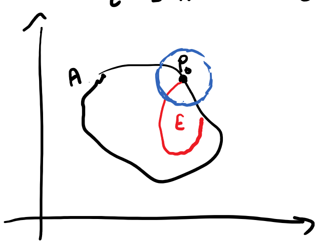
" " $y = x$ $\quad f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$

f non è reg. per $(x,y)\to(0,0)$ perché in ogni cerchio di centro l'origine ci sono infiniti punti in cui $f=0$ e infiniti punti in cui $f = \frac{1}{2}$

Teorema sulle restrizioni

IP $\quad f: A \to \mathbb{R} \qquad (x_0,y_0) \in DA \qquad (A \subseteq \mathbb{R}^2)$

$E \subseteq A \qquad (x_0,y_0) \in DE \qquad g = f_{|E}$



$P_0(x_0,y_0)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \quad (\pm\infty)$$

TS $\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \ell \quad (\pm\infty)$

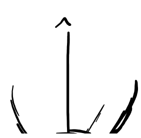
DIM. per Ip $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: se $(x,y) \in A \cap B((x_0,y_0),\delta)$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ si ha $|f(x,y)-\ell| < \varepsilon$

in partic. dato che $E \subseteq A$ se $(x,y) \in E \cap B((x_0,y_0),\delta)$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ si ha $|g(x,y) - \ell| < \varepsilon$.

Quasi sempre avremo $(x_0,y_0) = (0,0)$ e in tal caso cons. l'insieme $E_m = \{(x, mx)\}$ cioè le rette passanti per l'origine e prenderemo in esame la restriz. g_m a $A \cap E_m$

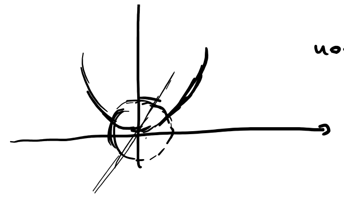
- se $\lim_{x\to 0} g_m$ dipende da m allora f NON E' REGOLARE
- " non dipende da m " f PUÒ ESSERE REGOLARE

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & y \neq x^2 \\ \cdot & \end{cases}$$



non è reg.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & y \neq x^2 \\ 1 & y = x^2 \end{cases}$$



non è reg.

ma $f(x, mx) = 0 \quad \forall x, \forall m$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad f(x, mx) = \frac{m x^3}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2} x \to 0$$

$\Rightarrow$ il limite di f FORSE è 0

conc. $$\underbrace{0}_{0} \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = |y| \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |y| \to 0$$ $\Rightarrow$ il limite è 0 per confronto

DISEGUAGLIANZE UTILI

$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ dato che $x^2 \leq x^2 + y^2$

$\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$

$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$ " $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \quad (\Leftrightarrow x^2 \leq x^2+y^2)$

$\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ " $0 \leq (|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|xy| \Rightarrow$
$\Rightarrow 2|xy| \leq x^2+y^2$

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f(x, mx) = \frac{m x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2} \text{ dipende da } m$$

$$\frac{xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \qquad f(x, mx) = \frac{m x^2}{\sqrt[3]{x^2+m^2x^2}} = \frac{m x^2}{\sqrt[3]{1+m^2}\,\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \frac{m}{\sqrt[3]{1+m^2}}\, x^{2-\frac{2}{3}} \to 0 \quad \forall m \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ il limite può essere 0.

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt[3]{}} = \underbrace{\frac{|xy|}{(x^2+y^2)}}_{\leq \frac{1}{2}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}} \to 0$$

II modo $$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt[3]{}} \right| = |x| \frac{|y|}{\sqrt[3]{}} = |x| \frac{|y|}{\sqrt{}} \frac{\sqrt{}}{\sqrt[3]{}} =$$

$$= \underbrace{|x|}_{0} \underbrace{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}_{0} \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \to 0$$

CONTINUITÀ

$f : A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad P_0(x_0, y_0) \in A$

f continua in P_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: se $(x,y) \in A \cap B(P_0, \delta)$ si ha $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$

se $(x_0, y_0) \in A \cap DA$ $\quad f$ cont. in $(x_0,y_0) \iff \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Teorema di Weierstrass

IP $\quad A \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto ($\iff$ chiuso e limitato)

$\quad f : A \to \mathbb{R}$ continua

TS $\quad f$ è dotata di minimo e di massimo

Calcolo differenziale

in EAM1 $\quad f : (a,b) \to \mathbb{R} \quad c \in (a,b)$

$h \neq 0$: $c + h \in (a,b)$

$h \in (a - c, b - c)$

$x \in (a,b) \quad x - c$

$\Delta f = f(x) - f(c) = f(c+h) - f(c)$

$\Delta x = x - c = h$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ per $x \to c$ opp per $h \to 0$

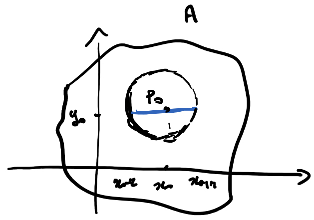
Derivate parziali:

$f : A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad P_0(x_0, y_0) \in \operatorname{int}(A)$

$\Downarrow$

$\exists r > 0 : B(P_0, r) \subseteq A$

cioè $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r \Rightarrow (x,y) \in A$



(x, y_0) : $x_0 - r < x < x_0 + r$

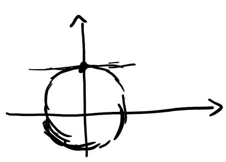
$\Downarrow$

$|x - x_0| < r$

$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y_0-y_0)^2} = |x - x_0| < r \Rightarrow (x, y_0) \in A$

$g(x) = f(x, y_0) \quad g :]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$

se $\exists \ g'(x_0)$ si dice che f ha derivata parziale rispetto a x in P_0 $\quad g'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}$



Se A è aperto:

se $\exists f_x(x,y) \ \forall (x,y) \in A \quad f$ si dice deriv. risp. a x in A