#university #studying #subject-2103

Guida su Teoria ed Esercizi

Elementi di Analisi Matematica 2

1. Integrali

Primitive

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
f è dotata di primitive in (a, b) se $\exists F : (a, b) \to \mathbb{R}$ tale che

1. F è derivabile in (a, b)
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a, b)$

Nota

- Non tutte le funzioni hanno primitive (es. la funzione segno)
- Una funzione continua ha primitive. Una funzione non continua non implica il non avere primitive. La continuità è una condizione sufficiente, ma non necessaria.

Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
F primitiva di f in (a, b)

Tesi
Tutte e sole le funzioni primitive di f in (a, b) sono le funzioni del tipo:

$$F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

1. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ sono primitive di f in (a, b)

$$\exists\, D[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

2. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$ sono le sole primitive.
   Se $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f in (a, b) allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che
   $G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in (a, b)$
   Consideriamo la funzione $G(x) - F(x)$. Essa è derivabile in (a, b) e

$$D[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Il 2° corollario di Lagrange dice: "*se due funzioni hanno la stessa derivata in un intervallo, esse differiscono per una costante*".

Quindi, $G(x) - F(x) = \text{costante} \quad \to \quad G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$

Integrale Indefinito

Definizione

Si chiama **Integrale indefinito** di f l'insieme formato dalle primitive di f in (a, b) se f è dotata di primitive, l'insieme vuoto se f non ha primitive in (a, b).

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha primitive in } (a,b) \\ \cancel{\{} F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \cancel{\}} & \text{se } F \text{ è una primitiva di } f \text{ in } (a,b) \end{cases}$$

Integrali Indefiniti Notevoli

$(c \in \mathbb{R})$

- $\int 0\,dx = c$
- $\int 1\,dx = x + c$
- $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq 0$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^x}{\ln|x|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \alpha \neq 0$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

Integrali di Funzioni Composte

- $\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- *gli altri sono uguali a quelli notevoli ma con $x = f(x)$, tutto per $f'(x)$.*

Proprietà di Omogeneità

Enunciato

Ipotesi
$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a,b)
$k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

Tesi

1. kf è dotata di primitive in (a,b)
2. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

Dimostrazione

1. Per ipotesi f è dotata di primitive in (a,b) e sia F una sua primitiva.

$$\exists\, D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

2. Per provare la 2 si dimostrano le due inclusioni.
   Si prova che $\int k \cdot f(x)\,dx \subseteq k \cdot \int f(x)\,dx$

$G \in \int k \cdot f(x)\,dx$
$\exists G'(x) = k \cdot f(x)$

Dobbiamo provare che $G \in k \cdot \int f(x)\,dx$, quindi $G = k \cdot \text{primitiva di f}$
Se $k \neq 0$ possiamo dire che $G(x) = k \cdot \left[\frac{G(x)}{k}\right]$

Se proviamo che $\left[\frac{G(x)}{k}\right]$ è uguale a una primitiva di f in (a,b), allora abbiamo provato che $G(x) \in k \cdot \int f(x)\,dx$.

$D\left[\frac{G(x)}{k}\right] = \frac{1}{k} \cdot G'(x) = \frac{1}{\cancel{k}} \cdot [\cancel{k} \cdot f(x)] = f(x)$

In conclusione, $\frac{G(x)}{k}$ è primitiva di f in (a,b), quindi $G \in k \cdot \int f(x)\,dx$

Proviamo adesso l'altra inclusione $k \cdot \int f(x)\,dx \subseteq \int k \cdot f(x)\,dx$

$G \in k\int f(x)\,dx$, quindi $G(x) = k \cdot F(x)$

Devo provare che G è una primitiva di $k \cdot F(x)$

$G'(x) = D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$
Abbiamo dimostrato che G è una primitiva di $k \cdot f$

Proprietà di Linearità

Enunciato

Ipotesi
$f, g:(a,b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive in (a,b)

Tesi

1. $f+g$ è dotata di primitive in (a,b)
2. $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

> ⚠ **Osservazione**
> Al secondo membro avviene la somma tra due insiemi, che di norma non è definita. Si intende invece l'insieme formato dalle funzioni che sono la somma di una delle primitive di f e una delle primitive di g.

3. $\int [f(x)+g(x)]\,dx = F(x) + \int g(x)\,dx$, con F primitiva di f

> ⚠ **Osservazione**
> Al secondo membro si intende che, quando si tratta di una somma con un integrale, è possibile omettere la costante.

Integrazione per decomposizione in somma

✓ Enunciato

Ipotesi
$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive
$h, k \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli ($h^2+k^2>0$)

Tesi

1. $h\cdot f + k\cdot g$ è dotate di primitive in (a,b)
2. $\int [h\cdot f(x) + k\cdot g(x)]\,dx = h\cdot\int f(x)\,dx + k\cdot\int g(x)\,dx$

Integrazione indefinita per parti

✓ Enunciato

Ipotesi
$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili
$f'\cdot g$ dotata di primitive in (a,b)

Tesi

1. $f\cdot g'$ è dotata di primitive in (a,b)
2. $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$

Dimostrazione

f e g sono derivabili, quindi lo è anche $f\cdot g$.
$D[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x), \quad \forall x \in (a,b)$

Spostando di membro si ottiene: $f'(x) \cdot g(x) = D[f(x) \cdot g(x)] + f(x) \cdot g'(x)$

Si integrano entrambi i membri e per la proprietà di linearità si ottiene:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) + \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

$f(x)$ è detto **fattore finito**
$g(x)$ è detto **fattore differenziale**

Integrali indefiniti *ciclici*

Metodo risolutivo

Per risolvere un integrale del tipo:

$$\int f(x)\, dx = H(x) + \alpha \cdot \int f(x)\, dx, \quad \alpha \neq 1$$

È sufficiente portare al primo l'integrale e risolvere l'equazione isolandolo.

Metodo di Sostituzione

1^a Formula

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
$\phi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ derivabile in (α, β)
ϕ' continua in (α, β)
$Im\, \phi \subseteq (a, b) \qquad [\iff \phi(x) \in (a, b)\, \forall\, x \in (\alpha, \beta)]$

Tesi
1^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\, dx = \left(\int f(y)\, dy\right)_{y=\phi(x)}$$

2^a Formula

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
$\phi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ derivabile in (α, β)
ϕ' continua in (α, β)

$Im\,\phi = (a,b)$
ϕ invertibile in (α,β)

Tesi
2^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt\right)_{t=\phi^{-1}(x)}$$

#todo come risolvere esercizio

Integrali di Polinomi Trigonometrici

Prerequisiti di Trigonometria

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
- $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\int \cos^n x\,dx$ oppure $\int \sin^n x\,dx$

n pari

1. Si scompone $\int \sin^{2n} x\,dx$ in $\int (\sin^2 x)^n\,dx$
2. Si trasforma $\sin^2 x$ in $\frac{1-\cos(2x)}{2}$ e si divide la frazione in $\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $n=2$, il cubo di binomio se $n=3$, ecc
4. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
5. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

n dispari

1. Si scompone $\int \sin^n x\,dx$ in $\int \sin^{n-1} x\cdot\sin x\,dx$
2. Si scompone $sin^{n-1}x$ in $(1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n-1}{2}=2$, il cubo di binomio se $\frac{n-1}{2}=3$, ecc
4. Si moltiplica ogni membro della parentesi appena svolta per il $\sin x$ iniziale.
5. Si procede utilizzando l'integrazione composta $\int [f(x)]^n\cdot f'(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}+c$ e i vari metodi risolutivi.

$\int cos^n x\cdot\sin^m x\,dx$

$n=m$

1. Si trasforma $\int \sin^n x\cdot\cos^n x\,dx$ in $\int (\sin x\cdot\cos x)^n\,dx$
2. Si trasforma $\sin x\cdot\cos x$ in $\frac{1}{2}\sin 2x$
3. Si svolge la potenza elevando entrambi i fattori e ottenendo $\int \frac{1}{2^n}\sin^n 2x\,dx$

4. Si può portare fuori la costante $\frac{1}{2^n}$
5. Procedere ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con n e m entrambi pari

1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ di grado inferiore, scomponendolo in $(1 - cos^2)^{\frac{n}{2}}$
2. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n}{2} = 2$, il cubo di binomio se $\frac{n}{2} = 3$, ecc
3. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
4. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con almeno n oppure m dispari

1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ con il grado dispari. Se sono entrambi dispari è preferibile quello con il grado inferiore.
   supponiamo si sia scelto $\sin^n x$
2. Si scompone $\sin^n x$ in $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$.
3. Si procede come nel caso di $\int \sin^n x \, dx$ con n dispari dallo step 2

Integrali di Fratti Semplici

Caso 1: $\frac{1}{(ax+b)^n}$ $\quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

Metodo risolutivo ($n = 1$)

$$\frac{1}{(ax+b)^1} = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{(ax+b)} \cdot a \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Metodo risolutivo ($n > 1$)

$$\frac{1}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a} \cdot \int (ax+b)^{-n} \cdot a \, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Caso 2: $\frac{1}{x^2+px+q}$ $\quad p, q \in \mathbb{R} : \Delta = p^2 - 4q < 0$

Metodo risolutivo

Il denominatore può essere scritto nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{px}{2}+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q &= \\
&= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4} = \qquad (4q-p^2=-\Delta) \\
&= \frac{(2x+p)^2}{4}+\frac{-\Delta}{4} = \\
&= \frac{-\Delta}{4}\cdot\left[\frac{(2x+p)^2}{-\Delta}+1\right] = \\
&= \frac{-\Delta}{4}\cdot\left[1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right] \qquad (-\Delta>0)
\end{aligned}
$$

Quindi si può svolgere l'integrale facendo riferimento all'uguaglianza precedente e all'integrazione notevole dell' $\arctan$:

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int\frac{1}{-\frac{\Delta}{4}\cdot\left[1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right]}\,dx &= \qquad \left(D\left[\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right]=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right) \\
&= \frac{\cancel{4}}{-\Delta}\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{\cancel{2}}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}\cdot D\left[\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right]dx = \\
&= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\left(\int\frac{1}{1+y^2}\,dy\right)_{y=\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}+c, \quad c\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Caso 3: $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} \quad a,b\in\mathbb{R}, \quad p,q\in\mathbb{R}:\Delta=p^2-4q<0,\ n\in\mathbb{N}$

Caso Particolare

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx &= \\
&= \int\frac{\cancel{1+x^2}}{(1+x^2)^{\cancel{2}}}\,dx+\int\frac{-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \\
&= \arctan x+\frac{1}{2}\int\frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \\
&= \arctan x+\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \\
&= \arctan x+\frac{1}{2}\int x\cdot D\left[\frac{1}{1+x^2}\right]dx = \\
&= \arctan x+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2}-\int\frac{1}{1+x^2}\,dx\right] = \\
&= \frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+c, \quad c\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Metodo risolutivo

Se il numeratore è derivata del denominatore è sufficiente utilizzare l'integrazione fondamentale del $\ln$.

Se il numeratore non è derivata del denominatore, bisogna fare in modo che lo diventi.

1. Si moltiplica il numeratore per 2 se a è dispari. Ricordarsi di aggiungere $\frac{1}{2}$ fuori dalla frazione per compensare il fattore appena aggiunto.
2. Fai sì di avere tra parentesi la derivata del denominatore, raccogliendo sulla base di a. Ignora il fattore b, metti p al suo posto e compensa fuori dalle parentesi il valore aggiunto, annullandolo. Formalmente: $\frac{a}{2}(2x+p)-\frac{a}{2}p+b$.
3. Si divide la frazione in due e si procede in i vari metodi.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{5x+8}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = && (1)\\
=&\frac{1}{2}\cdot\int \frac{10x+16}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = && (2)\\
=&\frac{1}{2}\cdot\int \frac{5(2x+9)-45+16}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = && (3)\\
=&\frac{5}{2}\cdot\int \frac{2x+9}{(x^2+9x+1)^2}\,dx - 29\int \frac{1}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = \\
=&\frac{5}{2}\cdot\frac{(x^2+9+1)^{-1}}{-1} - \cdots
\end{aligned}
$$

Integrali di Equazioni Razionali Fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$$

grado $[N(x)] \geq$ grado $[D(x)]$

Metodo risolutivo

È sufficiente effettuare la divisione tra polinomi finché non si ottiene al numeratore un polinomio di grado inferiore al denominatore.

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

Si può quindi procedere con gli altri metodi risolutivi

grado $[N(x)] <$ grado $[D(x)]$

Scomposizione di Polinomi

Ogni polinomio di grado n ha n radici in $\mathbb{C}$. Si consideri $P(x)$ polinomio:

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ una radice reale con molteplicità n di $P(x)$. Allora $P(x)$ può essere diviso per

$$(x-\alpha)^n$$

2. Sia $\alpha = a \pm ib$ una radice complessa con molteplicità n di $P(x)$. Allora $P(x)$ si può dividere per

$$\{[x-(a+ib)]\cdot[x-(a-ib)]\}^n = [(x-a)^2+b^2]^n$$

Si tratta della potenza di un polinomio di secondo grado con $\Delta < 0$ ed equazione del tipo:

$$(x^2+px+q)^n$$

Quindi, ogni polinomio si può fattorizzare nel prodotto di potenze di polinomi di 1° grado (punto 1) e potenze di polinomi di 2° grado con $\Delta < 0$ (punto 2).

Fattorizzazione di Frazione

Si può dimostrare che una frazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ è la somma dei fratti semplici del tipo:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n}, \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

Ad esempio:

$$\frac{\dots}{(x+1)^2\cdot(x-3)\cdot(x^2+x+1)^3} =$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Hx+J}{(x^2+x+1)^3}$$

Metodo risolutivo

Per risolvere gli integrali di razionali fratti con numeratore inferiore a denominatore è necessario:

1. Scomporre in fratti semplici la frazione. Trovare $A, B, \dots$ tramite sistema.
2. Utilizzare la proprietà della linearità degli integrali per separare ogni frazione.
3. Utilizzare gli altri metodi d'integrazione.

Trucchetti

$D[\tan x] = \frac{1}{cos^2 x} = \frac{sin^2 x + cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{sin^2 x}{cos^2 x} + 1 = \tan^2 x + 1$

Topologia in $\mathbb{R}^2$

Rettangolo

Definizione

Si definisce rettangolo di $\mathbb{R}^2$ limitato il seguente insieme: $(a,b)\times(c,d)$.

Calcolo Area

La formula per il calcolo dell'area del rettangolo è la seguente: $\text{area} = (b-a)\cdot(d-c)$

Plurirettangolo

Definizione

Si definisce plurirettangolo l'unione di un numero finito di rettangoli a due a due privi di punti interni comuni.

Calcolo Area

Sia $P = \bigcup_{i=1}^{r} R_i$ con R_i rettangolo limitato e $R_i \cap R_j \neq \emptyset \quad i \neq j$

$$\text{area } P = \sum_{i=1}^{r} \text{area } R_i$$

$\underline{\mathscr{P}}$ e $\overline{\mathscr{P}}$

Enunciato

Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^2$ dotato di punti interni e limitato, si definiscono due insiemi numerici $\underline{\mathscr{P}}$ e $\overline{\mathscr{P}}$.

$$\begin{aligned} \underline{\mathscr{P}} &= \{P : \quad P \subseteq X \text{ plurirettangolo}\} \\ \overline{\mathscr{P}} &= \{P : \quad P \supseteq X \text{ plurirettangolo}\} \end{aligned}$$

Essi sono entrambi non vuoti.

Misurabilità e calcolo area

Enunciato

Ipotesi
Siano A e B due insiemi così definiti:
$A = \{\text{area } P : \quad P \in \underline{\mathscr{P}}\}$
$B = \{\text{area } P : \quad P \in \overline{\mathscr{P}}\}$
$\sup A = \inf B$

Tesi
X è misurabile secondo Peano-Jordan e la sua area è così definita:

$$\text{area } X \overset{\text{def}}{=} \sup A = \inf B$$

Dimostrazione

#todo

Integrale Definito

Decomposizione

✓ **Definizione**

Dato un intervallo $[a, b]$ limitato, si chiama **decomposizione** di $[a, b]$ un insieme

$$\mathscr{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad \text{con} \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

I punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ si chiamano **capisaldi** della decomposizione.

Ampiezza di decomposizione

✓ **Definizione**

$$|\mathscr{D}| \stackrel{\text{def}}{=} \min\{(x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n)\}$$

Somma Inferiore e Superiore

✓ **Definizione**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$.
Si consideri una sua decomposizione $\mathscr{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.
Siano $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\begin{aligned} f(y_i) &= \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ f(z_i) &= \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \end{aligned}$$

Si definiscono rispettivamente *somma inferiore e somma superiore di f relative a $\mathscr{D}$* i seguenti numeri:

$$\begin{aligned} s(\mathscr{D}, f) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i, x_{i-1}) \cdot f(y_i) \\ S(\mathscr{D}, f) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i, x_{i-1}) \cdot f(z_i) \end{aligned}$$

$\underline{\mathscr{S}}$ e $\overline{\mathscr{S}}$

✓ **Definizione**

Si definiscono due insiemi numerici $\underline{\mathscr{S}}$ e $\overline{\mathscr{S}}$.

$$\begin{aligned} \underline{\mathscr{S}} &= \{s(\mathscr{D}, f), \qquad \mathscr{D} \text{ decomposizione di } [a, b]\} \\ \overline{\mathscr{S}} &= \{S(\mathscr{D}, f), \qquad \mathscr{D} \text{ decomposizione di } [a, b]\} \end{aligned}$$

$\underline{\mathscr{S}}$ e $\overline{\mathscr{S}}$ sono contigui

✓ **Enunciato**

Gli insiemi $\underline{\mathscr{S}}$ e $\overline{\mathscr{S}}$ sono contigui.

Dimostrazione

#todo

✓ **Definizione**

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$, si chiama **integrale definito** tra a e b di f il seguente numero:

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \sup \underline{\mathscr{S}} = \inf \overline{\mathscr{S}} & \text{se } a < b \\ 0 & \text{se } a = b \\ -\int_b^a f(x) & \text{se } a > b \end{cases}$$

Proprietà

Proprietà Distributiva

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ continue
$\alpha, \beta \in [a, b]$
$h, k \in \mathbb{R}$

Tesi
$\int_\alpha^\beta [h \cdot f(x) + k \cdot g(x)]\,dx = h \cdot \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + k \cdot \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

Proprietà Additiva

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua
$\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$

Tesi
$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$

Teorema della Media

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua

Tesi

1. $m(b-a) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq M(b-a)$ con $m = \min\limits_{[a,b]} f$ e $M = \max\limits_{[a,b]} f$
2. $\exists c \in [a, b] : \quad \frac{1}{b-1} \cdot \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = f(c)$

Dimostrazione

#todo

Proprietà di Monotonia

Enunciato

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ continue
$f(x) \leq g(x) \quad \forall a, x \in [a, b]$

Tesi
$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

In particolare, se $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x) \geq 0$.
Inoltre, $\int_a^b f(x)\, dx = 0 \iff f(x) = 0$

Funzione Integrale

Definizione

Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e un punto $x_0 \in (a, b)$.
Si consideri $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt \quad \forall\, x \in (a, b)$
$F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt = 0$

F si chiama **funzione integrale** di punto iniziale x_0.

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua

$x_0 \in (a, b)$
$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \forall x \in (a, b)$

Tesi

1. $F(x)$ è derivabile in (a, b)
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Si può enunciare come

> **Ogni funzione continua in un intervallo è dotata di primitive.**

> **Dimostrazione**
>
> #todo

Formula Fondamentale per il Calcolo degli Integrali Definiti

Enunciato

Ipotesi
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua
G primitiva di f in $[a, b]$

Tesi

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) = [G(t)]_a^b$$

> **Dimostrazione**
>
> #todo

Risoluzione esercizi

Valore assoluto

Metodo risolutivo

$$\int_a^b f(x, |g(x)|)\, dx$$

Si studia il segno di $g(x)$ se tra a e b la funzione ha sempre lo stesso segno, allora la risoluzione è immediata e si procede sostituendo $|g(x)|$ con $\pm g(x)$ a seconda del segno di g.

Mettiamo caso che la funzione sia positiva in $[a, c]$ e negativa in $[c, b]$.
L'integrale si scompone come segue: $\int_a^c f(x, +g(x))\, dx + \int_c^b f(x, -g(x))\, dx$.

Si procede in maniera simile anche a segni invertiti o nel caso in cui ci siano più punti in cui la funzione cambia segno.

2. Equazioni Differenziali

1° ordine

✓ **Definizione**

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2, A \neq \emptyset$ e sia $F : A \to \mathbb{R}$.
Si chiama **equazione differenziale** del 1° ordine (scritta in forma normale)

$$y' = F(x, y)$$

il problema della ricerca delle funzioni

$$y(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$

tali che:

- $y(x)$ è derivabile in (α, β)
- $(x, y(x)) \in A \qquad \forall \in (\alpha, \beta)$
- $y'(x) = F(x, y(x)) \qquad \forall x \in (\alpha, \beta)$

$y(x)$ si chiama **soluzione dell'equazione** di $y' = F(x, y)$
L'insieme formato da tutte e sole le soluzioni di $y' = F(x, y)$ si chiama **integrale generale** dell'equazione data.

2° ordine

✓ **Definizione**

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3, A \neq \emptyset$ e sia $F : A \to \mathbb{R}$.
Si chiama **equazione differenziale** del 2° ordine (scritta in forma normale)

$$y' = F(x, y, y')$$

il problema della ricerca delle funzioni

$$y(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$

tali che:

- $y(x)$ è derivabile 2 volte in (α, β)
- $(x, y(x), y'(x)) \in A \qquad \forall \in (\alpha, \beta)$
- $y''(x) = F(x, y(x), y'(x)) \qquad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Problema di Cauchy

1° ordine

✓ **Enunciato**

Sia $(x_0, y_0) \in A$.
Si chiama **problema di Cauchy** associato a un'equazione differenziale di primo ordine di punto iniziale (x_0, y_0)

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

il problema della ricerca delle soluzioni dell'equazione che verificano la condizione

$$y(x_0) = y_0$$

$y(x_0) = y_0$ si dice **condizione iniziale**.

2° ordine

✓ **Enunciato**

Sia $(x_0, y_0, y_0) \in A$.
Si chiama **problema di Cauchy** associato a un'equazione differenziale di primo ordine di punto iniziale (x_0, y_0, y'_0)

$$\begin{cases} y' = F(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

il problema della ricerca delle soluzioni dell'equazione che verificano le condizioni

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = y'_0$$

$y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$ si dicono **condizioni iniziali**.

Si può dimostrare che, lavorando con funzioni continue, il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione.

Metodi risolutivi per alcune classi di equazioni differenziali

Esistono tante altre classi. Le funzioni possono essere in contemporanea di più classi, o di nessuna

1° ordine

A variabili separabili

$$y' = F(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad x \in (a, b) \quad y \in (c, d)$$

con $X : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua, $Y : (c, d) \to \mathbb{R}$ continua.

Soluzioni

Una soluzione dell'equazione è una funzione

$$y(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$$

tale che:

- $y(x)$ è derivabile in (α, β)
- $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b) \quad \wedge \quad y(x) \in (c, d) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$
- $y'(x) = X(x) \cdot Y(y) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Soluzioni di 1^a categoria (di tipo costante)

$$H = \{h \in (c, d) : Y(h) = 0\}$$

Se $H \neq 0$, preso $\overline{h} \in H$, la funzione $y(x) = \overline{h}$ è soluzione in (a, b).
Infatti:
$\exists y'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$
$X(x) \cdot Y(y) = X(y(x)) \cdot (Y(\overline{h})) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$
$0 = y'(x) = X(x) \cdot Y(y(x)) \quad \forall x \in (a, b)$

Soluzioni di 2^a categoria

Sono le soluzioni definite in $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ tale che:

$$????$$

Soluzioni di 3^a categoria

Sono le soluzioni definite in $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ tale che:

$$\exists x_1, x_2 \in (\alpha, \beta) : Y(y(x_1)) = 0 \wedge Y(y(x_2)) \neq 0$$

Lineare

$$y' = F(x, y) = a(x) \cdot y + f(x) \quad a, g : I \to \mathbb{R} \text{ con } I \subseteq \mathbb{R}$$

$a(x)$: coefficiente
$f(x)$: termine noto

Equazione omogenea

Se $f(x) = 0 \quad \forall x \in I$ l'equazione si dice **omogenea**.

$$y' + a(x)y = 0$$

$$a : I \to R \quad I \subseteq R \qquad a : \text{continua in } I$$

Soluzioni

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

con $A(x) \in \int a(x)\, dx$

Dimostrazione

Risolvo l'equazione

$$y' + a(x)y = 0 \implies y' = -a(x)y$$

Ci ritroviamo un'equazione a variabili separabili

$$X(x) = -a(x) \qquad (a, b) = I$$
$$Y(y) = y \qquad (c, d) = \mathbb{R}$$

1^a categoria

$$H = \{y \in \mathbb{R} : y(h) = 0\} = \{0\}$$

2^a categoria

$$\exists\, y' = -a(x)y(x) \qquad y(x) \neq 0$$
$$\frac{y'}{y(x)} = -a(x)$$
$$D[\ln |y(x|) = D[-A(x)] + k$$

Le soluzioni saranno quindi

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Equazione completa

Se non è omogenea, l'equazione si dice **completa**.

$$y' + a(x)y = f(x)$$
$$a, f : I \to R \quad I \subseteq R \qquad a, f : \text{continue in } I$$

Soluzioni

$$y(x) = \overline{y} + c \cdot e^{-A(x)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

con $A(x) \in \int a(x)\, dx$
con $\overline{y} = c(x) \cdot e^{-A(x)}$ prendendo $c(x) \in \int f(x) \cdot e^{A(x)}\, dx$
$\overline{y}$ è una soluzione dell'equazione differenziale calcolata mediante il metodo della variazione delle costanti.

2° ordine

Lineare

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = f(x) \quad a, b, f : I \to \mathbb{R} \text{ con } I \subseteq \mathbb{R}$$

$a(x)$, $b(x)$: coefficiente
$f(x)$: termine noto

Wronksiano $w(x)$

Due soluzioni y_1 e y_2 si dicono indipendenti se

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Equazione omogenea

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0 \tag{EO}$$

✓ Soluzioni

$$k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2$$

con y_1 e y_2 funzioni indipendenti soluzioni dell'equazione (EO).

Coefficienti costanti

sarà l'unico caso trattato
Si trovano le soluzioni dell'equazione di secondo grado rispetto a λ. **Equazione caratteristica**:

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0 \tag{EQ2}$$

Le funzioni indipendenti soluzione dell'equazione omogenea sono:

- Se le soluzioni di (EQ2) sono reali e distinte:

$$y_1 = e^{\lambda_1 \cdot x} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 \cdot x}$$

- Se le soluzioni di (EQ2) sono reali e coincidenti:

$$y_1 = e^{\lambda \cdot x} \qquad y_2 = x \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

- Se le soluzioni di (EQ2) sono complesse coniugate:

$$y_1 = e^{\beta \cdot x} \cdot \sin(\gamma \cdot x) \qquad y_2 = e^{\beta \cdot x} \cdot \cos(\gamma \cdot x)$$

  dove $\lambda = \beta \pm i \cdot \gamma$

Equazione completa

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = f(x) \tag{EC}$$

✓ Soluzioni

$$\overline{y} + k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2$$

con y_1 e y_2 funzioni indipendenti soluzioni dell'equazione (EO) e $\overline{y}$ soluzione dell'equazione (EC).

*Trattiamo soltanto il caso a coefficienti costanti e con $f(x) = e^{hx} \cdot p(x)$, con $p(x)$ polinomio di grado m a coefficienti complessi.

Metodo risolutivo

Si calcolano y_1 e y_2 considerando l'equazione omogenea associata a quella completa.

Bisogna trovare $\overline{y} = e^{hx} \cdot x^s \cdot q(x)$, dove:

- $q(x)$ è un polinomio di grado m.
  - se $m = 0$ allora $q(x) = C$
  - se $m = 1$ allora $q(x) = Ax + B$
  - se $m = 2$ allora $q(x) = Ax^2 + Bx + C$
- s coincide con la molteplicità di h nelle soluzioni dell'equazione caratteristica
  - se $h \neq \lambda_1$ e $h \neq \lambda_2$, allora $s = 0$
  - se $h = \lambda_1$ o $h = \lambda_2$ ($\Delta \neq 0$), allora $s = 1$
  - se $h = \lambda_1 = \lambda_2$ ($\Delta = 0$), allora $s = 2$

Si sostituisce $\overline{y}$ nell'equazione originale, calcolando le relative $\overline{y}'$ e $\overline{y}''$.

Metodo risolutivo per h complesso

Potrebbe capitare che $f(x)$ non sia direttamente nella forma $p(x) \cdot e^x$, ma che ad esempio contenga $\cos x$ o $\sin x$.
Bisogna ricondurli nella forma e^{ix}.
Si ricorda:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{EXP}$$

Nel caso in cui $f(x)$ contenga, ad esempio, $\cos x$, si riconduce utilizzando la formula (EXP), ignorando l'assenza del $\sin x$ (lo stesso vale al contrario).
Si risolve normalmente l'equazione completa, tenendo conto alla fine di ignorare:

- la parte immaginaria di $\overline{y}$ nel caso in cui si fosse ignorato $\sin x$ (la parte immaginaria di (EXP)).
- la parte reale di $\overline{y}$ nel caso in cui si fosse ignorato $\cos x$ (la parte reale di (EXP)).