#university #studying #subject-2103

Elementi di Analisi Matematica 2

1 - Integrali Indefiniti

Primitive

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
f è dotata di primitive in (a, b) se $\exists F : (a, b) \to \mathbb{R}$ tale che

1. F è derivabile in (a, b)
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Nota

- Non tutte le funzioni hanno primitive (es. la funzione segno)
- Una funzione continua ha primitive. Una funzione non continua non implica il non avere primitive. La continuità è una condizione sufficiente, ma non necessaria.

Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo

Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
F primitiva di f in (a, b)

Tesi
Tutte e sole le funzioni primitive di f in (a, b) sono le funzioni del tipo:

$$F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

1. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ sono primitive di f in (a, b)

$$\exists\, D[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

2. Dimostro che tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$ sono le sole primitive.
Se $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f in (a, b) allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in (a, b)$
Consideriamo la funzione $G(x) - F(x)$. Essa è derivabile in (a, b) e

$$D[G(x) - F(x)] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Il 2° corollario di Lagrange dice: "*se due funzioni hanno la stessa derivata in un intervallo, esse differiscono per una costante*".

Quindi, $G(x) - F(x) = \text{costante} \quad \rightarrow \quad G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in (a, b)$

Integrale Indefinito

✓ Definizione

Si chiama **Integrale indefinito** di f l'insieme formato dalle primitive di f in (a, b) se f è dotata di primitive, l'insieme vuoto se f non ha primitive in (a, b).

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non ha primitive in } (a,b) \\ \{F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}\} & \text{se } F \text{ è una primitiva di } f \text{ in } (a,b) \end{cases}$$

Integrali Indefiniti Notevoli

$(c \in \mathbb{R})$

- $\int 0\,dx = c$
- $\int 1\,dx = x + c$
- $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq 0$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^x}{\ln|x|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \alpha \neq 0$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

Integrali di Funzioni Composte

- $\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- *gli altri sono uguali a quelli notevoli ma con $x = f(x)$, tutto per $f'(x)$.*

Proprietà di Omogeneità

✓ Enunciato

Ipotesi
$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
$k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

Tesi

1. kf è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

Dimostrazione

1. Per ipotesi f è dotata di primitive in (a, b) e sia F una sua primitiva.

$$\exists D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

2. Per provare la 2 si dimostrano le due inclusioni.
   Si prova che $\int k \cdot f(x)\,dx \subseteq k \cdot \int f(x)\,dx$

$G \in \int k \cdot f(x)\,dx$
$\exists G'(x) = k \cdot f(x)$

Dobbiamo provare che $G \in k \cdot \int f(x)\,dx$, quindi $G = k \cdot \text{primitiva di f}$
Se $k \neq 0$ possiamo dire che $G(x) = k \cdot \left[\frac{G(x)}{k}\right]$

Se proviamo che $\left[\frac{G(x)}{k}\right]$ è uguale a una primitiva di f in (a,b), allora abbiamo provato che $G(x) \in k \cdot \int f(x)\,dx$.

$D\left[\frac{G(x)}{k}\right] = \frac{1}{k} \cdot G'(x) = \frac{1}{\cancel{k}} \cdot [\cancel{k} \cdot f(x)] = f(x)$

In conclusione, $\frac{G(x)}{k}$ è primitiva di f in (a,b), quindi $G \in k \cdot \int f(x)\,dx$

Proviamo adesso l'altra inclusione $k \cdot \int f(x)\,dx \subseteq \int k \cdot f(x)\,dx$

$G \in k \int f(x)\,dx$, quindi $G(x) = k \cdot F(x)$

Devo provare che G è una primitiva di $k \cdot F(x)$

$G'(x) = D[k \cdot F(x)] = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$
Abbiamo dimostrato che G è una primitiva di $k \cdot f$

Proprietà di Linearità

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive in (a,b)

Tesi

1. $f + g$ è dotata di primitive in (a,b)
2. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

> ⚠ **Osservazione**
> Al secondo membro avviene la somma tra due insiemi, che di norma non è definita. Si intende invece l'insieme formato dalle funzioni che sono la somma di una delle primitive di f e una delle primitive di g.

3. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + \int g(x)\,dx$, con F primitiva di f

> ⚠ **Osservazione**
> Al secondo membro si intende che, quando si tratta di una somma con un integrale, è possibile omettere la costante.

Integrazione per decomposizione in somma

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotate di primitive
$h, k \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli ($h^2 + k^2 > 0$)

Tesi

1. $h \cdot f + k \cdot g$ è dotate di primitive in (a, b)
2. $\int [h \cdot f(x) + k \cdot g(x)]\, dx = h \cdot \int f(x)\, dx + k \cdot \int g(x)\, dx$

Integrazione indefinita per parti

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili
$f' \cdot g$ dotata di primitive in (a, b)

Tesi

1. $f \cdot g'$ è dotata di primitive in (a, b)
2. $\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$

Dimostrazione

f e g sono derivabili, quindi lo è anche $f \cdot g$.
$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \forall x \in (a, b)$

Spostando di membro si ottiene: $f'(x) \cdot g(x) = D[f(x) \cdot g(x)] + f(x) \cdot g'(x)$

Si integrano entrambi i membri e per la proprietà di linearità si ottiene:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) + \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

$f(x)$ è detto **fattore finito**
$g(x)$ è detto **fattore differenziale**

Integrali indefiniti *ciclici*

Metodo risolutivo

Per risolvere un integrale del tipo:

$$\int f(x)\, dx = H(x) + \alpha \cdot \int f(x)\, dx, \quad \alpha \neq 1$$

È sufficiente portare al primo l'integrale e risolvere l'equazione isolandolo.

Metodo di Sostituzione

1^a Formula

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
$\phi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ derivabile in (α, β)
ϕ' continua in (α, β)
$Im\,\phi \subseteq (a, b) \qquad [\iff \phi(x) \in (a, b)\,\forall\, x \in (\alpha, \beta)]$

Tesi
1^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\, dx = \left(\int f(y)\, dy\right)_{y=\phi(x)}$$

2^a Formula

✓ **Enunciato**

Ipotesi
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive in (a, b)
$\phi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ derivabile in (α, β)
ϕ' continua in (α, β)
$Im\,\phi = (a, b)$
ϕ invertibile in (α, β)

Tesi
2^a Formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(x)\, dx = \left(\int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt\right)_{t=\phi^{-1}(x)}$$

Integrali di Polinomi Trigonometrici

Prerequisiti di Trigonometria

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
- $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

$\int \cos^n x\, dx$ oppure $\int \sin^n x\, dx$

n pari

1. Si scompone $\int \sin^{2n} x\, dx$ in $\int (\sin^2 x)^n\, dx$
2. Si trasforma $\sin^2 x$ in $\frac{1-\cos(2x)}{2}$ e si divide la frazione in $\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $n = 2$, il cubo di binomio se $n = 3$, ecc
4. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.

5. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

n dispari

1. Si scompone $\int \sin^n x\,dx$ in $\int \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,dx$
2. Si scompone $sin^{n-1}x$ in $(1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}$
3. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n-1}{2} = 2$, il cubo di binomio se $\frac{n-1}{2} = 3$, ecc
4. Si moltiplica ogni membro della parentesi appena svolta per il $\sin x$ iniziale.
5. Si procede utilizzando l'integrazione composta $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c$ e i vari metodi risolutivi.

$\int cos^n x \cdot \sin^m x\,dx$

$n = m$

1. Si trasforma $\int \sin^n x \cdot \cos^n x\,dx$ in $\int (\sin x \cdot \cos x)^n\,dx$
2. Si trasforma $\sin x \cdot \cos x$ in $\frac{1}{2} \sin 2x$
3. Si svolge la potenza elevando entrambi i fattori e ottenendo $\int \frac{1}{2^n} \sin^n 2x\,dx$
4. Si può portare fuori la costante $\frac{1}{2^n}$
5. Procedere ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con n e m entrambi pari

1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ di grado inferiore, scomponendolo in $(1-cos^2)^{\frac{n}{2}}$
2. Si svolge il quadrato di binomio se $\frac{n}{2} = 2$, il cubo di binomio se $\frac{n}{2} = 3$, ecc
3. Si scompone utilizzando la proprietà di linearità degli integrali.
4. Si procede ricorsivamente utilizzando i vari metodi risolutivi.

$n \neq m$ con almeno n oppure m dispari

1. Si prende $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,dx$ e si sceglie $\sin^n x$ oppure $\cos^n x$ con il grado dispari. Se sono entrambi dispari è preferibile quello con il grado inferiore.
   supponiamo si sia scelto $\sin^n x$
2. Si scompone $\sin^n x$ in $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$.
3. Si procede come nel caso di $\int \sin^n x\,dx$ con n dispari dallo step 2

Integrali di Fratti Semplici

Caso 1: $\frac{1}{(ax+b)^n}$ $\quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

Metodo risolutivo ($n = 1$)

$$\frac{1}{(ax+b)^1} = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{(ax+b)} \cdot a\,dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Metodo risolutivo ($n > 1$)

$$\frac{1}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a} \cdot \int (ax+b)^{-n} \cdot a\,dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Caso 2: $\frac{1}{x^2+px+q}$ $\quad p, q \in \mathbb{R} : \Delta = p^2 - 4q < 0$

Metodo risolutivo

Il denominatore può essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
x^2+px+q &= x^2+2\cdot\frac{px}{2}+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q= \\
&=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}= && (4q-p^2=-\Delta) \\
&=\frac{(2x+p)^2}{4}+\frac{-\Delta}{4}= \\
&=\frac{-\Delta}{4}\cdot\left[\frac{(2x+p)^2}{-\Delta}+1\right]= \\
&=\frac{-\Delta}{4}\cdot\left[1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right] && (-\Delta>0)
\end{aligned}$$

Quindi si può svolgere l'integrale facendo riferimento all'uguaglianza precedente e all'integrazione notevole dell'$\arctan$:

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{x^2+px+q}\,dx &= \int\frac{1}{-\frac{\Delta}{4}\cdot\left[1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right]}\,dx= && \left(D\left[\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right]=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right) \\
&=\frac{\cancel{4}}{-\Delta}\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{\cancel{2}}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}\cdot D\left[\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right]dx= \\
&=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\left(\int\frac{1}{1+y^2}\,dy\right)_{y=\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}}= \\
&=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}+c,\quad c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Caso 3: $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ $\quad a,b\in\mathbb{R},\quad p,q\in\mathbb{R}:\Delta=p^2-4q<0,\ n\in\mathbb{N}$

Caso Particolare

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx= \\
&=\int\frac{\cancel{1+x^2}}{(1+x^2)^{\cancel{2}}}\,dx+\int\frac{-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx= \\
&=\arctan x+\frac{1}{2}\int\frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx= \\
&=\arctan x+\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx= \\
&=\arctan x+\frac{1}{2}\int x\cdot D\left[\frac{1}{1+x^2}\right]dx= \\
&=\arctan x+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2}-\int\frac{1}{1+x^2}\,dx\right]= \\
&=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2}+c,\quad c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Metodo risolutivo

Se il numeratore è derivata del denominatore è sufficiente utilizzare l'integrazione fondamentale del $\ln$.

Se il numeratore non è derivata del denominatore, bisogna fare in modo che lo diventi.

1. Si moltiplica il numeratore per 2 se a è dispari. Ricordarsi di aggiungere $\frac{1}{2}$ fuori dalla frazione per compensare il fattore appena aggiunto.
2. Fai sì di avere tra parentesi la derivata del denominatore, raccogliendo sulla base di a. Ignora il fattore b, metti p al suo posto e compensa fuori dalle parentesi il valore aggiunto, annullandolo. Formalmente: $\frac{a}{2}(2x+p)-\frac{a}{2}p+b$.
3. Si divide la frazione in due e si procede in i vari metodi.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{5x+8}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = && (1)\\
=&\frac{1}{2}\cdot\int \frac{10x+16}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = && (2)\\
=&\frac{1}{2}\cdot\int \frac{5(2x+9)-45+16}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = && (3)\\
=&\frac{5}{2}\cdot\int \frac{2x+9}{(x^2+9x+1)^2}\,dx - 29\int \frac{1}{(x^2+9x+1)^2}\,dx = \\
=&\frac{5}{2}\cdot\frac{(x^2+9+1)^{-1}}{-1} - \dots
\end{aligned}$$

Integrali di Equazioni Razionali Fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx$$

grado $[N(x)] \geq$ grado $[D(x)]$

Metodo risolutivo

È sufficiente effettuare la divisione tra polinomi finché non si ottiene al numeratore un polinomio di grado inferiore al denominatore.

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx$$

Si può quindi procedere con gli altri metodi risolutivi

grado $[N(x)] <$ grado $[D(x)]$

Scomposizione di Polinomi

Ogni polinomio di grado n ha n radici in $\mathbb{C}$. Si consideri $P(x)$ polinomio:

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ una radice reale con molteplicità n di $P(x)$. Allora $P(x)$ può essere diviso per
$$(x-\alpha)^n$$
2. Sia $\alpha = a \pm ib$ una radice complessa con molteplicità n di $P(x)$. Allora $P(x)$ si può dividere per
$$\{[x-(a+ib)]\cdot[x-(a-ib)]\}^n = [(x-a)^2+b^2]^n$$
Si tratta della potenza di un polinomio di secondo grado con $\Delta < 0$ ed equazione del tipo:
$$(x^2+px+q)^n$$

Quindi, ogni polinomio si può fattorizzare nel prodotto di potenze di polinomi di 1° grado (punto 1) e potenze di polinomi di 2° grado con $\Delta < 0$ (punto 2).

Fattorizzazione di Frazione

Si può dimostrare che una frazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ è la somma dei fratti semplici del tipo:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

Ad esempio:

$$\begin{aligned} &\frac{\dots}{(x+1)^2\cdot(x-3)\cdot(x^2+x+1)^3} = \\ =&\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-3}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Hx+J}{(x^2+x+1)^3} \end{aligned}$$

Metodo risolutivo

Per risolvere gli integrali di razionali fratti con numeratore inferiore a denominatore è necessario:

1. Scomporre in fratti semplici la frazione. Trovare $A, B, \dots$ tramite sistema.
2. Utilizzare la proprietà della linearità degli integrali per separare ogni frazione.
3. Utilizzare gli altri metodi d'integrazione.