Основы точной теории симметричного гироскопа
Вопрос по выбору для экзамена по курсу
"Общая физика: механика"

Долгов Александр Алексеевич, Б01-106

1 Аннотация

В лекционном курсе предмета "Общая физика: механика" рассматривается приближённая теория симметричного гироскопа. Эта теория содержит некоторые недостатки: описываются не все гироскопические эффекты, она не вполне согласуется с законом сохранения энергии, а также такой гироскоп обладает безинерционностью. Автор посчитал интересным изучить точную теорию симметричного гироскопа с целью получить более детальную картину явления и разрешить противоречия приближённой модели.

2 Основные понятия

Гироскоп - устройство, способное реагировать на изменение углов ориентации тела, на котором оно помещено, относительно инерциальной системы отсчёта.

В механике под гироскопом чаще всего понимается быстро вращающееся твёрдое тело, ось вращения которого может изменять своё направление в пространстве. Такие гироскопы называются роторными гироскопами.

Симметричный гироскоп - гироскоп, обладающий симметрией вращения относительно некоторой оси, называемой геометрической осью или осью фигуры гироскопа.

Точка опоры гироскопа - такая точка оси фигуры гироскопа, относительно которой рассматривается его движение.

Под *гироскопом* далее будем понимать *роторный симметричный гироскоп с неподвижной точкой опоры.*

Прецессия - явление, при котором ось вращения тела меняет своё направление в пространстве. Если прецессия происходит без внешнего воздействия, то она называется свободной, если под действием внешнего момента сил - вынужденной.

Нутация - происходящее одновременно с прецессией движение твёрдого тела, при котором происходит малое изменение угла между осью собственного вращения тела и осью, вокруг которой происходит прецессия.

Регулярная прецессия - прецессия, происходящая без нутаций.

3 Теоретические сведения

Основным в теории гироскопа является уравнение моментов:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M},$$

где моменты берутся относительно неподвижной точки O.

Также необходимо понятие тензора инерции. Он связывает компоненты векторов $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$.

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix},$$

где $I_{xx} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(y_i^2+z_i^2)$, $I_{yy} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+z_i^2)$, $I_{zz} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+y_i^2)$, $I_{xy} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$, $I_{yz} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$, $I_{xz} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$.

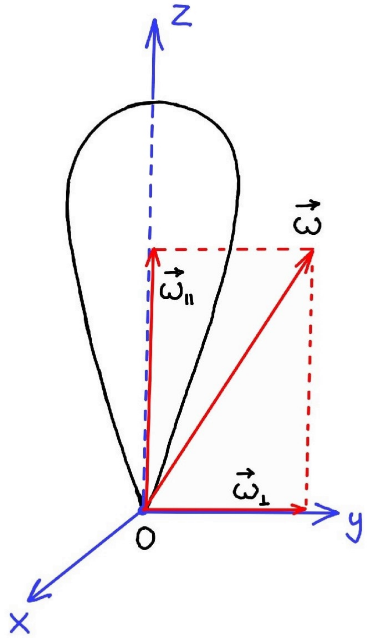
При описании движения твёрдого тела необходима **теорема Эйлера:** твёрдое тело, имеющее одну неподвижную точку, может быть переведено из произвольного положения в другое произвольное положение путём поворота вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.

4 Нахождение момента импульса гироскопа

По теорема Эйлера движение гироскопа с неподвижной точкой O можно представить как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Угловую скорость этого вращения обозначим через $\vec{\omega}$, момент импульса относительно точки O обозначим через $\vec{L}$.

Разложим вектор $\vec{\omega}$ на две составляющие: $\vec{\omega}_\parallel$ - вектор, направленный вдоль оси фигуры гироскопа; $\vec{\omega}_\perp$ - вектор, перпендикулярный оси фигуры гироскопа.

Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы её начало совпадало с точкой O, ось Oz была сонаправлена с вектором $\vec{\omega}_\parallel$, ось Oy - сонаправлена с вектором $\vec{\omega}_\perp$, ось Ox образует с двумя другими правую тройку.



Запишем матричное выражение для компонент вектора $\vec{L}$.

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_\perp \\ \omega_\parallel \end{pmatrix},$$

В силу симметрии гироскопа относительно оси Oz: $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$, $I_{xx} = I_{yy}$. Также введём обозначения: $I_{xx} = I_{yy} = I_\perp$, $I_{zz} = I_\parallel$. С учётом этих замечаний выражением принимаем вид:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I_\perp & 0 \\ 0 & 0 & I_\parallel \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_\perp \\ \omega_\parallel \end{pmatrix},$$

Откуда получаем:

$$L_x = 0; \quad L_y = I_\perp \omega_\perp; \quad L_z = I_\parallel \omega_\parallel \;\Rightarrow\; \vec{L} = I_\parallel \vec{\omega}_\parallel + I_\perp \vec{\omega}_\perp \tag{1}$$

5 Получение основного уравнения точной теории симметричного гироскопа

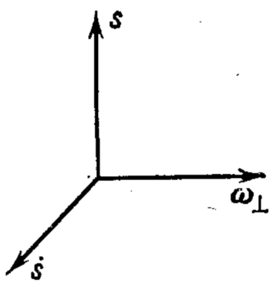
Введём вектор

$$\vec{s} = \frac{\vec{\omega}_\parallel}{\omega_\parallel}$$

и отложим его от точки O. Конечная точка вектора $\vec{s}$ называется **вершиной гироскопа**. Производная $\dot{\vec{s}}$ имеет смысл линейной скорости вершины гироскопа, поэтому верно соотношение:

$$\dot{\vec{s}} = [\vec{\omega}, \vec{s}] = [\vec{\omega}_\perp, \vec{s}]$$

Векторы $\vec{\omega}_\perp$, $\vec{s}$, $\dot{\vec{s}}$ образуют в таком порядке правую тройку.



Поэтому $\vec{\omega}_\perp = [\vec{s}, \dot{\vec{s}}]$. Подставим данное выражение в (1).

$$\vec{L} = I_\parallel \vec{\omega}_\parallel + I_\perp [\vec{s}, \dot{\vec{s}}] = I_\parallel \omega_\parallel \vec{s} + I_\perp [\vec{s}, \dot{\vec{s}}]$$

Найдём производную $\dot{\vec{L}}$:

$$\dot{\vec{L}} = I_\parallel \dot{\omega}_\parallel \vec{s} + I_\parallel \omega_\parallel \dot{\vec{s}} + I_\perp ([\dot{\vec{s}}, \dot{\vec{s}}] + [\vec{s}, \ddot{\vec{s}}]) = I_\parallel \dot{\omega}_\parallel \vec{s} + I_\parallel \omega_\parallel \dot{\vec{s}} + I_\perp [\vec{s}, \ddot{\vec{s}}]$$

Из уравнения моментов: $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$. Таким образом имеем:

$$I_\parallel \dot{\omega}_\parallel \vec{s} + I_\parallel \omega_\parallel \dot{\vec{s}} + I_\perp [\vec{s}, \ddot{\vec{s}}] = \vec{M} \tag{2}$$

Полученное уравнение называется **основным уравнением точной теории симметричного гироскопа**.

6 Следствия из основного уравнения точной теории симметричного гироскопа

Получим из (2) два уравнения. Сначала скалярно умножим обе части (2) на $\vec{s}$.

$$I_\parallel \dot{\omega}_\parallel (\vec{s}, \vec{s}) + I_\parallel \omega_\parallel (\vec{s}, \dot{\vec{s}}) + I_\perp (\vec{s}, [\vec{s}, \ddot{\vec{s}}]) = (\vec{s}, \vec{M})$$

$$(\vec{s},\vec{s}) = s^2 = 1; \quad (\vec{s},\dot{\vec{s}}) = 0; \quad (\vec{s},[\vec{s},\ddot{\vec{s}}]) = 0 \;\Rightarrow\; I_\parallel\dot{\omega}_\parallel = (\vec{s},\vec{M})$$

Введём обозначение: $M_\parallel = (\vec{s},\vec{M})$ - проекция внешнего момента на ось фигуры гироскопа. С учётом обозначения последнее выражение принимает вид:

$$I_\parallel\dot{\omega}_\parallel = M_\parallel \tag{3}$$

Уравнение (3) определяет изменение во времени угловой скорости вращения гироскопа вокруг оси его фигуры. Оно совпадает с уравнением моментов для вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Теперь умножим векторно обе части (2) на $\vec{s}$.

$$I_\parallel\dot{\omega}_\parallel[\vec{s},\vec{s}] + I_\parallel\omega_\parallel[\vec{s},\dot{\vec{s}}] + I_\perp[\vec{s},[\vec{s},\ddot{\vec{s}}]] = [\vec{s},\vec{M}]$$

$$[\vec{s},\vec{s}] = \vec{0}; \quad [\vec{s},[\vec{s},\ddot{\vec{s}}]] = \vec{s}(\vec{s},\ddot{\vec{s}}) - \ddot{\vec{s}}(\vec{s},\vec{s}) = \vec{s}(\vec{s},\ddot{\vec{s}}) - \ddot{\vec{s}} \;\Rightarrow\; I_\parallel\omega_\parallel[\vec{s},\dot{\vec{s}}] + I_\perp\vec{s}(\vec{s},\ddot{\vec{s}}) - I_\perp\ddot{\vec{s}} = [\vec{s},\vec{M}] \tag{4}$$

Так как $(\vec{s},\dot{\vec{s}}) = 0$, то $(\dot{\vec{s}},\dot{\vec{s}}) + (\vec{s},\ddot{\vec{s}}) = 0 \;\Rightarrow\; (\vec{s},\ddot{\vec{s}}) = -\dot{\vec{s}}^2$. Подставим данное выражение в (4):

$$I_\parallel\omega_\parallel[\vec{s},\dot{\vec{s}}] - I_\perp\dot{\vec{s}}^2\vec{s} - I_\perp\ddot{\vec{s}} = [\vec{s},\vec{M}]$$

$$I_\perp\ddot{\vec{s}} = [\vec{M},\vec{s}] + I_\parallel\omega_\parallel[\vec{s},\dot{\vec{s}}] - I_\perp\dot{\vec{s}}^2\vec{s} \tag{5}$$

Положение вершины гироскопа задаётся вектором $\vec{s}$, модуль которого постоянен и равен 1 $\Rightarrow$ вершина гироскопа движется по поверхности неподвижной сферы единичного радиуса. Значит, ускорение $\ddot{\vec{s}}$ вершины раскладывается на две компоненты: $(\ddot{\vec{s}})_\tau$ - тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории, $(\ddot{\vec{s}})_n$ - нормальное ускорение, направленное к центру сферы. Найдём нормальное ускорение:

$$(\ddot{\vec{s}})_n = -\frac{\dot{\vec{s}}^2}{s}\vec{s} = -\dot{\vec{s}}^2\vec{s}$$

Таким образом полное ускорение вершины гироскопа:

$$\ddot{\vec{s}} = (\ddot{\vec{s}})_\tau - \dot{\vec{s}}^2\vec{s} \tag{6}$$

Подставим (6) в (5):

$$I_\perp(\ddot{\vec{s}})_\tau = [\vec{M},\vec{s}] + I_\parallel\omega_\parallel[\vec{s},\dot{\vec{s}}] \tag{7}$$

Таким образом, уравнение (5) определяет не полное ускорение вершины гироскопа, а только его тангенциальную составляющую.

Уравнение (7) формально эквивалентно второму закону Ньютона: роль массы играет величина $I_\perp$, роль силы - сумма $[\vec{M},\vec{s}] + I_\parallel\omega_\parallel[\vec{s},\dot{\vec{s}}]$. Причём величина $[\vec{M},\vec{s}]$ действительно обусловлена взаимодействием с другими телами, в то время как $I_\parallel\omega_\parallel[\vec{s},\dot{\vec{s}}]$ - величина, возникающая в результате движения гироскопа. Воображаемую материальную точку, помещённую в вершину гироскопа и имеющую "массу" $I_\perp$ назовём **изображающей точкой**. Поскольку уравнение движения изображающей точки формально совпадает со вторым законом Ньютона, то к движению изображающей точки можно применять все теоремы механики, например, закон сохранения энергии. Стоит уточнить, что работа "силы" $I_\parallel\omega_\parallel[\vec{s},\dot{\vec{s}}]$ равна нулю, так как эта "сила" в любой момент времени перпендикулярна скорости изображающей точки.

7 Точная теория симметричного гироскопа и принцип соответствия

В случае, если тангенциальным ускорением вершины гироскопа можно пренебречь, справедливо равенство:

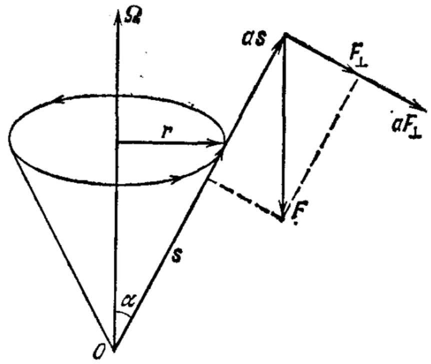
$$\vec{0} = [\vec{M},\vec{s}] + I_\parallel\omega_\parallel[\vec{s},\dot{\vec{s}}]$$

$$[\vec{s},\vec{M}] = [\vec{s},I_\parallel\omega_\parallel\dot{\vec{s}}] \;\Rightarrow\; \vec{M} = I_\parallel\omega_\parallel\dot{\vec{s}}$$

Данное уравнение является основным уравнением приближённой теории гироскопа. Таким образом, при некоторых пренебрежениях точная теория переходит в приближённую, как и ожидалось.

8 Вынужденная прецессия гироскопа

Считаем, что сила $\vec{F}$, действующая на гироскоп, постоянна и приложена в одной из точек оси фигуры гироскопа. Радиус-вектор этой точки, проведённый из точки опоры, назовём $\vec{a}$.



Момент силы $\vec{F}$ равен $\vec{M} = [\vec{a}, \vec{F}] = [\vec{a}, \vec{F}_\perp]$, где $\vec{F}_\perp$ - компонента вектора $\vec{F}$, перпендикулярная оси фигуры гироскопа. Отсюда получаем:

$$[\vec{M}, \vec{s}] = [[\vec{a}, \vec{F}_\perp], \vec{s}] = \vec{F}_\perp(\vec{a}, \vec{s}) - \vec{s}(\vec{a}, \vec{F}_\perp)$$

$$(\vec{a}, \vec{s}) = a; \quad (\vec{a}, \vec{F}_\perp) = 0 \;\Rightarrow\; [\vec{M}, \vec{s}] = a\vec{F}_\perp$$

Таким образом, уравнение (7) принимает вид:

$$I_\perp(\ddot{\vec{s}})_\tau = a\vec{F}_\perp + I_\parallel\omega_\parallel[\vec{s}, \dot{\vec{s}}] \tag{8}$$

Поставим задачу: определить, возможно ли сообщить вершине гироскопа такую начальную скорость, чтобы вершина вращалась вокруг оси, параллельной $\vec{F}$ и проходящей через точку опоры O. Угловую скорость такого вращения обозначим через $\vec{\Omega}$. Под силой $\vec{F}$ будем понимать силу тяжести, то есть $\vec{F} = m\vec{g}$.

При регулярной прецессии вершина движется со скоростью $\dot{\vec{s}} = [\vec{\Omega}, \vec{s}]$ и ускорением:

$$\ddot{\vec{s}} = [\vec{\Omega}, \dot{\vec{s}}] = [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{s}]] = \vec{\Omega}(\vec{\Omega}, \vec{s}) - \vec{s}(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = \vec{\Omega}(\vec{\Omega}, \vec{r}) + \vec{\Omega}(\vec{\Omega}, (\vec{s} - \vec{r})) - \Omega^2\vec{r} - \Omega^2(\vec{s} - \vec{r})$$

$$(\vec{\Omega}, \vec{r}) = 0; \quad (\vec{\Omega}, (\vec{s} - \vec{r})) = \Omega\cos\alpha; \quad \Omega^2(\vec{s} - \vec{r}) = \vec{\Omega}\Omega\cos\alpha \;\Rightarrow\; \ddot{\vec{s}} = -\Omega^2\vec{r} \tag{9}$$

Найдём величину $[\vec{s}, \dot{\vec{s}}]$ из (8):

$$[\vec{s}, \dot{\vec{s}}] = [\vec{s}, [\vec{\Omega}, \vec{s}]] = \vec{\Omega}(\vec{s}, \vec{s}) - \vec{s}(\vec{\Omega}, \vec{s}) = \vec{\Omega} - \Omega\cos\alpha\vec{s} = \vec{\Omega} - \Omega\cos\alpha(\vec{s} - \vec{r}) - \Omega\cos\alpha\vec{r} =$$

$$= \vec{\Omega} - \vec{\Omega}\cos^2\alpha - \Omega\cos\alpha\vec{r} = \vec{\Omega}\sin^2\alpha - \Omega\cos\alpha\vec{r} \tag{10}$$

Подставим (9) и (10) в (8):

$$-I_\perp\Omega^2(\vec{r})_\tau = a\vec{F}_\perp + I_\parallel\omega_\parallel(\vec{\Omega}\sin^2\alpha - \Omega\cos\alpha\vec{r}) \tag{11}$$

Спроектируем уравнение (11) на направление вектора $\vec{F}_\perp$:

$$-I_\perp\Omega^2 r\cos\alpha = aF_\perp - I_\parallel\omega_\parallel\Omega\sin^3\alpha - I_\parallel\omega_\parallel\Omega\cos^2\alpha r$$

С учётом того, что $r = \sin\alpha$ и $F_\perp = F\sin\alpha$, получаем:

$$-I_\perp\Omega^2\sin\alpha\cos\alpha = aF\sin\alpha - I_\parallel\omega_\parallel\Omega\sin^3\alpha - I_\parallel\omega_\parallel\Omega\cos^2\alpha\sin\alpha$$

$$-I_\perp\Omega^2\cos\alpha = aF - I_\parallel\omega_\parallel\Omega\sin^2\alpha - I_\parallel\omega_\parallel\Omega\cos^2\alpha$$

$$I_\perp\cos\alpha\Omega^2 - I_\parallel\omega_\parallel\Omega + aF = 0 \tag{12}$$

Откуда получаем:

$$\boxed{\Omega = \frac{1}{2I_\perp \cos\alpha}\left(I_\parallel \omega_\parallel \pm \sqrt{I_\parallel^2 \omega_\parallel^2 - 4aFI_\perp \cos\alpha}\right)}$$

Если центр масс гироскопа лежит ниже точки O, то $\cos\alpha < 0$, значит, подкоренное выражение автоматически больше нуля и прецессия устойчива. Если центр масс лежит выше гироскопа, то $\cos\alpha > 0$, значит, для существования прецессии необходимо выполнение условия:

$$I_\parallel^2 \omega_\parallel^2 - 4aFI_\perp \cos\alpha > 0$$

Пусть данное условие выполнено, тогда (12) имеет 2 действительных корня. Таким образом, возможны две регулярных прецессии. Та из них, которой соответствует меньшая угловая скорость Ω, называется **медленной**. Прецессия, соответствующая другому корню - **быстрой**.

Пусть выполнено условие:

$$I_\parallel^2 \omega_\parallel^2 >> |4aFI_\perp \cos\alpha|,$$

тогда:

$$\sqrt{I_\parallel^2 \omega_\parallel^2 - 4aFI_\perp \cos\alpha} = I_\parallel \omega_\parallel \left(1 - \frac{4aFI_\perp \cos\alpha}{I_\parallel^2 \omega_\parallel^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx I_\parallel \omega_\parallel \left(1 - \frac{2aFI_\perp \cos\alpha}{I_\parallel^2 \omega_\parallel^2}\right) = I_\parallel \omega_\parallel - \frac{2aFI_\perp \cos\alpha}{I_\parallel \omega_\parallel}$$

Откуда получаем:

$$\Omega_{slow} \approx \frac{aF}{I_\parallel \omega_\parallel} \tag{13}$$

$$\Omega_{fast} \approx \frac{I_\parallel}{I_\perp \cos\alpha}\omega_\parallel \tag{14}$$

Уравнение (13) совпадает с формулой, которая получается из приближённой теории гироскопа. Таким образом, приближённая теория описывает медленную прецессию. Угловая скорость быстрой прецессии, как видно из формулы (14), по порядку величины совпадает с $\omega_\parallel$, поэтому она на может быть получена из приближённой теории.

9 Нутации

Рассмотрим общий случай движения, описываемого уравнением (7). Для этого сделаем замену $\dot{\vec{s}} = \vec{v}_{pre} + \vec{v}_{nut}$. Вектор $\vec{v}_{pre}$ определим из условия:

$$[\vec{M}, \vec{s}] + I_\parallel \omega_\parallel [\vec{s}, \vec{v}_{pre}] = \vec{0} \iff [\vec{M}, \vec{s}] = -I_\parallel \omega_\parallel [\vec{s}, \vec{v}_{pre}]$$

Подставим это условие в (7):

$$I_\perp (\ddot{\vec{s}})_\tau = -I_\parallel \omega_\parallel [\vec{s}, \vec{v}_{pre}] + I_\parallel \omega_\parallel [\vec{s}, \vec{v}_{pre} + \vec{v}_{nut}]$$

$$I_\perp (\ddot{\vec{s}})_\tau = I_\parallel \omega_\parallel [\vec{s}, \vec{v}_{nut}]$$

Величина $\vec{v}_{pre}$ - скорость вершины гироскопа, с которой она двигалась бы, если бы совершала медленную регулярную прецессию. Если пренебречь ускорением такой прецессии, то $\ddot{\vec{s}} = \dot{\vec{v}}_{nut}$, и поэтому:

$$I_\perp (\dot{\vec{v}}_{nut})_\tau = I_\parallel \omega_\parallel [\vec{s}, \vec{v}_{nut}] \tag{15}$$

Производная $(\dot{\vec{v}}_{nut})_\tau$ в каждый момент времени перпендикулярна $\vec{v}_{nut}$, поэтому модуль скорости v_{nut} остаётся постоянным, и уравнение (15) описывает равномерное движение по окружности. Обозначим через r радиус этой окружности, а через Ω_{nut} угловую скорость вращения. Верны соотношения:

$$v_{nut} = \Omega_{nut} r; \quad |\dot{v}_{nut}| = \Omega_{nut}^2 r$$

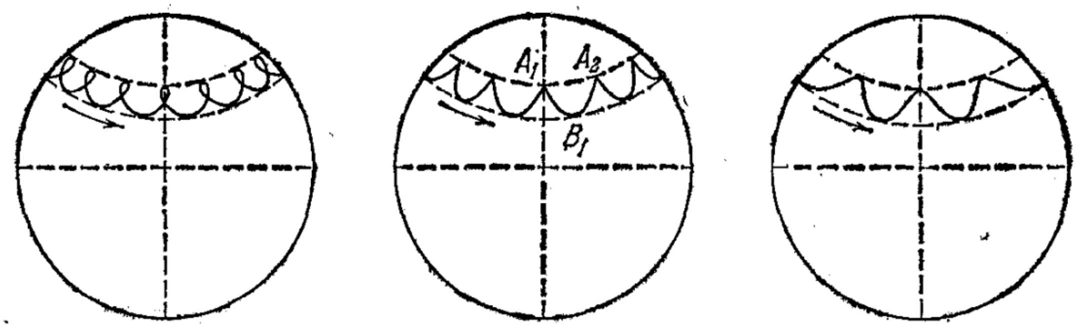
Так как $\vec{s} \perp \vec{v}_{nut}$, то из (15) получаем:

$$I_{\perp}\Omega_{nut}^2 r = I_{\parallel}\omega_{\parallel}\Omega_{nut} r$$

Откуда находим Ω_{nut}:

$$\Omega_{nut} = \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}}\omega_{\parallel}$$

Таким образом, при на медленное прецессионное движение вершины гироскопа накладывается равномерное движение по окружности с угловой скоростью Ω_{nut}. В результате этого траектория вершины гироскопа может представлять собой петлеобразную кривую (а), кривую, напоминающую циклоиду (б), или кривую, напоминающую синусоиду (в). Конкретный тип кривой зависит от начальных условий.



а) б) в)

Наложением кругового движения на медленную прецессию объясняются нутации. Радиус кругового движения - амплитуда нутаций. При нулевом радиусе нутации отсутствуют и прецессия переходит в регулярную.

Существование нутаций позволяет объяснить, что закон сохранения энергии не нарушается в ходе прецессии. Когда груз вешается на гироском, то под действием силы тяжести он начинает опускаться. В ходе этого работа силы тяжести идёт на приращение кинетической энергии прецессионно-нутационного движения. Далее груз поднимается, и кинетическая энергия снова переходит в потенциальную. При этом полная энергия системы неизменна.

Точная теория объясняет также безинерционность гироскопа, возникающая в приближённой теории: как только внешний момент становится равен нулю, вектор $\vec{L}$ перестаёт изменяться, а так как в приближённой теории он жёстко связан с осью фигуры гироскопа, то мгновенно останавливается и она. Рассуждение для вектора $\vec{L}$ остаётся верным, но он больше не связан с осью фигуры гироскопа, поэтому противоречия нет.

10 Вывод

Исследование точной теории симметричного гироскопа позволило расширить представление о характере движения гироскопа под действием внешних сил. Было выяснено, что в случае регулярной прецессии возможны две её угловые скорости (вместо одной из них, предсказываемой приближённой теорией). А также удалось устранить противоречия, возникающие в приближённой теории такие, как безинерционность гироскопа и несогласованность с законом сохранения энергии, благодаря обнаружению явления возникновения нутаций.

11 Список использованной литературы

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. В 5 т. Том I. Механика. 5-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2006. — 560 с.