Elementi di Analisi Matematica 2

1 - Integrali

Primitive

✓ Definizione

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.

f è dotata di primitive in (a,b) se $\exists F:(a,b)\to\mathbb{R}$ tale che

- 1. F è derivabile in (a, b)
- 2. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

△ Nota

- Non tutte le funzioni hanno primitive (es. la funzione segno)
- Una funzione continua ha primitive. Una funzione non continua non implica il non avere primitive. La continuità è una condizione sufficiente, ma non necessaria.

Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a,b)

F primitiva di f in (a,b)

Tesi

Tutte e sole le funzioni primitive di f in (a,b) sono le funzioni del tipo:

$$F(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Dimostrazione

1. Dimostro che tutte le funzioni del tipo F(x) + c, con $c \in \mathbb{R}$ sono primitive di f in (a,b)

$$\exists D[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

2. Dimostro che tutte le funzioni del tipo F(x) + c sono le sole primitive.

Se $G:(a,b) \to \mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f in (a,b) allora $\exists \, c \in \mathbb{R}$ tale che

$$G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in (a,b)$$

Consideriamo la funzione G(x) - F(x). Essa è derivabile in (a, b) e

$$D[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Il 2° corollario di Lagrange dice: "se due funzioni hanno la stessa derivata in un intervallo, esse differiscono per una costante".

Quindi,
$$G(x) - F(x) = \text{costante} \quad o \quad G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a,b)$$

Integrale Indefinito

✓ Definizione

Si chiama **Integrale indefinito** di f l'insieme formato dalle primitive di f in (a,b) se f è dotata di primitive, l'insieme vuoto se f non ha primitive in (a,b).

$$\int f(x)\,dx = egin{cases} \emptyset & ext{se }f ext{ non ha primitive in }(a,b) \ f(x)\,dx = egin{cases} f(x)+c, & c\in\mathbb{R} \end{pmatrix} & ext{se }f ext{ non ha primitive in }(a,b) \end{cases}$$

Integrali Indefiniti Notevoli

 $(c \in \mathbb{R})$

•
$$\int 0 dx = c$$

•
$$\int 1 dx = x + c$$

•
$$\int x^{lpha}\,dx=rac{x^{lpha+1}}{lpha+1}+c,\quad lpha
eq0$$

•
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$ullet \int lpha^x \, dx = rac{lpha^x}{\ln|x|}, \quad lpha \in \mathbb{R}, lpha > 0, lpha
eq 0$$

•
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

•
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

•
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

Integrali di Funzioni Composte

$$ullet \int [f(x)]^lpha \cdot f'(x) \, dx = rac{[f(x)]^{lpha+1}}{lpha+1} + c$$

• gli altri sono uguali a quelli notevoli ma con x = f(x), tutto per f'(x).

Proprietà di Omogeneità

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f:(a,b) o\mathbb{R}$ dotata di primitive in (a,b) $k\in\mathbb{R}, k
eq 0$

Tesi

- 1. kf è dotata di primitive in (a,b)
- 2. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$

99 Dimostrazione

1. Per ipotesi f è dotata di primitive in (a, b) e sia F una sua primitiva.

$$\exists\, D[k\cdot F(x)] = k\cdot F'(x) = k\cdot f(x) \quad orall x\in (a,b)$$

 $2.\ \mbox{Per provare la }2$ si dimostrano le due inclusioni.

Si prova che $\int k \cdot f(x) \, dx \subseteq k \cdot \int f(x) \, dx$

$$G \in \int k \cdot f(x) \, dx$$

$$\exists G'(x) = k \cdot f(x)$$

Dobbiamo provare che $G \in k \cdot \int f(x) dx$, quindi $G = k \cdot \text{primitiva di f}$

Se k
eq 0 possiamo dire che $G(x) = k \cdot \left\lceil \frac{G(x)}{k} \right\rceil$

Se proviamo che $\left[\frac{G(x)}{k}\right]$ è uguale a una primitiva di f in (a,b), allora abbiamo provato che $G(x)\in k\cdot\int f(x)\,dx.$

$$D\left[rac{G(x)}{k}
ight] = rac{1}{k}\cdot G'(x) = rac{1}{\cancel{k}}\cdot [\cancel{k}\cdot f(x)] = f(x)$$

In conclusione, $rac{G(x)}{k}$ è primitiva di f in (a,b), quindi $G\in k\cdot\int f(x)\,dx$

Proviamo adesso l'altra inclusione $k \cdot \int f(x) \, dx \subseteq \int k \cdot f(x) \, dx$

$$G \in k \int f(x) \, dx$$
, quindi $G(x) = k \cdot F(x)$

Devo provare che G è una primitiva di $k \cdot F(x)$

$$G'(x) = D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$$

Abbiamo dimostrato che G è una primitiva di $k \cdot f$

Proprietà di Linearità

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f,g:(a,b) o\mathbb{R}$ dotate di primitive in (a,b)

Tesi

- 1. f + g è dotata di primitive in (a, b)
- 2. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

△ Osservazione

Al secondo membro avviene la somma tra due insiemi, che di norma non è definita. Si intende invece l'insieme formato dalle funzioni che sono la somma di una delle primitive di f e una delle primitive di g.

3.
$$\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + \int g(x) dx$$
, con F primitiva di f

△ Osservazione

Al secondo membro si intende che, quando si tratta di una somma con un integrale, è possibile omettere la costante.

Integrazione per decomposizione in somma

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f,g:(a,b) o\mathbb{R}$ dotate di primitive $h,k\in\mathbb{R}$ non entrambi nulli ($h^2+k^2>0$)

Tesi

- 1. $h \cdot f + k \cdot g$ è dotate di primitive in (a, b)
- 2. $\int [h \cdot f(x) + k \cdot g(x)] dx = h \cdot \int f(x) dx + k \cdot \int g(x) dx$

Integrazione indefinita per parti

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f,g:(a,b) o\mathbb{R}$ derivabili $f'\cdot g$ dotata di primitive in (a,b)

Tesi

- 1. $f \cdot g'$ è dotata di primitive in (a, b)
- 2. $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \int f'(x) \cdot g(x) dx$

99 Dimostrazione

f e g sono derivabili, quindi lo è anche $f\cdot g.$

$$D[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x), \quad orall x\in (a,b)$$

Spostando di membro si ottiene: $f'(x) \cdot g(x) = D[f(x) \cdot g(x)] + f(x) \cdot g'(x)$

Si integrano entrambi i membri e per la proprietà di linearità si ottiene:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) + \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

f(x) è detto fattore finito

g(x) è detto fattore differenziale

Integrali indefiniti ciclici

& Metodo risolutivo

Per risolvere un integrale del tipo:

$$\int f(x)\,dx = H(x) + lpha \cdot \int f(x)\,dx, \quad lpha
eq 1$$

È sufficiente portare al primo l'integrale e risolvere l'equazione isolandolo.

Metodo di Sostituzione

1^a Formula

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a,b)

 $\phi:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ derivabile in (α,β)

 ϕ' continua in (α, β)

 $Im \, \phi \subseteq (a,b) \qquad [\iff \phi(x) \in (a,b) \, orall \, x \in (lpha,eta)]$

Tesi

1^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(\phi(x))\cdot\phi'(x)\,dx=\left(\int f(y)\,dy
ight)_{y=\phi(x)}$$

2^a Formula

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a,b)

 $\phi:(lpha,eta) o\mathbb{R}$ derivabile in (lpha,eta)

 ϕ' continua in (α, β)

 $Im \, \phi = (a,b)$

 ϕ invertibile in (α, β)

Taci

 2^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt
ight)_{t=\phi^{-1}(x)}$$

#todo come risolvere esercizio

Integrali di Polinomi Trigonometrici

Prerequisiti di Trigonometria

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin^2 \alpha = \frac{1 \cos(2\alpha)}{2}$ $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$
- $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

$\int \cos^n x \, dx$ oppure $\int \sin^n x \, dx$

n pari

- 1. Si scompone $\int \sin^{2n} x \, dx$ in $\int (\sin^2 x)^n \, dx$
- 2. Si trasforma $\sin^2 x$ in $\frac{1-\cos(2x)}{2}$ e si divide la frazione in $\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$
- 3. Si svolge il quadrato di binomio se n=2, il cubo di binomio se n=3, ecc
- 4. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
- 5. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

n dispari

- 1. Si scompone $\int \sin^n x \, dx$ in $\int \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx$
- 2. Si scompone $sin^{n-1}x$ in $(1-\cos^2x)^{\frac{n-1}{2}}$
- 3. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n-1}{2}=2$, il cubo di binomio se $\frac{n-1}{2}=3$, ecc
- 4. Si moltiplica ogni membro della parentesi appena svolta per il $\sin x$ iniziale.
- 5. Si procede utilizzando l'integrazione composta $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) = rac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c$ e i vari metodi risolutivi.

$$\int cos^n x \cdot sin^m x \, dx$$

n = m

- 1. Si trasforma $\int \sin^n x \cdot \cos^n x \, dx$ in $\int (\sin x \cdot \cos x)^n \, dx$
- 2. Si trasforma $\sin x \cdot \cos x$ in $\frac{1}{2}\sin 2x$
- 3. Si svolge la potenza elevando entrambi i fattori e ottenendo $\int \frac{1}{2^n} \sin^n 2x \, dx$
- 4. Si può portare fuori la costante $\frac{1}{2^n}$
- 5. Procedere ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con n e m entrambi pari

- 1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ di grado inferiore, scomponendolo in $(1-\cos^2)^{\frac{n}{2}}$
- 2. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n}{2}=2$, il cubo di binomio se $\frac{n}{2}=3$, ecc
- 3. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
- 4. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con almeno n oppure m dispari

- 1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ con il grado dispari. Se sono entrambi dispari è preferibile quello con il grado inferiore. supponiamo si sia scelto $\sin^n x$
- 2. Si scompone $\sin^n x$ in $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$.
- 3. Si procede come nel caso di $\int \sin^n x \, dx$ con n dispari dallo step 2

Integrali di Fratti Semplici

Caso 1:
$$rac{1}{(ax+b)^n}$$
 $a,b\in\mathbb{R},\,a
eq 0,\,n\in\mathbb{N}$

 δ Metodo risolutivo (n=1)

$$rac{1}{(ax+b)^1}=rac{1}{a}\cdot\intrac{1}{(ax+b)}\cdot a\,dx=rac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

 δ Metodo risolutivo (n>1)

$$rac{1}{(ax+b)^n} = rac{1}{a} \cdot \int (ax+b)^{-n} \cdot a \, dx = rac{1}{a} \cdot rac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Caso 2:
$$rac{1}{x^2+px+q}$$
 $p,q\in\mathbb{R}:\Delta=p^2-4q<0$

♦ Metodo risolutivo

Il denominatore può essere scritto nel seguente modo:

$$egin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot rac{px}{2} + rac{p^2}{4} - rac{p^2}{4} + q = \ &= \left(x + rac{p}{2}\right)^2 + rac{4q - p^2}{4} = \ &= rac{(2x + p)^2}{4} + rac{-\Delta}{4} = \ &= rac{-\Delta}{4} \cdot \left[rac{(2x + p)^2}{-\Delta} + 1
ight] = \ &= rac{-\Delta}{4} \cdot \left[1 + \left(rac{2x + p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2
ight] \qquad (-\Delta > 0) \end{aligned}$$

Quindi si può svolgere l'integrale facendo riferimento all'uguaglianza precedente e all'integrazione notevole dell'arctan:

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{1}{-\frac{\Delta}{4} \cdot \left[1 + \left(\frac{2x + p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right]} dx = \left(D\left[\frac{2x + p}{\sqrt{-\Delta}}\right] = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

$$= \frac{\cancel{A}}{-\Delta} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{-\Delta}}}{\cancel{2}} \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\frac{2x + p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2} \cdot D\left[\frac{2x + p}{\sqrt{-\Delta}}\right] dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \cdot \left(\int \frac{1}{1 + y^2} dy\right)_{y = \frac{2x + p}{\sqrt{-\Delta}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \cdot \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{-\Delta}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Caso 3:
$$rac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$$
 $a,b\in\mathbb{R}, \quad p,q\in\mathbb{R}:\Delta=p^2-4q<0,\,n\in\mathbb{N}$

≡ Caso Particolare

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx =$$

$$= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} dx + \int \frac{-x^2}{(1+x^2)^2} dx =$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} dx =$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx =$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2} \int x \cdot D \left[\frac{1}{1+x^2} \right] dx =$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2} \left[\frac{x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

O Metodo risolutivo

Se il numeratore è derivata del denominatore è sufficiente utilizzare l'integrazione fondamentale del \ln .

Se il numeratore non è derivata del denominatore, bisogna fare in modo che lo diventi.

- 1. Si moltiplica il numeratore per 2 se a è dispari. Ricordarsi di aggiungere $\frac{1}{2}$ fuori dalla frazione per compensare il fattore appena aggiunto.
- 2. Fai sì di avere tra parentesi la derivata del denominatore, raccogliendo sulla base di a. Ignora il fattore b, metti p al suo posto e compensa fuori dalle parentesi il valore aggiunto, annullandolo. Formalmente: $\frac{a}{2}(2x+p)-\frac{a}{2}p+b$.
- 3. Si divide la frazione in due e si procede in i vari metodi.

$$\int \frac{5x+8}{(x^2+9x+1)^2} dx = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{10x+16}{(x^2+9x+1)^2} dx = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{5(2x+9)-45+16}{(x^2+9x+1)^2} dx = \tag{3}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \int \frac{2x+9}{(x^2+9x+1)^2} dx - 29 \int \frac{1}{(x^2+9x+1)^2} dx =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{(x^2+9+1)^{-1}}{-1} - \cdots$$

Integrali di Equazioni Razionali Fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \, dx$$

grado $[N(x)] \geq$ grado [D(x)]

& Metodo risolutivo

È sufficiente effettuare la divisione tra polinomi finché non si ottiene al numeratore un polinomio di grado inferiore al denominatore.

$$\int rac{N(x)}{D(x)} \, dx = \int Q(x) \, dx + \int rac{R(x)}{D(x)} \, dx$$

Si può quindi procedere con gli altri metodi risolutivi

$\operatorname{grado}\left[N(x) ight]<\operatorname{grado}\left[D(x) ight]$

(i) Scomposizione di Polinomi

Ogni polinomio di grado n ha n radici in \mathbb{C} . Si consideri P(x) polinomio:

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ una radice reale con molteplicità n di P(x). Allora P(x) può essere diviso per

$$(x-\alpha)^n$$

2. Sia $\alpha=a\pm ib$ una radice complessa con molteplicità n di P(x). Allora P(x) si può dividere per

$$\{[x-(a+ib)]\cdot[x-(a-ib)]\}^n=[(x-a)^2+b^2]^n$$

Si tratta della potenza di un polinomio di secondo grado con $\Delta < 0$ ed equazione del tipo:

$$(x^2+px+q)^n$$

Quindi, ogni polinomio si può fattorizzare nel prodotto di potenze di polinomi di 1° grado (punto 1) e potenze di polinomi di 2° grado con $\Delta < 0$ (punto 2).

(i) Fattorizzazione di Frazione

Si può dimostrare che una frazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ è la somma dei fratti semplici del tipo:

$$rac{A}{(x-lpha)^n}, \quad rac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

Ad esempio:

$$egin{aligned} rac{\cdots}{(x+1)^2\cdot(x-3)\cdot(x^2+x+1)^3} &= \ &= rac{A}{x+1} + rac{B}{(x+1)^2} + rac{C}{x-3} + rac{Dx+E}{x^2+x+1} + rac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2} + rac{Hx+J}{(x^2+x+1)^3} \end{aligned}$$

Output Metodo risolutivo

Per risolvere gli integrali di razionali fratti con numeratore inferiore a denominatore è necessario:

- 1. Scomporre in fratti semplici la frazione. Trovare A, B, \ldots tramite sistema.
- 2. Utilizzare la proprietà della linearità degli integrali per separare ogni frazione.
- 3. Utilizzare gli altri metodi d'integrazione.

Trucchetti

$$D[an x]=rac{1}{cos^2x}=rac{sin^2x+cos^2x}{cos^2x}=rac{sin^2x}{cos^2x}+1= an^2x+1$$

Topologia in \mathbb{R}^2

Rettangolo

✓ Definizione

Si definisce rettangolo di \mathbb{R}^2 limitato il seguente insieme: $(a,b) \times (c,d)$.

⊘ Calcolo Area

La formula per il calcolo dell'area del rettangolo è la seguente: $area = (b-a) \cdot (d-c)$

Plurirettangolo

✓ Definizione

Si definisce plurirettangolo l'unione di un numero finito di rettangoli a due a due privi di punti interni comuni.

⊘ Calcolo Area

Sia
$$P = igcup_{i=1}^r R_i ext{ con } R_i ext{ rettangolo limitato e } R_i \cap R_j
eq \emptyset \quad i
eq j$$

$$ext{area } P = \sum_{i=1}^r ext{area } R_i$$



✓ Enunciato

Dato un insieme $X\subseteq\mathbb{R}^2$ dotato di punti interni e limitato, si definiscono due insiemi numerici $\underline{\mathscr{P}}$ e $\overline{\mathscr{P}}$.

$${ {\mathscr P} \over {\mathscr P}} = \{P: \qquad P \subseteq X \ {
m plurirettangolo} \} \ { {\mathscr P} \over {\mathscr P}} = \{P: \qquad P \supseteq X \ {
m plurirettangolo} \}$$

Essi sono entrambi non vuoti.

Misurabilità e calcolo area

⊘ Enunciato

Ipotesi

Siano A e B due insiemi così definiti:

$$\begin{split} A &= \{ \text{area } P: \quad P \in \underline{\mathscr{P}} \} \\ B &= \{ \text{area } P: \quad P \in \overline{\mathscr{P}} \} \\ \sup A &= \inf B \end{split}$$

Tesi

X è misurabile secondo Peano-Jordan e la sua area è così definita:

$$\operatorname{area} X \overset{\mathsf{def}}{=} \sup A = \inf B$$

99 Dimostrazione

#todo

Integrale Definito

Decomposizione

✓ Definizione

Dato un intervallo [a, b] limitato, si chiama **decomposizione** di [a, b] un insieme

$$\mathscr{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$
 con $x_i \in \mathbb{R}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

I punti x_1, x_2, \ldots, x_n si chiamano **capisaldi** della decomposizione.

Ampiezza di decomposizione

✓ Definizione

$$|\mathscr{D}| \stackrel{\mathsf{def}}{=} \min\{(x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n)\}$$

Somma Inferiore e Superiore

✓ Definizione

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in \mathbb{R} .

Si consideri una sua decomposizione $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}.$

Siano $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$f(y_i) = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$f(y_i) = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \ f(z_i) = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Si definiscono rispettivamente somma inferiore e somma superiore di f relative a \mathcal{D} i seguenti numeri:

$$s(\mathscr{D},f) = \sum_{i=1}^n (x_i,x_{i-1}) \cdot f(y_i)$$

$$S(\mathscr{D},f) = \sum_{i=1}^n (x_i,x_{i-1}) \cdot f(z_i)$$

 \mathscr{S} e $\overline{\mathscr{S}}$

✓ Definizione

Si definiscono due insiemi numerici \mathscr{S} e $\overline{\mathscr{S}}$.

$$\underline{\mathscr{S}} = \{s(\mathscr{D},f), \qquad \mathscr{D} \text{ decomposizione di } [a,b]\}$$

$$\overline{\mathscr{S}} = \{S(\mathscr{D},f), \qquad \mathscr{D} \text{ decomposizione di } [a,b]\}$$

 $\underline{\mathscr{S}}$ e $\overline{\mathscr{S}}$ sono contigui

✓ Enunciato

Gli insiemi \mathscr{L} e $\overline{\mathscr{S}}$ sono contigui.

Dimostrazione

#todo

✓ Definizione

Data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in \mathbb{R} , si chiama **integrale definito** tra a e b di f il seguente numero:

$$\int_a^b f(x) \, dx \stackrel{\mathsf{def}}{=} egin{cases} \sup \underline{\mathscr{S}} = \inf \overline{\mathscr{S}} & \mathrm{se} \ a < b \ 0 & \mathrm{se} \ a = b \ - \int_b^a f(x) & \mathrm{se} \ a > b \end{cases}$$

Proprietà

Proprietà Distributiva

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f,g:(a,b) o \mathbb{R}$ continue

 $lpha,eta\in[a,b]$

 $h,k\in\mathbb{R}$

Tesi

$$\int_{lpha}^{eta} [h \cdot f(x) + k \cdot g(x)] \, dx = h \cdot \int_{lpha}^{eta} f(x) \, dx + k \cdot \int_{lpha}^{eta} g(x) \, dx$$

Proprietà Additiva

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f:(a,b) o\mathbb{R}$ continua $lpha,eta,\gamma\in[a,b]$

Tesi

$$\int_{lpha}^{eta} f(x) \, dx = \int_{lpha}^{\gamma} f(x) \, dx + \int_{\gamma}^{eta} f(x) \, dx$$

Teorema della Media

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f:(a,b) o\mathbb{R}$ continua

Tesi

1.
$$m(b-a) \leq \int_{lpha}^{eta} f(x) \, dx \leq M(b-a) \ \mathsf{con} \ m = \min_{[a,b]} f \ \mathsf{e} \ M = \max_{[a,b]} f$$

2.
$$\exists \, c \in [a,b]: \quad rac{1}{b-1} \cdot \int_{lpha}^{eta} f(x) \, dx = f(c)$$

99 Dimostrazione

#todo

Proprietà di Monotonia

✓ Enunciato

Ipotesi

$$f,g:(a,b) o \mathbb{R}$$
 continue

$$f(x) \leq g(x) \quad orall a, x \in [a,b]$$

Tesi

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

In particolare, se $f(x)\geq 0 \quad \forall\, x\in [a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\geq 0$. Inoltre, $\int_a^b f(x)\,dx=0 \iff f(x)=0$

Funzione Integrale

✓ Definizione

Data una funzione $f:(a,b) o \mathbb{R}$ continua e un punto $x_0\in (a,b).$

Si consideri $F:(a,b) o \mathbb{R}$ definita da $F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,dt \quad orall\, x\in (a,b)$

$$F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) \, dt = 0$$

F si chiama **funzione integrale** di punto iniziale x_0 .

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f:(a,b) o\mathbb{R}$ continua

$$egin{aligned} x_0 \in (a,b) \ F(x) = \int_0^x f(t) \, dt \quad orall \, x \in (a,b) \end{aligned}$$

Tesi

1. F(x) è derivabile in (a, b)

2.
$$F'(x) = f(x) \quad \forall \, x \in (a,b)$$

Si può enunciare come

99 Ogni funzione continua in un intervallo è dotata di primitive.

99 Dimostrazione

#todo

Formula Fondamentale per il Calcolo degli Integrali Definiti

✓ Enunciato

Ipotesi

 $f:(a,b) o\mathbb{R}$ continua G primitiva di f in [a,b]

Tesi

$$\int_{a}^{b} f(t) \, dt = G(b) - G(a) = [G(t)]_{a}^{b}$$

[!quote] Dimostrazione

#todo

Risoluzione esercizi

Valore assoluto

め Metodo risolutivo

$$\int_a^b f(x,|g(x)|)\,dx$$

Si studia il segno di g(x) se tra a e b la funzione ha sempre lo stesso segno, allora la risoluzione è immediata e si procede sostituendo |g(x)| con $\pm g(x)$ a seconda del segno di g.

Mettiamo caso che la funzione sia positiva in [a,c] e negativa in [c,b]. L'integrale si scompone come segue: $\int_a^c f(x,+g(x))\,dx + \int_c^b f(x,-g(x))\,dx$.

Si procede in maniera simile anche a segni invertiti o nel caso in cui ci siano più punti in cui la funzione cambia segno.