Билеты к устному экзамену
Введение в математический анализ

by KetchuppOfficial

Содержание

1 БИЛЕТ 1

1.1 Действительные числа

Определение: Сечением α множества $\mathbb{Q}$ называется такое разбиение $\mathbb{Q}$ на два непустых множества A и A' ($A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = \mathbb{Q}$), что $\forall x \in A$, $\forall x' \in A' \hookrightarrow x < x'$; множество A называется нижним классом сечения, множество A' – верхним классом сечения; применяется обозначение $\alpha = A|A'$.

Существуют сечения трёх типов:

1. В A есть наибольший элемент, в A' нет наименьшего элемент;
2. В A нет наибольшего элемента, в A' есть наименьший элемент;
3. В A нет наибольшего элемента, в A' нет наименьшего элемента.

Сечений 4-го типа, когда в нижнем классе есть наибольший элемент, а в верхнем – наименьший, нет.

$\square$ Пусть $\exists r_1 \in A$, $\exists r_2 \in A'$ – соответственно наибольший и наименьший элементы в этих классах. Рассмотрим $r_0 = \dfrac{r_1 + r_2}{2} \in \mathbb{Q}$. Так как $r_0 > r_1$, то $r_0 \notin A$; так как $r_0 < r_2$, то $r_0 \notin A' \implies r_0 \notin \mathbb{Q}$ – противоречие. $\blacksquare$

Определение: иррациональным числом называется сечение III типа.

Определение: действительным числом называется любое сечение II или III типа (в нижнем классе нет наибольшего элемента).

Определение: два действительных числа $\alpha = A|A'$ и $\beta = B|B'$ называют равными, если $A = B$.

Определение: рассмотрим два действительных числа $\alpha = A|A'$ и $\beta = B|B'$; говорят, что $\alpha < \beta$, если $A \subset B$, $\alpha > \beta$, если $A \supset B$ (включения считаются строгими).

Теорема: если действительные числа $\alpha \neq \beta$, то либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha > \beta$.

$\square$ Пусть $\alpha = A|A'$ и $\beta = B|B'$; $\alpha \neq \beta \implies A \neq B$. Нужно доказать, что либо $A \subset B$, либо $A \supset B$. Если не выполнено $A \subset B$, то $\exists r_1 \in \mathbb{Q} : r_1 \in A, r_1 \notin B$. Если не выполнено $A \supset B$, то $\exists r_2 \in \mathbb{Q} : r_2 \in B, r_2 \notin A$.

$$r_1 \notin B \implies r_1 \in B'$$

$$r_2 \notin A \implies r_2 \in A'$$

$$r_1 \in A,\ r_2 \in A' \implies r_1 < r_2$$

$$r_1 \in B',\ r_2 \in B \implies r_1 > r_2$$

Получено противоречие. $\blacksquare$

Теорема (плотность рациональных чисел в $\mathbb{R}$): $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > \beta \hookrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : \alpha > r > \beta$.

$\square$ $\alpha > \beta \implies A \supset B \implies \exists r \in \mathbb{Q} : r \in A, r \notin B$. У действительных чисел в нижнем классе нет наибольшего элемента $\implies \alpha > r \geq \beta$. Если $\beta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, то $r \neq \beta \implies \alpha > r > \beta$; всё доказано. Если $\beta \in \mathbb{Q}$, то $r \in A \implies$ в качестве r можно рассмотреть число из A, которое больше β (оно существует так как включение $A \supset B$ нестрогое). $\blacksquare$

Теорема (принцип Архимеда): $\forall \alpha \in \mathbb{R} \hookrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \alpha$

$\square$ Пусть $\alpha = A|A'$. Любое $r \in A'$ таково, что $r > \alpha$. Выберем $n \in \mathbb{N} : n > r$, тогда $n > \alpha$. $\blacksquare$

Лемма: Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists s_1, s_2 \in \mathbb{Q} : s_1 \leq \alpha \leq s_2, s_1 \leq \beta \leq s_2, s_2 - s_1 < \varepsilon$, то $\alpha = \beta$.

$\square$ Пусть $\alpha \neq \beta$, для определённости $\alpha > \beta$. По плотности рациональных чисел в $\mathbb{R}$: $\exists r_1, r_2 \in \mathbb{Q} : \alpha > r_1 > r_2 > \beta$. Рассмотрим $\varepsilon = r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ и соответствующие ему по условию $s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$.

$$s_1 \leq \alpha \leq s_2, s_1 \leq \beta \leq s_2 \implies s_2 > r_2 > r_1 > s_1 \implies s_2 - s_1 > r_2 - r_1$$

Это что противоречит тому, что $s_2 - s_1 < \varepsilon$. $\blacksquare$

Определение: Сечением множества $\mathbb{R}$ называется такое разбиение $\mathbb{R}$ на два непустых множества $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$ ($\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \emptyset$, $\tilde{A} \cup \tilde{A}' = \mathbb{R}$), что $\forall x \in \tilde{A}$, $\forall x' \in \tilde{A}' \hookrightarrow x < x'$.

Теорема Дедекинда: $\forall \tilde{A}|\tilde{A}'$ во множестве $\mathbb{R}$ $\exists \beta \in \mathbb{R}$, которое является либо наибольшим в $\tilde{A}$, либо наименьшим в $\tilde{A}'$.

$\square$ Пусть $A = \tilde{A} \cap \mathbb{Q}$, $A' = \tilde{A}' \cap \mathbb{Q}$, тогда $A|A'$ – сечение в $\mathbb{Q}$, определяющее некоторое $\beta \in \mathbb{R}$. Значит, либо $\beta \in \tilde{A}$, либо $\beta \in \tilde{A}'$. Пусть для определённости $\beta \in \tilde{A}$. Покажем, что β – наибольший элемент в A (если $\beta \in \tilde{A}'$, доказательство аналогично).
Пусть β не является наибольшим элементом в A, тогда $\exists \gamma > \beta : \gamma \in \tilde{A}$. По теореме о плотности рациональных чисел в $\mathbb{R}$: $\exists r \in \mathbb{Q} : \gamma > r > \beta$. Так как $\gamma \in \tilde{A}$ и $\beta \in \tilde{A}$, то $r \in \tilde{A}$. Далее, так как $r \in \tilde{A}$ и $r \in \mathbb{Q}$, то $r \in A$. $\beta = A|A'$, $r \in A \implies \beta > r$, но $\beta < r$ – противоречие. $\blacksquare$

1.2 Точные верхняя и нижняя грани

Определение: множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X \hookrightarrow x \leq M \ (M - \text{ верхняя граница } X).$$

Определение: множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \hookrightarrow x \geq m \ (m - \text{ нижняя граница } X).$$

Определение: множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Определение: $\alpha \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$ ($\alpha = \sup X$), если

$$(\forall x \in X \hookrightarrow x \leq \alpha) \wedge (\forall \alpha' < \alpha \hookrightarrow \exists x \in X : x > \alpha')$$

Определение: $\beta \in \mathbb{R}$ называется точной нижней гранью множества $X \subset \mathbb{R}$ ($\beta = \inf X$), если

$$(\forall x \in X \hookrightarrow x \geq \beta) \wedge (\forall \beta' > \beta \hookrightarrow \exists x \in X : x < \beta')$$

Лемма: Если $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент α, то $\alpha = \sup X$. Если $X \subset \mathbb{R}$ имеет наименьший элемент β, то $\beta = \inf X$.

□ Докажем для наибольшего элемента, для наименьшего доказательство аналогично.
α – наибольший элемент $X \implies \forall x \in X \hookrightarrow x \leq \alpha$. Сдругой стороны, $\forall \alpha' < \alpha \hookrightarrow \exists x \in X, x = \alpha : x > \alpha'$. Доказано, что $\alpha = \sup X$. ■

Теорема о точной верхней (нижней) грани: $\forall X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$, ограниченного сверху, существует и единственна точная верхняя грань. $\forall X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$, ограниченного снизу, существует и единственна точная нижняя грань.

□ Докажем для точной верхней грани, для точной нижней грани доказательство аналогично.
Пусть сначала ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший элемент, тогда по лемме этот элемент является точной верхней гранью.
Пусть теперь в X нет наибольшего элемента. Рассмотрим множества: $\tilde{A}'$ – все верхние границы X (они существуют в силу ограниченности X), $\tilde{A}$ – все остальные числа.
Ясно, что $\tilde{A} \cap \tilde{A}' = \emptyset$, $\tilde{A} \cup \tilde{A}' = \mathbb{R}$, $\forall x \in \tilde{A}, \forall x' \in \tilde{A}' \hookrightarrow x < x'$ (по построению $x \neq x'$; если $x > x'$, то x больше некоторой верхней границы $\implies x$ – верхняя граница, но это не так) $\implies \tilde{A}|\tilde{A}'$ – сечение в $\mathbb{R}$. Также $X \subset \tilde{A}$, так как если $\exists x \in X : x \in \tilde{A}'$, то x – верхняя граница X, а значит, x – наибольший элемент в X, но рассматривается случай, когда такого элемента нет.
По теореме Дедекинда $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ – либо наибольшее в $\tilde{A}$, либо наименьшее в $\tilde{A}'$. Если α – наибольшее в $\tilde{A}$, то, так как $X \subset \tilde{A}$, α – верхняя граница $X \implies \alpha \in \tilde{A}'$ – противоречие. Значит, α – наименьшее в $\tilde{A}'$.
Итак, α – верхняя граница, и никакое меньшее число верхней границей не является $\implies \alpha = \sup X$.
Докажем теперь единственность точной верхней грани. Пусть $\alpha = \sup X$ и $\beta = \sup X$. Для определённости $\alpha < \beta$. Так как $\beta = \sup X$, $\alpha < \beta$, то $\exists x \in X : x > \alpha$. Это противоречит тому, что $\alpha = \sup X$. ■

Определение: если множество $X \subset \mathbb{R}$ неограничено сверху, то $\sup X = +\infty$; если множество $X \subset \mathbb{R}$ неограничено снизу, то $\inf X = -\infty$.

1.3 Счётность множества рациональных чисел, несчётность множества действительных чисел

Определение: два множества A и B называются эквивалентными (равномощными), если между ними можно установить биекцию.

Определение: множество называется счётным, если оно эквивалентно множеству $\mathbb{N}$.

Лемма: любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

□ Выберем $x_1 \in A$, где A – бесконечное множество. Так как множество бесконечно, можно выбрать x_2 среди оставшихся элементов, x_3 среди оставшихся и т.д. Процесс никогда не закончится в силу бесконечности множества. Построено счётное множество $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subseteq A$. ■

Лемма: любое бесконечное подмножество счётного множества счётно. □ Пусть $B \subset A$, где A – счётное множество, B – бесконечное множество. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Выберем первый из этих элементов, принадлежащий B: $b_1 = a_{n_1}$. Из оставшихся номеров выберем первый $n_2 : a_{n_2} \in B$, тогда $b_2 = a_{n_2}$ $(n_2 > n_1)$. Из оставшихся номеров выберем первый $n_3 : a_{n_3} \in B$, тогда $b_3 = a_{n_3}$ $(n_3 > n_2 > n_1)$, и т.д. Каждый элемент B имеется среди a_n, поэтому через конечное число шагов он будет обозначен $b_k = a_{n_k}$. Таким образом, все элементы B занумерованы, и B счётно. ■

Лемма: 1) объединение конечного и счётного множеств счётно; 2) объединение двух счётных множеств счётно.
□ 1) Пусть A счётно, B конечно. Если $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, $B \backslash A = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$ – также конечно (может быть и пусто). Тогда $A \cup B = A \cup (B \backslash A) = \{b_1, b_2, ..., b_k, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ – счётное множество.
2) Пусть A и B счётны. Если $B \backslash A$ конечно, то доказательство проходит, как в первом случае. Если $B \backslash A$ бесконечно, то оно счётно. Тогда $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$ и $A \cup B = A \cup (B \backslash A) = \{a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...\}$ – счётное множество. ■

Теорема: множество $\mathbb{Q}$ счётно.

□ $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$, где $\mathbb{Q}^-$ – множество отрицательных рациональных чисел, $\mathbb{Q}^+$ – множество положительных рациональных чисел. Достаточно доказать, что $\mathbb{Q}^+$ счётно, так как в таком случае $\mathbb{Q}^- \sim \mathbb{Q}^+$ также счётно $\implies$ $\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+$ счётно как объединение двух счётных множеств. Таким образом, множество $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+) \cup \{0\}$ счётно как объединение счётного и конечного множеств.

Занумеруем множество положительных обыкновенных дробей следующим образом:

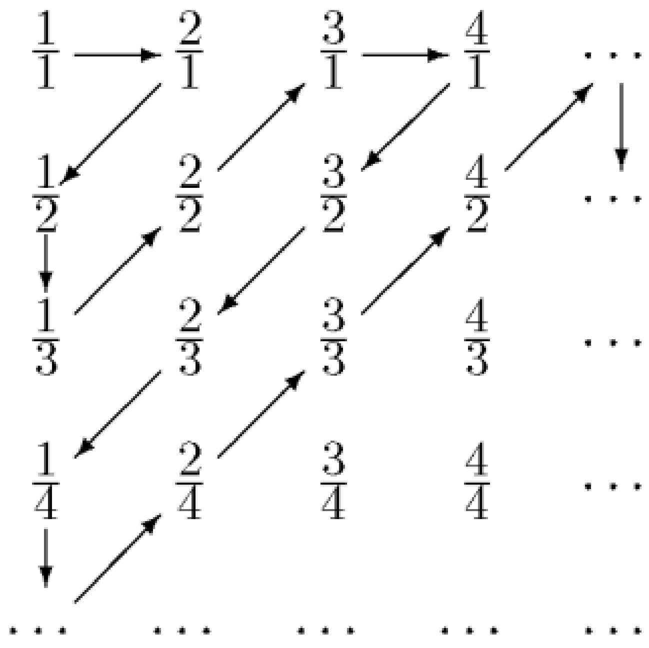

Рис. 1: Подсчёт обыкновенных дробей

$\mathbb{Q}^+$ – бесконечное подмножество множества положительных обыкновенных дробей, которое счётно $\implies$ $\mathbb{Q}^+$ счётно. ■

2 БИЛЕТ 2

2.1 Теорема Кантора о вложенных отрезках

Теорема Кантора о вложенных отрезках: Если $[a_1; b_1] \subset [a_2; b_2] \subset ... \subset [a_n; b_n] \subset ...$ – бесконечная последовательность вложенных отрезков, то $\exists \gamma : \forall n \hookrightarrow a_n \leq \gamma \leq b_n$; если при этом $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то такая точка γ единственна, и $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf b_n$.

☐ Так как $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$, то $\forall n, m \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq b_m$.
Рассмотрим множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$. $\forall m \in \mathbb{N}$ множество A ограничено сверху числом $b_m \implies \exists \gamma_1 = \sup A = \sup a_n$. Так как $\forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow b_m$ – верхняя граница множества A, то $\gamma_1 \leq b_m$. Аналогично множество B ограничено снизу и $\exists \gamma_2 = \inf B = \inf b_n$; $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n$ - нижняя граница $B \implies \gamma_2 \geq a_n$. Так как γ_2 – верхняя граница a_n, то $\gamma_2 \geq \sup a_n \implies \gamma_2 \geq \gamma_1$.
Итак, $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq b_n$. Поэтому точки γ_1 и γ_2 (и весь отрезок $[\gamma_1; \gamma_2]$, если $\gamma_1 < \gamma_2$) принадлежат всем отрезкам $[a_n; b_n]$. Первая часть теоремы доказана.
Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда $0 \leq |\gamma_2 - \gamma_1| \leq b_n - a_n$, и по теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{n\to\infty} |\gamma_2 - \gamma_1| = 0 \implies |\gamma_2 - \gamma_1| = 0 \implies \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Тогда $\gamma = \sup a_n = \inf b_n$. Последовательность a_n монотонно возрастает и ограничена сверху $\implies$ по теореме Вейерштрасса $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Аналогично $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Если $\exists \delta \neq \gamma : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq \delta \leq b_n$, то $|\gamma - \delta| \leq b_n - a_n \implies \delta = \gamma$. Единственность общей точки доказана. ■

Теорема о несчётности множества действительных чисел: множество $\mathbb{R}$ является несчётным.

☐ Докажем сначала несчётность множества чисел отрезка $[a; b]$. Предположим, что все точки отрезка удалось занумеровать в виде последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Пусть $[a_1; b_1] \subset [a; b]$ – такой отрезок, что $x_1 \notin [a_1; b_1]$; $[a_2; b_2] \subset [a_1; b_1]$ – такой отрезок, что $x_2 \notin [a_2; b_2]$ и т.д. Построенная последовательность вложенных отрезков имеет общую точку γ. Однако

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \notin [a_n; b_n] \implies x_n \neq \gamma$$

То есть γ не является членом последовательности x_n – противоречие $\implies$ множество точек любого отрезка несчётно. Так как $[a; b] \subset \mathbb{R}$, то $\mathbb{R}$ также несчётно. ■

3 БИЛЕТ 3

3.1 Предел числовой последовательности

Определение: функцией f с областью определения X и областью значений из Y называется такое соответствие между X и Y, что любому $x \in X$ соответствует единственный $y \in Y$.

Формальное определение: бинарное отношение $f \subseteq X \times Y$ называется функцией, если из $(x, y) \in f$ и $(x, y') \in f$ следует, что $y = y'$.

Определение: числовой последовательностью называется функция с областью определения $\mathbb{N}$ и множеством значений, принадлежащим $\mathbb{R}$.

Определение: Пусть $E(f) \subseteq \mathbb{R}$. Функция f называется ограниченной (ограниченной сверху/снизу) на множестве X, если $E(f)$ ограничено (ограничено сверху/снизу); точные верхняя и нижняя грани $E(f)$ называются точной верхней и нижней гранями f на X и обозначаются $\sup\limits_X f(x)$ и $\inf\limits_X f(x)$ соответственно. Числовая последовательность x_n называется ограниченной (ограниченной сверху/снизу), если множество её значений ограничено (ограничено сверху/снизу); точные верхняя и нижняя грани этого множества называются точной верхней и нижней гранями x_n и обозначаются $\sup x_n$ и $\inf x_n$ соответственно.

Лемма: Функция $f(x)$ ограничена на множестве $X \iff \exists C > 0 : \forall x \in X \hookrightarrow |f(x)| \leq C$.

$\square$ $\boxed{\Leftarrow}$ $|f(x)| \leq C \iff -C \leq f(x) \leq C$. Так как это неравенство выполняется $\forall x$, то множество значений функции $f(x)$ ограничено.
$\boxed{\Rightarrow}$ Функция ограничена на множестве $X \implies \forall x \in X \hookrightarrow m \leq f(x) \leq M$, где $m = \inf\limits_X f(x)$, $M = \sup\limits_X f(x)$. Отсюда следует, что $|f(x)| \leq C$, где $C = max(|m|, |M|)$. $\blacksquare$

Определение: ε-окрестностью $U_\varepsilon(\alpha)$ символа α, где α – один из 6 стандартных предельных символов a, $a + 0$, $a - 0$, $+\infty$, $-\infty$, ∞, называется одно из следующих 6 множеств:

1. $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$;
2. $U_\varepsilon(a + 0) = [a; a + \varepsilon)$;
3. $U_\varepsilon(a - 0) = (a - \varepsilon; a]$;
4. $U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon; +\infty)$;
5. $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon)$;
6. $U_\varepsilon(\infty) = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$,

где $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Определение предела числовой последовательности: символ α называется пределом числовой последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(\alpha)$$

Обозначение предела: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$.

Определение: последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся; последовательность, не имеющая конечного предела, называется расходящейся.

Лемма: если последовательность x_n ограничена при $n \geq n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}$ и определена $\forall n \in \mathbb{N}$, то она ограничена.

□ x_n ограничена при $n \geq n_0,\ n_0 \in \mathbb{N} \iff \exists m, M \in \mathbb{R} \forall n \geq n_0 \hookrightarrow m \leq x_n \leq M$. Вне отрезка $[m; M]$ имеется не более конечного числа членов последовательности x_n (разве что $x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}$). Рассмотрим $m_1 = min(x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, m)$, $M_1 = max(x_1, x_2, ..., x_{n_0-1}, M)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow m_1 \leq x_n \leq M_1 \implies x_n$ ограничена. ■

Лемма: сходящаяся последовательность ограничена.

□ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. По определению предела последовательности при $\varepsilon = 1$:

$$\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - a| < 1,$$

то есть $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow a - 1 < x_n < a + 1$. Последовательность ограничена при $n \geq n_0 \implies$ последовательность ограничена. ■

3.2 Единственность предела

Лемма: сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

□ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$; для определённости $a < b$.
Зафиксируем $\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$, то есть $\varepsilon \leq \dfrac{b-a}{2}$. По определению предела:

$$\exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$
$$\exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(b)$$

Тогда при $n \geq n_3 = max(n_1, n_2) \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ – противоречие. ■

3.3 Бесконечно малые последовательности и их свойства

Определение: Последовательность называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Лемма: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая последовательность.

□ Пусть $\alpha_n = x_n - a$, тогда:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |\alpha_n| < \varepsilon \iff \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

■

Лемма: сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

□ Пусть α_n и β_n – бесконечно малые последовательности. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \hookrightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда при $n \geq n_0 = max(n_1, n_2)$ выполняется $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть $\alpha_n + \beta_n$ – бесконечно малая. ■

Лемма: произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.

□ Если последовательность β_n ограничена, то $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |\beta_n| \leq C$. Если α_n – бесконечно малая, то

$$\forall\varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{C}$$

Тогда при $n \geq n_0$ выполняется $|\alpha_n\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$, то есть $\alpha_n\beta_n$ – бесконечно малая. ■

Следствие 1: если α_n – бесконечно малая последовательность, $C \in \mathbb{R}$, то $x_n = C\alpha_n$ – бесконечно малая последовательность.

□ Следует из того, что постоянная последовательность ограничена. ■

Следствие 2: произведение двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

□ Следует из того, что одну из последовательностей можно рассматривать как имеющую конечный предел, следовательно, ограниченную. ■

3.4 Свойства пределов, связанные с неравенствами

Усиленная лемма о сохранении знака: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a \neq 0$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2},\ sign(x_n) = sign(a)$$

□ Пусть $a > 0$. Зафиксируем в определении предела $\varepsilon = \frac{a}{2}$, тогда:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow |x_n - a| < \frac{a}{2}$$

Следовательно, $x_n > \frac{a}{2}$. В качестве n_0 можно рассмотреть любое $n \in \mathbb{N} : n \geq n_1$. Случай $a < 0$ рассматривается аналогично $\left(\text{в определении прелела берётся } \varepsilon = \frac{|a|}{2}\right)$. ■

Лемма о сохранении знака: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $a \neq 0$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow sign(x_n) = sign(a)$$

□ Напрямую следует из усиленной леммы о сохранении знака. ■

Теорема о предельном переходе в неравенстве: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причём $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

□ Предположим, что $a > b$. Рассмотрим $\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ $\left(\text{например, } \varepsilon = \frac{a-b}{2}\right)$, тогда:

$$\exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \hookrightarrow y_n \in U_\varepsilon(b)$$

При $n \geq n_3 = max(n_0, n_1, n_2)$ выполняется $x_n > y_n$, что противоречит условию. ■

Замечание: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причём $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n < y_n$, то $a \leq b$ (возможно $a = b$). Например: $x_n = -\dfrac{1}{n} < y_n = \dfrac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Следствие: если $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in [a; b]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, то $c \in [a; b]$.

□

$$\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \geq a \implies c \geq a$$

$$\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \leq b \implies c \leq b$$

Тогда $(c \geq a) \wedge (c \leq b) \implies c \in [a; b]$. ■

Теорема о двух милиционерах: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \leq y_n \leq z_n,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

□ По определению предела числовой последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \hookrightarrow z_n \in U_\varepsilon(a)$$

Тогда $\forall n \geq n_3 = max(n_0, n_1, n_2) \hookrightarrow a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_3(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_3 \hookrightarrow y_n \in U_\varepsilon(a)$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

3.5 Арифметические операции со сходящимися последовательностями

Теорема: пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$, тогда:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = ab$;
3. Если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

□ $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n, β_n - бесконечно малые последовательности.

1) $x_n + y_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$.

$\alpha_n + \beta_n$ – бесконечно малая как сумма двух бесконечно малых $\implies \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

2) $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$.

$a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ – бесконечно малая как сумма двух произведений бесконечно малой на константу и произведения двух бесконечно малых $\implies \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab$.

3) Так как $b \neq 0$, то по лемме о сохранении знака

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow y_n \neq 0$$

Значит, $\dfrac{x_n}{y_n}$ определена $\forall n \geq n_0$ и не нужно требовать $y_n \neq 0$.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)$$

$\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n$ – бесконечно малая как сумма бесконечно малой и произведения бесконечно малой на константу. Так как $b \neq 0$, то по усиленной лемме о сохранении знака

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2} \implies \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}$$

Значит, $\dfrac{1}{y_n}$ ограничена при $n \geq n_1 \implies \dfrac{1}{y_n}$ ограничена. Таким образом, $\dfrac{1}{y_n}(\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n)$ – бесконечно малая $\implies \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$. ■

Следствия (в обозначениях теоремы):

1. $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = Ca$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = a^k$ (при $k \in \mathbb{N}$; если $a \neq 0$, то при $k \in \mathbb{Z}$);
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k} = 0$ (при $k \in \mathbb{N}$), так как $\dfrac{1}{n^k} = \left(\dfrac{1}{n}\right)^k$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

3.6 Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности

Определение: последовательность x_n называется

1. строго возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} > x_n$;
2. строго убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} < x_n$;
3. нестрого возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} \geq x_n$;
4. нестрого убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n+1} \leq x_n$;

все такие последовательности называются монотонными.

Теорема Вейерштрасса: если последовательность x_n возрастает (строго или нестрого) и ограничена сверху, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n$; если последовательность x_n убывает (строго или нестрого) и ограничена снизу, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf x_n$.

□ Докажем первую часть теоремы. Вторая доказывается аналогично.
По теореме о точной верхней грани $\exists \sup x_n = \alpha$. Тогда

$$(\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \leq \alpha) \land (\forall \alpha' < a \hookrightarrow \exists n_0(\alpha') \in \mathbb{N} : x_{n_0} > \alpha')$$

Введём обозначение: $\varepsilon = \alpha - \alpha'$, $\varepsilon > 0$. Последовательность x_n монотонно возрастает, следовательно:

$$\forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \geq x_{n_0}$$

При этом также $x_n \leq \alpha$. Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon(\alpha')) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow \alpha - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \alpha \implies x_n \in U_\varepsilon(\alpha)$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha = \sup x_n$. ■

3.7 Число e

Определение: числом e называется предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

□ Докажем корректность этого определения, то есть докажем существование такого предела. Пусть $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Рассмотрим последовательность $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Докажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2n+4}}{(n(n+2))^{n+2}}\cdot\frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{n+2}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1$$

Итак, $y_{n+1} \leq y_n \implies$ последовательность y_n нестрого убывает. Также $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow y_n > 1$. По теореме Вейерштрасса, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf y_n$.

$$x_n = \frac{y_n}{1+\dfrac{1}{n}} \implies \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{1} = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$. ■

3.8 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Определение: последовательность x_n называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Лемма: бесконечно большая последовательность является неограниченной.

□ Если x_n неограничена, то:

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n(E) \in \mathbb{N} : |x_n| > E$$

Если x_n является бесконечно большой, то:

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_0(E) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n| > E$$

Условию неограниченности, например, удовлетворяет n_0, поэтому бесконечно большая последовательность неограничена. ■

Лемма: 1) если последовательность x_n является бесконечно большой, то последовательность $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ – бесконечно малая;
2) если последовательность x_n бесконечно малая, и $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \neq 0$, то последовательность $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ – бесконечно большая.

□ По определению бесконечно большой последовательности:

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_0(E) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n| > E$$

Тогда по $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \neq 0 \implies$ последовательность y_n определена, и не нужно делать дополнительную оговорку, как во второй части леммы. $\forall E$ рассмотрим $\varepsilon = \dfrac{1}{E}$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon(E)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n| > E \implies |y_n| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E} = \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

То есть y_n – бесконечно малая.

2) Доказательство аналогично. ■

Лемма: 1) если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow y_n \geq x_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;
2) если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow y_n \leq x_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

□ 1) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_1(E) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \hookrightarrow x_n > E$$

Пусть $n_2 = max(n_0, n_1)$, тогда

$$\forall n \geq n_2 \hookrightarrow y_n \geq x_n > E \implies \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$

2) Доказательство аналогично. ■

Аналог теоремы Вейерштрасса для бесконечно больших последовательностей:

1) если последовательность x_n возрастает (строго или нестрого) и неограничена сверху, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

2) если последовательность x_n убывает (строго или нестрого) и неограничена снизу, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

□ Докажем первую часть теоремы, вторая доказывается аналогично.

Так как x_n неограничена сверху, то

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_0(E) \in \mathbb{N} : x_{n_0} > E$$

Последовательность монотонно возрастает $\implies \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \geq x_{n_0}$. Поэтому:

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_0(E) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n > E$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ■

4 БИЛЕТ 4

4.1 Подпоследовательности, частичные пределы

Определение: пусть x_n – числовая последовательность, а n_k – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.

Определение: число $a \in \mathbb{R}$ (или символ $+\infty$, $-\infty$) называется частичным пределом (предельной точкой) последовательности x_n, если существует такая строго возрастающая последовательность индексов n_k, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Лемма: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, где α – один из 6 СПС, то $\forall x_{n_k} \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$.

$\square$ По определению предела, вне любой окрестности $U_\varepsilon(\alpha)$ содержится не более конечного числа членов x_n. Так как все n_k различны, то вне любой $U_\varepsilon(\alpha)$ имеется не более конечного числа членов $x_{n_k} \implies \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. $\blacksquare$

Следствие: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, то a – единственный частичный предел x_n.

$\square$ Так как все подпоследовательности имеют один и тот же предел, то он является единственным частичным пределом. $\blacksquare$

Критерий частичного предела: пусть α – один из символов a, $+\infty$, $-\infty$, тогда α является частичным пределом $\iff$ в любой $U_\varepsilon(\alpha)$ содержится бесконечно много членов x_n.

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Если α – частичный предел x_n, то существует подпоследовательность $x_{n_k} : \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ внутри $U_\varepsilon(\alpha)$ содержатся все x_{n_k}, начиная с некоторого номера k_0, а значит, бесконечно много членов x_n.

$\boxed{\Leftarrow}$ Сначала рассмотрим случай $a \in \mathbb{R}$. Возьмём $\varepsilon = 1$, x_{n_1} - некоторый член x_n из $U_1(a)$. Возьмём теперь $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Так как в $U_{\frac{1}{2}}(a)$ бесконечно много членов, то выберем $x_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(a)$ так, что $n_2 > n_1$, и т.д. Пусть построены $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}$, где $n_1 < n_2 < ... < n_k$, $x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$. Так как в $U_{\frac{1}{k+1}}(a)$ бесконечно много членов x_n, то выберем $x_{k+1} \in U_{\frac{1}{k+1}}(a)$ так, чтобы $n_{k+1} > n_k$. Таким образом, построена бесконечная последовательность x_{n_k}, причём $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$. То есть $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow a - \dfrac{1}{k} < x_{n_k} < a + \dfrac{1}{k}$. По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, то есть a – частичный предел x_n.

Для $\alpha = +\infty$ и $\alpha = -\infty$ доказательство аналогично. Например, для $\alpha = +\infty$ нужно брать $\varepsilon = 1, 2, 3, ..., k, ...$; x_{n_k} выбирать таким, что $x_{n_k} \in U_k(+\infty)$, то есть $x_{n_k} > k$. Тогда по аналогу теоремы о двух милиционерах для бесконечно больших последовательностей, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. $\blacksquare$

4.2 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема Больцано-Вейерштрасса: любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность (то есть имеет конечный частичный предел).

☐ Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a \leq x_n \leq b$, где $a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Выберем ту половину $\left[a; \dfrac{a+b}{2}\right]$ или $\left[\dfrac{a+b}{2}; b\right]$ отрезка $[a; b]$ (назовём её Δ_1), где содержится бесконечно много x_n (в обоих половинах конечного числа быть не может, так как в таком случае весь отрезок содержит конечное число членов последовательности, что неверно). Если обе половины содержат бесконечно много членов x_n, то Δ_1 – любая из половин. На отрезке Δ_1 аналогично выбираем половину Δ_2, содержащую бесконечно много членов x_n, и т.д. На k-м шагу в Δ_k выбираем половину Δ_{k+1}, содержащую бесконечно много членов x_n. Имеем последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset ... \supset \Delta_n \supset ...$, причём длина n-го отрезка равна $\dfrac{b-a}{2^n} = (b-a)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ и стремится к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = 0$). По теореме Кантора о вложенных отрезка, $\exists! c : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow c \in \Delta_n$. Отсюда следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow \Delta_n < \varepsilon \implies \forall n \geq n_0 \hookrightarrow \Delta_n \subset U_\varepsilon(c)$$

Значит, $U_\varepsilon(c)$ содержит бесконечно много членов $x_n \implies$ по критерию частичного предела, c – частичный предел x_n. ■

Аналог теоремы Больцано-Вейерштрасса для неограниченных последовательностей: если последовательность x_n неограничена сверху, то она имеет частичный предел $+\infty$; если последовательность x_n неограничена снизу, то она имеет частичный предел $-\infty$.

☐ Докажем первую часть теоремы. Вторая доказывается аналогично.

Зафиксируем $E > 0$. x_n неограничена $\implies \exists n_1(E) \in \mathbb{N} : x_{n_1} > E$. Теперь в качестве нового E в определении неограниченности сверху рассмотрим x_{n_1}. Тогда $\exists n_2(x_{n_1}) \in \mathbb{N} : x_{n_2} > x_{n_1}$ и т.д. Мы выбрали бесконечно много различных членов последовательности x_n таких, что

$x_{n_1} < x_{n_2} < ... < x_{n_k} < ...$ и $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n_k} \in U_E(+\infty) \implies$ по критерию частичного предела, $+\infty$ – частичный предел последовательности x_n. ■

Теорема о единственном частичном пределе: пусть последовательность x_n ограничена и имеет единственный частичный предел, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

☐ Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow m \leq x_n \leq M$, где $m < M$, $m \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$. Так как для некоторой подпоследовательности $x_{n_k} \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, и $\forall k \hookrightarrow m \leq x_{n_k} \leq M$, то по теореме о предельном переходе в неравенстве: $m \leq a \leq M$.

Докажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Если это не так, то $\exists \varepsilon > 0$: вне $U_\varepsilon(a)$ содержится бесконечно много членов x_n. Пусть для определённости бесконечно много членов x_n справа от $U_\varepsilon(a)$, то есть на $[a+\varepsilon; M]$. По теореме Больцано-Вейерштрасса, на $[a+\varepsilon; M]$ существует частичный предел x_n, отличный от a – противоречие. ■

4.3 Критерий Коши существования конечного предела числовой последовательности

Определение: последовательность x_n называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Критерий Коши сходимости последовательности: последовательность x_n сходится $\iff$ x_n фундаментальна.

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m \geq n_0 \hookrightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда $\forall n, m \geq n_0$ выполняется

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, последовательность x_n фундаментальна.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть x_n – фундаментальная последовательность. Докажем сначала, что она ограничена. При $\varepsilon = 1$ имеем

$$\exists n_0(1) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - x_m| < 1$$

Зафиксируем $m = n_0$. Тогда

$$\forall n \geq n_0 \hookrightarrow |x_n| = |x_n - x_m + x_m| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < 1 + |x_m| = 1 + |x_{n_0}|$$

Таким образом, последовательность x_n ограничена при $n \geq n_0 \implies x_n$ ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса последовательность x_n имеет конечный частичный предел. В силу теоремы о единственном частичном пределе достаточно доказать, что других частичных пределов последовательность не имеет. Предположим, что это не так и существуют два различных частичных предела a и b (для определённости $a < b$). Возьмём в определении фундаментальности $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$. Тогда для данного ε:

$$\exists n_0 \left(\frac{b-a}{3}\right) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |x_n - x_m| < \frac{b-a}{3}$$

В $U_\varepsilon(a)$ содержится бесконечно много членов x_n по критерию частичного предела. Значит:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geq n_0 : x_{n_1} \in U_\varepsilon(a)$$

Аналогично:

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, n_2 \geq n_0 : x_{n_2} \in U_\varepsilon(b)$$

Тогда $|x_{n_1} - x_{n_2}| > \dfrac{b-a}{3}$ – противоречие определению фундаментальности. $\blacksquare$

5 БИЛЕТ 5

5.1 Определения предела числовой функции одной переменной по Коши и по Гейне, их эквивалентность

Определение: проколотой ε-окрестностью $\mathring{U}_\varepsilon(\alpha)$ символа α, где α – один из 6 стандартных предельных символов (a, $a+0$, $a-0$, $+\infty$, $-\infty$, ∞), называется одно из следующих 6 множеств:

1. $\mathring{U}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a) \cup (a; a+\varepsilon)$;
2. $\mathring{U}_\varepsilon(a+0) = (a; a+\varepsilon)$;
3. $\mathring{U}_\varepsilon(a-0) = (a-\varepsilon; a)$;
4. $\mathring{U}_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon; +\infty)$;
5. $\mathring{U}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon)$;
6. $\mathring{U}_\varepsilon(\infty) = (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$,

где $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

Определение предела функции по Гейне: пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности α, где α – один из 6 СПС, тогда говорят, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, где β – один из 6 СПС, если

$$\forall x_n : \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ x_n \neq \alpha \hookrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$$

Определение предела функции по Коши: пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности α, где α – один из 6 СПС, тогда говорят, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, где β – один из 6 СПС, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\beta)$$

Теорема: Пусть α, β каждый – один из 6 СПС. Тогда $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ в смысле определения по Коши $\iff$ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ в смысле определения по Гейне.

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Коши, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\beta).$$

Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha, x_n \neq \alpha$.

Для $\delta(\varepsilon)$ выберем $n_0(\delta) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_\delta(\alpha)$. Тогда из определения предела по Коши следует, что $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(\beta)$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(\beta) \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$$

Так как x_n любая, то выполнено определение по Гейне.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Гейне. Докажем от противного, что $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Коши. Если это не так, то

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \hookrightarrow \exists x(\delta) \in \mathring{U}_\delta(\alpha) : f(x) \notin U_\varepsilon(\beta)$$

Рассмотрим сначала случай, когда α – конечный символ (a, $a+0$, $a-0$; $a \in \mathbb{R}$). Возьмём $\delta = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, тогда $x(\delta) = x\left(\dfrac{1}{n}\right) = x_n$ – некоторая последовательность такая, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \exists x_n \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(\alpha) : f(x_n) \notin U_\varepsilon(\beta) \qquad (1)$$

Окрестность α является проколотой, поэтому $x_n \neq \alpha$. Также по теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ (если $\alpha = a$, то $a - \dfrac{1}{n} < x_n < a + \dfrac{1}{n}$; если $\alpha = a-0$, то $a - \dfrac{1}{n} < x_n < a$; если $\alpha = a+0$, то $a < x_n < a + \dfrac{1}{n}$). Тогда в силу определения предела по Гейне имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(\beta)$$

То есть возникло противоречие с утверждением (1). Значит, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ по Коши.

Если $\alpha = -\infty$, $+\infty$ или ∞, тогда берём $\delta = n, n \in \mathbb{N}$. Если $\alpha = \infty$, то $|x_n| > n$; если $\alpha = +\infty$, то $x_n > n$; если $\alpha = -\infty$, то $x_n < -n$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, и завершение доказательства аналогично. ■

5.2 Свойства предела функции

Лемма о сохранении знака: если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, где α – один из 6 СПС, то $\exists \delta_0 > 0 :$ $\forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow sign(f(x)) = sign(b)$.

□ Пусть $b > 0$, тогда, согласно определению предела по Коши, при $\varepsilon = b$ имеем:

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow f(x) \in U_b(b)$$

Отсюда следует, что $\forall x \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow 0 < f(x) < 2b \implies \forall x \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow f(x) > 0$. В качестве δ_0 можно выбрать $\delta(\varepsilon)$.

Случай $b < 0$ рассматривается аналогично ($\varepsilon = -b$). ■

Теорема о предельном переходе в неравенстве для функций: если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = c \in \mathbb{R}$, α – один из 6 СПС, причём $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow f(x) \leq g(x)$, то $b \leq c$.

□ Рассмотрим любую последовательность x_n : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(\alpha)$$

Значит, $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \leq g(x_n)$.

Из определения предела по Гейне следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = c$. Тогда по теореме о предельном переходе в неравенстве для последовательностей: $b \leq c$. ■

Теорема о двух милиционерах для функций: если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = b \in \mathbb{R}$, α – один из 6 СПС, причём $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, то $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = b$.

□ Рассмотрим любую последовательность x_n : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(\alpha)$$

Значит, $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$.

Из определения предела по Гейне следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$. Тогда по теореме о двух милиционерах для последовательностей: $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = b$. Так как x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = b$. ■

Аналог теоремы о двух милиционерах для бесконечно больших функций:

1) если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, и $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow g(x) \geq f(x)$, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$;

2) если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, и $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow g(x) \leq f(x)$, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$.

□ 1) Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha).$$

Значит, $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow g(x_n) \geq f(x_n)$. Согласно определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, поэтому по одноимённой теореме для последовательностей: $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = +\infty$. Так как x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$.

2) Доказательство аналогично. ■

Лемма: если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, α - один из 6 СПС, то $\exists \delta_0 > 0 : f$ ограничена в $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha)$.

□ Возьмём в определении предела по Коши $\varepsilon = 1$, тогда:

$$\exists \delta(1) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) \hookrightarrow |f(x) - b| < 1$$

Отсюда следует, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) \hookrightarrow b - 1 < f(x) < b + 1 \implies f$ ограничена в $\overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha)$. В качестве δ_0 можно взять $\delta(1)$. ■

Лемма: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \beta$, $a \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \beta$, где β – один из 6 СПС.

□ $\boxed{\Rightarrow}$ Если $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(\beta)$, то $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a-0), \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a+0) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(\beta)$, так как $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a) = \overset{\circ}{U}_{\delta}(a-0) \cup \overset{\circ}{U}_{\delta}(a+0)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \beta$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (a - \delta_1; a) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(\beta)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \in (a; a + \delta_2) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(\beta)$$

Если взять $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, то $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \hookrightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(\beta) \implies \lim\limits_{x\to a} f(x) = \beta$. ■

Лемма: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \beta \iff \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \beta$, где β – один из 6 СПС.

□ Доказывается аналогично предыдущей лемме, но нужно взять $\Delta = max(\Delta_1, \Delta_2)$. ■

Определение: функция f называется бесконечно малой при $x \to \alpha$, где α – один из 6 СПС, если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$; функция f называется бесконечно большой при $x \to \alpha$, где α – один из 6 СПС, если $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$.

Лемма: пусть функция $f(x)$ ограничена в некоторой $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha)$, $\delta_0 > 0$, а функция $g(x)$ – бесконечно малая при $x \to \alpha$, тогда $f(x)g(x)$ – бесконечно малая при $x \to \alpha$.

☐ Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha).$$

Отсюда следует, что последовательность $f(x_n)$ ограничена при $n \geq n_0 \implies$ последовательность $f(x_n)$ ограничена. Далее, из определения предела функции по Гейне следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = 0$ (произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную). Так как x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) = 0$, то есть $f(x)g(x)$ – бесконечно малая при $x \to \alpha$. ■

Лемма: 1) если функция $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to \alpha$, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x \to \alpha$;

2) если функция $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to \alpha$, и $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow f(x) \neq 0$, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая при $x \to \alpha$.

☐ Докажем сначала вторую часть леммы. Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha).$$

Отсюда следует, что $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \neq 0$. Согласно определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Поскольку $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, то $g(x_n) = \dfrac{1}{x_n}$ – бесконечно большая последовательность. Так как x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty \implies g(x)$ – бесконечно большая при $x \to \alpha$.

Теперь докажем первую часть теоремы. В определении предела $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ по Коши возьмём $\varepsilon = 1$:

$$\exists \delta(1) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha) \hookrightarrow |f(x)| > 1$$

то есть заведомо $f(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}_{\delta}(\alpha)$. Далее доказательство аналогично первому пункту. ■

Теорема об арифметических операциях с пределами функции: пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = c \in \mathbb{R}$, где α – один из 6 СПС, тогда:

1. $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) + g(x)) = b + c$;
2. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) = bc$;
3. Если $c \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

☐ Докажем 3-й пункт теоремы, остальные доказываются аналогично.

Так как $c \neq 0$, то по лемме о сохранении знака: $\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha) \hookrightarrow g(x) \neq 0$ и $g(x)$ определена в $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(\alpha)$.

Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Согласно определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = c \neq 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{b}{c}$. Так как x_n любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$. ■

Следствия (в обозначениях теоремы):

1. $\lim\limits_{x\to\alpha} Cf(x) = Cb$;
2. $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) - g(x)) = b - c$;
3. $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x))^k = b^k$ (при $k \in \mathbb{N}$; если $b \neq 0$, то при $k \in \mathbb{Z}$);
4. $\lim\limits_{x\to a} x^k = a^k$, если $a \in \mathbb{R}$ (при $k \in \mathbb{N}$; если $a \neq 0$, то при $k \in \mathbb{Z}$).

5.3 Критерий Коши существования конечного предела функции

Критерий Коши существования конечного предела функции: пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности α, где α – один из 6 СПС, тогда

$$\exists \lim_{x\to\alpha} f(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x' \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x'' \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Таким образом,

$$\forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(\alpha) \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + b - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Условие Коши выполнено.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть выполнено условие Коши. Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta(\varepsilon)$ (здесь ε слева – из условия Коши, справа – из определения предела последовательности), тогда:

$$\exists n_0(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_\delta(\alpha)) \wedge (\forall m \geq n_0 \hookrightarrow x_m \in \mathring{U}_\delta(\alpha))$$

Тогда из условия Коши получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{R} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Таким образом, последовательность $f(x_n)$ фундаментальна, и по критерию Коши сходится. Остаётся доказать, что $\forall x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ один и тот же.

Пусть для двух таких последовательностей x'_n и x''_n выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = b$, $a \neq b$.

Рассмотрим последовательность $\gamma_n = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, ..., x'_n, x''_n, ...\}$. Так как вне любой проколотой окрестности α содержится не более конечного числа членов x'_n и не более конечного числа членов x''_n, значит, и не более конечного числа членов $\gamma_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \alpha$, $\gamma_n \neq \alpha$. Следовательно, $f(\gamma_n)$ также фундаментальна и сходится.

Однако последовательность $f(\gamma_n)$ имеет два конечных частичных предела a и b – противоречие. $\blacksquare$

5.4 Теорема о замене переменной под знаком предела

Теорема о замене переменной под знаком предела: пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ и $f(x) \neq \beta$ в некоторой $\mathring{U}_{\delta_0}(\alpha)$, и пусть $\lim\limits_{u\to\beta} g(u) = \gamma$, тогда $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma$.

$\square$ Рассмотрим любую последовательность x_n : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Возьмём в определении предела последовательности $\varepsilon = \delta_0$, тогда:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(\alpha)$$

Значит $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x_n) \neq \beta$. Согласно определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$. Рассмотрим последовательность $u_n = f(x_n)$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \beta$, $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow u_n \neq \beta$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = \gamma$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \gamma$. Так как x_n – любая, то $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma$. $\blacksquare$

Контрпример на существенность условия $f(x) \neq \beta$:

$$f(x) = 0;$$

$$g(u) = \begin{cases} 0, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases}$$

5.5 Существование односторонних пределов у монотонных функций

Определение: 1) функция $f(x)$ называется строго (или нестрого) возрастающей на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \leq f(x_2)$);

2) функция $f(x)$ называется строго (или нестрого) убывающей на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Все такие функции называются монотонными на множестве X.

Теорема о пределах монотонных функций:

1) Пусть функция $f(x)$ возрастает (строго или нестрого) на $(a;b)$, где $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \sup\limits_{(a;b)} f(x)$; если $f(x)$ ограничена сверху на $(a;b)$, то предел конечен, если нет – равен $+\infty$. Также $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a;b)} f(x)$; если $f(x)$ ограничена снизу на $(a;b)$, то он конечен, если нет – равен $-\infty$.

2) Пусть функция $f(x)$ убывает (строго или нестрого) на $(a;b)$, где $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \inf\limits_{(a;b)} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \sup\limits_{(a;b)} f(x)$ (с аналогичными оговорками).

Замечание: Если $b = +\infty$, то под $b-0$ понимаем $+\infty$; если $a = -\infty$, то под $a+0$ понимаем $-\infty$.

$\square$ Доказательство проведено для случая возрастающей функции и $x \to b-0$, остальные случаи доказываются аналогично.

Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b - 0$ ($x_n < b$, если $b \in \mathbb{R}$). Нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M = \sup\limits_{(a;b)} f(x)$.

1) Пусть $M \in \mathbb{R}$, то есть $f(x)$ ограничена сверху на $(a;b)$. Тогда по определению точной верхней грани:

$$\forall x \in (a;b) \hookrightarrow (f(x) \le M) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists x'(\varepsilon) \in (a;b) : f(x') > M - \varepsilon)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b - 0$, то

$$\forall x' \in (a;b) \hookrightarrow \exists n_0(x'(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \hookrightarrow x_n \in (x';b)$$

Тогда в силу монотонности возрастания:

$$\forall n \ge n_0 \hookrightarrow f(x_n) \ge f(x') > M - \varepsilon.$$

Также $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow f(x_n) \le M$. Окончательно:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \hookrightarrow f(x_n) \in (M-\varepsilon; M] \implies$$

$$\implies \forall n \ge n_0 \hookrightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(M) \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$$

Всё доказано.

2) Пусть $M = +\infty$, то есть $f(x)$ неограничена сверху на $(a;b)$. Тогда

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists x'(E) \in (a;b) : f(x') > E$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b - 0$, то

$$\forall x' \in (a;b) \hookrightarrow \exists n_0(x'(E)) \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \hookrightarrow x_n \in (x';b)$$

Тогда в силу монотонности возрастания: $\forall n \ge n_0 \hookrightarrow f(x_n) \ge f(x') > E$. Окончательно:

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists n_0(E) \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \hookrightarrow f(x_n) > E \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty = M$$

Всё доказано. $\blacksquare$

6 БИЛЕТ 6

6.1 Непрерывность функции в точке

Определение: пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$, тогда $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Определение: пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $a+0$ (или $a-0$), $a \in \mathbb{R}$, тогда $f(x)$ называется непрерывной справа (соответственно слева) в точке a, если $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ (соответственно $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$).

Определение: функция $f(x)$ называется разрывной в точке $a \in \mathbb{R}$, если она определена в некоторой проколотой окрестности точки a и не является непрерывной в этой точке; точка a при этом называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Определение: если в точке разрыва a функции $f(x)$ $\exists f(a+0) \in \mathbb{R}$, $\exists f(a-0) \in \mathbb{R}$, то эта точка называется точкой разрыва первого рода. Величина $d = f(a+0) - f(a-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке a. Если в точке разрыва первого рода $f(a+0) = f(a-0)$, то разрыв называется устранимым. Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.

6.2 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ непрерывны в точке a; если при этом $g(a) \neq 0$, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке a.

$\square$ Следует из теоремы об арифметических операциях с пределами функций. $\blacksquare$

Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции: пусть $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = b \in \mathbb{R}$, а функция $g(x)$ непрерывна в точке b, тогда $\lim\limits_{x \to \alpha} g(f(x)) = g(b)$.

$\square$ Рассмотрим любую последовательность $x_n : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Согласно определению предела функции по Гейне: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$. Рассмотрим последовательность $u_n = f(x_n)$; $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = b$. В силу определения непрерывности по Гейне: $\lim\limits_{n \to \infty} g(u_n) = g(b)$, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} g(f(x_n)) = g(b)$. Так как последовательность x_n любая, то $\lim\limits_{x \to \alpha} g(f(x)) = g(b)$. $\blacksquare$

Следствие (непрерывность сложной функции): если функция $f(x)$ непрерывна в точке $c \in \mathbb{R}$, а функция $g(x)$ непрерывна в точке $b = f(c)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке c.

$\square$ По предыдущей теореме: $\lim\limits_{x \to c} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x \to c} f(x)) = g(b) = g(f(c))$. $\blacksquare$

6.3 Разрывы монотонных функций

Лемма: если функция $f(x)$ монотонна на интервале $(a; b)$ (конечном или бесконечном), то её разрывы во внутренних точках $(a; b)$ могут быть только первого рода.

$\square$ Пусть для определённости $f(x)$ возрастает на $(a;b)$ (строго или нестрого), $x_0 \in (a;b)$. Тогда $f(x)$ возрастает и ограничена сверху на $(a;x_0)$, так как $\forall x \in (a;x_0) \hookrightarrow f(x) \leq f(x_0)$. По теореме о пределе монотонных функций $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$. Аналогично $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Поэтому если x_0 – точка разрыва, то первого рода. $\blacksquare$

Лемма: функция $f(x)$, монотонная на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), не может иметь точек устранимого разрыва на $(a;b)$.

$\square$ Пусть для определённости $f(x)$ возрастает на $(a;b)$ (строго или нестрого), $x_0 \in (a;b)$, то есть $\forall x \in (a;x_0) \hookrightarrow f(x) \leq f(x_0)$. Тогда по теореме о переходе к пределу в неравенстве: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x_0)$, то есть $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$ (предел $f(x_0 - 0)$ существует по теореме о пределах монотонных функций). Аналогично $f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$. Поэтому если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то $f(x_0)$ равно их общему значению, и $f(x)$ непрерывна в точке x_0. $\blacksquare$

Теорема: множество точек разрыва функции $f(x)$, монотонной на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), не более чем счётно.

$\square$ По предыдущим двум леммам, каждая точка разрыва – первого рода и неустранимая, поэтому ей соответствует интервал $(f(x_0 - 0); f(x_0 + 0))$ в множестве $E(f)$. В силу монотонности функции $f(x)$ все такие интервалы, соответствующие различным точкам разрыва, не пересекаются. Выберем в каждом из них рациональную точку (по теореме о плотности рациональных чисел в $\mathbb{R}$). Все эти рациональных точки различны. Получим биекцию между множеством точек разрыва функции $f(x)$ и подмножеством $\mathbb{Q}$, которое не более чем счётно. $\blacksquare$

7 БИЛЕТ 7

7.1 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение: функция называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она определена в каждой его точке, непрерывна во всех точках интервала $(a;b)$, непрерывна справа в точке a, непрерывна слева в точке b.

Первая теорема Вейерштрасса: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

$\square$ Пусть $f(x)$ не является ограниченной на $[a;b]$, тогда

$$\forall E > 0 \hookrightarrow \exists x(E) \in [a;b] : |f(x)| > E$$

Возьмём $E = 1, 2, 3, ..., n, ...$. Тогда полученные значения $x(E)$ образуют последовательность x_n : $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \in [a;b]$. Тогда также $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f(x_n)| > n$. По теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} : $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Так как $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n_k} \in [a;b]$, то по следствию из теоремы о переходе к пределу в неравенстве: $x_0 \in [a;b]$.

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \implies \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Если x_0 – один из концов отрезка, например, $x_0 = a$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a + 0$, $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0, и равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ сохраняется.

Так как $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f(x_{n_k})| > n_k$ и $1 \leq n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, то $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f(x_{n_k})| > k$ $\implies \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$ – противоречие. Таким образом, $f(x)$ ограничена на $[a;b]$. $\blacksquare$

Вторая теорема Вейерштрасса: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то

$$\exists x_1, x_2 \in [a;b] : f(x_1) = \sup_{[a;b]} f(x), f(x_2) = \inf_{[a;b]} f(x).$$

$\square$ Докажем, что достигается $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$. Для точной нижней грани доказательство аналогично.

По определению точной верхней грани, которая существует по первой теореме Вейерштрасса:

$$(\forall x \in [a;b] \hookrightarrow f(x) \leq M) \wedge (\forall M' < M \hookrightarrow \exists x(M') \in [a;b] : f(x) > M')$$

Рассмотрим $M' = M - \dfrac{1}{n}$, тогда $x(M') = x\left(M - \dfrac{1}{n}\right) = x_n : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \in [a;b]$. Отсюда следует, что $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq M$. По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

По теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} : $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a;b]$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \implies \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Случай, когда x_0 – один из концов отрезка, разбирается так же, как и в доказательстве первой теоремы Вейерштрасса. С другой стороны: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. Значит, $M = f(x_0)$, то есть x_0 – точка, в которой достигается точная верхняя грань $f(x)$ на $[a;b]$. $\blacksquare$

7.1.1 Теорема о промежуточных значениях непрерывных функций

Теорема Больцано-Коши: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимаем в точках a и b значения разного знака (то есть $f(a)f(b) < 0$), то $\exists c \in (a;b) : f(c) = 0$.

☐ Рассмотрим точку $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ – середину отрезка $[a;b]$. Если $f(x_1) = 0$, то искомая точка найдена. Если нет, то выберем Δ_1 – ту из половин отрезка $[a;b]$, на концах которой $f(x)$ принимает значения разных знаков. Рассмотрим теперь точку x_2 – середину отрезка Δ_1. Если $f(x_2) = 0$, то искомая точка найдена. Если нет, то выберем Δ_2 – ту из половин Δ_1, на концах которой $f(x)$ принимает значения разных знаков, и т.д. Если на n-м шаге $f(x_n) = 0$, то искомая точка найдена.

В противном случае получим бесконечную последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$ такую, что на концах каждого из отрезков Δ_n функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Длина n-го отрезка равна $\dfrac{b-a}{2^n} = (b-a)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ – стремится к нулю.

По теореме Кантора о вложенных отрезках $\exists! c : \forall n \in \mathbb{R} \hookrightarrow c \in \Delta_n$. Ясно, что $c \in [a;b]$, так как каждый из отрезков Δ_n принадлежит $[a;b]$. Докажем, что $f(c) = 0$. Пусть это не так, и, например, $f(c) > 0$, тогда по лемме о сохранении знака для предела $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c) > 0$, верного в силу непрерывности $f(x)$:

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall x \in U_{\delta_0}(c) \hookrightarrow f(x) > 0$$

(в самой точке равенство выполняется, так как по договорённости $f(c) > 0$; если c – один из концов отрезка, то соответствующая окрестность односторонняя).

По определению предела последовательности длин отрезков Δ_n для $\varepsilon = \delta_0$:

$$\exists n_0(\delta_0) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow \Delta_n < \delta_0$$

Отсюда следует, что $\forall n \geq n_0 \hookrightarrow \Delta_n \in U_{\delta_0}(c) \implies \forall n \geq n_0 \hookrightarrow f(x) > 0$ в каждой точке Δ_n. Это противоречит тому, что на концах Δ_n функция принимает значения разных знаков. Значит, $f(c) = 0$. Также в силу того, что $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, выполняется $c \in (a;b)$. ■

Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то $\forall y_0$, заключённого между $f(a)$ и $f(b)$, $\exists x_0 \in [a;b] : f(x_0) = y_0$.

☐ Если $y_0 = f(a)$ или $y_0 = f(b)$, то $x_0 = a$ или $x_0 = b$ соответственно.

В противном случае рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - y_0$. Тогда числа $g(a)$ и $g(b)$ имеют разный знак, и по теореме Больцано-Коши $\exists x_0 \in (a;b) : g(x_0) = 0$, то есть $f(x_0) = y_0$. ■

7.2 Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке

Определение: функция называется равномерно непрерывной на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta \hookrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Теорема Кантора: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на нём.

$\square$ Пусть $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a;b]$, тогда

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0 \hookrightarrow \exists x'(\delta), x''(\delta) \in [a;b], |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

Возьмём $\delta = \dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $x'(\delta) = x'\left(\dfrac{1}{k}\right) = x'_k$ – последовательность. Аналогично, x''_k – последовательность. Так как $x'_k \in [a;b]$, то по теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность $x_{k_m} : \lim\limits_{m\to\infty} x'_{k_m} = x_0$. По следствию из теоремы о переходе к пределу в неравенстве получаем, что $x_0 \in [a;b]$.

Далее,

$$|x_0 - x''_{k_m}| = |x_0 - x'_{k_m} + x'_{k_m} - x''_{k_m}| \leq |x_0 - x'_{k_m}| + |x'_{k_m} - x''_{k_m}| < |x_0 - x'_{k_m}| + \frac{1}{k_m}$$

Так как $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_m < ...$, то $k_m \geq m \implies \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{k_m} = 0$. Также $\lim\limits_{m\to\infty}|x_0 - x'_{k_m}| = 0$. Тогда по теореме о предельном переходе в неравенстве: $\lim\limits_{m\to\infty}|x_0 - x''_{k_m}| = 0$, то есть $\lim\limits_{m\to\infty} x''_{k_m} = x_0$.

Так как $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то $\lim\limits_{m\to\infty} f(x'_{k_m}) = \lim\limits_{m\to\infty} f(x''_{k_m}) = f(x_0)$. Таким образом, выполняется $\lim\limits_{m\to\infty}|f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m})| = 0$, что противоречит тому, что $\forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow |f(x'_{k_m}) - f(x''_{k_m})| \geq \varepsilon$. $\blacksquare$

7.3 Теорема об обратной функции

Определение: промежутком называется содержащее более одной точки множество $X \subset \mathbb{R}$, которое вместе с любыми двумя точками содержит целиком отрезок с концами в этих точках.

Определение: функция $f(x)$ называется непрерывной на промежутке I, если она определена на этом промежутке, непрерывна во всех его внутренних точках, а в концах промежутка, если они ему принадлежат, имеет место соответствующая односторонняя непрерывность.

Лемма 1: если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I, то её множество значений $E(f) = f(I)$ – также промежуток или состоит из одной точки (для постоянной функции).

$\square$ Пусть $y_1, y_2 \in f(I)$, тогда $\exists x_1, x_2 \in I : f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Так как $f(x)$ непрерывна на I, то по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции выполняется:

$$\forall y_0 \in [y_1; y_2] \hookrightarrow \exists x_0 \in [x_1, x_2] : f(x_0) = y_0$$

Отсюда следует, что $y_0 \in f(I)$. Значит, $f(I)$ – промежуток. $\blacksquare$

Лемма 2: пусть функция $f(x)$ нестрого монотонна и не является постоянной на промежутке I, тогда $f(x)$ непрерывна на $I \iff f(I)$ – промежуток.

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Следует из предыдущей леммы.

$\boxed{\Leftarrow}$ Для определённости считаем, что $f(x)$ возрастает на I. Пусть $f(x)$ разрывна во внутренней точке x_0 промежутка I. Так как разрыв первого рода и неустранимый, то $f(x_0 + 0) > f(x_0 - 0)$ (соответствующие леммы можно применять для промежутка, так как, точка разрыва внутренняя, а значит, от рассмотрения разрывов на промежутке можно перейти к рассмотрению разрывов на интервале, получаемом из промежутка удалением концов, если они ему принадлежат).

Рассмотрим точки $x_1, x_2 \in I : x_1 < x_0 < x_2$, тогда $y_1 = f(x_1) \le f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0) \le f(x_2) = y_2$. Ясно, что $y_1, y_2 \in f(I)$, но весь отрезок $[y_1, y_2] \not\subset f(I)$, так как из всех точек интервала $(f(x_0 - 0); f(x_0 + 0))$ множеству $f(I)$ принадлежит разве что точка $f(x_0)$. Значит, $f(I)$ не является промежутком – противоречие.

Теперь рассмотрим случай разрыва в конце промежутка I, если этот конец принадлежит промежутку. Пусть, например, левый конец $a \in I$ и в этой точке $f(x)$ не является непрерывной справа. Рассмотрим точку $x_2 \in I : x_2 > a$, тогда $f(a) < f(a+0) \le f(x_2) = y_2$. $f(a), y_2 \in f(I)$, но $[f(a); y_2] \not\subset f(I)$. Значит, $f(I)$ не является промежутком – противоречие. ■

Определение: пусть $f(x)$ – функция с областью определения $X = D(f)$ и множеством значение $Y = E(f)$, причём $f : X \to Y$ – биекция, тогда функция $f(x)$ называется обратимой на множестве X; обратное соответствие определяет функцию с областью определения Y и множеством значений X, которая называется обратной к функции $f(x)$ и обозначается $f^{-1}(y)$.

Теорема об обратной функции: пусть функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на промежутке I, тогда на промежутке $J = f(I)$ определена, строго монотонна в ту же сторону и непрерывна обратная функция $f^{-1}(y)$.

□ Пусть для определённости $f(x)$ строго возрастает на I. Так как $f(x)$ непрерывна на I, то J – промежуток по лемме 1.

Покажем, что $f(x)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между I и J. Пусть это не так, то есть $\exists x_1, x_2 \in I : x_1 \ne x_2,\ f(x_1) = f(x_2)$. Но если для определённости $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$ (в силу строгого возрастания) – противоречие. Значит, $\exists f^{-1}(y)$. При этом $D(f) = E(f^{-1}) = I$, $E(f) = D(f^{-1}) = J$.

Покажем, что $f^{-1}(y)$ строго возрастает на J. Пусть $y_1, y_2 \in J$, $y_1 < y_2$. Докажем, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Пусть это не так, то есть $x_1 = f^{-1}(y_1) \ge f^{-1}(y_2) = x_2$, тогда в силу строгого возрастания $f(x)$: $y_1 = f(x_1) \ge f(x_2) = y_2$ – противоречие.

Так как $E(f^{-1}) = I$ – промежуток, и $f^{-1}(y)$ монотонна на J, то $f^{-1}(y)$ непрерывна на J по лемме 2. ■

8 БИЛЕТ 8

8.1 Непрерывность элементарных функций

8.1.1 Степенная функция с натуральным или рациональным показателем

Функция $f(x) = x$ непрерывна в каждой точке (очень просто доказать по Гейне).

Функция $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ непрерывна в каждой точке как произведение/отношение непрерывных функций.

Функция $f(x) = \sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ при чётных n или $x \in \mathbb{R}$ при нечётных n, непрерывна в каждой точке как обратная к $f(x) = x^n$ на соответствующем промежутке.

Функция $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, x > 0$ непрерывна в каждой точке как произведение непрерывных функций $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

Функция $f(x) = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ непрерывна, так как $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

8.1.2 Тригонометрические функции

Лемма: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow |\sin x| \leq |x|$; если $x \neq 0$, то $|\sin x| < |x|$.

$\square$ Если $x = 0$, то по определению функции $\sin x$: $\sin 0 = 0$. Рассмотрим случай $x \neq 0$. В силу нечётности функций x и $\sin x$ достаточно доказать, что $|\sin x| < x$ при $x > 0$. Если $x \geq \dfrac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leq 1 < \dfrac{\pi}{2} \leq x$. Если $x < \dfrac{\pi}{2}$, то $0 < \sin x = P_x H_x < P_x P_0 < \cup P_x P_0 = x$

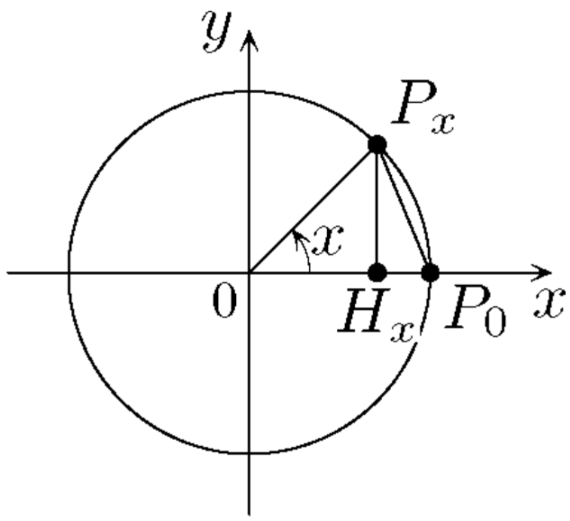

Рис. 2: Связь синуса и его аргумента

Всё доказано. $\blacksquare$

Теорема: функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны каждая на своей области определения.
$\square$ В силу леммы:

$$|\sin x - \sin a| = \left|2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}\right| \leq 2 \cdot \left|\frac{x-a}{2}\right| \cdot 1 = |x - a|$$

Поэтому $\forall a \in \mathbb{R}$ выполняется:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon : \forall x, |x - a| < \delta \hookrightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\sin x$ непрерывна в каждой точке. Непрерывность $\cos x$ доказывается аналогично. $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны на своих областях определения как отношения непрерывных функций. ■

Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны как обратные функции соответственно к $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ на соответствующих промежутках.

8.2 Определение и свойства показательной функции

Определение: пусть $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, тогда значение a^x определяется как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$, где r_n – произвольная последовательность рациональных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Установим корректность этого определения:

□ I) *Существование*:

Предварительно докажем, что $\forall a > 0 \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Если $a > 1$, то в силу того, что $\sqrt[n]{a} > 1$, выполняется $\sqrt[n]{a} = 1 + \beta_n$, где $\beta_n > 0$. Тогда:

$$a = (1 + \beta_n)^n \geq 1 + n\beta_n > n\beta_n \implies 0 < \beta_n < \frac{a}{n}.$$

По теореме о двух милиционерах, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Если $0 < a < 1$, то $b = \dfrac{1}{a} > 1$. Тогда из предыдущего предела следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

При $a = 1$ последовательность постоянна, и утверждение очевидно. Теперь перейдём к доказательству корректности определения.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = 1$. Значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} : -\varepsilon < a^{-\frac{1}{k}} - 1 < a^{\frac{1}{k}} - 1 < \varepsilon$$

(указанное неравенство выполняется при всех $k \geq k_0(\varepsilon)$, но для доказательства достаточно одного такого числа).

Пусть теперь r_n – произвольная сходящаяся последовательность рациональных чисел. Докажем, что последовательность $y_n = a^{r_n}$ также сходится. Для произвольных $n, m \in \mathbb{N}$ имеем:

$$|y_n - y_m| = |a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|$$

Так как r_n сходится, то она ограничена сверху: $\exists C \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow r_m \leq C$. Значит, $a^{r_m} \leq a^C$. Так как последовательность r_n сходится, то она фундаментальна $\implies$ для числа $k(\varepsilon)$:

$$\exists n_0(k(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |r_n - r_m| < \frac{1}{k} \implies \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow -\frac{1}{k} < r_n - r_m < \frac{1}{k} \implies$$

$$\Longrightarrow \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow a^{-\frac{1}{k}} - 1 < a^{r_n - r_m} - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1$$

Отсюда следует, что $\forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow -\varepsilon < a^{r_n - r_m} - 1 < \varepsilon$. Окончательно имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| < a^C \cdot \varepsilon \implies \forall n, m \geq n_0 \hookrightarrow |y_n - y_m| < a^C \cdot \varepsilon$$

Таким образом, последовательность y_n фундаментальна, следовательно, сходится.

II) *Единственность*:

Доказано, что $\forall r_n \in \mathbb{Q} : \lim\limits_{n\to\infty} r_n = x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} \in \mathbb{R}$.

Пусть $\exists r'_n \in \mathbb{Q}, r''_n \in \mathbb{Q} : \lim\limits_{n\to\infty} r'_n = \lim\limits_{n\to\infty} r''_n = x$, но $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} = y \neq z = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r''_n}$.

Рассмотрим последовательность $\gamma_n = \{r'_1, r''_1, r'_2, r''_2, ..., r'_n, r''_n, ...\}$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = x$ (вне любой $U_\delta(x)$ не более конечного числа членов r'_n и не более конечного числа членов r''_n, значит, не более конечного числа членов γ_n). Однако последовательность a^{γ_n} имеет два различных частичных предела, а значит, расходится – противоречие.

III) *Преемственность*:

Докажем, что если $x \in \mathbb{Q}$, то a^x в смысле возведения в действительную степень совпадает с a^x в смысле возведения в рациональную степень.

Рассмотрим последовательность $r'_n : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow r'_n = x$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$. В силу доказанной единственности, $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} = a^{r'_n}$. ■

При $a = 1$ определим $a^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. При $0 < a < 1$ определим $a^x = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^x}$; это можно сделать, так как $\dfrac{1}{a} > 1$. Таким образом, определена функция $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Лемма: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow a^x > 0$; если $a > 1$, то a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$; если $0 < a < 1$, то a^x строго убывает на $\mathbb{R}$.

□ Докажем сначала, что если $a > 1$, то a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$.

Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим $r', r'' \in \mathbb{Q} : x_1 < r' < r'' < x_2$. $\forall n \in \mathbb{N}$ выберем $r_n \in \mathbb{Q} : r_n \in \left(x_1; x_1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_1$. Тогда по определению возведения в действительную степень: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_1}$. Так как $x_1 < r'$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow r_n < r' \implies \forall n \geq n_0 \hookrightarrow a^{r_n} < a^{r'}$$

Тогда по теореме о переходе к пределу в неравенстве: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_1} \leq a^{r'}$. Аналогично, $a^{r''} \leq a^{x_2}$. Так как $a^{r'} < a^{r''}$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$, то есть a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$ при $a > 1$. По принципу Архимеда:

$$\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : k > x \iff \exists k \in \mathbb{N} : -x > -k \implies$$
$$\implies \forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x > -k \implies a^x > a^{-k} > 0$$

Лемма доказана для $a > 1$.

Если $0 < a < 1$, то $\dfrac{1}{a} > 1$. Значит, $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow a^x = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^x} > 0$ и строго убывает на $\mathbb{R}$.

Теорема: $\forall a > 0$ функция a^x непрерывна на $\mathbb{R}$.

$\square$ В силу соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^x}$ теорему достаточно доказать при $a > 1$.

Рассмотрим любую последовательность $x_n \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_0 < x_n$. Тогда найдётся последовательность $r_n \in \mathbb{Q} : x_0 < x_n < r_n$ (достаточно выбрать $\forall n \in \mathbb{N}$ рациональную точку $r_n \in \left(x_n; x_n + \dfrac{1}{n}\right)$).

Ясно, что $0 < r_n - x_0 < x_n - x_0 + \dfrac{1}{n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_0) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - x_0 + \dfrac{1}{n}\right) = 0$. По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$.

Так как $x_0 < x_n < r_n$, то $a^{x_0} < a^{x_n} < a^{r_n}$. По определению степени с действительным показателем: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_0}$. Тогда по теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_0}$. Так как последовательность x_n любая, то $\lim\limits_{x\to x_0+0} a^x = a_0^x$. Аналогично $\lim\limits_{x\to x_0-0} a^x = a_0^x$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. Значит, a^x непрерывная в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Лемма: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +0$, если $a > 1$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, если $0 < a < 1$.

$\square$ В силу соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^x}$ достаточно доказать первую часть леммы.

Так как при $a > 1$ функция a^x строго возрастает на $\mathbb{R}$, то по теореме о пределах монотонных функций: $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ (конечный или $+\infty$). Достаточно доказать, что хотя бы для одной последовательности $x_n : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty$. Тогда для любой другой последовательности это также будет верно. Рассмотрим $x_n = n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = +0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Аналогично при $x_n = -n$ выполняются равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = +0 \implies \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +0$. $\blacksquare$

Лемма: $\forall a, b > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ выполняются следующие равенства:

1. $(ab)^x = a^x b^x$;
2. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;
3. $a^{x+y} = a^x a^y$;
4. $(a^x)^y = a^{xy}$.

$\square$ Докажем свойство 3.

Рассмотрим любые последовательности $x_n, y_n \in \mathbb{Q} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Тогда $a^{x_n+y_n} = a^{x_n}a^{y_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$. По определению непрерывности по Гейне:

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^x \cdot a^y$$

Свойства 1, 2, 4 доказываются аналогично.

Докажем свойство 5. Пусть сначала $y = r \in \mathbb{Q}$. Докажем, что $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a^x)^r = a^{xr}$.

Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \in \mathbb{Q} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n r = xr$. В силу непрерывности функции a^x:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x, \ \lim_{n\to\infty} a^{x_n r} = a^{xr}.$$

Так как $a^{x_n r} = (a^{x_n})^r$, то в силу непрерывности функции x^r в точке $a^x > 0$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n r} = \lim_{n\to\infty} (a^{x_n})^r = (a^x)^r.$$

Пусть теперь $y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную последовательность $r_n \in \mathbb{Q} : \lim\limits_{n\to\infty} r_n = y$. В силу доказанного выше соотношения имеем: $(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}$.

Так как при фиксированном x функция $f(y) = (a^x)^y$ непрерывна по y, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a^x)^{r_n} = (a^x)^y$.

Также $\lim\limits_{n\to\infty} xr_n = xy$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{xr_n} = a^{xy}$ в силу непрерывности функции a^x.

Так как $(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a^x)^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{xr_n} \implies (a^x)^y = a^{xy}$. ■

8.3 Замечательные пределы

Теорема (первый замечательный предел):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

□ Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ определена при $x \neq 0$. Если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin x < x$.

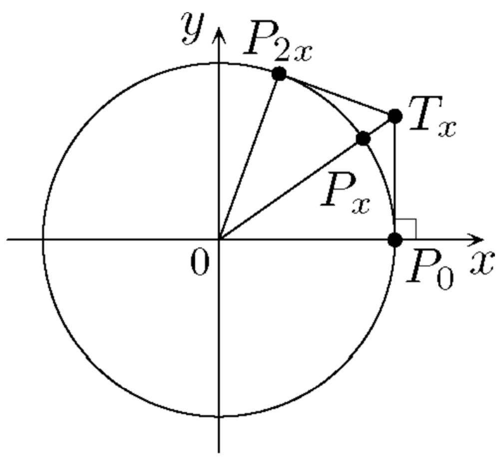

Рис. 3: Первый замечательный предел

$\operatorname{tg} x = P_0T_x$. Далее, $P_0T_x + T_xP_{2x} > \cup P_0P_{2x}$. В силу симметрии относительно прямой OP_x, имеет место неравенство $P_0T_x > \cup P_0P_x$, то есть $\operatorname{tg} x > x$.

Итак, при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ имеет место неравенство:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \implies 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \implies \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

В силу чётности функций $\cos x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ последнее неравенство выполняется при $|x| < \dfrac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, то есть в $\overset{\circ}{U}_{\frac{\pi}{2}}(0)$. Так как $\cos x$ непрерывна в точке $x = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. ■

Теорема (второй замечательный предел):

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

□ По определению: $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Рассмотрим последовательность $n_k \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. Вне любой $U_\varepsilon(e)$ содержится не более конечного числа членов a_n. Пусть $n_0(\varepsilon)$ – наибольший из их номеров. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то среди членов n_k лишь конечное число не превосходит $n_0(\varepsilon)$. Значит, вне $U_\varepsilon(e)$ содержится лишь конечное число членов a_{n_k}. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k} = e \tag{2}$$

Рассмотрим теперь последовательности $x_k \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, $x_k > 0$ и $n_k = [\dfrac{1}{x_k}]$.

По определению целой части числа: $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow n_k \leq \dfrac{1}{x_k} < n_k + 1$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty \implies$ имеет место (2). Также $\dfrac{1}{n_k+1} < x_k \leq \dfrac{1}{n_k}$. Поэтому:

$$\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

Правая часть неравенств:

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) = e \cdot 1 = e$$

Левая часть неравенств (следует из (2)):

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1 + \dfrac{1}{n_k+1}} = \frac{e}{1} = e$$

По теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{k\to\infty} (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e$. Так как x_k любая, то $\lim\limits_{x\to +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Теперь найдём предел слева. Сначала сделаем замену $y = -x$: если $x \to -0$, то $y \to +0$, и $y \neq 0$ при $x \neq 0$. Имеем:

$$\lim_{x \to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +0}(1-y)^{-\frac{1}{y}}$$

Теперь сделаем замену $z = \dfrac{y}{1-y}$: если $y \to +0$, то $z \to +0$, и $z \neq 0$ при $y \neq 0$. При этом $y = \dfrac{z}{1+z}$. Имеем:

$$\lim_{y \to +0}(1-y)^{-\frac{1}{y}} = \lim_{z \to +0}\left(1 - \frac{z}{1+z}\right)^{-\frac{1+z}{z}} = \lim_{z \to +0}\left(\frac{1}{1+z}\right)^{-\left(1+\frac{1}{z}\right)} =$$

$$= \lim_{z \to +0}(1+z)^{1+\frac{1}{z}} = \lim_{z \to +0}(1+z)^{\frac{1}{z}} \cdot \lim_{z \to +0}(1+z) = e \cdot 1 = e$$

Таким образом, $\lim\limits_{x \to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Итак, $\lim\limits_{x \to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \implies \lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. ■

Пример 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

□ Так как $g(u) = \ln(u)$ непрерывна в точке $u = e$, то по теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0}(\ln(1+x))^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$$

■

Пример 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

□ В пределе $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ сделаем замену $u = e^x - 1$: если $x \to 0$, то $u \to 0$, и $u \neq 0$ при $x \neq 0$. Предел примет вид:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + e^x - 1)}{e^x - 1} = 1 \iff \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

Таким образом, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. ■

9 БИЛЕТ 9

9.1 Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную

Определение: производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

если этот предел конечен или равен $+\infty$ или $-\infty$; обозначается производная в точке x_0 как $f'(x_0)$.

Равносильная запись предела: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Определение: правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(\text{соответственно, } \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right),$$

если этот предел конечен или равен $+\infty$ или $-\infty$; обозначается правая (левая) производная в точке x_0 как $f'_+(x_0)$ (соответственно, $f'_-(x_0)$).

Теорема: если функция $f(x)$ имеет конечную производную (правую производную, левую производную) в точке x_0, то эта функция непрерывна (соответственно, непрерывна справа, непрерывна слева) в этой точке.

☐ Докажем для обычной производной, для односторонних производных доказательство аналогично. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R}$, то $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Тогда $f(x) = f(x_0) + (A + \alpha(x))(x - x_0) \implies \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то есть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

9.2 Производная суммы, произведения, частного двух функций

Теорема: пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные в точке x_0, тогда функции $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеют конечные производные в точке x_0 (в последнем случае нужно требовать $g'(x_0) \neq 0$), причём в точке x_0 выполняются равенства:

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

☐ 1)

$$(f(x_0) + g(x_0))' = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) + g(x_0 + t) - f(x_0) - g(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

2)

$$(f(x_0)g(x_0))' = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)g(x_0+t)-f(x_0)g(x_0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x_0+t)g(x_0+t)-f(x_0)g(x_0+t)}{t} + \frac{f(x_0)g(x_0+t)-f(x_0)g(x_0)}{t}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} g(x_0+t)\cdot \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} + f(x_0)\lim_{t\to 0} \frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Функция $g(x)$ имеет конечную производную в точке $x_0 \implies$ функция непрерывна в этой точке $\implies \lim\limits_{t\to 0} g(x_0+t) = g(x_0)$.

3)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{f(x_0+t)}{g(x_0+t)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+t)+f(x_0)g(x_0)}{g(x_0)g(x_0+t)t} =$$

$$\frac{1}{g(x_0)^2}\left(g(x_0)\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} - f(x_0)\lim_{t\to 0}\frac{g(x_0+t)-g(x_0)}{t}\right) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \ \blacksquare$$

Следствия:

1. $(Cf(x))' = Cf'(x)$;
2. $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$.

Замечание: данная теорема естественно переносится на односторонние пределы.

9.3 Производная сложной функции

Теорема (производная сложной функции): пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, а функция $g(u)$ имеет конечную производную в точке $u_0 = f(x_0)$, тогда функция $h(x) = g(f(x))$ имеет производную в точке x_0, причём $h'(x_0) = g'(u_0)f'(x_0)$.

$\square$ Пусть $f'(x_0) = A$, $g'(u_0) = B$. Нужно доказать, что производная $h'(x_0)$ существует и равна AB. По определению производной:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = A,\ \lim_{s\to 0}\frac{g(u_0+s)-g(u_0)}{s} = B$$

Отсюда имеем:

$$f(x_0+t) = f(x_0) + At + t\alpha(t), \text{ где } \lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0,$$

$$g(u_0+s) = g(u_0) + Bs + s\beta(s), \text{ где } \lim_{s\to 0}\beta(s) = 0. \tag{3}$$

Так как $\lim\limits_{t\to 0}\alpha(t) = 0$, то $\alpha(t)$ определена в некоторой $\mathring{U}_\delta(0)$, но если доопределить $\alpha(0) = 0$, то $\alpha(t)$ определена в $U_\delta(0)$ и непрерывна в точке $t = 0$. Аналогично считаем, что функция $\beta(s)$ определена в $U_\varepsilon(0)$ и непрерывна в точке $s = 0$, причём $\beta(0) = 0$.

Рассмотрим функцию $s(t) = At + t\alpha(t)$. Она непрерывна в точке $t = 0$. Если равенство (3) выполняется $\forall s \in U_\epsilon(0)$, то так как $\lim\limits_{t\to 0} s(t) = 0$, то (3) выполняется $\forall t \in U_{\delta_1}(0)$. Значит, $\forall t \in U_{\delta_1}(0)$ функцию $s(t)$ можно подставить в качестве s в (3). Тогда:

$$h(x_0+t) = g(f(x_0+t)) = g(f(x_0) + At + t\alpha(t)) = g(u_0 + s(t)) =$$

$$= g(u_0) + Bs(t) + s(t)\beta(s(t)) = h(x_0) + ABt + Bt\alpha(t) + \beta(s(t))(At + t\alpha(t))$$

Таким образом:

$$\frac{h(x_0+t) - h(x_0)}{t} = AB + B\alpha(t) + \beta(s(t))(A + \alpha(t))$$

По теореме о непрерывности сложной функции:

$$\lim_{t\to 0} \beta(s(t)) = 0$$

Отсюда следует:

$$h'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(x_0+t) - h(x_0)}{t} = AB. \blacksquare$$

9.4 Производная обратной функции

Теорема (производная обратной функции): пусть функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой $U_{\delta_0}(x_0)$, причём $\exists f'(x_0)$ (конечная, $+\infty$ или $-\infty$). Тогда обратная функция $g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причём $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. Равенство формально сохраняется, если $f'(x_0) = 0$, $+\infty$ или $-\infty$ (если $f'(x_0) = 0$ и $f(x)$ строго возрастает в $U_{\delta_0}(x_0)$, то $g'(y_0) = +\infty$, если $f'(x_0) = 0$ и $f(x)$ строго убывает в $U_{\delta_0}(x_0)$, то $g'(y_0) = -\infty$, если $f'(x_0) = +\infty$ или $-\infty$, то $g'(y_0) = 0$).

$\square$ Пусть $I = U_{\delta_0}(x_0)$ – промежуток. По теореме об обратной функции, на промежутке $J = f(I)$ определена, непрерывна и строго монотонна в ту же сторону обратная функция $g(y) = f^{-1}(y)$.

Рассмотрим $x_1 = x_0 - \dfrac{\delta_0}{2}$, $x_2 = x_0 + \dfrac{\delta_0}{2}$, $x_1, x_2 \in I$. Тогда $y_1 = f(x_1) \in J$, $y_2 = f(x_2) \in J$. Для определённости считаем, что $f(x)$ строго возрастает на I, тогда $y_1 < y_0 < y_2$, а так как J – промежуток, то $[y_1; y_2] \subset J$. Поэтому $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(y_0) \subset J$.

Для нахождения предела:

$$g'(y_0) = \lim_{s\to 0} \frac{g(y_0+s) - g(y_0)}{s}$$

сделаем замену $s(t) = f(x_0+t) - f(x_0)$, так как в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 имеет место равенство $\lim\limits_{t\to 0} s(t) = 0$, а также в силу строгой монотонности $s(t) \neq 0$ при $t \neq 0$.

Далее:

$$g(y_0) = x_0$$

$$g(y_0+s) = g(f(x_0) + f(x_0+t) - f(x_0)) = g(f(x_0+t)) = x_0 + t$$

Таким образом, $g(x_0+s) - g(x_0) = t$. Поэтому:

$$g'(y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{f(x_0+t) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Если $f'(x_0) = 0$ и $f(x)$ строго возрастает на I, то $sign(f(x_0+t) - f(x_0)) = sign(t)$, дробь под знаком последнего предела положительна, и $g'(y_0) = +\infty$. Аналогично разбирается случай убывания $f(x)$. Если $f'(x_0) = +\infty$ или $-\infty$, то из предела видно, что $g'(y_0) = 0$. ■

Замечание: теорема о производной обратной функции вместе с доказательством сохраняется для односторонних окрестностей (у функции и обратной функции односторонние производные).

9.5 Производные элементарных функций

Производная экспоненты: $a > 0, \forall x \in \mathbb{R}:$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

□ $(a^{x_0})' = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{a^{x_0+t} - a^{x_0}}{t} = a^{x_0} \cdot \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{a^t - 1}{t} = a^{x_0} \ln a$ ■

Производная логарифма: $a > 0, a \neq 0, \forall x > 0:$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$$

□

$$(\log_a(x_0))' = \lim_{t\to 0} \frac{\log_a(x_0+t) - \log_a(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log_a\left(1 + \dfrac{t}{x_0}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{t}{x_0}\right)}{t \ln a} = \frac{1}{x_0 \ln a}$$

■

Производная степенной функции:

1) $\alpha \in \mathbb{R}, \forall x > 0:$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

□ $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ ■

2) $n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}:$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

□ Докажем по индукции. При $n = 1$: $(x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$ – верно. Пусть при некотором $k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $(x^k)' = kx^{k-1}$. Тогда $(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = kx^k + x^k = (k+1)x^k$

Нужное равенство получено при $n = k+1$, значит, при $\alpha \in \mathbb{N}$ утверждение доказано. ■

3) $m \in \mathbb{Z}, \forall x \neq 0:$

$$(x^m)' = mx^{m-1}$$

□ Если $m = 0$, то $(x^0)' = 1' = 0$ – верно при $x \neq 0$.

Если $m > 0$, то $m \in \mathbb{N}$ – уже доказано.

Если $m < 0$, то $m = -n, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} = mx^{m-1}$$

Всё доказано. ■

Производная тригонометрических функций:

1) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(\sin x)' = \cos x$$

□

$$(\sin x_0)' = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x_0+t)-\sin(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\cos\left(x_0+\dfrac{t}{2}\right)\sin\dfrac{t}{2}}{t} \lim_{t\to 0}\cos\left(x_0+\frac{t}{2}\right)\lim_{t\to 0}\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{\dfrac{t}{2}} = \cos x_0$$

■

$$(\cos x)' = -\sin x$$

□ Доказывается аналогично. ■

2) $\forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

□ $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ■

3) $\forall x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

□ Доказывается аналогично. ■

Производная гиперболических функций: $\forall x \in \mathbb{R}$ (доказывается элементарно)

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$
$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Производная обратных тригонометрических функций:

1) В каждой точке $x \in (-1; 1)$ имеют место равенства:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

в точках $x = -1$, $x = 1$ имеют место равенства:

$$(\arcsin x)'|_{x=1} = +\infty$$

$$(\arcsin x)'|_{x=-1} = +\infty$$
$$(\arccos x)'|_{x=1} = -\infty$$
$$(\arccos x)'|_{x=-1} = -\infty$$

2) В каждой точке $x \in \mathbb{R}$ имеют место равенства:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$\square$ 1) Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Функция строго возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; обратная функция $g(y) = f^{-1}(y) = \arcsin y$. В любой точке $y_0 \in (-1; 1)$ выполняется:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-{y_0}^2}}$$

Здесь учтено, что $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \hookrightarrow \cos x > 0$. Таким образом, $\forall x \in (-1; 1) \hookrightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, равенство формально сохраняется для односторонних производных в точках $x = -1$ и $x = 1$.

Формула для производной функции $\arccos x$ доказывается аналогично.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$. Функция строго возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; обратная функция $g(y) = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$. В любой точке $y_0 \in \mathbb{R}$ выполняется:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1+{y_0}^2}$$

Таким образом, $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Формула для производной функции $\operatorname{arcctg} x$ доказывается аналогично. $\blacksquare$

9.6 Дифференцируемость функции в точке, дифференциал

Определение: функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется дифференцируемой в этой точке, если её приращение в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta f(x_0) \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \ A \in \mathbb{R},$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то есть:

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \ \Delta x \to 0$$

При этом линейная часть приращения $A \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Теорема: функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \iff \exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$, при этом в случае дифференцируемости $A = f'(x_0)$.

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Если $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, то

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x)\implies\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A\in\mathbb{R},$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Таким образом, $\exists f'(x_0)=A\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A\in\mathbb{R}$, тогда

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Поэтому $\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\Delta x\to 0$. $\blacksquare$

Теорема: пусть $u=u(x),v=v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, тогда имеют место равенства:

1. $d(u+v)=du+dv$;
2. $d(uv)=vdu+udv$;
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$

В последнем выражении $v(x_0)\neq 0$.

$\square$ Доказывается умножением соответствующих выражений для производных на dx. $\blacksquare$

Теорема (инвариантность формы первого дифференциала относительно замены переменной): в равенстве $df(x)=f'(x)dx$, где x – независимая переменная, вместо x можно подставить любую дифференцируемую функцию $u(x)$.

$\square$ Пусть $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $f(u)$ дифференцируема в точке $u_0=u(x_0)$. Тогда:

$$f'(u(x))|_{x=x_0}=f'(u_0)u'(x_0).$$

Умножим это равенство на dx:

$$df(u(x))=f'(u_0)u'(x_0)dx=f'(u_0)du.$$

То есть:

$$df(u)=f'(u)du$$

Всё доказано. $\blacksquare$

9.7 Геометрический смысл производной

Определение: пусть $k(x)$ – угловой коэффициент хорды (секущей) графика функции $f(x)$, проходящей через точки $M_0(x_0;y_0)$ и $M(x;y)$, где $x\neq x_0$. Если $\exists k=\lim\limits_{x\to x_0}k(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$, то прямая с угловым коэффициентом k, проходящая через точку M_0, называется касательной к графику в точке M_0.

Уравнение невертикальной касательной:

$$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$$

9.8 Функции, заданные параметрически, их дифференцирование

Определение: пусть $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $t \in I$ (I - некоторый промежуток) тогда множество точек плоскости $\Gamma = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in I\}$ называется кривой (параметрически заданной) на плоскости. Если $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на I, то кривая Γ называется непрерывной.

Теорема о локальном представлении параметрически заданной кривой: пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ непрерывны в $U_\delta(t_0)$, причём функция $x(t)$ строго монотонна в этой окрестности, тогда кривая $\Gamma = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in U_\delta(t_0)\}$ является графиком непрерывной функции $y = f(x)$. Если при этом $\exists x'(t_0) \in \mathbb{R}$ и $\exists y'(t_0) \in \mathbb{R}$, причём $x'(t_0) \neq 0$, то $\exists f'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ $\left(\text{иными словами } y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}\right)$.

$\square$ Так как функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна на $I = U_\delta(t_0)$, то по теореме об обратной функции на промежутке $J = x(I)$ определена и непрерывна обратная функция $t = t(x)$. Поэтому $(x, y) \in \Gamma \iff y = y(t(x))$, где $x \in J$, то есть кривая является графиком функции $y = f(x)$ на промежутке J. Функция $y = f(x)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций $y(t)$ и $t(x)$. Далее, по теореме о производной обратной функции в точке $x_0 = x(t_0)$: $\exists t'(x_0) = \dfrac{1}{x'(t_0)}$, и по теореме о производной сложной функции: $\exists f'(x_0) = y'(t_0)t'(x_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$. $\blacksquare$

10 БИЛЕТ 10

10.1 Производные высших порядков

Определение: производная порядка $n \in \mathbb{N}$ функции $f(x)$ в точке x_0 задаётся рекуррентным соотношением:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)',$$

где $f^{(0)} = f$, при условии, что $f^{(n-1)}$ определена и конечна в некоторой окрестности точки x_0.

Свойство производной высших порядков:

$$\left(f^{(n)}\right)^{(m)} = f^{(n+m)}$$

Производные порядка n некоторых элементарных функций (всё доказывается по индукции):

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n,\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = n!C_\alpha^n x^{\alpha-n},\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},\ n \in \mathbb{N}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}_0$$

Производная порядка n от сложной функции (всё доказывается по индукции):

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

$$(f(kx+b))^{(n)} = k^n \cdot f^{(n)}(kx+b)$$

10.2 Формула Лейбница для производной порядка n произведения

Теорема (формула Лейбница): пусть при $n \in \mathbb{N}$ в точке x_0 $\exists u^{(n)}(x_0)$, $\exists v^{(n)}(x_0)$, тогда произведение $u(x)v(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка n, причём в этой точке

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

□ Доказательство проведём по индукции. При $n = 1$ имеем известную формулу $(uv)' = u'v + uv'$. Пусть формула Лейбница верна при некотором $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что формула верна и при $n+1$:

$$(uv)^{(n+1)} = \left((uv)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k)} =$$

$$= C_n^0 u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^n u v^{(n+1)} =$$

$$= C_{n+1}^0 u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_{n+1}^{n+1} u v^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} = (uv)^{(n+1)}$$

Нужное равенство получено при $n+1$. $\forall n \in \mathbb{N}$ равенство доказано. ■

10.3 Дифференциалы высших порядков

Определение: дифференциал порядка n функции $f(x)$ в точке x определяется рекуррентным соотношением:

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

При $n = 1 : d^1 f = df = f'(x)dx$ – функция от x и dx. Если $d^{n-1}f$ – функция от x и dx, то, считая dx фиксированным, а x – переменным, $d^n f$ – дифференциал от $d^{n-1} f$ как функции переменной x.

Свойство дифференциала порядка n: если в точке x $\exists f^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$, то $d^n f = f^{(n)}(x) dx^n$.

□ Докажем данное утверждение по индукции. При $n = 1$ имеем: $df(x) = f'(x)dx$ – известное соотношение. Пусть $d^{n-1} f(x) = f^{(n-1)}(x) dx^{n-1}$, тогда dx^{n-1} считаем постоянным, откуда получаем:

$$d^n f(x) = d\left(f^{(n-1)}(x) \cdot dx^{n-1}\right) = dx^{n-1} \cdot d\left(f^{(n-1)}(x)\right) = dx^{n-1} \cdot f^{(n)}(x) dx = f^{(n)} dx^n$$

Всё доказано. ■

Отсутствие инвариантности дифференциала второго порядка относительно замены переменной:

Пусть x – независимая переменная, тогда $d^2 f(x) = f''(x) dx^2$. Пусть теперь $u = u(x)$ имеет конечную вторую производную, тогда du нельзя считать постоянной величиной:

$$d^2 f(u) = d\left(df(u)\right) = d\left(f'(u)du\right) = d\left(f'(u)\right) du + f'(u) d(du) = f''(u) du^2 + f'(u) d^2 u$$

Если $u(x)$ – независимая переменная или линейная функция от независимой переменной, то $d^2 u = 0$; в остальных случаях $d^2 u \neq 0$. Поэтому второй дифференциал не является инвариантным относительно замены переменной.

11 БИЛЕТ 11

11.1 Теорема Ферма

Определение: точка x_0 называется точкой строгого (нестрогого) локального максимума функции $f(x)$, если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и выполняется:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) < f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)).$$

Точка x_0 называется точкой строгого (нестрогого) локального минимума функции $f(x)$, если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и выполняется:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) > f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Все точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума.

Теорема Ферма: если в точке локального экстремума x_0 функции $f(x)$ (строгого или нестрогого) существует производная, то она равна нулю.

□ Пусть для определённости x_0 – точка локального минимума (для точки локального максимума доказательство аналогично). Тогда

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

так как $f(x) \geq f(x_0)$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$.

Аналогично $f'_-(x_0) \leq 0$, так как $f(x) \leq f(x_0)$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$.

Так как $f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0$, то $f'(x_0) = 0$. ■

11.2 Теоремы о среднем

Определение: функция $f(x)$ называется дифференцируемой на промежутке I, если она имеет конечную производную в каждой внутренней точке I, а в концах промежутка, если они ему принадлежат, – соответствующие конечные односторонние производные.

Определение: функция $f(x)$ называется дифференцируемой в широком смысле на промежутке I, если она непрерывна на I и

$$\forall x \in \operatorname{int} I \hookrightarrow \exists f'(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\},$$

а в концах промежутка, если они ему принадлежат, существуют односторонние производные (конечные, или равные $+\infty$ или $+\infty$).

Замечание: $\operatorname{int} I$ (внутренность I) – множестно, получаемое из I удалением концов, если они ему принадлежат.

Теорема Ролля: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема в широком смысле на интервале $(a; b)$, причём $f(a) = f(b)$, то

$$\exists \xi \in (a; b) : f'(\xi) = 0.$$

□ По первой и второй теоремам Вейерштрасса, $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, причём $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ достигаются.

Если обе точные грани достигаются в концах отрезка, то $m = M$, так как $f(a) = f(b)$, и функция постоянна на $[a;b] \implies \forall x \in [a;b] \hookrightarrow f'(x) = 0$.

Пусть теперь хотя бы одна из точных верхних граней (для определённости, M) достигается в точке $\xi \in (a;b)$. Тогда ξ – точка локального максимума $f(x)$ (вообще говоря, нестрогого). Так как функция дифференцируема в широком смысле на $(a;b)$, то $\exists f'(\xi) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. По теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$. ■

Теорема Коши: пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, $f(x)$ дифференцируема в широком смысле на $(a;b)$, $g(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, причём $\forall x \in (a;b) \hookrightarrow g'(x) \neq 0$, тогда:

$$\exists \xi \in (a;b): \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□ Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Подберём λ так, чтобы $\varphi(a) = \varphi(b)$: $f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b)$. Получаем:

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Из условия теоремы следует, что $g(b) - g(a) \neq 0$: если всё же $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля $\exists x_0 \in (a;b): \ g'(x_0) = 0$, но это неверно ни для какой точки интервала $(a;b)$.

Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема в широком смысле на $(a;b)$ (так как $g(x)$ в всех точках интервала имеет конечную производную, а $f(x)$ во всех точках интервала имеет конечную или определённого знака бесконечную производную).

При найденном λ для $\varphi(x)$ выполнено условие теоремы Ролля $\implies \exists \xi \in (a;b) : \varphi'(\xi) = 0$, то есть $f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$. Отсюда получаем:

$$\lambda = -\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Приравнивая λ, полученные разными способами, получим:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Всё доказано. ■

Теорема Лагранжа: пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в широком смысле на интервале $(a;b)$, тогда

$$\exists \xi \in (a;b): \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

□ Применим теорему Коши при $g(x) = x$ ($g'(x) = 1 \neq 0$):

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(\xi)}{1},$$

где $\xi \in (a;b)$. ■

Теорема: если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I, и во всех внутренних точках I $\exists f'(x) = 0$, то $f(x)$ постоянная на I.

$\square$ Пусть $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$, тогда на отрезке $[x_1; x_2]$ функция $f(x)$ непрерывна, а на интервале $(x_1; x_2)$ дифференцируема.

По теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $\xi \in (x_1; x_2)$. Так как $\forall x \in (x_1; x_2) \hookrightarrow f'(x) = 0$, то $f'(\xi) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2)$.

Итак, $\forall x_1, x_2 \in I \hookrightarrow f(x_1) = f(x_2) \implies$ функция $f(x)$ постоянная на I. $\blacksquare$

Следствие: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке I, и во всех внутренних точках I $\exists f'(x), g'(x)$, причём $f'(x) = g'(x)$ во всех внутренних точках I, то во всех точках I имеет место равенство $f(x) = g(x) + C$, где C – постоянная.

$\square$ Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x),\ x \in I$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на I, и во всех внутренних точках $\exists \varphi'(x) = 0 \implies \varphi(x) = C$ на I, то есть $f(x) = g(x) + C$. $\blacksquare$

11.3 Формула Тейлора

Определение: пусть функция $f(x)$ такова, что при некотором $n \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, тогда многочлен

$$P_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0; разность $r_n(f, x) = f(x) - P_n(f, x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора, а равенство $f(x) = P_n(f, x) + r_n(f, x)$ - формулой Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0.

Лемма 1: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow 1)\ P_n'(f, x) = P_{n-1}(f', x),\ 2)\ r_n'(f, x) = r_{n-1}(f', x)$ при $n \in \mathbb{N}$.

$\square$ 1):

$$P_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Таким образом:

$$P_n'(f, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f')^{(k-1)}(x_0)}{k!} k(x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f')^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} = P_{n-1}(f', x)$$

2):

$$r_n'(f, x) = (f(x) - P_n(f, x))' = f'(x) - P_n'(f, x) = f'(x) - P_{n-1}(f', x) = r_{n-1}(f', x)$$

Всё доказано. $\blacksquare$

Лемма 2: $\forall k \in \mathbb{N}_0 : k \le n \hookrightarrow P_n^{(k)}(f, x_0) = f^{(k)}(x_0),\ r_n^{(k)}(f, x_0) = 0$.

$\square$ Многочлен Тейлора:

$$P_n(f, x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j,$$

Продифференцируем данную сумму $k \le n$ раз. Тогда для всех слагаемых с $j < k$ выполняется $((x - x_0)^j)^{(k)} = 0$. Поэтому k-я производная многочлена имеет вид:

$$P_n^{(k)}(f, x) = \sum_{j=k}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} j(j-1)...(j-k+1)(x - x_0)^{j-k} = \sum_{j=k}^{n} C_j^k f^{(j)}(x_0)(x - x_0)^{j-k} =$$

$$= f^{(k)}(x_0) + \sum_{j=k+1}^{n} C_j^k f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^{j-k}$$

Так как многочлен Тейлора рассматривается в точке $x = x_0$, то последняя сумма равна нулю. Поэтому

$$P_n^{(k)}(f, x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

Так как $r_n^{(k)}(f, x_0) = f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(f, x_0)$, то $r_n^{(k)}(f, x_0) = 0$. $\blacksquare$

Теорема (остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано): пусть при некотором $n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, тогда остаточный член формулы Тейлора имеет вид:

$$r_n(f, x) = o((x-x_0)^n),\ x \to x_0$$

$\square$ Докажем данную теорему по индукции. При $n = 1$ утверждение верно в силу эквивалентности дифференцируемости в точке и существования в ней конечной производной. Пусть теорема верна для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что она верна для $n+1$.

Если $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю конечную производную в точке x_0, то $f'(x)$ имеет n-ю конечную производную в точке x_0. По предположению индукции: $r_n(f', x) = o((x-x_0)^n),\ x \to x_0$.

Так как $\exists f^{(n+1)}(x_0) \in \mathbb{R}$, то $\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \exists f^{(n)}(x) \in \mathbb{R} \implies f(x)$ дифференцируема в $U_\delta(x_0)$ по крайней мере один раз.

Далее, $r_{n+1}(f, x) = f(x) - P_{n+1}(f, x)$. Каждое из слагаемых дифференцируемо в $U_\delta(x_0)$, поэтому $r_{n+1}(f, x)$ дифференцируема в $U_\delta(x_0)$.

При фиксированном значении $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ применим к функции $r(x) \equiv r_{n+1}(f, x)$ теорему Лагранжа на отрезке $[x_0; x]$ (или на отрезке $[x; x_0]$, смотря какое из двух чисел больше):

$$r(x) - r(x_0) = r'(\xi)(x - x_0),$$

где $x_0 < \xi < x$ (или $x < \xi < x_0$). В любом случае $\xi = \xi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \xi(x) = x_0$, $\xi(x) \neq x_0$.

По лемме 1: $r'(x) \equiv r'_{n+1}(f, x) = r_n(f', x)$. Тогда из предположения индукции следует, что

$$r'(x) = o((x-x_0)^n),\ x \to x_0 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{r'(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

По теореме о замене переменной под знаком предела:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r'(\xi(x))}{(\xi(x) - x_0)^n} = 0$$

Так как $x_0 < \xi < x$ или $x < \xi < x_0$, то $|\xi(x) - x_0| < |x - x_0|$. Теперь рассмотрим предел:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r'(\xi(x))}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r'(\xi(x))}{(\xi(x)-x_0)^n} \cdot \frac{(\xi(x)-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0 \implies r'(\xi(x)) = o((x-x_0)^n)$$

Предел равен нулю как произведение бесконечно малой функции на ограниченную (числитель второй дроби меньше знаменателя).

По лемме 2: $r(x_0) = 0$. Тогда вернёмся к выражению из теоремы Лагранжа:

$$r(x) = r'(\xi)(x-x_0) = o((x-x_0)^n)(x-x_0) = o((x-x_0)^{n+1})$$

Утверждение теоремы верно для значения $n+1$. ■

Лемма: пусть при некотором $n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \exists f^{(n)}(x_0)$, тогда если $f(x) = Q(x) + o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$, где $Q(x)$ – многочлен степени не выше n, то $Q(x) = P_n(f,x)$.

□ Опустим индекс n. Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для $f(x)$ в точке x_0:

$$f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n),\ x \to x_0$$

По условию:

$$f(x) = Q(x) + o((x-x_0)^n),\ x \to x_0$$

Вычтем одно уравнение из другого: $P(x) - Q(x) = o((x-x_0)^n),\ x \to x_0$. Введём обозначение: $T(x) = P(x) - Q(x)$. Докажем, что $T(x) \equiv 0$.

Так как $T(x) = o((x-x_0)^n),\ x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

По теореме о замене переменной под знаком предела ($x = x_0 + t$; $x \to x_0$ при $t \to 0$; $x \neq x_0$ при $t \neq 0$):

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(x_0+t)}{t^n} = 0 \implies T(x_0+t) = o(t^n),\ t \to 0 \implies \lim_{t \to 0} T(x_0+t) = 0$$

Пусть $T(x_0+t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ – многочлен степени не выше n. Докажем, что все коэффициенты этого многочлена равны нулю.

Так как $\lim\limits_{t \to 0} T(x_0+t) = 0$, то $a_0 = 0$. Тогда $T(x) = a_1 t + ... + a_n t^n = o(t^n),\ t \to 0$. Поделим уравнение на $t \neq 0$: $a_1 + a_2 t + ... + a_n t^{n-1} = o(t^{n-1}),\ t \to 0$. В пределе $t \to 0$ получим $a_1 = 0$ и т.д. Последовательно все коэффициенты многочлена равны нулю. ■

Теорема (остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа): пусть функция $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю конечную производную в $U_\delta(x_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\forall x \in U_\delta(x_0)$ остаточный член формулы Тейлора имеет вид:

$$r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $\xi \in (x_0, x)$ (или $\xi \in (x, x_0)$, смотря какое из двух чисел больше).

□ При $x = x_0$ формула имеет вид $f(x_0) = f(x_0)$ и верна $\forall \xi$. Пусть $x > x_0$, то есть $x \in (x_0; x_0+\delta)$ (при $x < x_0$ доказательство аналогично).

Рассмотрим функцию $r(x) = r_n(f,x)$. Она имеет $(n+1)$-ю конечную производную в $U_\delta(x_0)$ (а значит, непрерывна в этой окрестности), причём в силу леммы 2: $r(x_0) = r'(x_0) = ... = r^{(n)}(x_0) = 0$.

Рассмотрим также функцию $s(x) = (x-x_0)^{n+1}$. Она имеет производные всех порядков, причём $s(x_0) = s'(x_0) = ... = s^{(n)}(x_0) = 0$; $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow s^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. Также ясно, что $\forall x \neq x_0 \hookrightarrow s'(x) \neq 0$; $s''(x) \neq 0$; ...; $s^{(n)}(x) \neq 0$.

По теореме Коши:

$$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r(x) - r(x_0)}{s(x) - s(x_0)} = \frac{r'(\xi_1)}{s'(\xi_1)},$$

где $\xi_1 \in (x_0; x)$. Далее применим теорему Коши к функциям $r'(x)$ и $s'(x)$:

$$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r'(\xi_1) - r'(x_0)}{s'(\xi_1) - s'(x_0)} = \frac{r''(\xi_2)}{s''(\xi_2)},$$

где $\xi_2 \in (x_0; \xi_1)$. Продолжим цепочку:

$$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r''(\xi_2) - r''(x_0)}{s''(\xi_2) - s''(x_0)} = \frac{r'''(\xi_3)}{s'''(\xi_3)} = \frac{r^{(4)}(\xi_4)}{s^{(4)}(\xi_4)} = ... = \frac{r^{(n)}(\xi_n)}{s^{(n)}(\xi_n)} = \frac{r^{(n)}(\xi_n) - r^{(n)}(x_0)}{s^{(n)}(\xi_n) - s^{(n)}(x_0)} = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{s^{(n+1)}(\xi)},$$

где $x_0 < \xi < \xi_n < ... < \xi_2 < \xi_1 < x$, то есть $\xi \in (x_0; x)$.

Так как $P_n(f, x)$ – многочлен степени не выше n, то $P_n^{(n+1)} = 0 \implies r^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$. Тогда получим:

$$r(x) = \frac{r^{(n+1)}(\xi)}{s^{(n+1)}(\xi)} s(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Всё доказано. ■

11.4 Основные разложения по формуле Тейлора

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \ x \to 0$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \ x \to 0$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \ x \to 0$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \ x \to 0$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \ x \to 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n), \ x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \ x \to 0$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}), \ x \to 0$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} C_{-\frac{1}{2}}^k \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}), \ x \to 0$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \ x \to 0$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \ x \to 0$$

11.5 Правила Лопиталя

Раскрытие неопределённости $\dfrac{0}{0}$: пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности α, где α – один из 6 СПС, причём $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, где β – один из 6 СПС, то $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$.

$\square$ Поскольку $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ определена в некоторой проколотой окрестности α, то $g'(x) \neq 0$ в этой проколотой окрестности.

Сначала докажем теорему для случая $\alpha = a \in \mathbb{R}$. Доопределим $f(a) = g(a) = 0$, тогда фукнции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в $\mathring{U}_\delta(a)$ и непрерывны в $U_\delta(a)$.

$\forall x > a :\ g'(x) \neq 0$ по теореме Коши имеем:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

где $\xi = \xi(x)$. Так как $a < \xi(x) < x$, то по теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{x\to a+0} \xi(x) = a + 0$.

Далее по теореме о замене переменной под знаком предела:

$$\beta = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Аналогично $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$. Таким образом, для $\alpha = a \in \mathbb{R}$ теорема доказана.

Для $\alpha = a + 0$ и $\alpha = a - 0$ доказывается аналогично.

Пусть теперь $\alpha = \infty$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, то по теореме о замене переменной под знаком предела после замены $x = \dfrac{1}{t}$ имеем:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \beta$$

Воспользуемся уже доказанным случаем $\alpha = a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(f\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)'} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \beta$$

Для $\alpha = +\infty$ и $\alpha = -\infty$ доказательство аналогично. $\blacksquare$

Лемма: пусть $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, где α – один из 6 СПС, тогда $\exists\delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(\alpha)$ определена функция $\varphi(x) : \lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x) = \alpha$, и при этом $f(\varphi(x)) = o(f(x))$, $x \to \alpha$.

$\square$ Пусть сначала $\alpha = a \in \mathbb{R}$.

Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\exists \delta_1 \in (0;1) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a) \hookrightarrow |f(x)| > 1$. При этом $f(a \pm \delta_1) \neq 0$. (Если последнее условие неверно для некоторой проколотой окрестности, то выбираем δ_1 меньше изначального до тех пор, пока условие не выполнится; если оно не выполняется ни для какого δ_1, то $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \hookrightarrow f(x) = 0$, что неверно).

Далее, $\exists \delta_2 > 0,\ \delta_2 < min\left(\delta_1; \dfrac{1}{2}\right) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(a) \hookrightarrow |f(x)| > |f(a \pm \delta_1)|$, то есть $\left|\dfrac{f(x)}{f(a\pm\delta_1)}\right| > 1$. При этом также потребуем $f(a \pm \delta_2) \neq 0$.

Аналогично, $\exists \delta_3 > 0,\ \delta_3 < min\left(\delta_2; \dfrac{1}{3}\right) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_3}(a) \hookrightarrow \left|\dfrac{f(x)}{f(a\pm\delta_2)}\right| > 2$. При этом также потребуем $f(a \pm \delta_3) \neq 0$.

Таким образом, строим последовательность:

$$\delta_n : \delta_{n+1} < min\left(\delta_n, \frac{1}{n+1}\right),\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_{n+1}}(a) \hookrightarrow \left|\frac{f(x)}{f(a\pm\delta_n)}\right| > n,\ f(a\pm\delta_{n+1}) \neq 0$$

Из определения последовательности δ_n ясно, что она строго убывает. Так как $0 < \delta_n < \dfrac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Далее, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(a) \hookrightarrow \exists! n(x) \in \mathbb{N} : \delta_{n+2} \leq |x - a| < \delta_{n+1}$. Ясно, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(a) \hookrightarrow n(x) > 0$. Также $n(x)$ нестрого убывает на $(a; a+\delta_2)$, нестрого возрастает на $(a-\delta_2; a)$. Так как $n(x)$ неограничена на $(a-\delta_2; a)$ и на $(a; a+\delta_2)$, то по теореме о пределах монотонных функций:

$$\lim_{x\to a+0} n(x) = +\infty, \lim_{x\to a-0} n(x) = +\infty \implies \lim_{x\to a} n(x) = +\infty.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = a \pm \delta_{n(x)}$ (знак $+$, если $x > a$, знак $-$, если $x < a$). Из определения последовательности δ_n получаем:

$$\left|\frac{f(\varphi(x))}{f(x)}\right| < \frac{1}{n(x)}$$

По теореме о переходе к пределу в неравенстве:

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(\varphi(x))}{f(x)}\right| \leq 0$$

Поскольку $\left|\dfrac{f(\varphi(x))}{f(x)}\right| \geq 0$, то по лемме о сохранении знака:

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(\varphi(x))}{f(x)}\right| = 0 \iff f(\varphi(x)) = o(f(x)),\ x \to a$$

Далее, так как $0 < \delta_{n(x)} < \dfrac{1}{n(x)}$, то по теореме о двух милиционерах:

$$\lim_{x\to a} \delta_{n(x)} = 0 \implies \lim_{x\to a} \varphi(x) = a$$

Лемма доказана для случая $\alpha = a \in \mathbb{R}$. Для $\alpha = a + 0$ и $\alpha = a - 0$ упрощения очевидны.

Если $\alpha = \infty$, то доказательство аналогично, но $\delta_1 > 1$, $\delta_2 > max(\delta_1, 2)$, ..., $\delta_{n+1} > max(\delta_n, n+1)$. Последовательность δ_n строго возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = +\infty$. Неравенство с функцией $f(x)$ примет вид:

$$\left|\frac{f(x)}{f(\pm\delta_n)}\right| > n,\ |x| > \delta_{n+1}$$

Функция $n(x)$ определяется так: $\delta_{n+1} < |x| \le \delta_{n+2}$, $\varphi(x) = \pm\delta_{n(x)}$ (знак $+$, если $x > 0$, знак $-$, если $x < 0$).

Упрощения в доказательстве при $\alpha = +\infty$ и $\alpha = -\infty$ очевидны. ■

Раскрытие неопределённости $\dfrac{\infty}{\infty}$: пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности α, где α – один из 6 СПС, причём $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$. Тогда если $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, где β – один из 6 СПС, то $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$.

□ Определим $\varphi(x)$ как в лемме. Функция $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ определена в некоторой проколотой окрестности $\alpha \implies g'(x) \neq 0$ в этой проколотой окрестности. Применим к фунциям $f(x)$ и $g(x)$ теорему Коши на отрезке $[\varphi(x); x]$ (или на $[x; \varphi(x)]$, смотря какое из чисел больше):

$$\frac{f(x) - f(\varphi(x))}{g(x) - g(\varphi(x))} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \ \ \varphi(x) < \xi(x) < x$$

Так как $\lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x) = \alpha$, то по теореме о двух милиционерах: $\lim\limits_{x\to\alpha} \xi(x) = \alpha$.

По теореме о замене переменной под знаком предела:

$$\beta = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\varphi(x))}{g(x) - g(\varphi(x))}$$

Так как $f(\varphi(x)) = o(f(x))$ при $x \to \alpha$, то $f(x) - f(\varphi(x)) \sim f(x)$ при $x \to \alpha$. Аналогично, $g(x) - g(\varphi(x)) \sim g(x)$ при $x \to \alpha$. Тогда по теореме о замене числителя и знаменателя на эквивалентные величины при вычислении предела:

$$\beta = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\varphi(x))}{g(x) - g(\varphi(x))} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Всё доказано. ■

12 БИЛЕТ 12

Необходимые условия монотонности: пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, конечном или бесконечном, тогда если $f(x)$ возрастает на $(a;b)$, то $f'(x) \geq 0$ на $(a;b)$; если убывает, то $f'(x) \leq 0$ на $(a;b)$ (монотонность, вообще говоря, нестрогая).

$\square$ Пусть функция $f(x)$ возрастает на $(a;b)$, тогда в произвольной точке $x_0 \in (a;b)$ выполняется:

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \geq 0,$$

так как $f(x_0+t) - f(x_0) > 0$ при $t > 0$. Значит, $f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0$.

Если $f(x)$ убывает на $(a;b)$, то доказательство аналогично. $\blacksquare$

Достаточные условия монотонности: пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех внутренних точках I. Тогда:

1. если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) во всех внутренних точках I, то функция $f(x)$ строго возрастает (убывает) на I.
2. если $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) во всех внутренних точках I, то функция $f(x)$ нестрого возрастает (убывает) на I.

$\square$ Пусть $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in I$. Тогда по теореме Лагранжа на отрезке $[x_1; x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

где $\xi \in (x_1; x_2)$. Если $f'(x) > 0$ во всех внутренних точках I, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Так как x_1 и x_2 – любые такие точки, что $x_1 < x_2$, то $f(x)$ строго возрастает на I. Остальные случаи доказываются аналогично. $\blacksquare$

Достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной: пусть $\exists \delta > 0 : f(x)$ непрерывна в $U_\delta(x_0)$ и дифференцируема в $\mathring{U}_\delta(x_0)$, причём выполнено одно из условий:

1. $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \hookrightarrow f'(x) > 0$; $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \hookrightarrow f'(x) < 0$;
2. $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \hookrightarrow f'(x) < 0$; $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \hookrightarrow f'(x) > 0$;
3. $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f'(x) > 0$ или $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f'(x) < 0$.

Тогда в случае 1) x_0 – точка строгого локального максимума, в случае 2) x_0 – точка строгого локального минимума, в случае 3) x_0 не является точкой локального экстремума.

$\square$ 1) Из достаточного условия монотонности следует, что $f(x)$ строго возрастает на $(x_0 - \delta; x_0]$ и строго убывает на $[x_0; x_0 + \delta)$. Тогда $x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) < f(x_0)$, то есть x_0 – точка локального максимума.

2) Доказывается аналогично.

3) При $f'(x) > 0$ функция $f(x)$ строго возрастает на $(x_0 - \delta; x_0]$ и на $[x_0; x_0 + \delta)$. Значит, $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$, и $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$, то есть в точке x_0 нет локального экстремума. Аналогично разбирается случай $f'(x) < 0$. $\blacksquare$

Достаточные условия локального экстремума в терминах второй производной: пусть $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \in \mathbb{R}$, $f''(x_0) \neq 0$, тогда

1. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума;

2. Если $f''(x_0), 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума.

$\square$ Применим формулу Тейлора с остаточным членов в форме Пеано (так как $\exists f''(x_0)$, то можно раскладывать до $o\left((x-x_0)^2\right)$):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)$$

Так как $f'(x_0) = 0$, то $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^2\left(\dfrac{f''(x_0)}{2} + \alpha(x)\right)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f''(x_0)}{2} + \alpha(x)\right) = \dfrac{f''(x_0)}{2}$, то по лемме о сохранении знака:

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow sign(f(x) - f(x_0)) = sign(f''(x_0))$$

Таким образом, если $f''(x_0) > 0$, то $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) > f(x_0)$, то есть x_0 – точка строгого локального минимума. Аналогично, если $f''(x) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума. $\blacksquare$

Достаточные условия локального экстремума в терминах высших производных: пусть при некотором $n \in \mathbb{N} : n \geq 2$ выполняется: $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, тогда:

1. Если n чётно, то в случае $f^{(n)}(x_0) > 0$ точка x_0 является точкой строгого локального минимума, а в случае $f^{(n)}(x_0) < 0$ – точкой строгого локального максимума;

2. Если n нечётно, то точка x_0 не является точкой локального экстремума.

$\square$ Применим формулу Тейлора с остаточным членов в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Так как $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, то

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right),\ \text{где}\ \lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right) = \dfrac{f^n(x_0)}{n!}$, то по лемме о сохранении знака при чётном n:

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow sign(f(x) - f(x_0)) = sign(f^{(n)}(x_0))$$

и доказательство завершается, как в предыдущей теореме.

Пусть теперь n нечётно, тогда рассмотрим для определённости случай $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) > 0.$$

Следовательно, $sign(f(x) - f(x_0)) = sign(x - x_0)$. Поэтому точка x_0 не может быть точкой локального экстремума. $\blacksquare$

12.1 Выпуклость, точки перегиба

Определение: функция $f(x)$ называется строго выпуклой вверх на промежутке I, если

$$\forall x_1, x_2 : x_1 \neq x_2 \hookrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Функция $f(x)$ называется строго выпуклой вниз на промежутке I, если

$$\forall x_1, x_2 : x_1 \neq x_2 \hookrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Если соответствующие неравенства нестрогие, можно говорить о нестрогой выпуклости вверх или вниз.

Определение: точка x_0 называется точкой перегиба функции $f(x)$, если

$$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

и $\exists \delta > 0$ такое, что на $(x_0 - \delta; x_0)$ функция выпукла вверх, а на $(x_0; x_0 + \delta)$ выпукла вниз (или наоборот). Можно говорить о точках нестрогого перегиба, если выпуклость считается нестрогой.

Лемма: если в точке x_0 $\exists f''(x_0) \in \mathbb{R}$, то

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{t^2}.$$

☐ Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right),\ x \to x_0.$$

По теореме о замене переменной под знаком предела, сделаем сначала замену $x = x_0 + t$, $t \to 0$, затем замену $x = x_0 - t$, $t \to 0$:

$$f(x_0+t) = f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{f''(x_0)}{2}t^2 + o(t^2),\ t \to 0$$

$$f(x_0-t) = f(x_0) - f'(x_0)t + \frac{f''(x_0)}{2}t^2 + o(t^2),\ t \to 0$$

Сложим эти два неравенства:

$$f(x_0+t) + f(x_0-t) = 2f(x_0) + f''(x_0)t^2 + o(t^2),\ t \to 0$$

Таким образом:

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{t^2}.$$

Всё доказано. ■

Необходимое условие выпуклости: если функция $f(x)$ выпукла (строго или нестрого) вверх (вниз) на интервале I, конечном или бесконечном, причём на этом интервале $\exists f''(x) \in \mathbb{R}$, то $\forall x \in I \hookrightarrow f''(x) \leq 0$ (соответственно, $f''(x) \geq 0$).

☐ Пусть функция $f(x)$ выпукла вверх на I. Тогда $\forall x_0 \in I$ и $\forall t:\ x_0+t \in I, x_0-t \in I$ имеем:

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_0+t+x_0-t}{2}\right) \geq \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} \implies f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0) \leq 0$$

В силу предыдущей леммы:

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t^2} \leq 0.$$

Аналогично доказывается случай, когда функция выпукла вниз. ■

Достаточное условие выпуклости: пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и во всех внутренних точках $\exists f''(x) \in \mathbb{R}$, тогда если $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то функция строго выпукла вниз (соответственно, строго выпукла вверх) на I. Если $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), то функция нестрого выпукла вниз (соответственно нестрого выпукла вверх) на I.

☐ Пусть $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in I$. Обозначим $x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, $t = \dfrac{x_2-x_1}{2} > 0$, тогда $x_2 = x_0+t$, $x_1 = x_0-t$. Имеем:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{2} = \frac{[f(x_0+t)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_0-t)]}{2}$$

Функция непрерывна и дифференцируема на I, поэтому применим теорему Лагранжа к числителю:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{f'(\xi_2)t - f'(\xi_1)t}{2},\ \xi_1 \in (x_0-t; x_0),\ \xi_2 \in (x_0; x_0+t)$$

Поскольку во всех внутренних точках I существует конечная $f''(x)$, то во всех внутренних точках I непрерывна $f'(x)$. Снова применим теорему Лагранжа:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{f''(\xi)\cdot(\xi_2-\xi_1)t}{2},\ \xi \in (\xi_1; \xi_2)$$

Если $f''(x) > 0$ во всех внутренних точках I, то $f''(\xi) > 0$.

Так как $\xi_2 - \xi_1 > 0$, то $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, и $f(x)$ строго выпукла вниз на I.

Аналогично разбираются остальные случаи. ■

Достаточные условия точки перегиба: пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, и $f''(x)$ конечна в некоторой $\mathring{U}_\delta(x_0)$, тогда:

1. если $f''(x_0) > 0$ на $(x_0-\delta; x_0)$, $f''(x_0) < 0$ на $(x_0; x_0+\delta)$ (или наоборот), то x_0 – точка строгого перегиба функции $f(x)$;

2. если $f''(x) > 0$ (или $f''(x) < 0$) в $\mathring{U}_\delta(x_0)$, то x_0 не является точкой перегиба функции f.

☐ Доказательство сразу следует из определения точки перегиба и достаточного условия выпуклости. ■

12.2 Асимптоты

Определение: прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \infty$.

Определение: прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = 0$, или $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, или $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx - b) = 0$. При $k = 0$ такая прямая называется горизонтальной асимптотой.

Теорема: прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x) \iff \exists k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$, $\exists b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) \in \mathbb{R}$ (аналогично для $x \to +\infty$, $x \to -\infty$).

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Если $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = 0$, то $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$, то есть:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \implies \frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \implies k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Равенство $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$ очевидно из определения наклонной асимптоты.

$\boxed{\Leftarrow}$ Из $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$ следует, что $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = 0$. $\blacksquare$