Билеты к устному экзамену
Общая физика: механика

1 БИЛЕТ 1

Материальная точка - тело, размерами и формой которого в рамках данной задачи можно пренебречь.

Система отсчёта - произвольно выбранной тело (система тел), относительно которого (которых) определяется положение остальных тел.

1.1 Описание движения материальной точки вдоль плоской кривой

Выберем в некоторой системе отсчёта произвольную систему координат. Пусть сначала она будет правой прямоугольной декартовой с базисными векторами $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Тогда положение материальной точки с координатами (x, y, x) однозначно определяется радиус-вектором $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Траектория материальной точки - кривая, описываемая концом радиус вектора данной материальной точки при её движении.

Смещение материальной точки ($\Delta\vec{r}$ или $\vec{s}$) - векторная физическая величина, равная измерению радиус-вектора материальной точки за некоторый промежуток времени.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Скорость ($\vec{v}$) - векторная физическая величина, определяемая выражением:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Так как $\vec{v}(t)$ - производная вектор-функции $\vec{r}(t)$, то $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории. Также с введением скорости можно записать выражение для смещения:

$$\Delta\vec{r} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt$$

Путь (s) - скалярная физическая величина, равная длине участка траектории и определяемая выражением:

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} vdt$$

Помимо ПДСК при описании движения материальной точки также примеряют полярную систему координат $\{r, \varphi\}$ для плоского движения, сферическую $\{r, \theta, \varphi\}$ и цилиндрическую $\{\rho, \varphi, z\}$ системы координат для пространственного движения.

Обобщённые координаты - любой набор чисел, однозначно определяющий положение материальной точки относительно данной системы отсчёта.

1.2 Нормальное и тангенциальное ускорения

Ускорение ($\vec{a}$) - векторная физическая величина, определяемая выражением:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Угловая скорость ($\vec{\omega}$) - векторная физическая величина, модуль которой определяется выражением

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

где φ - угол поворота относительно центра кривизны траектории, а направление таково, что векторы $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ образуют правую тройку, где $\vec{R}$ - вектор, проведённый из центра кривизны к материальной точке.

Радиус кривизны (R) - величина, обратная кривизне траектории.

Рассмотрим, на какие составляющие раскладывается ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\omega\vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \omega^2 R\vec{n}$$

Из дифференциальной геометрии известно, что кривизна кривой (траектории) определяется выражением:

$$k = \frac{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}{|\vec{r}'|^3}$$

Таким образом, в терминах механики кривизна определяется выражением:

$$k = \frac{|[\vec{v}, \vec{a}]|}{v^3}$$

Для плоской кривой, заданной параметрически выражение принимает вид:

$$k = \frac{v_x a_y - v_y a_x}{(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Для траектории, заданной уравнением $y = f(x)$ выражение принимает вид:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2 БИЛЕТ 2

2.1 Первый закон Ньютона

Первый закон Ньютона: существуют системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых тела, не взаимодействующие с другими телами, движутся равномерно и прямолинейно или покоятся.

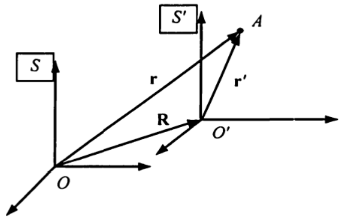
Системы отсчёта, не являющиеся инерциальными, называются неинерциальными.

2.2 Преобразования Галилея

Принцип относительности Галилея: все законы механики инвариантны относительно перехода между инерциальными системами отсчёта.

Найдём преобразования координат и времени при переходе от одной системе отсчёта к другой. Рассмотрим две системы отсчёта: S и S'. В классической механике время полагается абсолютным, поэтому $t = t'$.

Также геометрия пространства полагается евклидовой, поэтому $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$.



Продифференцируем последнее равенство по времени.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

По определению скорости: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ - скорость материальной точки в системе отсчёта S, $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_{potr}$ - скорость точки O' в системе отсчёта S.

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(x'\cdot\vec{i}'+y'\cdot\vec{j}'+z'\cdot\vec{k}') = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right)+\left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) = \vec{v}'+x'[\vec{\omega},\vec{i}']+y'[\vec{\omega},\vec{j}']+z'[\vec{\omega},\vec{k}'] = \vec{v}'+[\omega,\vec{r}']$$

Таким образом, закон сложения скоростей имеет вид:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{port} + [\vec{\omega},\vec{r}']$$

Если S' движется поступательно относительно S, то $\vec{\omega} = \vec{0}$, и закон сложения скоростей принимает вид:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{port}$$

Важно, что он справедлив не только при переходе между двумя ИСО, но и при переходе от ИСО к НСО, если НСО движется поступательно относительно ИСО. Теперь продифференцируем последнее выражение в предположении, что $\vec{v}_{port} = \overrightarrow{const}$, то есть обе системы отсчёта являются инерциальными:

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Таким образом, ускорение инвариантно относительно перехода между ИСО.

3 БИЛЕТ 3

3.1 Описание состояния частиц в классической механике

Замкнутая механическая система - система материальных точек (тел), взаимодействующих между собой и не взаимодействующих с другими телами.

Если замкнутая система состоит из двух тел, то для них справедливо соотношение, полученное эмпирически:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2,$$

где величины m_1 и m_2 не зависят от характера взаимодействия. Таким образом:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Так определятся отношение масс двух тел. Перейти от отношения масс к массе можно установив эталон массы.

Масса (m) - скалярная физическая величина, описывающая инерционные свойства тел.

Импульс материальной точки $(\vec{p})$ - векторная физическая величина, определяемая выражением:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

3.2 Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона: в инерциальных системах отсчёта производная импульса материальной точки по времени равна действующей на неё силе.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$$

Сила ($\vec{F}$) - векторная физическая величина, являющаяся причиной изменения импульса материальной точки и однозначно определяемая свойствами данной материальной точки, окружающих её тел, а также положениями и скоростями этих тел относительно материальной точки.

Принцип суперпозиции сил: Пусть механическая система состоит из материальных точек $A, B_1, B_2, ..., B_n$, и пусть точка A взаимодействует со всеми остальными. Если точка B_1 в отсутствие точек $B_2, B_3, ..., B_n$ действовала бы на точку A с силой $\vec{F}_1$, точка B_2 - с силой $\vec{F}_2$ и так далее, то на точку A действует сила, определяемая выражением:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

Если масса тела постоянна в процессе движения, то второй закон Ньютона можно переписать в виде:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Данной уравнение в свою очередь содержит 3 уравнения в проекциях на координатные оси:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

Решение этих уравнений позволяет найти положение материальной точки в любой момент времени. Однако каждое из уравнений является дифференциальным уравнением второго порядка. Поэтому их общие решения содержат произвольные константы, определяемые условиями, в которых находилась материальная точка в начальный (или любой другой) момент времени. Такими условиями обычно являются начальные координаты и проекции скорости. Такие условия называются **начальными условиями**.

4 БИЛЕТ 4

4.1 Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона: две материальные точки взаимодействуют силами, лежащими на прямой, соединяющей эти материальные точки, равными по модулю и противоположными по направлению.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Третий закон Ньютона справедлив в рамках классической механики, но, вообще говоря, неверен, поскольку утверждает равенство сил взаимодействия двух материальных точек в любой момент времени. Однако любое взаимодействие осуществляется с конечной скоростью, поэтому если сила $\vec{F}_{12}$ по какой-либо причине изменилась, то сила $\vec{F}_{21}$ измерится не мгновенно, а через некоторое время.

4.2 Закон сохранения импульса

Пусть имеется система из n взаимодействующих друг с другом материальных точек. Силу, действующую на i–ю материальную точку со стороны j–й материальной точки, будем обозначать $\vec{F}_{ij}$. Пусть также на систему будут действовать некоторые внешние силы $\vec{F}_1^{(e)}$, $\vec{F}_2^{(e)}$, ..., $\vec{F}_n^{(e)}$, где $\vec{F}_i^{(e)}$ - равнодействующая внешних сил, действующих на i–ю материальную точку. Тогда справедлива система уравнений:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{0} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + ... + \vec{F}_{1(n-1)} + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1^{(e)}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{0} + \vec{F}_{23} + ... + \vec{F}_{2(n-1)} + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_2^{(e)}$$

$$...$$

$$\frac{d\vec{p}_{n-1}}{dt} = \vec{F}_{(n-1)1} + \vec{F}_{(n-1)2} + ... + \vec{0} + \vec{F}_{(n-1)n} + \vec{F}_{n-1}^{(e)}$$

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + ... + \vec{F}_{n(n-1)} + \vec{0} + \vec{F}_n^{(e)}$$

Откуда получаем:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + ... + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \sum_{i=1,j=1}^{n} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{(e)}$$

По III закону Ньютона каждая сумма, взятая в скобки в правой части равенства равна нулю.

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + ... + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{(e)}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{(e)}$$

Последнее выражение называется законом изменения импульса системы материальных точек.

Закон изменения импульса: производная суммы импульсов материальных точек, образующих некоторую систему, равна равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему.

Если равнодействующая всех внешних сил равна нулю, то есть система является замкнутой, то:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n) = \vec{0}$$

Отсюда получаем:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = \overrightarrow{const}$$

Данной выражение является записью закона сохранения импульса.

Закон сохранения импульса: сумма импульсов материальных точек, образующих замкнутую систему, является постоянной величиной.

Из закона изменения импульса видно, что закон сохранения импульса приближённо выполняется, если:

$$\left| \int_0^{\tau} (\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{(e)}) dt \right| << \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i,$$

где τ - время действия внешних сил.

Также, если существует ось Ox такая, что $\sum_{k=1}^{n} (F_k^{(e)})_x = 0$, то закон сохранения импульса выполняется в проекции на эту ось, но может и не выполнятся в проекции на другие оси.

Импульс системы материальных точек ($\vec{P}$) - сумма импульсов всех материальных точек, входящих в систему.

5 БИЛЕТ 5

5.1 Центр масс

Центр масс (центр инерции) системы материальных точек - воображаемая точка, положение которой задаётся положениями и массами всех входящих в систему материальных точек согласно выражению:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

Введём обозначение: $M \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ - масса системы. С учётом обозначения имеем:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{M}$$

Продифференцируем радиус-вектор центра масс по времени:

$$\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n}{M} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n}{M}$$

Отсюда получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = M\vec{v}_c$$

Найдём импульс системы в системе отсчёта центра масс. Обозначим его $\vec{P}'$.

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i' = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_c) = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - M\vec{v}_c = M\vec{v}_c - M\vec{v}_c = \vec{0}$$

Таким образом, импульс системы материальных точек в системе центра масс равен нулю.

5.2 Теорема о движении центра масс

Продифференцируем по времени выражение для импульса системы:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = M\frac{d\vec{v}_c}{dt}$$

По закону изменения импульса:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{(e)}$$

Окончательно получаем:

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{(e)}$$

Последнее выражение называется теоремой о движении центра масс.

Теорема о движении центра масс - центр масс системы материальны точек движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, а действующая сила - сумме всех внешних сил, действующих на систему.

6 БИЛЕТ 6

6.1 Задача двух тел, приведённая масса

Рассмотрим замкнутую систему из двух материальных точек с массами m_1 и m_2. Уравнения движения этих точек имеют вид:

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}; \quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

Вычтем одно уравнение из другого:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}$$

По третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Также введём обозначение $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - вектор, проведённый от материальной точки с массой m_1 к материальной точке с массой m_2.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

Введём обозначение:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Величина $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называется приведённой массой системы. С использованием этого понятия предыдущее уравнение принимает вид:

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}$$

Данное уравнение формально эквивалентно второму закону Ньютона. Пусть из этого уравнения найден $\vec{r}$. Используя также определение центра масс, найдём $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{r}_1; \quad \vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r} + \vec{r}_1)}{m_1 + m_2} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_c - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_c + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Найдём импульс материальных точек в системе центра масс:

$$\vec{p}_1' = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_c) = m_1\left(\vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$\vec{p}_2' = m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_c) = m_2\left(\vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

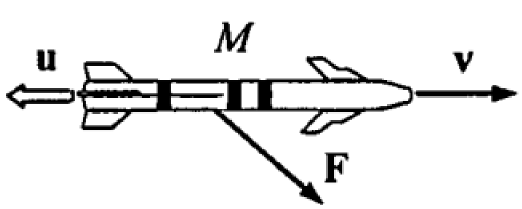
Введём обозначение: $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Отсюда: $\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Таким образом:

$$\vec{p}_1' = -\mu\vec{u}; \quad \vec{p}_2' = \mu\vec{u}$$

7 БИЛЕТ 7

7.1 Уравнение Мещерского, реактивная сила

Рассмотрим ракету массой m, движущуюся со скоростью v. Пусть на ракету также действует сила $\vec{F}$.



Пусть теперь от ракеты отделилась масса $-dm$ со скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты. Закон изменения импульса для ракеты:

$$\vec{F}dt = ((m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + (-dm)(\vec{u} + \vec{v})) - m\vec{v}$$

$$\vec{F}dt = m\vec{v} + md\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} - dm\vec{u} - dm\vec{v} - m\vec{v}$$

$$\vec{F}dt = md\vec{v} + dmd\vec{v} - dm\vec{u}$$

Величина $dmd\vec{v}$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем остальные величины в уравнении, поэтому ей можно пренебречь.

$$\vec{F}dt = md\vec{v} - dm\vec{u}$$

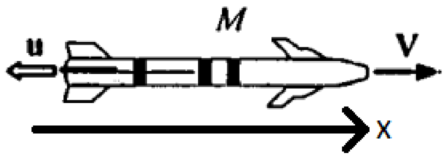
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

Последнее уравнение называется **уравнением Мещерского** или **уравнением движения материальной точки с переменной массой**.

Уравнение Мещерского совпадает с уравнением второго закона Ньютона, но, во-первых, масса материальной точки непостоянна, во-вторых, к равнодействующей внешних сил добавляется слагаемое $\frac{dm}{dt}\vec{u}$, которое называется **реактивной силой**

7.2 Формула Циолковского

Рассмотрим ракету массой m, движущуюся со скоростью v. Пусть на ракету не действуют никакие силы.



Пусть теперь от ракеты отделилась масса $-dm$ со скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты. Закон сохранения импульса для ракеты:

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + (-dm)(\vec{u} + \vec{v}) = m\vec{v}$$

$$m\vec{v} + md\vec{v} + dm\vec{v} + dmd\vec{v} - dm\vec{u} - dm\vec{v} = m\vec{v}$$

$$md\vec{v} + dmd\vec{v} = dm\vec{u}$$

Величина $dmd\vec{v}$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем остальные величины в уравнении, поэтому ей можно пренебречь.

$$md\vec{v} = dm\vec{u}$$

$$Ox : mdv = -udm$$

$$\int \frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}\int dv$$

$$\ln m = -\frac{v}{u} + C$$

Найдём константу интегрирования. Пусть $m = m_0$ при $v = 0$. Тогда $C = \ln m_0$, откуда получаем:

$$v = u \ln \frac{m_0}{m}$$

Последнее выражение называется **формулой Циолковского**

8 БИЛЕТ 8

8.1 Кинетическая энергия

Работа силы (A) - скалярная физическая величина, определяемая выражением:

$$dA = (\vec{F}, d\vec{l})$$

$$A = \int_L dA = \int_L (\vec{F}, d\vec{l})$$

Рассмотрим материальную точку, на которую действует сила $\vec{F}$. Пусть под действием этой силы точка совершила перемещение $d\vec{s}$, тогда по второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

а также по определению скорости:

$$d\vec{s} = \vec{v}dt$$

Тогда:

$$A = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} (\frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{v}dt) = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} (\vec{v}, d\vec{p}) = m \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} (\vec{v}, d\vec{v}) = m \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} v_x dv_x + m \int_{v_{1y}}^{v_{2y}} v_y dv_y + m \int_{v_{1z}}^{v_{2z}} v_z dv_z =$$

$$= m\left(\frac{v_{x2}^2}{2} - \frac{v_{x1}^2}{2}\right) + m\left(\frac{v_{y2}^2}{2} - \frac{v_{y1}^2}{2}\right) + m\left(\frac{v_{z2}^2}{2} - \frac{v_{z1}^2}{2}\right)$$

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Данное выражение является записью теоремы о кинетической энергии.

Кинетическая энергия материальной точки (K) - скалярная физическая величина, определяемая выражением:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчёта.

Теорема о кинетической энергии: работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки.

Теорема о кинетической энергии обобщается на случай системы материальных точек, если сложить выражения для работ сил, действующих на каждую материальную точку.

8.2 Связь между кинетическими энергиями в различных системах отсчёта

Рассмотрим материальную точку с массой m. Обозначим через K её кинетическую энергию в инерциальной системе отсчёта S, а через K' - в другой системе отсчёта S', движущейся поступательно относительно S со скоростью $\vec{u}$. По закону сложения скоростей: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$.

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(\vec{v}' + \vec{u}, \vec{v}' + \vec{u}) = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mu^2 + m(\vec{v}', \vec{u}) = K' + \frac{1}{2}mu^2 + (\vec{p}', \vec{u})$$

Рассмотрим теперь систему из n материальных точек. Для i–й материальной точки справедливо равенство:

$$K_i = K_i' + \frac{1}{2}m_i u^2 + (\vec{p}_i', \vec{u})$$

Сложим все такие равенства, записанные для каждой точки:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} K'_i + \frac{1}{2}u^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + ((\sum_{i=1}^{n} \vec{p}'_i), \vec{u})$$

Кинетической энергией системы материальных точек называется сумма кинетических энергий всех этих точек. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} K_i \equiv K$, $\sum\limits_{i=1}^{n} K'_i \equiv K'$. Также по определению импульса системы материальных точек: $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{p}'_i \equiv \vec{P}'$. Введём обозначение: $M \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$. С учётом всех переобозначений последнее выражением принимает вид:

$$K = K' + \frac{1}{2}Mu^2 + (\vec{P}', \vec{u})$$

Если система отсчёта S' такова, что центр масс системы материальных точек в ней покоится, то $\vec{P}' = \vec{0}$. Тогда имеем:

$$K = K' + \frac{1}{2}Mu^2$$

Данное уравнение является записью теоремы Кёнига.

Теорема Кёнига: кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей системы, мысленно сосредоточенной в её центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же системы в системе центра масс.

9 БИЛЕТ 9

9.1 Работа силы, мощность

Работа силы введена в предыдущем билете. Здесь докажем одно её свойство. Пусть на материальную точку действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ...,$\vec{F}_n$. Тогда работа равнодействующей равна:

$$A = \int\limits_L (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n, d\vec{l}) = \int\limits_L (\vec{F}_1, d\vec{l}) + \int\limits_L (\vec{F}_2, d\vec{l}) + ... + \int\limits_L (\vec{F}_n, d\vec{l}) = A_1 + A_2 + ... + A_n,$$

где A_i - работа силы $\vec{F}_i$. Таким образом, работа является аддитивной величиной.

Мощность силы (N) - скалярная физическая величина, равная производной работы силы по времени.

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Выразим мощность через силу, действующую на материальную точку:

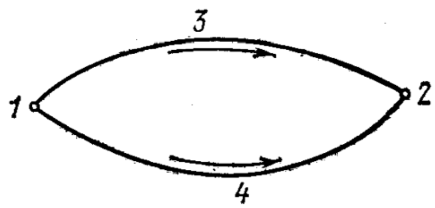
$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F}, d\vec{r})}{dt} = (\vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt}) = (\vec{F}, \vec{v})$$

9.2 Консервативные и неконсервативные силы

Консервативная сила - сила, работа которой не зависит от траектории материальной точки при её движении, а определяется только начальным и конечным положениями точки.

Консервативная сила - сила, работа которой по замкнутому контуру равна нулю.

Эти определения консервативных сил эквивалентны.



Докажем, что из первого определения следует второе. Пусть в одном случае материальная точка переместилась из положения 1 в положение 2, пройдя положение 3, а в другом случае - пройдя положение 4. Тогда $A_{132} = A_{142}$. Очевидно, что $A_{241} = -A_{142}$, поэтому

$$A_{12341} = A_{132} + A_{241} = A_{132} - A_{142} = 0$$

Докажем, что из второго определения следует первое. Пусть $A_{12341} = 0$. Ясно, что $A_{12341} = A_{132} + A_{241}$ и $A_{241} = -A_{142}$. Таким образом:

$$A_{12341} = A_{132} - A_{142} = 0 \Rightarrow A_{132} = A_{142}$$

Так как точки 3 и 4 выбраны произвольно, то работа консервативной силы не зависит от траектории.

Консервативными являются центральные и однородные силовые поля.

Диссипативные силы - силы, работа которых при любом движении в замкнутой системе отрицательна. Диссипативными являются силы трения.

Гироскопические силы - силы, зависящие от скорости материальной точки и действующие всегда перпендикулярное ей.
Единственной гироскопической силой является сила Лоренца. Из сил инерции гироскопической является сила Кориолиса.

9.3 Потенциальная энергия

Если на систему действуют только консервативные и гироскопические силы, то для такой системы можно ввести понятие потенциальной энергии. Примем произвольное положение материальной точки за нулевое.

Потенциальная энергия (П) - скалярная физическая величина, равная работе, совершаемой консервативными силами при перемещении материальной точки из данного положения в нулевое.

$$\Pi = \int_{\vec{r}}^{\vec{0}} (\vec{F}_{pot}, d\vec{r}) = -\int_{\vec{0}}^{\vec{r}} (\vec{F}_{pot}, d\vec{r})$$

Потенциальная энергия зависит от данного положения материальной точки и нулевого положения - нулевого уровня потенциальной энергии.

Пусть материальную точку перевели из положения 1 в положение 2 под действием консервативных сил. Найдём их работу. Для этого воспользуемся тем, что эта работа будет равна работе консервативных сил, если сначала перевести точку из положения 1 в нулевое, а затем из нулевого - в положение 2.

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20} = \Pi_1 - \Pi_2$$

<u>Потенциальная энергия силы всемирного тяготения:</u>

Переместим материальную точку на бесконечность:

$$A_\infty = -\int_r^\infty \frac{Gm_1m_2}{r^2}dr = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

$$A_\infty = \Pi_r - \Pi_\infty$$

Считаем, что $\Pi_\infty = 0$, тогда:

$$\Pi(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Потенциальная энергия растянутой пружины:

Сила упругости является центральной, следовательно, консервативной. Пусть пружину растянули на x. Найдём работу, которую совершит сила упругости при возвращении пружины в недеформированное состояние. Эта работа по определению равна потенциальной энергии пружины при её растяжении на x.

$$A = \int\limits_x^0 -kxdx = k\int\limits_0^x xdx = \frac{kx^2}{2}$$

$$\Pi(x) = \frac{kx^2}{2}$$

9.4 Связь силы и потенциальной энергии

Элементарная работа:

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = \Pi(x,y,z) - \Pi(x+dx, y+dy, z+dz) = -d\Pi$$

$$F_xdx + F_ydy + F_zdz = -d\Pi$$

Пусть перемещение происходит только вдоль оси Ox. Тогда $F_xdx = \Pi(x,y,z) - \Pi(x+dx,y,z)$. Отсюда следует:

$$F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}$$

Аналогично:

$$F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y};\quad F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}$$

Таким образом:

$$\vec{F} = -grad\,\Pi = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\cdot\vec{i}; \frac{\partial\Pi}{\partial y}\cdot\vec{j}; \frac{\partial\Pi}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)$$

9.5 Закон сохранения механической энергии

Пусть в замкнутой системе действуют только консервативные и гироскопические силы, тогда с одной стороны работа этих сил при перемещении системы из положения 1 в положение 2 равна:

$$A_{12} = K_2 - K_1$$

с другой стороны:

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2$$

Откуда получаем:

$$K_1 + \Pi_1 = K_2 + \Pi_2$$

Данное выражение является записью закона сохранения механической энергии.
Полная механическая энергия (E) - сумма кинетической и потенциальной энергии системы.
Закон сохранения механической энергии: механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные и гироскопические силы, не изменяется.

Пусть теперь в той же системе действуют также диссипативные силы. Тогда по теореме о кинетической энергии:

$$A_{pot} + A_{oth} = K_2 - K_1$$

По определению потенциальной энергии:

$$A_{pot} = \Pi_1 - \Pi_2$$

Таким образом:

$$A_{oth} + \Pi_1 - \Pi_2 = K_2 - K_1$$

$$A_{oth} = (K_2 + \Pi_2) - (K_1 + \Pi_1) = E_2 - E_1$$

Таким образом, все силы, кроме консервативных и гироскопических, изменяют механическую энергию системы.

Общефизический принцип сохранения энергии: в замкнутой системе энергия сохраняется и может переходить из одной формы в другие.