#university #studying #subject-2103

Guida su Teoria ed Esercizi

Elementi di Analisi Matematica 2

1 - Integrali Indefiniti

Primitive

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
f è dotata di primitive in (a, b) se $\exists F : (a, b) \to \mathbb{R}$ tale che

1. F è derivabile in (a, b)
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Nota

- Non tutte le funzioni hanno primitive (es. la funzione segno)
- Una funzione continua ha primitive. Una funzione non continua non implica il non avere primitive. La continuità è una condizione sufficiente, ma non necessaria.

Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo

Teorema

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
F primitiva di f in (a, b)

Tesi
Tutte e sole le funzioni primitive di f in (a, b) sono le funzioni del tipo:

$$F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

1. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ sono primitive di f in (a, b)

$$\exists\, D[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

2. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$ sono le sole primitive.

Se $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f in (a, b) allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in (a, b)$
Consideriamo la funzione $G(x) - F(x)$. Essa è derivabile in (a, b) e

$$D[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Il 2° corollario di Lagrange dice: se due funzioni hanno la stessa derivata in un intervallo, esse differiscono per una costante.

Quindi, $G(x) - F(x) = \text{costante} \rightarrow G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$

Integrale Indefinito

mettere definizione

Integrali Indefiniti Notevoli

($c \in \mathbb{R}$)

- $\int 0 \, dx = c$
- $\int 1 \, dx = x + c$
- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq 0$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int \alpha^x \, dx = \frac{\alpha^x}{\ln|x|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \alpha \neq 0$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

Integrali di Funzioni Composte

- $\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) \, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- *gli altri sono uguali a quelli notevoli ma con $x = f(x)$, tutto per $f'(x)$.*

Proprietà di Omogeneità

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
$k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

Tesi

1. kf è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$

Dimostrazione

1. Per ipotesi f è dotata di primitive in (a, b) e sia F una sua primitiva.

$$\exists \, D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

2. Per provare la 2 si dimostrano le due inclusioni.
   Si prova che $\int k \cdot f(x) \, dx \subseteq k \cdot \int f(x) \, dx$

$G \in \int k \cdot f(x)\, dx$
$\exists G'(x) = k \cdot f(x)$

Dobbiamo provare che $G \in k \cdot \int f(x)\, dx$, quindi $G = k \cdot \text{primitiva di f}$
Se $k \neq 0$ possiamo dire che $G(x) = k \cdot \left[\frac{G(x)}{k}\right]$

Se proviamo che $\left[\frac{G(x)}{k}\right]$ è uguale a una primitiva di f in (a, b), allora abbiamo provato che $G(x) \in k \cdot \int f(x)\, dx$.

$D\left[\frac{G(x)}{k}\right] = \frac{1}{k} \cdot G'(x) = \frac{1}{\cancel{k}} \cdot [\cancel{k} \cdot f(x)] = f(x)$

In conclusione, $\frac{G(x)}{k}$ è primitiva di f in (a, b), quindi $G \in k \cdot \int f(x)\, dx$

Proviamo adesso l'altra inclusione $k \cdot \int f(x)\, dx \subseteq \int k \cdot f(x)\, dx$

$G \in k \int f(x)\, dx$, quindi $G(x) = k \cdot F(x)$

Devo provare che G è una primitiva di $k \cdot F(x)$

$G'(x) = D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$
Abbiamo dimostrato che G è una primitiva di $k \cdot f$

Proprietà di Linearità

✓ Enunciato

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive in (a, b)

Tesi

1. $f + g$ è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

   ⚠ Osservazione
   Al secondo membro avviene la somma tra due insiemi, che di norma non è definita. Si intende invece l'insieme formato dalle funzioni che sono la somma di una delle primitive di f e una delle primitive di g.

3. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = F(x) + \int g(x)\, dx$, con F primitiva di f

   ⚠ Osservazione
   Al secondo membro si intende che, quando si tratta di una somma con un integrale, è possibile omettere la costante.

Integrazione per decomposizione in somma

✓ Enunciato

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive

$h, k \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli ($h^2 + k^2 > 0$)

Tesi

1. $h \cdot f + k \cdot g$ è dotate di primitive in (a, b)
2. $\int [h \cdot f(x) + k \cdot g(x)]\, dx = h \cdot \int f(x)\, dx + k \cdot \int g(x)\, dx$

Integrazione indefinita per parti

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili
$f' \cdot g$ dotata di primitive in (a, b)

Tesi

1. $f \cdot g'$ è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$

Dimostrazione

f e g sono derivabili, quindi lo è anche $f \cdot g$.
$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \forall x \in (a, b)$

Spostando di membro si ottiene: $f'(x) \cdot g(x) = D[f(x) \cdot g(x)] + f(x) \cdot g'(x)$

Si integrano entrambi i membri e per la proprietà di linearità si ottiene:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) + \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

$f(x)$ è detto fattore finito
$g(x)$ è detto fattore differenziale

Integrali indefiniti *ciclici*

Metodo risolutivo

Per risolvere un integrale del tipo:

$$\int f(x)\, dx = H(x) + \alpha \cdot \int f(x)\, dx, \quad \alpha \neq 1$$

È sufficiente portare al primo l'integrale e risolvere l'equazione isolandolo.

Integrali di Polinomi Trigonometrici

Prerequisiti di Trigonometria

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$

- $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
- $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\int \cos^n x\, dx$ oppure $\int \sin^n x\, dx$

n pari

1. Si scompone $\int \sin^{2n} x\, dx$ in $\int (\sin^2 x)^n\, dx$
2. Si trasforma $\sin^2 x$ in $\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $n = 2$, il cubo di binomio se $n = 3$, ecc
4. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali .
5. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$\int \sin^6 x\, dx = \int (\sin^2 x)^3\, dx$

n dispari

$\int cos^n x \cdot \sin^m x\, dx$

$n = m$

assioma trigonometria

$n \neq m$ con n e m entrambi pari

$n \neq m$ con almeno n oppure m dispari