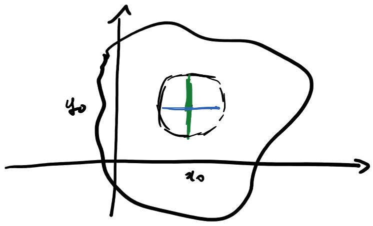
29 novembre 2023

mercoledì 29 novembre 2023 08:05

$P_0(x_0, y_0) \in \text{int}(A)$

(possiamo supporre A aperto)



$\exists\, r > 0 : \ B(P_0, r) \subseteq A$

$x_0 - r < x < x_0 + r \Rightarrow (x, y_0) \in A$

$g(x) = f(x, y_0) \qquad g :]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$

se $\exists\ g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$

$f_x : A \to \mathbb{R}$ se $\exists\ f_x(P_0)\ \forall P_0 \in A$

es. $f(x,y) = 2x^3 y - x y^2 + x^4 - y$

$f_x(x,y) = 6x^2 y - y^2 + 4x^3$

allo stesso modo si introduce $f_y(x_0, y_0) = h'(y_0)$

essendo $h :]y_0 - r, y_0 + r[\to \mathbb{R} \qquad h(y) = f(x_0, y)$

$f_y : A \to \mathbb{R}$ se $\exists\ f_y(P_0)\ \forall P_0 \in \text{int}(A)$

es. $f(x,y) = 2x^3 y - x y^2 + x^4 - y$

$f_y(x,y) = 2x^3 - 2xy - 1$

se $\exists\ f_x(P_0), f_y(P_0)$ la coppia $(f_x(P_0), f_y(P_0))$ ~~fa~~ dà luogo al

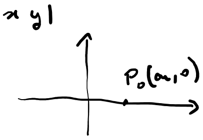
vettore GRADIENTE $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$

es. $f(x,y) = 2x^3 y - x y^2 + x^4 - y \qquad \nabla f(2,1) = (9, 11)$

ESEMPI

① $f(x,y) = |xy|$

es. se $x > 0, y > 0 \quad f(x,y) = xy \Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = y \\ f_y(x,y) = x \end{cases}$



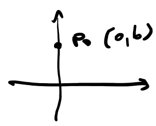
$P_0\ (a, 0) \qquad a \in \mathbb{R}$

$\exists\ f_x(a,0)\ ? \qquad g(x) = f(x, 0) = 0 \Rightarrow \exists\ f_x(a,0) = 0\ \forall a$

$\exists\ f_y(a,0)\ ? \qquad h(y) = |a||y| \Rightarrow \exists\ f_y(0,0) = 0$

$\nexists\ f_y(a,0)$ se $a \neq 0$

allo stesso modo si prova che

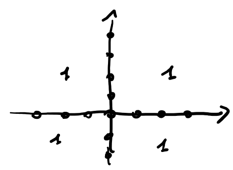


$f_y(0,b) = 0 \quad \forall b$

$f_x(0,0) = 0$

$\nexists\ f_x(0,b)$ se $b \neq 0$

② $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0 \\ 1 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$



non è cont. in $(0,0)$

$\exists\ f_x(0,0)\ ? \qquad g(x) = f(x, 0) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

$\exists\ f_y(0,0)\ ? \qquad h(y) = f(0, y) = 0 \Rightarrow f_y(0,0) = 0$

$\Rightarrow$ l'esistenza delle due derivate parziali NON implica la continuità!

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Supp. che $\exists f_x$ in A, se essa è derivabile le sue derivate vengono dette derivate seconde di f

f_{xx} (pura) $\qquad f_{xy}$ (mista)

allo stesso modo si introducono f_{yx} (mista) $\qquad f_{yy}$ (pura)

es. $f(x,y) = 2x^3y - xy^2 + x^4 - y$

$f_x(x,y) = 6x^2y - y^2 + 4x^3$ $\qquad f_y(x,y) = 2x^3 - 2xy - 1$

$f_{xx}(x,y) = 12xy + 12x^2$ $\qquad f_{yx}(x,y) = 6x^2 - 2y$

$f_{xy}(x,y) = 6x^2 - 2y$ $\qquad f_{yy}(x,y) = -2x$

$f_{xx}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x,y)}$ $\qquad f_{yy}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x,y)}$ $\qquad f_{xy}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{\dots}$

$f_{yx}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{\dots}$

Lemma di Schwarz (senza dim.)

IP $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad$ A aperto $\quad \exists$ in A f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}

$P_0 \in A$ $\quad f_{xy}, f_{yx}$ continue in P_0

TS $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$

---

esempio di funzione per cui $f_{xy} \neq f_{yx}$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ $\qquad f_x(x,y) = y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{2x(\cancel{x^2}+y^2-\cancel{x^2}+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$\exists f_x(0,0)$? $\quad f(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_x(0,0) = 0$

$\exists f_{xy}(0,0)$? $\quad f_x(0,y) = -y \quad \Rightarrow \quad f_{xy}(0,0) = -1$

$f_y(x,y) = x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{-2y(x^2+\cancel{y^2}+x^2-\cancel{y^2})}{(x^2+y^2)^2}$

$f(0,y) = 0 \qquad f_y(0,0) = 0$

$f_y(x,0) = x \quad \Rightarrow \quad f_{yx}(0,0) = 1 \neq f_{xy}(0,0)$

DIFFERENZIABILITÀ

Per le funzioni di una variabile abbiamo fatto così:

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad c \in (a,b) \quad \exists f'(c)$

$h \in (a-c, b-c)$ $\qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) \quad \Rightarrow$

$\frac{f(c+h)-f(c) - f'(c)h}{h} \to 0 \quad \Rightarrow \quad f(c+h)-f(c)-f'(c)h = o(h)$

$h \in (a-c, b-c)$ $\qquad h \to 0 \qquad h$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c) - f'(c)h}{h} = 0 \Rightarrow f(c+h)-f(c)-f'(c)h = o(h)$$

"o piccolo di h"

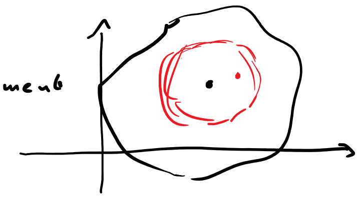
$f(c+h) - f(c) = \Delta f \qquad h = \Delta x$

$f'(c)h = df$ (differenziale di f)

se $f(x) = x$ $\quad df = h$
$\Rightarrow$ per una $\forall$ funzione
$df = f'(x)\, dx$

$\Rightarrow$ se $\exists f'(c)$ allora $\exists$ un polinomio di I grado nella variabile h, df, tale che $\Delta f - df = o(h)$

Traduciamo tutto ciò in due variabili



abbiamo bisogno di una coppia di incrementi (h,k)

$P_0(x_0, y_0) \rightsquigarrow (x_0+h,\ y_0+k)$

$(x_0,y_0) \in \text{int}(A) \Rightarrow \exists r>0 : B(P_0, r) \subseteq A$

$d((x_0+h, y_0+k), (x_0,y_0)) = \sqrt{h^2+k^2} = d((h,k),(0,0))$

$\Rightarrow$ se $0 < \sqrt{h^2+k^2} < r \Rightarrow (x_0+h, y_0+k) \in A$

$\Delta f = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$

DEF. f DIFFERENZIABILE in P_0 se $\exists\, l, m \in \mathbb{R}$: posto $df = lh + mk$ si abbia $\Delta f - df = o(\sqrt{h^2+k^2})$

cioè
$$\lim_{\substack{h\to 0\\k\to 0}} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - lh - mk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \qquad (1)$$

(se f è una funz di una variab. f diff $\Leftrightarrow$ f deriv)

TEOREMA 1

Se f è differenz. in P_0. Allora

i) f è cont. in P_0

ii) $\exists f_x(x_0,y_0) = l$, $\exists f_y(x_0,y_0) = m$

OSSERV. Allora se f è differenz. si avrà $df = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$
$= \langle \nabla f(P_0), (h,k) \rangle$

DIM.

i) TS $\Leftrightarrow \lim_{\substack{h\to 0\\k\to 0}} \Delta f = 0$

$$\Delta f = \Delta f - df + df = \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} \sqrt{h^2+k^2} + \overset{lh+mk}{df} \to 0 \Rightarrow TS$$

(con $\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$, $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$, $df \to 0$)

ii) dim che $\exists f_x(P_0) = l$ (per eserc. per la f_y)

TS $\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \ell$

dal limite (1) per $k=0$ si ottiene $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-\ell h}{|h|} = 0$ (2)

$\sqrt{h^2} = |h|$

$$\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-\ell h+\ell h}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-\ell h}{h} + \frac{\ell h}{h} = \underbrace{\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)-\ell h}{|h|}}_{\to 0} \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{= \pm 1} + \underbrace{\ell}_{\ell} \to \ell$$

Esempi

① $f(x,y) = |xy|$ avevamo visto prima che su $\vec{x}$ $\nexists f_y$ (·)
su $\vec{y}$ $\nexists f_x$ (·)

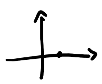
però $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

(·) $\Rightarrow f$ NON è differenz. nei punti $(a,0)$ e $(0,b)$ con $a \neq 0, b \neq 0$

è diff in $(0,0)$?

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|hk| - 0\cdot h - 0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \underbrace{|k|}_{\to 0} \to 0 \Rightarrow f \text{ è diff.}$$

② $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ studiamo la derivabilità e la differenziabilità nei punti degli assi



$\exists f_x(a,0)$? $f(x,0) = 0 \Rightarrow f_x(a,0) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$\exists f_y(a,0)$? $f(a,y) = \sqrt{|a||y|}$ $\nexists f_y(a,0)$ se $a \neq 0$
$f_y(0,0) = 0$

allo stesso modo $\nexists f_x(0,b)$ se $b \neq 0$
$f_x(0,0) = 0$
$f_y(0,b) = 0 \quad \forall b$

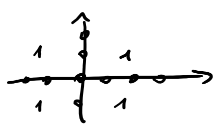
f NON è diff in $(a,0)$ $(a\neq 0)$ e in $(0,b)$ $(b \neq 0)$ perché in tali punti manca una derivata

f è diff in $(0,0)$? $\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{|hk|} - 0\cdot h - 0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{\frac{|hk|}{h^2+k^2}}$

$k = mh$ $\sqrt{\frac{|m|h^2}{h^2(1+m^2)}} = \sqrt{\frac{|m|}{1+m^2}} \Rightarrow$ non è reg.

f NON è diff in $(0,0)$

③ $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0 \\ 1 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$



$\exists$ le due der. in $(0,0)$ ma non è cont $\Rightarrow$ non è diff

TEOREMA 2 (teorema del differenziale totale) (CS per la diff)

IP $\quad f: A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad A$ ap.

in A $\exists\, f_x, f_y$ e sono continue in $P_0(x_0, y_0) \in A$

TS $\quad f$ è diff in P_0

OSSERV. 1) La condiz. è solo sufficiente, ad es. $|xy|$ è diff in $(0,0)$ ma non ci sono le derivate nei punti degli assi $\neq (0,0)$

2) il teorema vale anche se in P_0 esistono entrambe le derivate e una almeno esiste in un intorno di P_0 ed è continua in P_0

DIM. $\quad$ TS $\displaystyle \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:$ se $0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta$ si ha $\left|\frac{\Delta f - df}{\delta}\right| < \varepsilon$

Dato $\varepsilon > 0$, sicuramente $\exists\, \delta > 0$: se $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ si ha:

$$\begin{cases} (x,y) \in A \\ |f_x(x,y) - f_x(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f_y(x,y) - f_y(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Consideriamo (h,k): $0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta$

$$\frac{|\Delta f - df|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|f(x_0+h, y_0+k) \overset{*}{-} f(x_0,y_0) \overset{*}{-} f(x_0+h,y_0) \overset{*}{+} f(x_0+h,y_0) \overset{*}{-} f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

* appl. il teor. di Lagrange alla funz. $f(x_0+h, y)$ nell'intervallo di estremi y_0 e y_0+k, $\exists\, t \in$ a tale intervallo: $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) = k f_y(x_0+h, t)$

* appl il teor. di Lagrange a $f(x, y_0)$ nell'int. di estr. x_0, x_0+h
$\exists\, s \in$ a tale intervallo: $f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) = h f_x(s, y_0)$

quindi

$$\frac{|\Delta f - df|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|k f_y(x_0+h, t) + h f_x(s,y_0) - h f_x(x_0,y_0) - k f_y(x_0,y_0)|}{\sqrt{}} \leq$$

$$\leq \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \underbrace{|f_y(x_0+h, t) - f_y(x_0,y_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \underbrace{|f_x(s,y_0) - f_x(x_0,y_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\uparrow$

$< \frac{\varepsilon}{2}$ perché t è compreso fra y_0 e y_0+k si ha

$$d((x_0+h, t), (x_0,y_0)) = \sqrt{h^2 + \underbrace{|t-y_0|^2}_{\leq k}} \leq \sqrt{h^2+k^2} < \delta$$

Teorema di derivazione delle funzioni composte

$g: (a,b) \to \mathbb{R}^2$ (funzione vettoriale)

$g(t) = (g_1(t), g_2(t)) \qquad g_1, g_2: (a,b) \to \mathbb{R}$

g si dice derivabile in $c \in (a,b)$ se lo sono g_1, g_2 e

si def $g'(c) = (g_1'(c), g_2'(c))$

IP $\quad f: A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}^2$

$g: (a,b) \to A \qquad g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ (funz. vettor.)

$c \in (a,b) \qquad g$ der. in c

f differenziabile in $g(c)$

TS posto $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ $\quad F : (a,b) \to \mathbb{R}$,

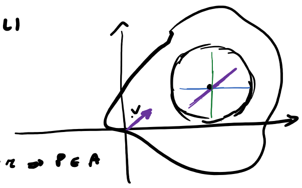
$$\exists\ F'(c) = \left(\nabla f(g_1(c), g_2(c)),\ (g_1'(c), g_2'(c)) \right)$$ prodotto scalare

$$= \left(\nabla f(g(c)),\ g'(c) \right)$$

$$= f_x(g_1(c), g_2(c))\, g_1'(c) + f_y(g_1(c), g_2(c))\, g_2'(c)$$

DIM. non la facciamo

DERIVATE DIREZIONALI



$\underline{v}$ versore $\Downarrow$ $v_1^2 + v_2^2 = 1$

$\underline{v}\ (v_1, v_2)$ (in viola)

$f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad A$ aperto

$P_0(x_0, y_0) \in A \Rightarrow \exists\, r > 0 : d(P, P_0) < r \Rightarrow P \in A$

$$d\left((x_0 + t v_1,\ y_0 + t v_2),\ (x_0, y_0) \right) =$$

$$= \sqrt{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} = |t| \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |t|$$

$|t| < r \Rightarrow P(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) \in A$ $\quad$ ($P \in$ al diametro del cerchio $B(P_0, r) \parallel \underline{v}$)

"diam. viola"

$F(t) = f(x_0 + t v_1,\ y_0 + t v_2)$ $\quad F :]t - r, t + r[\to \mathbb{R}$

F è la composizione fra f e la funz vettoriale

$g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ con $g_1(t) = x_0 + t v_1$

$g_2(t) = y_0 + t v_2$

DEF. Si dice che f è derivabile in P_0 lungo la direzione di $\underline{v}$ se F è deriv. nel punto $t = 0$

$$F'(0) = \left(\frac{df}{dv} \right)_{P_0} = f_v(P_0)$$

TEOR. Se f è diff in P_0 allora $\exists\ f_v(P_0)$ e si ha

$$f_v(P_0) = \left(\nabla f(P_0),\ v \right)$$

DIM. Basta appl. ad F il teor di deriv delle funz comp.

in partic. se $\underline{v} = (1, 0)$ $\quad F(t) = f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) = f(x_0 + t, y_0)$

$\Rightarrow$ si ritrova f_x

se $\underline{v} = (0, 1)$ $\quad$ " $\quad f_y$

Esemp ① $f(x,y) = 3x^2 y - x^3 + y^2 + xy$

$\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ $\quad f_v(1,2)$

$f_x(x,y) = 6xy - 3x^2 + y$ $\quad \nabla f(1,2) = (11, 8)$

$f_y(x,y) = 3x^2 + 2y + x$

$$f_v(1,2) = \left((11, 8),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{19}{\sqrt{2}}$$

② $f(x,y) = x^4 y^2 - 5y + 6xy^3 + 2x^2$ $\quad f_v(1,2)$

$\underline{v}$ versore della retta di eq. $2x - 3y + 6 = 0$

$\underline{v} = (3, 2)$ è un versore?

$|\underline{v}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \neq 1$ allora il

versore è $\underline{v}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$

$f_x(x,y) = 4x^3 y^2 + 6y^3 + 4x$ $\quad \nabla f(1,2) = (16 + 48 + 4,\ 4 - 5 + 72) =$

$$f_y(x,y) = 2x^4 y - 5 + 18 x y^2$$

$$\nabla f(1,2) = ([illegible])$$

$$= (68, 71)$$

$$f_{\underline{v}}(\cancel{1},2) = 68 \frac{3}{\sqrt{13}} + 71 \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{346}{\sqrt{13}}$$