02/03/2023

E2.Determinare il minimo e il massimo assoluti della funzione

$$f(x,y)=x^2+2y^2-xy+x$$

nel triangolo di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(0,-1)$.

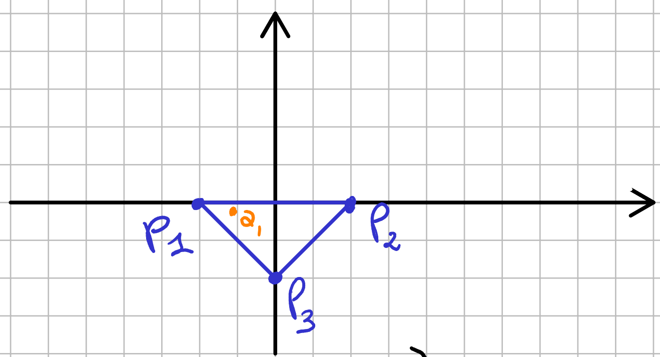
Per il teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in quanto f è chiuso e limitato.

Calcolo A_1

$f_x(x,y)=2x-y+1$ $\qquad$ $f_y(x,y)=+4y-x$

Cerco i punti in cui il gradiente si annulla

$$\begin{cases}2x-y+1=0\\4y-x=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x-\frac{1}{4}x+1=0\\y=\frac{1}{4}x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=-\frac{4}{7}\\y=-\frac{1}{7}\end{cases}$$



$a_1=\left(-\frac{4}{7},-\frac{1}{7}\right)\in T$

dove T è il triangolo $(1,0)$, $(-1,0)$ e $(0,1)$

$$A_1=\left\{\left(-\frac{4}{7},-\frac{1}{7}\right)\right\}$$

A_2

$A_2=\emptyset$ $\qquad$ in quanto $f(x,y)$ è continua

A_3

P_1P_2 $\quad$ Studio $\varphi_1(x)=f|_{P_1P_2}(x,y)=f(x,0)=x^2+x$

$\forall x\in[-1,1]$

$$\varphi_1'(x) = 2x + 1 \qquad \varphi_1' = 0 \iff \alpha = -\frac{1}{2} \in]-1, 1[$$

I punti candidati sono: $(-1,0)$, $(1,0)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

P_1P_3

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Studio la retta passante per i punti P_1 e P_3

$$\frac{x-(-1)}{0-(-1)} = \frac{y-0}{-1-0} \longrightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} \to \underset{t}{y} = -\underset{t}{x} - 1$$

$$\begin{cases} y = t \\ x = -1-t \end{cases}$$

E2.Determinare il minimo e il massimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy + x$$

nel triangolo di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(0,-1)$.

$$\varphi_2(t) = F_{|P_1P_3}(x,y) = F(-1-t, t) = \quad \forall t \in [-1, 0]$$

$$= (-1-t)^2 + 2t^2 - t(-1-t) - 1 - t =$$

$$= t^2 \cancel{+1} + 2t + 2t^2 + t^2 \cancel{+t} \cancel{-1} \cancel{-t} =$$

$$= 4t^2 + 2t$$

$$\varphi_2'(t) = 8t + 2 = 0 \iff t = -\frac{1}{4}$$

$$\left(-1+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) \in P_1P_3 \subseteq T \text{ perché } -\frac{1}{4} \in]-1, 0[$$

Si aggiungono tra i candidati $(0,-1)$ e $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$:)

P_2P_3

Studio la retta passante per i punti P_2 e P_3

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{-1-0} \to \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-1} \to y = x-1$$

$$\begin{cases} y = t \\ x = t+1 \end{cases}$$

$$\varphi_3(t) = f_{|P_2P_3}(x,y) = f(t+1, t) = \quad \forall t \in [-1, 0]$$

$$= (t+1)^2 + 2t^2 - (t+1)t + t + 1 =$$

$$= \cancel{t^2} + 1 - 2t - 2t^2 \cancel{-t^2} - \cancel{t} + \cancel{t} + 1 =$$

$$= -2t^2 - 2t + 2$$

$$\varphi_3'(t) = -4t - 2 = 0 \iff t = -\frac{1}{2} \in]-1, 0[$$

Si aggiunge $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ come candidato

E2.Determinare il minimo e il massimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + x$$

nel triangolo di vertici $(-1, 0), (1, 0)$ e $(0, -1)$.

Elenco candidati

$$f(P_1) = f(-1, 0) = 0$$

$$f(P_2) = f(1, 0) = 2$$

$$f(P_3) = f(0, -1) = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$f\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16} + 2\frac{1}{16} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{11}{16} + \frac{3}{16} - \frac{4}{16} = \frac{5}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Punto di max: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Punto di min: $(-1, 0)$

05/07/2023

T2. Siano f una funzione reale di classe C^2 nell'aperto A di $\mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in A$ un punto stazionario per f. Fra le seguenti affermazioni, individuare l'unica corretta.

a) se $H(x_0, y_0) < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo per f

b) se $H(x_0, y_0) = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f

c) se $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ e $f_{xy}(x_0, y_0) \neq 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di sella per f

d) se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, allora (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo per f

$H(x,y) < 0$ in quanto $\underbrace{f_{xx} \cdot f_{yy}}_{=0} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{>0} < 0$

18/03/2023

T1. Siano f una funzione reale definita nell'aperto A di $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un punto di A. Dire quando, per definizione, la funzione f è detta differenziabile nel punto (x_0, y_0). Dimostrare che, se f è differenziabile nel punto (x_0, y_0), allora esiste $f_x(x_0, y_0)$ ed è uguale a........ℓ................ (completare).

(PAG 25 dispense)

13/06/2023

E2. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x,y) = 3x^2y - x - \log(xy^2)$$

nel punto $(1,1)$, lungo la direzione della retta di equazione $2x - y + 3 = 0$

$$f_x(x,y) = 6xy - 1 - \frac{1}{x\cancel{y^2}} \cdot \cancel{y^2} = 6xy - \frac{1}{x} - 1$$

$$f_y(x,y) = 3x^2 - x - \frac{1}{\cancel{x}y^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{x}\cancel{y} = 3x^2 - x - \frac{2}{y}$$

$$\nabla f(1,1) = (4, 0)$$

$y = 2x + 3$ è parallela al vettore $(1, 2)$

Fisso 1 ↑ m ↑

$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \neq 1$$

Il versore è quindi $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$$D_{v_1} f(1,1) = (4,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

:)

21/04/2023

T2. Siano f una funzione reale dotata di derivate parziali prime e seconde nell'aperto X di $\mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) un punto di X.

i) Cosa vuol dire che (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo? $\to \exists \delta > 0 : I_\delta($ ------

ii) Definire l'hessiano di f nel punto (x_0, y_0). $H = | f_{xx} \dots$

iii) Dire sotto quali condizioni il punto (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo per f.

Cond. suff.: $H(x_0, y_0) > 0 \wedge f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

22/06/2021

[**T3**] Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$. Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) f dotata di derivata lungo una qualsiasi direzione in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ dotata di derivate parziali in (x_0, y_0); VERO

b) f dotata di derivate parziali in $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ dotata di derivata lungo una qualsiasi direzione in (x_0, y_0); NO $\Rightarrow$ SOLO SE CONTINUE

[**E2**] Determinare gli eventuali estremi assoluti della funzione

$$f(x, y) = 3x^2y - y^2 + x^3$$

nel triangolo di vertici $(0, 1), (1, 0), (-1, 0)$.