Diseq. ed Eq. Complesse (Es. 1)

▼ 30th June 2021

Risolvi la seguente disequazione

$$2\log(2x+3) - \log(x+1) > 0$$

Svolgimento

- Determino le condizioni di esistenza per gli argomenti dei due logaritmi

$$C.E.$$
$$\begin{cases} (2x+3)^2 > 0 & x > -\frac{3}{2} \\ x+1 > 0 & x > -1 \end{cases}$$

- Sviluppo la disequazione logaritmica

$$\log[(2x+3)^2] - \log(x+1) > 10^0$$
$$\frac{4x^2+12x+9}{x+1} - 1 > 0$$
$$\frac{4x^2+12x+9-x-1}{x+1} > 0$$
$$\frac{4x^2+11x+8}{x+1} > 0$$

- Pongo Numeratore >0

$$\Delta = 121 - 128$$
$$\text{Numeratore definito su tutto } \mathbb{R}$$

- Risolvo per il denominatore

$$x > -1$$

▼ 27st July 2021

Dare la definizione di maggiorante per un insieme numerico. Determinare poi i maggioranti della funzione definita dalla legge

$$\sqrt{x^2 - 2|x|}$$

Svolgimento :

Definizione di Maggiorante :

$$M \in \mathbb{R} \text{ ''}maggiorante\text{''} \ \ di \ \ X \iff \forall x \in X, M \geq x$$

- Considero Campo d'esistenza, tenendo conto che la x compare due volte, una come valore assoluto e l'altro con esponente pari, il che mi permette di eliminare il valore assoluto

$$C.E.$$
$$\begin{cases} x^2 - 2|x| \geq 0 \quad x(x-2) \geq 0 \end{cases}$$
$$regola \ \ del \ \ D.I.C.E.$$
$$\begin{cases} x \geq 0, x \geq 2 \qquad x \leq 0 \cup x \geq 2 \end{cases}$$

- Applico la definizione di maggiorante a questa funzione. Essendo continua, nell'intervallo in cui è definita non presenta nessun asintoto all'infinito, ne a $-\infty$, né a $+\infty$, quindi la funzione non ammette maggioranti.

▼ 9th September 2021

Dare la definizione di maggiorante di un insieme numerico. Determinare poi i maggioranti della funzione definita dalla legge

$$\frac{|x|}{x^2+1}$$

Svolgimento:

Definizione di maggiorante:

$$M \in \mathbb{R} \text{ ''}maggiorante\text{''} \ \ di \ \ X \iff \forall x \in X, M \geq x$$

▼ 27th September 2021

Dare la definizione di insieme numerico limitato. Stabilire poi se
l'insieme delle soluzioni della disequazione qui riportata sia limitato oppure no.

$$\sqrt{3x-2} < 2(x-1)$$

▼ 25th January 2022

Dare la definizione di funzione inversa. Determinare poi il più ampio intervallo centrato nell'origine in cui la funzione definita dalla legge qui riportata risulti invertibile.

$$\sin^3 x$$

▼ 10th February 2022

Dare la definizione di funzione inversa. Spiegare poi se esiste un intorno dell'origine in cui la funzione definita dalla legge qui riportata risulti invertibile

$$\sin^2 x + e^{-}|x|$$

▼ 12th April 2022

Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} xe^x \sin(e^{-x} \sin \frac{2}{x})$$

▼ 6th July 2022

Risolvere l'equazione

$$|z|^2 = 3z$$

nel campo complesso e rappresentarne graficamente le soluzioni.

Svolgimento

- Si sostituisce il modulo mediante la definizione e si pone $z = a + ib$.

$$\sqrt{a^2 + b^2}^2 = 3a + i3b \tag{1}$$
$$\rightarrow a^2 + b^2 = 3a + i3b \tag{2}$$

- A questo punto si pongono a sistema la parte reale e la parte immaginaria

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3a \\ 3b = 0 \rightarrow b = 0 \end{cases} \tag{3}$$
$$\rightarrow \begin{cases} a^2 - 3a = 0 \rightarrow a(a-3) = 0 \\ b = 0 \end{cases} \tag{4}$$
$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 \ \vee \ a = 3 \\ b = 0 \end{cases} \tag{5}$$

- Le soluzioni sono quindi:

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 3$$

▼ 28th July 2022

Risolvi l'equazione nel campo complesso e rappresentarne graficamente le soluzioni

$$\frac{z^2}{|z|} = 2$$

Svolgimento

- Si moltiplicano entarmbi i membri per $|z|$ per togliere la frazione.

$$z^2 = 2|z| \quad \text{con} \quad |z| \neq 0$$

- Si pone $z = a + ib$ e si sostituisce il modulo mediante la definizione.

$$(a + ib)^2 = 2\sqrt{a^2 + b^2} \tag{6}$$
$$a^2 - b^2 + i2ab = 2\sqrt{a^2 + b^2} \tag{7}$$

- Si pongono a sistema la parte reale e la parte mmaginaria

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2\sqrt{a^2+b^2} \\ 2ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0 \end{cases} \tag{8}$$

- Nella prima equazione si pone una volta $a = 0$ e un'altra volta $b = 0$. E' importante ricordare che $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\begin{cases} -b^2 = 2\sqrt{b^2} \to b^2 + 2|b| = 0 \to b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} a^2 = 2\sqrt{a^2} \to a^2 - 2|a| = 0 \to a = 0 \vee a = 2 \vee a = -2 \\ b = 0 \end{cases} \tag{10}$$

- Le coppie trovate concidono con i numeri complessi soluzione dell'equazione iniziale. Sono quindi

$$z_1 = 2, \qquad z_2 = -2$$

La soluzione $z = 0$ va contro la condizione iniziale $|z| \neq 0$, quindi va scartata.

▼ 5th September 2022

Risolvi l'equazione nel campo complesso e rappresentane graficamente le soluzioni

$$z^2 = \sqrt{3} + i$$

Svolgimento

- Si trasforma z in forma esponenziale ponendolo $= \rho e^{i\theta}$

$$(\rho e^{i\theta})^2 = \sqrt{3} + i$$

- Trasformiamo anche il secondo membro in forma esponenziale usando le opportune formule di passaggio da formale cartesiana a forma esponenziale

$$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$$
$$\arg(\sqrt{3}+i) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$(\rho e^{i\theta})^2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

- Per la proprietà delle potenze possiamo togliere il ^{2} al primo membro elevando i due fattori al quadrato.

$$\rho^2 e^{i2\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

- Si pongono a sistema modulo e argomento (quest'ultimo a meno della periodicità). k si pone 0 e 1 in quanto il coefficente che precede θ è 2 (si itera da 0 a $n-1$).

$$\begin{cases} \rho^2 = 2 \\ 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k = 0,1 \end{cases} \tag{11}$$
$$\rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k = 0,1 \end{cases} \tag{12}$$

- Le soluzioni sono quindi

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

▼ 26th September 2022

Risolvi la disquazione

$$\sqrt{(3^{-x}-1)(3^{x^2}+1)} > 0$$

Svolgimento

Campo d'esistenza→ argomento radice ≥ 0

$$(3^{-x}-1)(3x^2+1) \geq 0$$
$$\text{annullamento del prodotto}$$
$$3^{x^2} \geq -1 \rightarrow \forall x$$
$$3^{-x} \geq 1$$
$$3^{-x} \geq 3^0$$
$$-x \geq 0$$
$$\boxed{x \leq 0}$$

▼ 31th January 2023

Risolvi l'equazione nel campo complesso e rappresenta graficamente le eventuali soluzioni

$$iz^2+1=2(z^2-i)$$

Svolgimento

$$iz^2+1=2x^2-2i$$
$$iz^2-2z^2=-1-2i$$
$$\text{Identità fondamentale } \; i^2=-1$$
$$z^2\boxed{\cancel{(i-2)}}=i\boxed{\cancel{(i-2)}}$$
$$z^2=i$$
$$z=\pm\sqrt{i} \implies z=\frac{1}{2}\pm\sqrt{i}-\frac{1}{2}$$
$$z=\frac{1}{2}+\sqrt{i}-\frac{1}{2}=\frac{1+2i-1}{2}$$
$$z=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{(i+1)^2}{2}$$
$$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}} \rightarrow z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$$
$$|z|=\frac{1}{2}$$
$$\theta=\frac{i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi$$
$$\theta_1=\frac{\pi}{4}, k=0$$
$$\theta_2=\frac{5\pi}{4}, k=1$$

▼ Svolgimento precedente (erroneo)

- Svolgiamo il prodotto a secondo membro, portiamo tutto al primo e raggruppiamo per z^2.

$$iz^2 + 1 - 2z^2 + 2i = 0$$
$$(i-2)z^2 + (1+2i) = 0$$

- Si utilizza la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado intendendo la radice di Δ come radice complessa.

$$\begin{aligned} \Delta[&= b^2 - 4ac] && (13) \\ &= 0 - 4(i-2)(1+2i) && (14) \\ &= (-4i+2)(1+2i) && (15) \\ &= -4i + 8 + 2 + 4i && (16) \\ &= 10 && (17) \end{aligned}$$

- Le due soluzioni sono quindi (<u>penso ci sia un errore di calcolo ma non lo trovo</u>)

$$z = \frac{\pm\sqrt{10}}{2(i-2)} = \frac{\pm\sqrt{10}(-2-i)}{2(-2+i)(-2-i)} = \frac{\pm\sqrt{10}(-2-i)}{10} = \pm\left(\frac{\sqrt{10}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{10}i\right)$$

▼ 17th February 2023

Risolvere l'equazione nel campo complesso e rappresentarne graficamente le soluzioni

$$\frac{z + |z|}{(z + \overline{z})^2} = 1$$

Svolgimento

- Portiamo al secondo membro il denominatore del primo

$$z + |z| = (z + \overline{z})^2 \quad \text{con} \quad (z + \overline{z})^2 \neq 0$$

- Vediamo quando $(z + \overline{z})^2 \neq 0$

$$(z+\overline{z})^2=0 \iff z+\overline{z}=0$$
$$z=a+ib, \qquad \overline{z}=a-ib$$
$$z+\overline{z}=a+ib+a-ib=2a$$
$$a=0$$

- Avendo trovato $a\neq 0$ vuol dire che tra le soluzioni non possiamo prendere numeri immaginari puri (con parte reale $=0$) o 0.
- Sostituiamo $z=a+ib$ nell'equazione

$$a+ib+\sqrt{a^2+b^2}=(2a)^2$$
$$a+ib+\sqrt{a^2+b^2}=4a^2$$

- Poniamo a sistema la parte reale e quella immaginaria

$$\begin{cases} a+\sqrt{a^2+b^2}=4a^2 \\ b=0 \end{cases} \tag{18}$$
$$\begin{cases} 4a^2-a-|a|=0 \\ b=0 \end{cases} \tag{19}$$

- Si pone una volta $a>0$ e un'altra $a<0$.

$$a\geq 0 \qquad 4a^2-2a=0\rightarrow 2a(2a-1)=0\rightarrow a=0 \vee a=\frac{1}{2} \tag{20}$$
$$a<0 \qquad 4a^2=0\rightarrow a=0 \tag{21}$$

- La soluzione quindi è unica (ricordiamo di dover scartare $a=0$), ed è

$$z=\frac{1}{2}$$

▼ 4th April 2023

Risolvere l'equazione nel campo complesso e rappresentarne graficamente le soluzioni

$$z^2+|z|=z$$

Svolgimento

- Consideriamo $z = a + ib$ e riscriviamo l'equazione. Per semplicità isoliamo il modulo a secondo membro.

$$(a+ib)^2 - a - ib = -\sqrt{a^2+b^2} \tag{22}$$
$$\rightarrow a^2 - b^2 + i2ab - a - ib = -\sqrt{a^2+b^2} \tag{23}$$

- Si pone a sistema la parte reale del primo membro con la parte reale del secondo membro, e la parte immaginaria del primo membro con la parte immaginaria del secondo membro (che essendo il modulo ha la parte immaginaria nulla).

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - a = -\sqrt{a^2+b^2} \\ i2ab - ib = i0 \end{cases} \tag{24}$$
$$\rightarrow \begin{cases} \text{''''} \\ b(2a-1) = 0 \end{cases} \tag{25}$$
$$\rightarrow \begin{cases} \text{''''} \\ b = 0 \ \vee \ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{26}$$

- A questo punto nel primo membro si sostituisce una volta $b = 0$ e un'altra volta $a = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a^2 - a = -a \\ b = 0 \end{cases} \tag{27}$$
$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} (\frac{1}{2})^2 - b^2 - \frac{1}{2} = -\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + b^2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{29}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} - b^2 = -\sqrt{\frac{1}{4} + b^2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{30}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b^2 + \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{1}{4} + b^2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{31}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (b^2 + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} + b^2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{32}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b^4 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{4} + b^2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{33}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b^4 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{3}{16} = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{34}$$

- Essendo la prima equazione del sistema una biquadratica, si pone $b^2 = t$ e si usa la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{16} = 0$$
$$\Delta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 > 0$$
$$t = \frac{\frac{1}{2} \pm 1}{2}$$
$$t_1 = \frac{3}{4}, \quad t_2 = -\frac{1}{4}$$

- Si trova b

$$b_1^2 = \frac{3}{4}, \qquad b_2^2 = -\frac{1}{4}$$
$$b_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \nexists b_2$$

- A questo punto basta mettere insieme tutte le coppie ottenute; ogni coppia rappresenta un numero complesso. Le soluzioni sono quindi:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= (0,0) = 0 && (35)\\
z_2 &= (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i && (36)\\
z_2 &= (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i && (37)
\end{aligned}
$$

- Convertiamo le soluzioni in forma esponenziale per poterle disegnare

$$
\text{Modulo}
$$
$$
\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1
$$

$$
\theta_{z_2} = \arctan(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}) = \arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{6} = -60^\circ
$$
$$
z_2 = e^{i-\frac{\pi}{6}}
$$
$$
\theta_{z_3} = \arctan(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} + \pi) = \arctan(\sqrt{3}+\pi) = \frac{\pi}{6} = 60^\circ
$$
$$
z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}}
$$