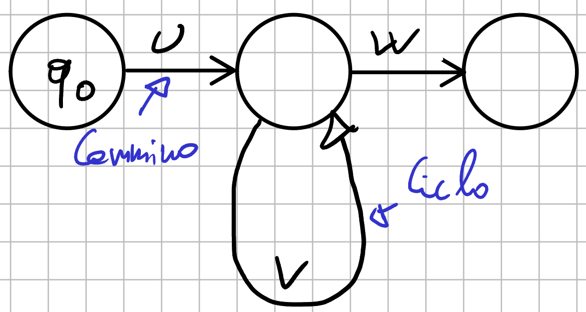
L6 - 19/04/2023

Pumping Lemma

Sia L linguaggio regolare allora esiste una costante n tale che se $z \in L$, $|z| > n$ allora esistono $u, v, w \in \Sigma^*$ tale che $z = uvw$ e $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$, $uv^iw \in L$ $\forall i > 0$



u e w possono essere stringhe vuote.

Dimostrazione

Proof. Dato un linguaggio regolare L esiste un $ASFD$ che lo riconosce. Sia $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ un automa che riconosce L e sia $|Q| = n$. Sia $z \in L$, con $|z| = k \geq n$. In tal caso deve necessariamente valere che $\overline{\delta}(q_0, z) \in F$.

Supponiamo che $q_{i_0}, q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}$ sia la sequenza di stati attraversati da $\mathcal{A}$ durante la computazione su z, con $q_{i_0} = q_0$ e $q_{i_k} = \overline{\delta}(q_0, z) \in F$.

In altre parole q_{i_1} e' lo stato in cui arriva l'automa $\mathcal{A}$ dopo aver letto il primo simbolo di z, q_{i_2} lo stato in cui arriva l'automa $\mathcal{A}$ dopo aver letto i primi due simboli di z,q_{i_3} e' lo stato in cui arriva l'automa $\mathcal{A}$ dopo aver letto i primi tre simboli di z e cosi' via.

Se indichiamo con z_h il prefisso di z di lunghezza h, allora avremo che q_{i_h} e' lo stato in cui arriva l'automa $\mathcal{A}$ dopo aver letto z_h cioe' $q_{i_h} = \overline{\delta}(q_0, z_h)$.

Dal momento che $k \geq n$, deve esistere almeno uno stato in cui l'automa si porta almeno due volte durante la computazione su z cioe' esistono due stati nella sequenza $q_{i_0}, q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}$ che coincidono. In realta' questi due stati che coincidono si possono trovare gia' tra i primi $n + 1$ elementi della sequenza cioe' in $q_{i_0}, q_{i_1}, \ldots, q_{i_n}$.

Possiamo quindi affermare che

esistono due indici r, s con $0 \leq r < s \leq n$ tali che $q_{i_r} = q_{i_s}$.

Cioe' lo stato in cui arriva l'automa leggendo il prefisso di z di lunghezza r (leggendo cioe' z_r) e' esattamente lo stesso stato a cui arriva l'automa leggendo il prefisso di z di lunghezza s (leggendo cioe' z_s) cioe' ancora

$$\overline{\delta}(q_0, z_r) = q_{i_r} = q_{i_s} = \overline{\delta}(q_0, z_s) \qquad (*).$$

Poniamo $u = z_r$ $\quad uv = z_s$ $\quad uvw = z$.
Chiaramente $|uv| = |z_s| = s \leq n$ e
$|v| \geq 1$ (perche' $|u| = |z_r| = r < s = |z_s| = |uv|$).

Inoltre $uv^iw \in L$ per ogni $i \geq 0$. Per induzione su i.
Passo Base: $i = 0$.

$$\overline{\delta}(q_o, uv^0w) = \overline{\delta}(q_o, u\epsilon w) = \overline{\delta}(q_o, uw) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, u), w) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, z_r), w) =$$
$$\text{(per la (*))} = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, z_s), w) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, uv), w) = \overline{\delta}(q_o, uvw) = \overline{\delta}(q_o, z) \in F$$

cioe' $uv^0w = uw \in L$.
Passo Induttivo: sia $i > 0$.
Per ipotesi induttiva $uv^{i-1}w \in L$ cioe' $\overline{\delta}(q_o, uv^{i-1}w) \in F$. Allora

$$\overline{\delta}(q_o, uv^iw) = \overline{\delta}(q_o, uvv^{i-1}w) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, uv), v^{i-1}w) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, z_s), v^{i-1}w) =$$
$$\text{(per la (*))} = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, z_r), v^{i-1}w) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, u), v^{i-1}w) = \overline{\delta}(q_o, uv^{i-1}w) \in F$$

cioe' $uv^iw \in L$. $\square$

Usare il Pumping Lemma per individuare se un linguaggio non è regolare.

$\forall n \; \exists z \in L, |z| \geq n \; \forall u,v,w \in \Sigma^* \; z = uvw, \; |uv| \leq n \; v \neq \varepsilon$

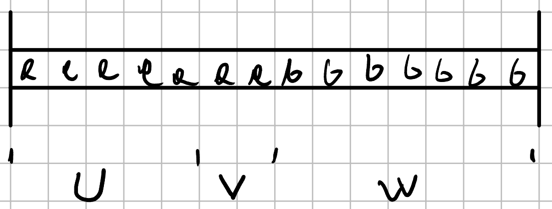
$\exists i \geq 0$ tale che $uv^iw \notin L$

Esempi

Dimostrare che il linguaggio non è regolare:

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$z = a^n b^n \qquad |z| = |a^n b^n| = 2n \geq n$



uv contiene solo delle "a", ma almeno una $(v \neq \varepsilon)$

Togliendo v otteniamo $|u| < |w|$

Contiene solo "a" — Contiene solo "b"

Quindi $uv^0w \notin L$

Proprietà di chiusura dei linguaggi regolari

Teoremi

Se $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ sono linguaggi regolari

allora: - $L_1 \cup L_2$ è regolare

- $L_1 \cdot L_2$ è regolare

- L_1^* è regolare ($e \; L_2^*$)

- $\bar{L}_1 = \Sigma^* \setminus L_1$ è regolare (e L_2^*)
- $L_1 \cap L_2$ è regolare