Disciplina: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Professor: Me. CARLOS CASTRO

Centro Universitário UniAteneu

Aula 04

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL – BACHARELADO EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

Funções injetoras, Sobrejetora e Bijetoras. Função Inversa. Função Exponencial. Função Logarítmica.

Prof. :Me. Carlos Castro

2025

UniATENEU NOTA MÁXIMA NO 5 MEC EAD

As funções **injetora, sobrejetora e bijetora** têm aplicações fundamentais na computação, especialmente em áreas como **estrutura de dados, algoritmos, criptografia e bancos de dados**.

1. Função Injetora (Injetividade)

- Uma função $f : A \to B$ é injetora se elementos distintos em A possuem imagens distintas em B.
- Ou seja, se $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

Aplicações na Computação:

- **Endereçamento em Memória**: Garantir que diferentes variáveis ou registros tenham endereços distintos.
- **Compressão de Dados sem Perda**: Algoritmos de compressão injetores garantem que os dados podem ser descomprimidos sem ambiguidades.
- **Criptografia**: Em cifragem, funções injetoras ajudam a garantir que mensagens distintas tenham diferentes criptogramas.

2. Função Sobrejetora (Sobrejetividade)

- Uma função $f : A \to B$ é sobrejetora se para todo y em B existe pelo menos um x em A tal que $f(x) = y$.
- Ou seja, todo elemento do conjunto de chegada B tem uma pré-imagem em A.

Aplicações na Computação:

- **Distribuição de Carga (Load Balancing)**: Assegura que todas as máquinas ou processadores recebam tarefas, evitando que fiquem ociosos.
- **Geração de Endereços IP**: Mapear corretamente identificadores únicos para dispositivos.
- **Bancos de Dados**: Em consultas SQL, funções sobrejetoras garantem que todos os registros possíveis sejam acessíveis.

3. Função Bijetora (Bijetividade)

- Uma função é bijetora se é **simultaneamente injetora e sobrejetora**, ou seja, há uma correspondência um para um entre os elementos dos conjuntos A e B.
- Isso significa que cada elemento de B tem exatamente um correspondente único em A.

Aplicações na Computação:

- **Criptografia Reversível**: Funções bijetoras são essenciais para cifragem e decifragem seguras.
- **Indexação de Dados**: Mapear chaves primárias para registros de forma única.
- **Estruturas de Dados Eficientes**: Em tabelas hash perfeitas, onde não há colisões de chaves.
- **Codificação e Decodificação**: Como em transformações bijetoras usadas em compressão de dados (exemplo: algoritmo de Huffman).

Essas funções são fundamentais para garantir eficiência, segurança e correção em diversos sistemas computacionais.

Funções injetoras

Definição: Uma função $f: A \to B$ é chamada de função injetora se não existem dois elementos do domínio com uma mesma imagem.

Isto quer dizer que , para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, é válido que, sempre que:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Elementos diferentes do domínio possuem imagens diferentes.

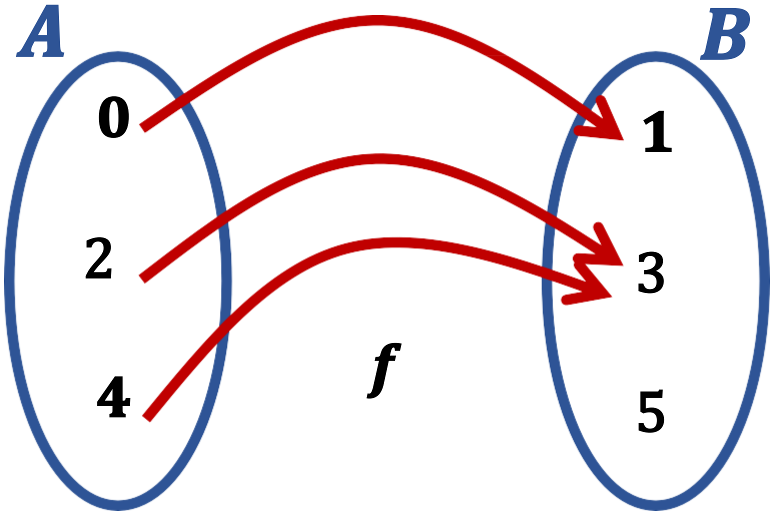
Ou, de forma equivalente,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Se dois elementos do domínio possuem a mesma imagem, então eles são iguais.

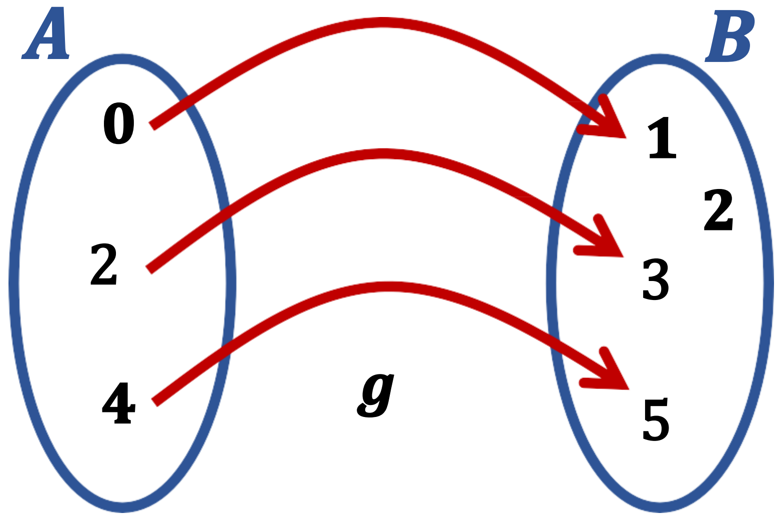
Exemplos

1)



Não é injetora, pois $f(2) = f(4)$.

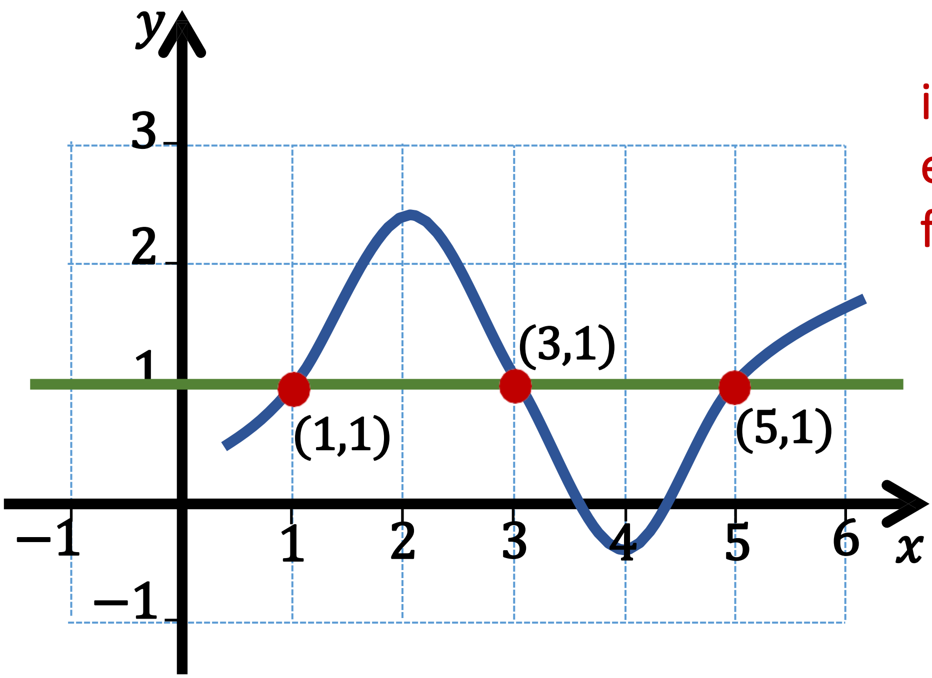
2)



É injetora

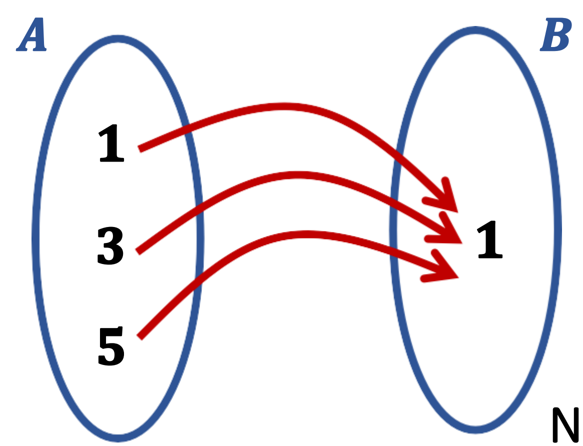
Teste da reta horizontal

Teste: Se alguma reta horizontal intercepta o gráfico da função em mais de um ponto, então esta função não é injetora.



Existe um mesmo elemento da imagem relacionado a mais de um elemento do domínio e, portanto, a função não é injetora!

Três elementos diferentes do domínio com a mesma imagem!



Não é injetora!

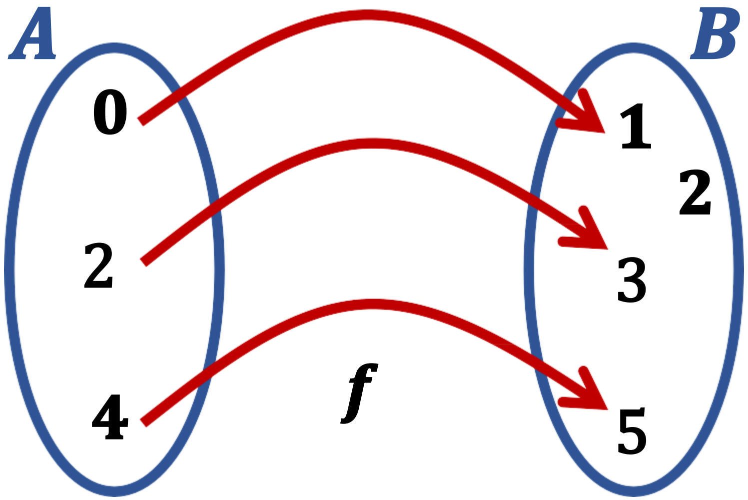
Funções sobrejetoras

Definição: Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de função sobrejetora se o contradomínio é igual a imagem, isto é, se $Im\ (f) = B$.

Isto quer dizer que , para cada $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

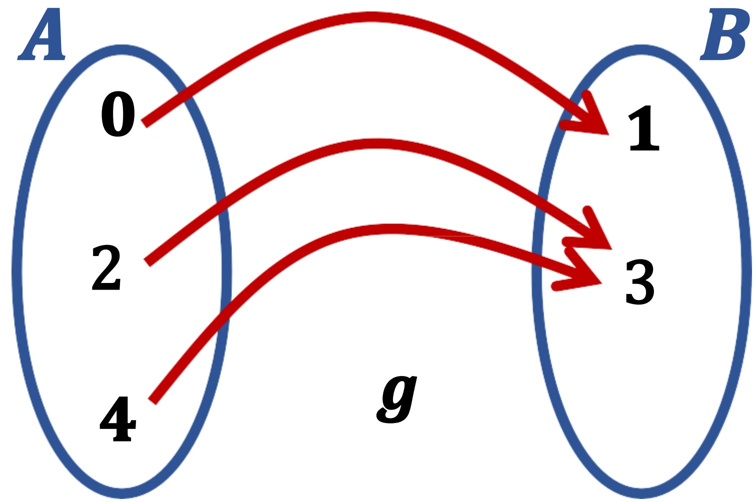
Exemplos

3)



Não é sobrejetora

4)



É sobrejetora

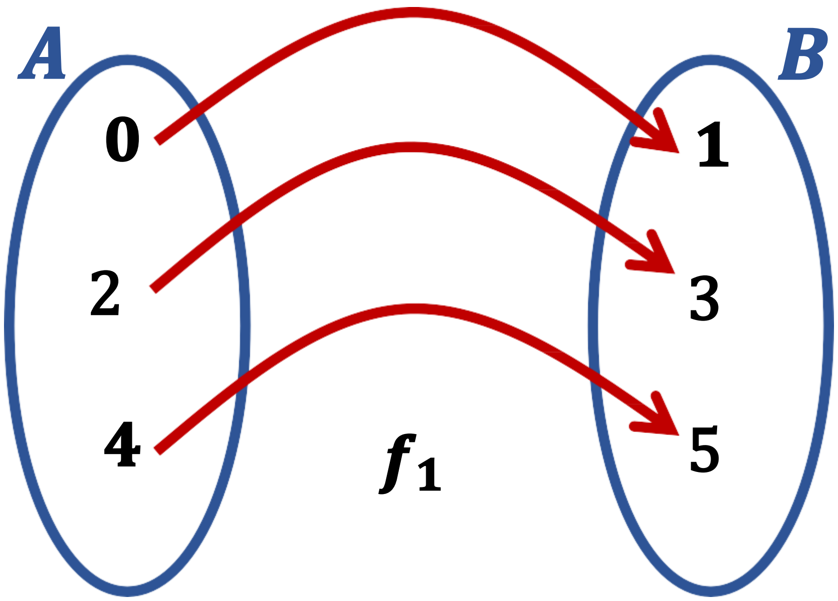
Funções bijetoras

Definição: Uma função $f\colon A \to B$ é chamada de função bijetora se ela é injetora e sobrejetora.

Isto quer dizer que , para cada $y \in B$, existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Exemplos

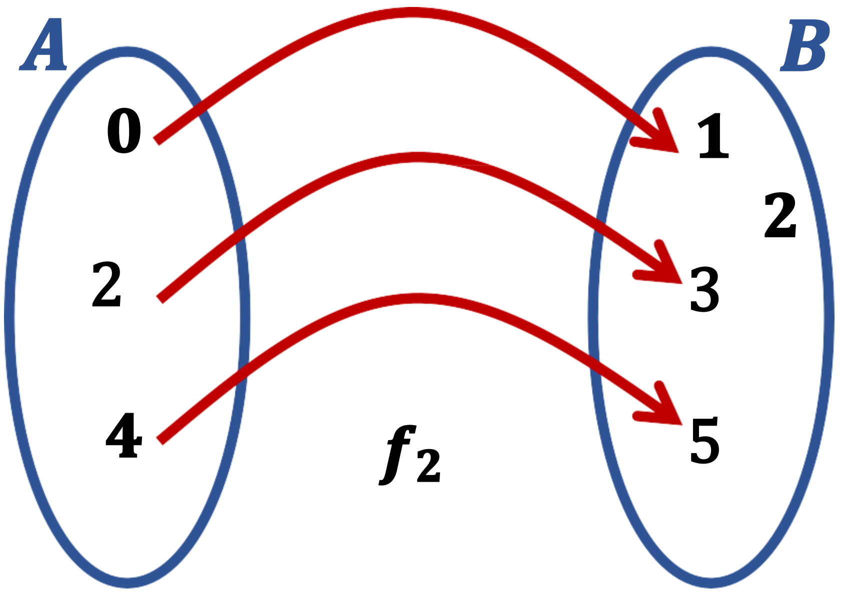
5) Determine se a função a seguir é bijetora.



É bijetora, pois é injetora e sobrejetora.

Exemplos

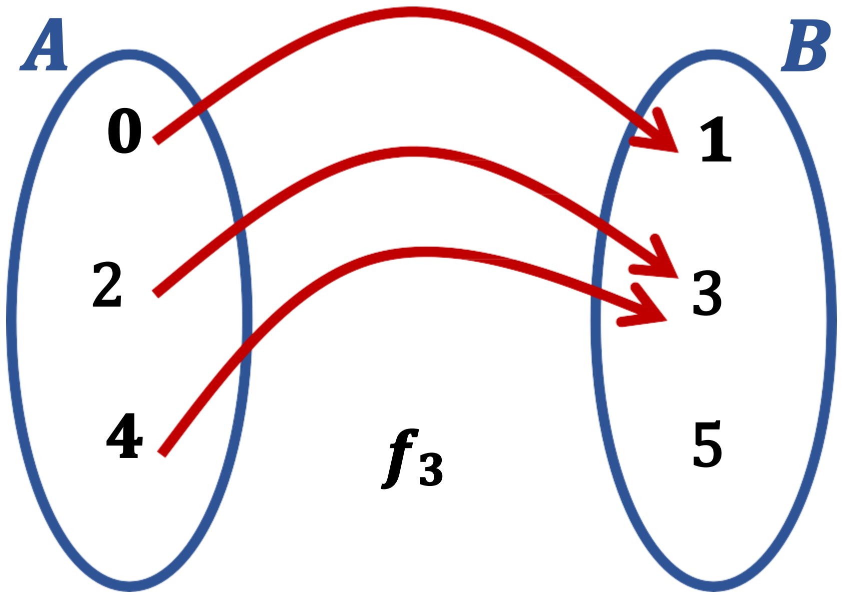
6) Determine se a função a seguir é bijetora.



Não é bijetora, pois não é sobrejetora.

Exemplos

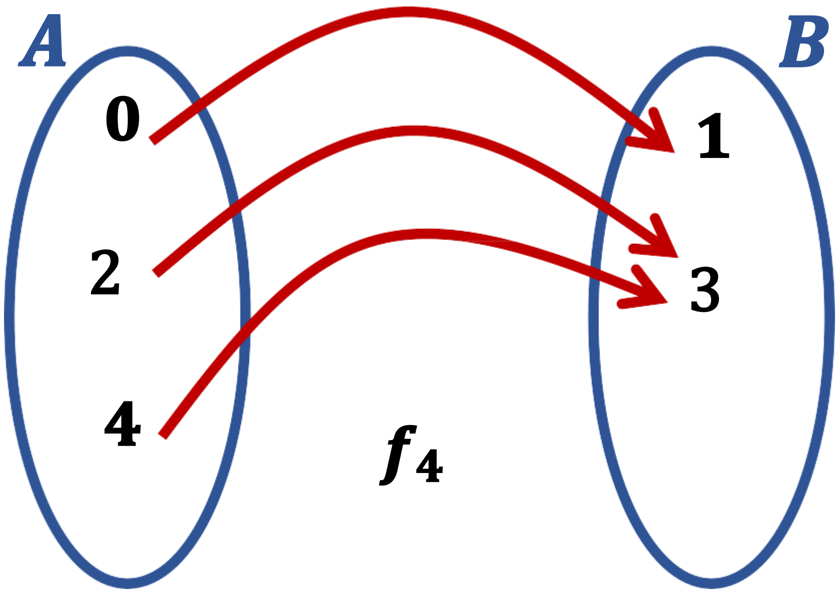
7) Determine se a função a seguir é bijetora.



Não é bijetora, pois não é injetora nem sobrejetora.

Exemplos

8) Determine se a função a seguir é bijetora.

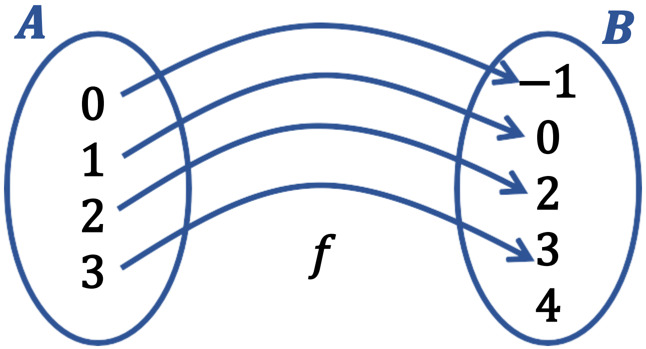


Não é bijetora, pois não é injetora.

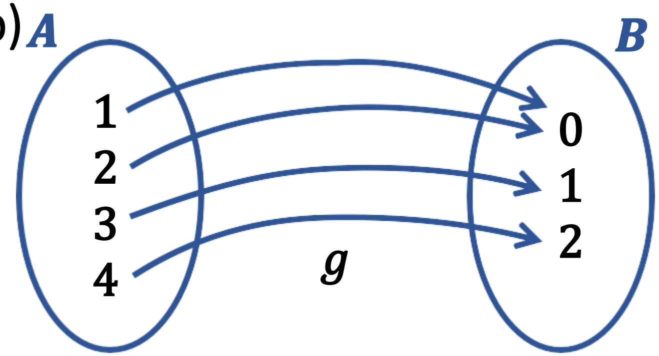
EXERCITANDO 01

Indique quais das funções abaixo é injetora, sobrejetora ou bijetora:

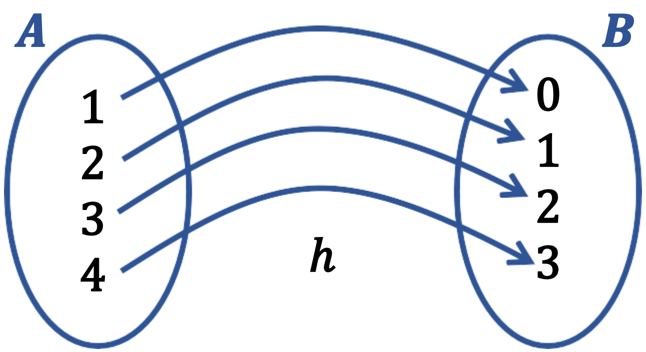
(a)



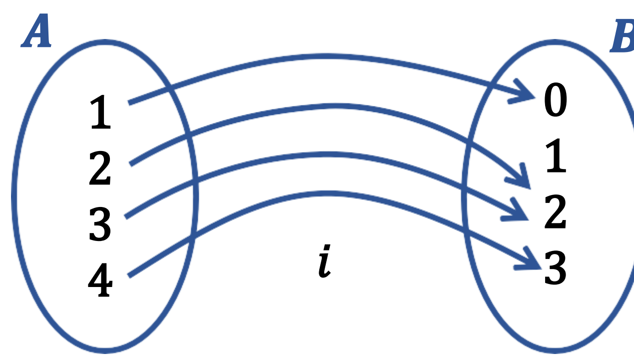
(b)



(c)



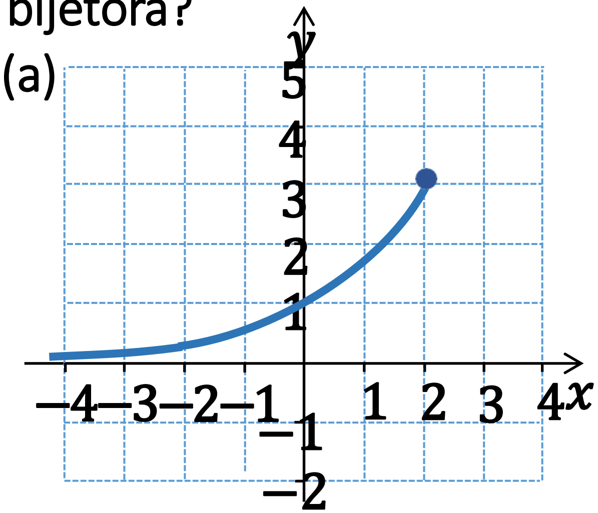
(d)



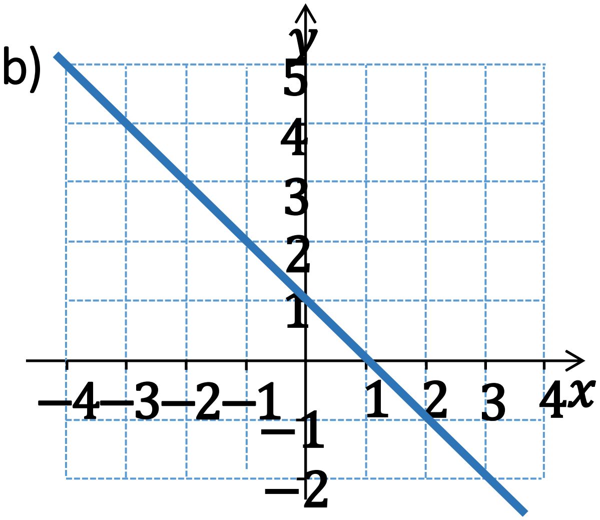
Exercitando 02

Para as funções em reais abaixo representadas, qual é injetora, sobrejetora e bijetora?

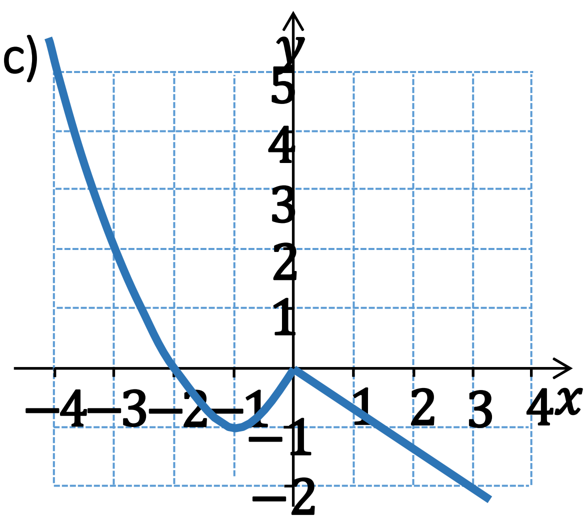
(a)



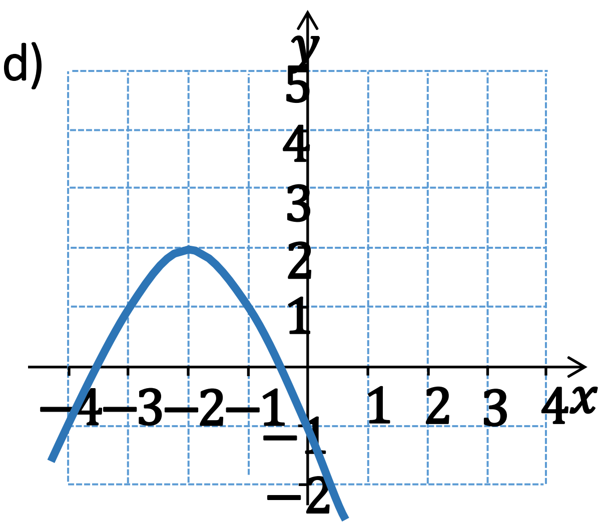
(b)



(c)



(d)



Respostas

Exercitando 01 :

a) Injetora

b) Sobrejetora

c) Bijetora

d) Não é injetora nem sobrejetora.

Exercitando 02:

a) Injetora

b) Bijetora

c) Sobrejetora

d) Não é injetora
nem sobrejetora.

Função Inversa

As funções inversas têm diversas aplicações na computação, especialmente em algoritmos, criptografia, aprendizado de máquina e análise de dados. Aqui estão algumas das principais aplicações:

1. Função Inversa na Computação

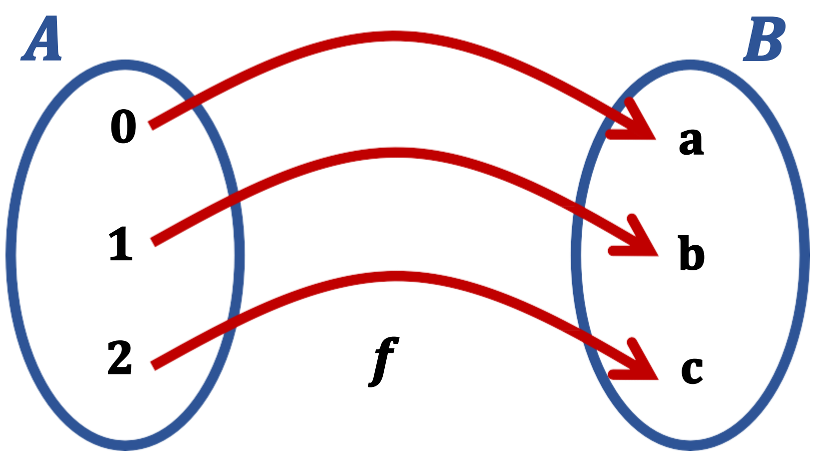
A função inversa $f^{-1}(x)$ reverte os efeitos de uma função original $f(x)$. Algumas aplicações incluem:

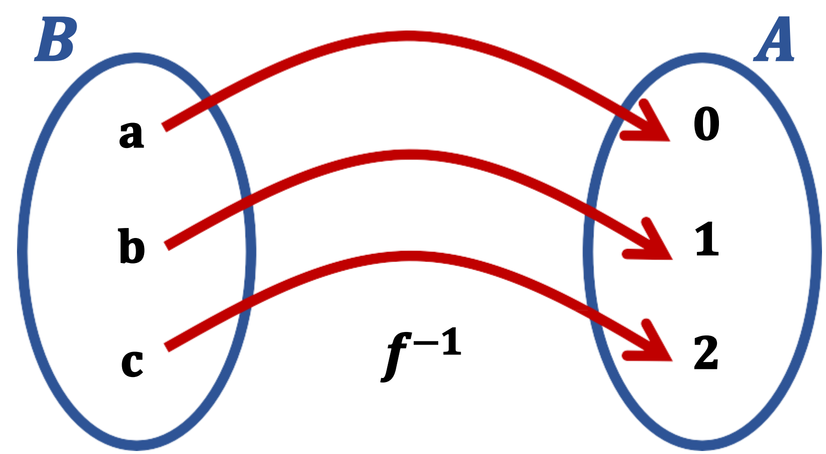
- **Desfazer transformações**: Em compressão de dados e criptografia, muitas operações precisam ser revertidas para recuperar informações originais. Por exemplo, em criptografia assimétrica, as chaves pública e privada se baseiam em funções inversas.
- **Cálculo de coordenadas e ajustes em gráficos computacionais**: Transformações geométricas, como escalonamento e rotação em gráficos 3D, podem exigir funções inversas para determinar coordenadas originais.
- **Processamento de imagens**: Operações como ajuste de brilho e contraste podem ser revertidas usando funções inversas.

Função inversa

Em uma função bijetora se pode definir uma função g com domínio igual a B e contra domínio igual a A que faz as relações inversas das relações determinadas pela função f.

A função g acima é chamada de função inversa da função f, e é denotada por f^{-1}.





$f(0) = 1$ $\quad f(1) = b$ $\quad f(2) = c$ $\quad f^{-1}(a) = 0$ $\quad f^{-1}(b) = 1$ $\quad f^{-1}(c) = 2$

$f: A \rightarrow B$ $\qquad f^{-1}: B \rightarrow A$

Domínio: A Imagem: B Domínio: B Imagem: A

Função inversa

Observação: Note que f^{-1} possui domínio igual a B e contradomínio igual a A.

“o que era domínio vira imagem e o que era imagem vira domínio” .

$$f^{-1}: B \to A$$

Observação: Somente funções bijetoras possuem inversa.
Por este motivo, as funções bijetoras são ditas funções inversíveis.

Para determinar a lei de formação da função inversa de uma função bijetora, basta seguir os passos:

1) Substitua x por y e y por x na lei de formação da função $y = f\ (x)$.

2) Isole a variável y na equação obtida no passo anterior.

3) O resultado obtido será a função inversa $y = f^{-1}(x)$.

Exemplos

9) Determine a função inversa de $f(x) = 2x + 4$.

Solução:

Seguindo os passos para encontrar a função inversa, tem-se:

1) Substitua x por y e y por x na lei de formação da função $y = f(x)$.

$$x = 2y + 4$$

2) Isole a variável y na equação obtida no passo anterior.

$$x = 2y + 4 \qquad 2y = x - 4 \qquad y = \frac{x-4}{2}$$

Portanto, a função inversa é dada por:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}.$$

Exemplos

10) Determine a função inversa de $f(x) = x^3 - 5$.

Solução:

Seguindo os passos para encontrar a função inversa, tem-se:

1) Substitua x por y e y por x na lei de formação da função $y = f(x)$.

$$x = y^3 - 5$$

2) Isole a variável y na equação obtida no passo anterior.

$$x = y^3 - 5 \qquad y^3 = x + 5 \qquad y = \sqrt[3]{x+5}$$

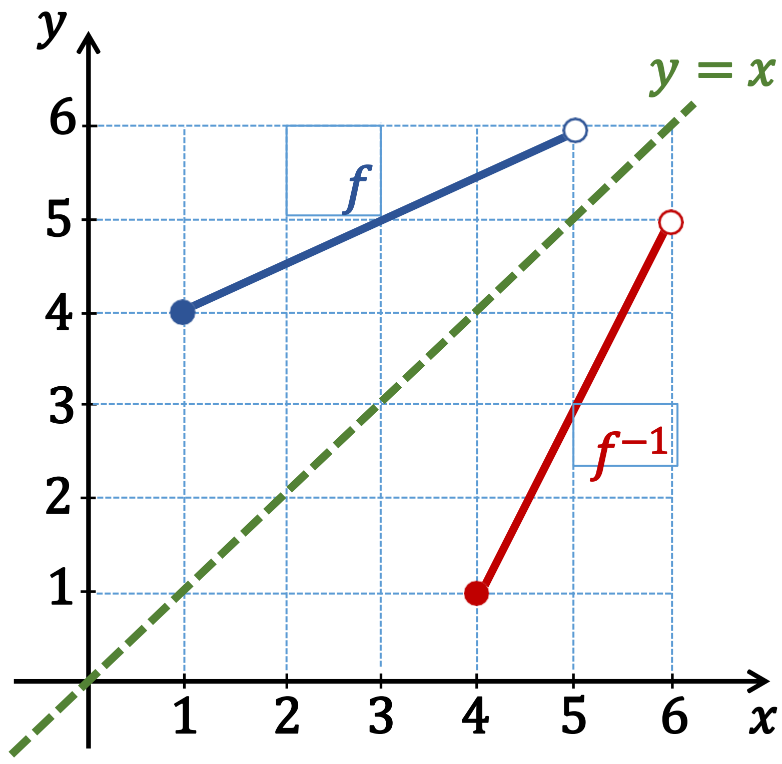
Portanto, a função inversa é dada por: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}$.

Gráfico da função inversa

Para obter a função inversa de uma função bijetora, o processo consiste em "inverter os papéis de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$" na lei de formação da função.

Desta inversão, resulta que os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $\boldsymbol{y = x}$.

($y = x$, bissetriz dos quadrantes ímpares).



Exemplos

11) Determine a função inversa de $f(x) = x^3$.

(a) Determine a lei de formação de f^{-1};

(b) Esboce os gráficos de f e f^{-1};

Solução:

(a) Determinando a função f^{-1}:

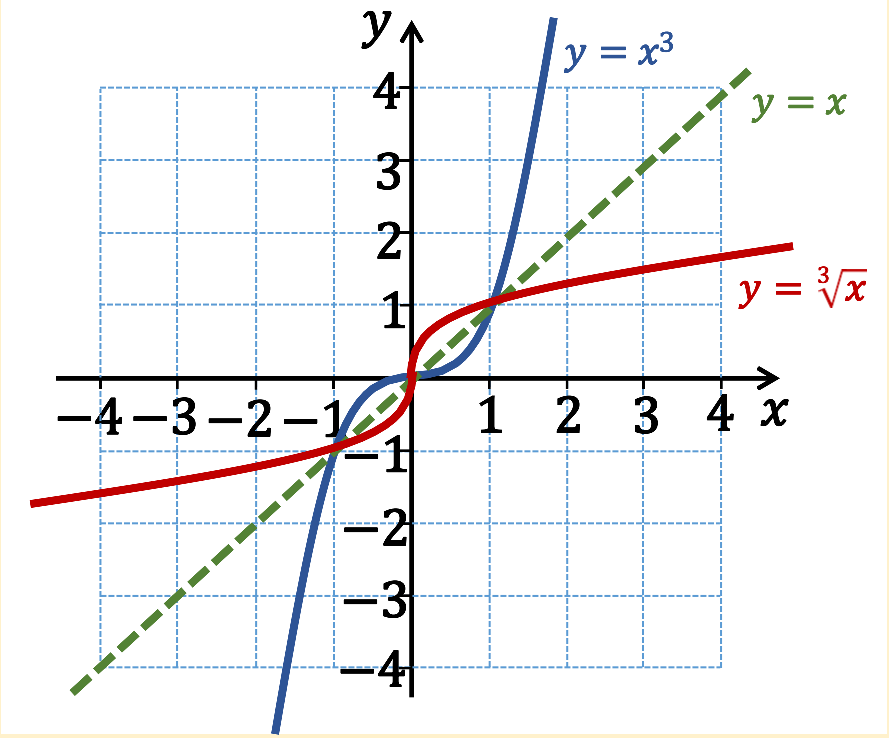
$$y = x^3$$

$$x = y^3$$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

(b) Esboçando os gráficos:



EXERCITANDO 02

1) Determine a lei da função inversa às seguintes funções:

(a)$y = x + 3$

(b)$y = 6x$

(c)$y = 2x - 1$

(d) $y = \frac{x+2}{x-2}, para\ x \neq 2$

2) Dada a função $f(x) = 5x + 11$, calcule $f^{-1}(6)$.

3) Calcule $f^{-1}(2) + f^{-1}(3)$, sabendo que $f(x) = 2x - 2$.

Respostas

Exercício 1:

a) $y^{-1} = x - 3$

b) $y^{-1} = \frac{x}{6}$

c) $y^{-1} = \frac{x+1}{2}$

d) $y^{-1} = \frac{2x+2}{x-1}$

Exercício 2:

$$f^{-1}(6) = -1$$

Exercício 3:

$$f^{-1}(2) + f^{-1}(3) = \frac{9}{2}$$

Função logarítmica e função exponencial

As funções exponenciais e logarítmicas têm diversas aplicações na computação, sendo fundamentais para algoritmos, criptografia, aprendizado de máquina, modelagem de dados e muito mais.

1. Função Exponencial na Computação

A função exponencial tem a forma geral $f(x) = a^x$, onde a é uma constante positiva. Ela é usada em diversas áreas da computação, incluindo:

- **Criptografia**: Algoritmos como RSA e Diffie-Hellman utilizam exponenciação modular para gerar chaves seguras.
- **Análise de Algoritmos**: Alguns algoritmos têm complexidade exponencial, como a força bruta para resolver o problema do caixeiro-viajante.
- **Redes Neurais e Aprendizado de Máquina**: A função de ativação *Softmax* (usada em redes neurais para classificação) e a função *Exponential Linear Unit (ELU)* utilizam funções exponenciais.
- **Crescimento Exponencial de Dados**: O armazenamento de dados e a capacidade computacional muitas vezes seguem um crescimento exponencial (Lei de Moore).
- **Processamento de Imagens e Gráficos Computacionais**: O modelo de iluminação de Phong usa funções exponenciais para simular efeitos de brilho realistas.

2. Função Logarítmica na Computação

A função logarítmica é a inversa da função exponencial e tem a forma $f(x) = \log_a(x)$. Suas aplicações incluem:

- **Complexidade Computacional**: Muitos algoritmos eficientes possuem complexidade $O(\log n)$, como a busca binária e algumas estruturas de dados (árvores balanceadas, tabelas hash).
- **Criptografia**: O problema do logaritmo discreto é a base da segurança de algoritmos como o protocolo Diffie-Hellman e o ECC (Elliptic Curve Cryptography).
- **Compressão de Dados**: Algoritmos como o *JPEG* usam transformadas logarítmicas para reduzir a quantidade de dados necessários para representar imagens.
- **Aprendizado de Máquina**: A função de custo da regressão logística usa logaritmos para modelar probabilidades.
- **Computação Científica e Análise de Dados**: O logaritmo é útil para normalizar dados que variam em escalas muito amplas (exemplo: dados financeiros e bioinformáticos).

Em resumo, funções exponenciais e logarítmicas são essenciais para tornar os sistemas computacionais mais eficientes e seguros.

Função logarítmica e função exponencial

Observação: A inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica de mesma base.

Em outras palavras, função exponencial de base a

é bijetora, e sua função inversa é a função logarítmica de base a.

$$f(x) = a^x \qquad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x \qquad f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemplos

12) Em cada caso, determine a função inversa da função dada.

(a) $f(x) = \log_5 x$

(b) $f(x) = 4^x$

Solução:

(a) $f^{-1}(x) = 5^x$

A inversa da função logarítmica de base 5 é a função exponencial de base 5.

(b) $f^{-1}(x) = \log_4 x$

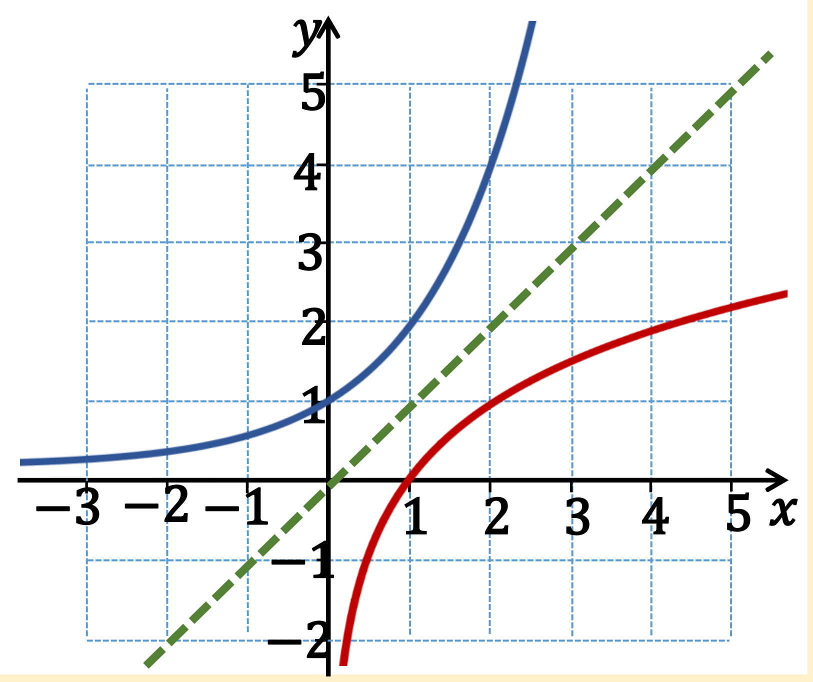
A inversa da função exponencial de base 4 é a função logarítmica de base 4.

Exemplos

13) Determine a função inversa da função exponencial $f(x) = 2^x$ e esboce os gráficos de f e f^{-1}

Solução:

A função inversa da função exponencial $f(x) = 2^x$ é a função $f^{-1}(x) = \log_2 x$.



Funções trigonométricas inversas

Observação: As funções trigonométricas não são bijetoras em todo os seus domínios.

O teste da reta horizontal comprova, por exemplo, que a função seno não é bijetora em todo o seu domínio, pois a reta intercepta o gráfico da função mais de uma vez.

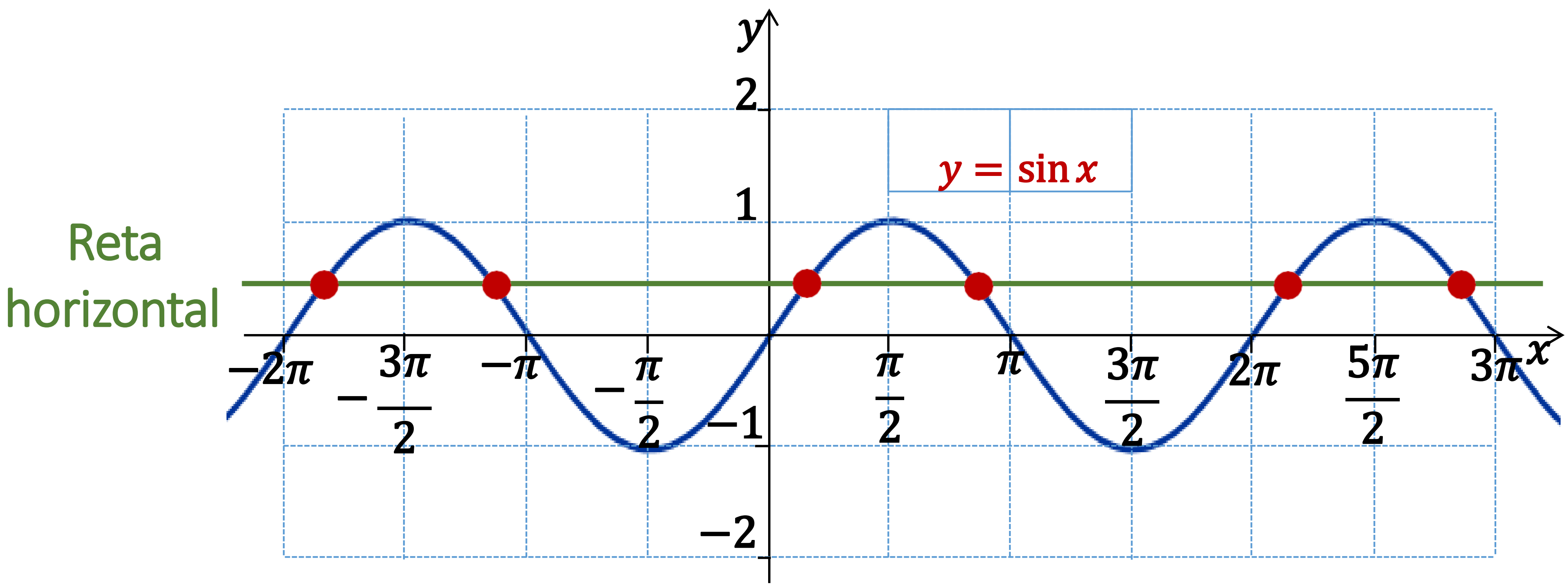


Gráfico da função seno

Funções trigonométricas inversas

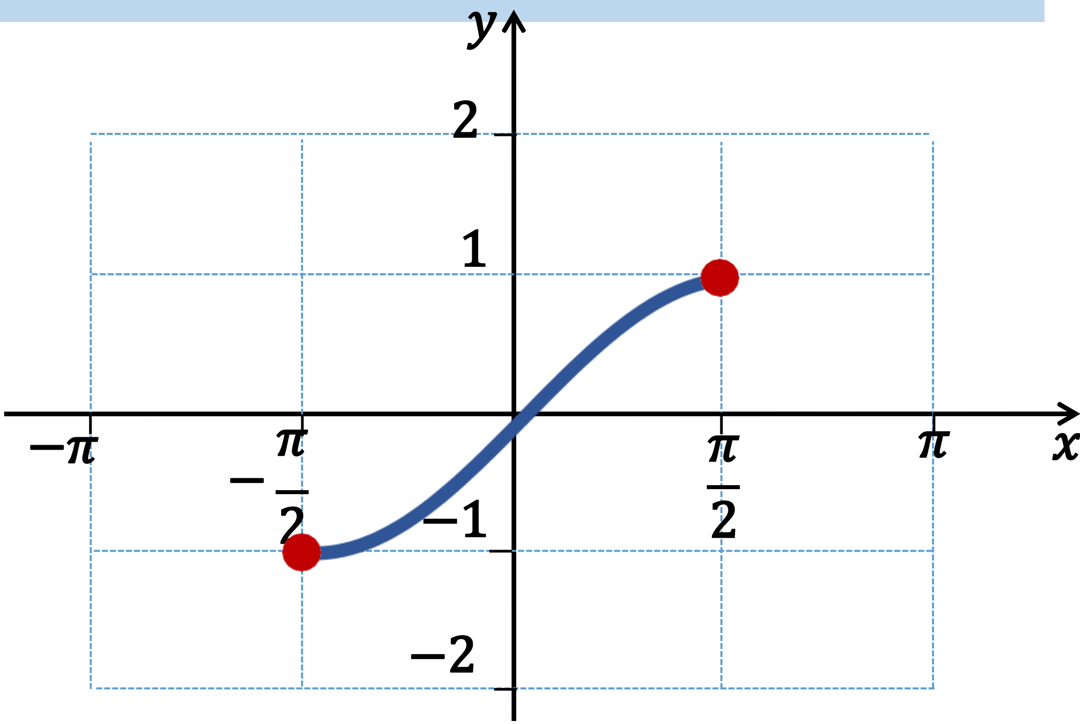
As funções trigonométricas inversas *(arco seno, arco cosseno, arco tangente, arco cotangente, arco secante e arco cossecante)* são as funções inversas de restrições convenientes das funções trigonométricas.

Definição: A função arco seno é a função inversa da restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Restrição da função seno:

$$f(x) = \sin x \,, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

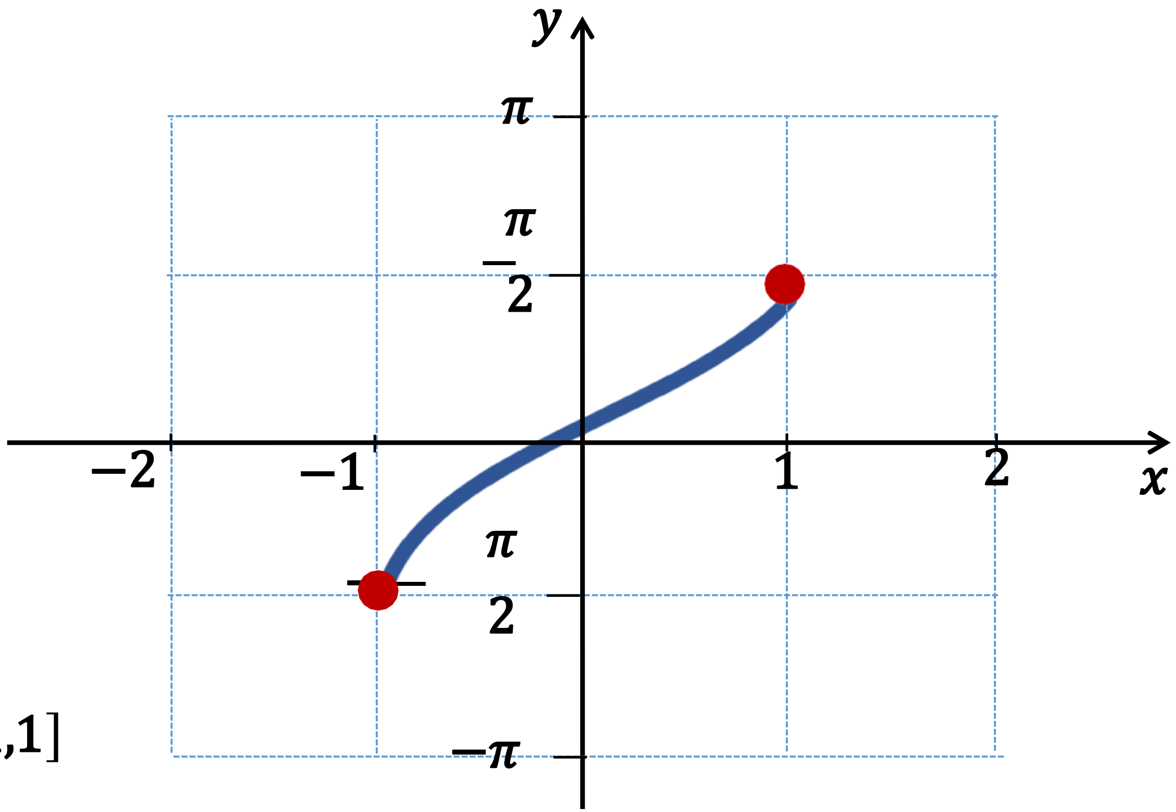
$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$$



Funções trigonométricas inversas

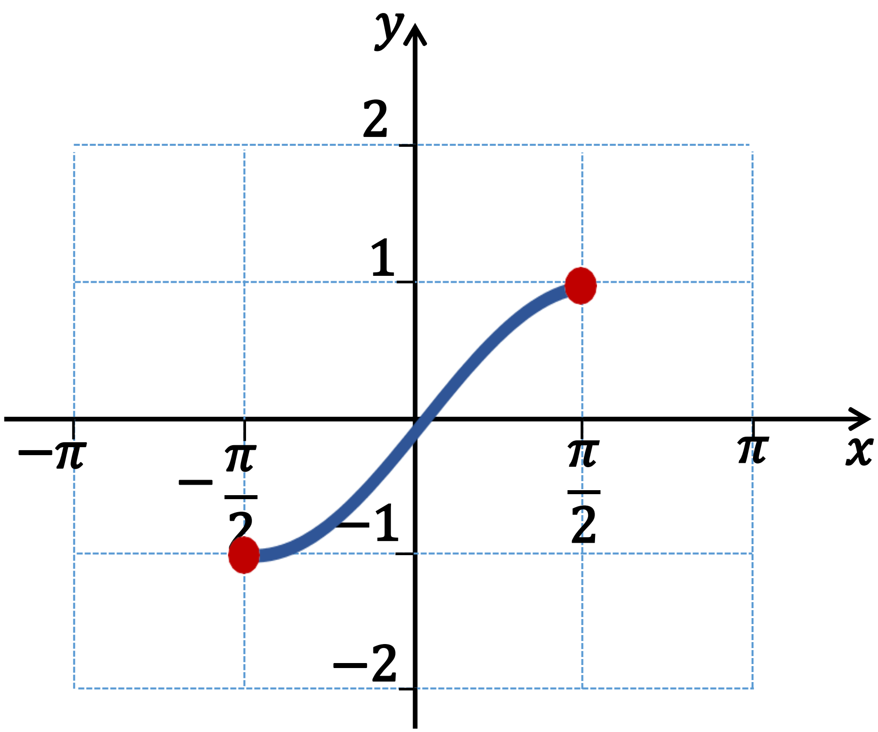
Função arco seno

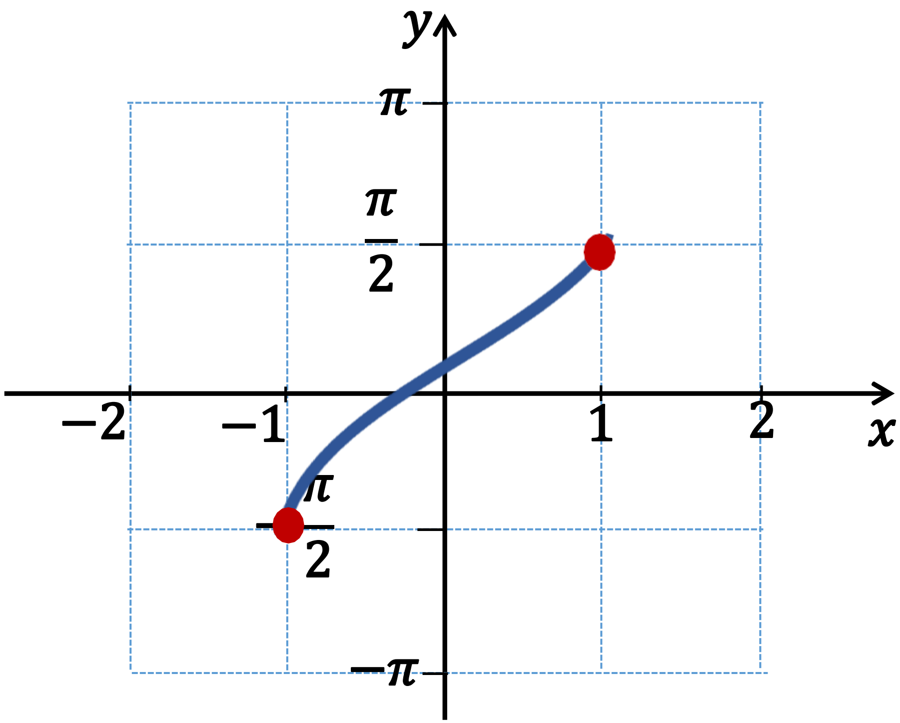
$$f^{-1}: [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$f^{-1}(x) = \arcsin x \,, \forall x \in [-1,1]$$

Funções trigonométricas inversas





$\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1,1]$

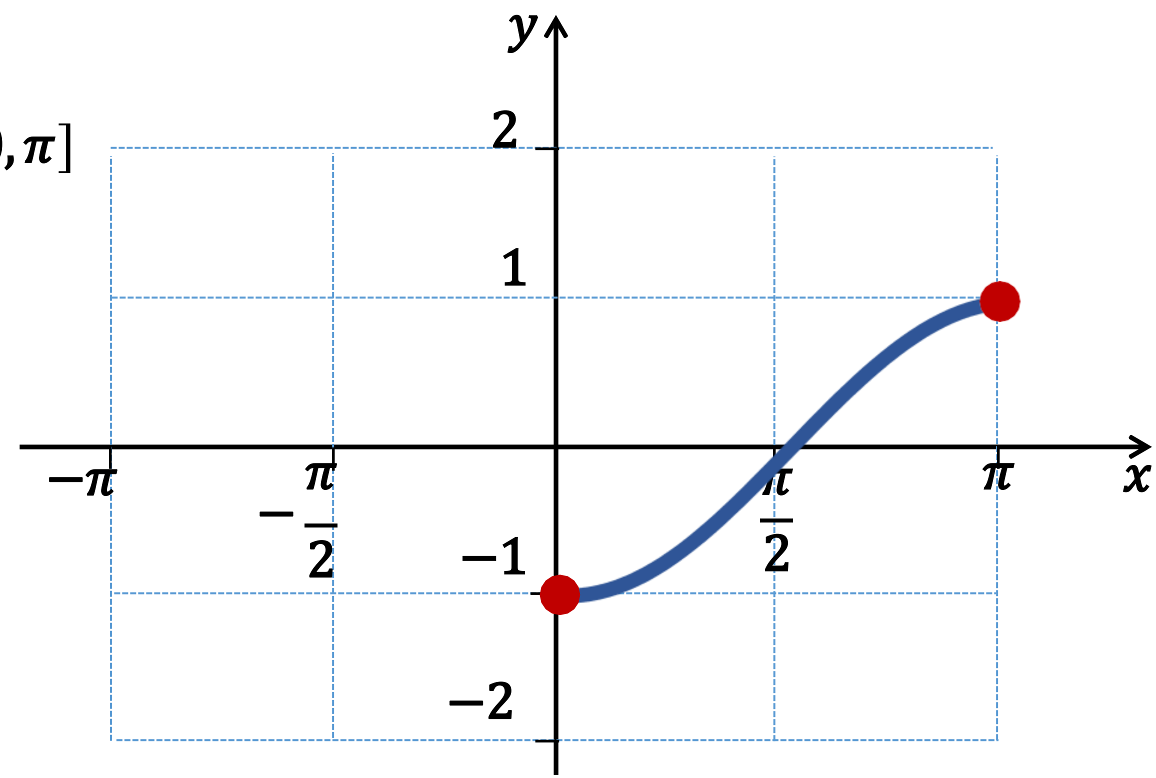
$\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Funções trigonométricas inversas

Definição: A função **arco cosseno** é a função inversa da restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$.

Restrição da função cosseno:

$$f(x) = \cos x, \forall x \in [0, \pi]$$

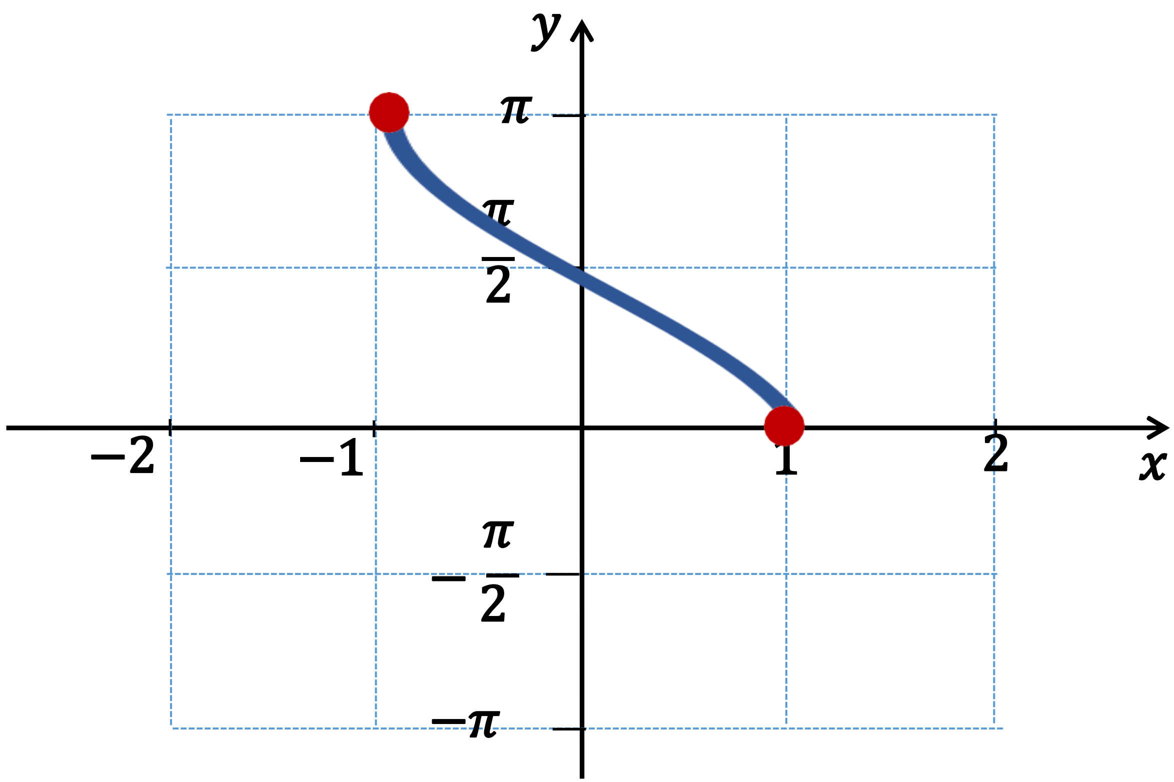


$$f: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

Funções trigonométricas inversas

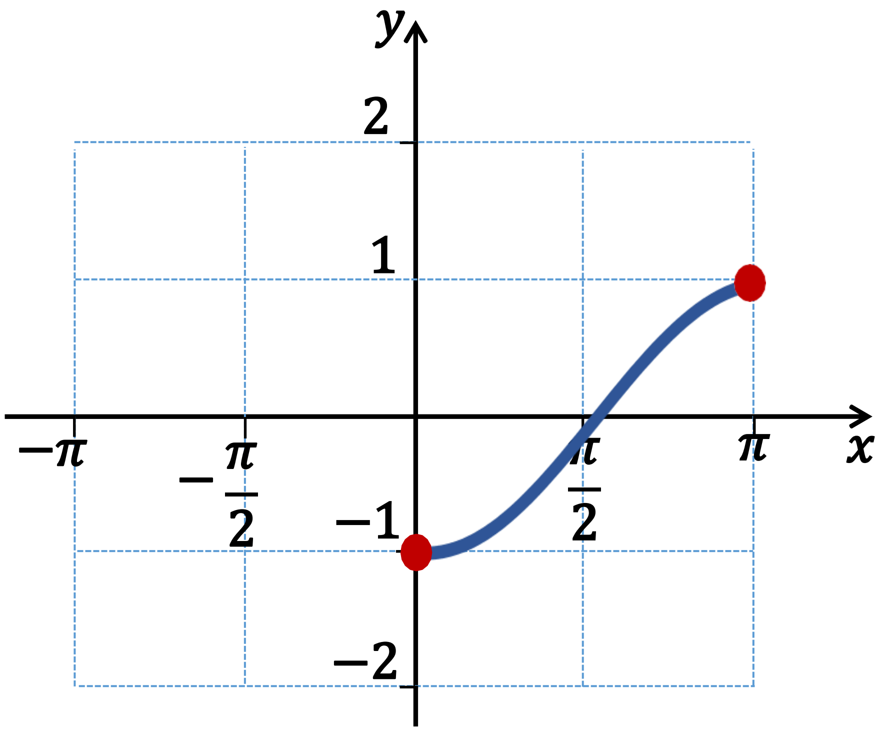
Função arco cosseno

$$f^{-1}: [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

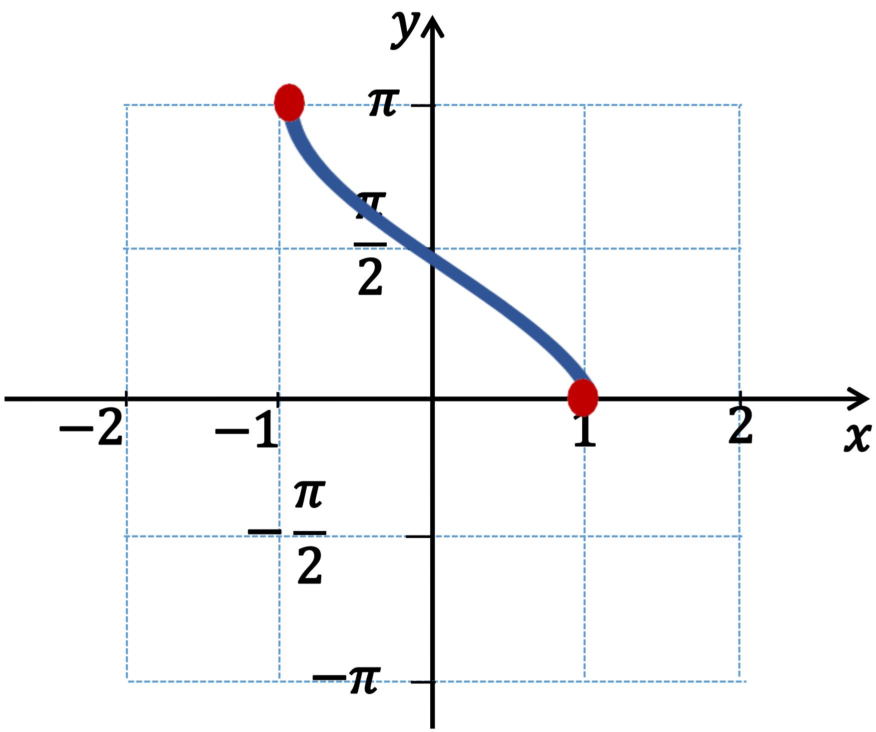


$$f^{-1}(x) = \arccos x, \forall x \in [-1,1]$$

Funções trigonométricas inversas



$\cos(\arccos x) = x, \forall x \in [-1,1]$



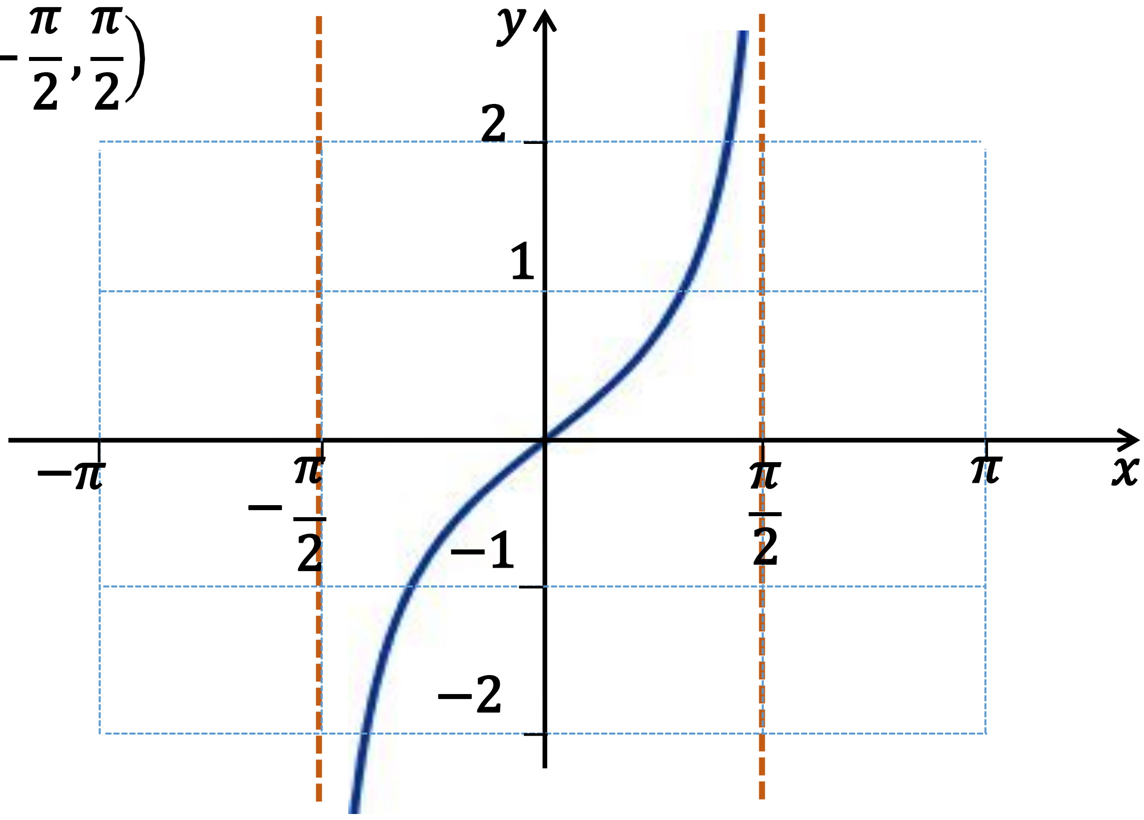
$\arccos(\cos x) = x, \forall x \in [0,\pi]$

Funções trigonométricas inversas

Definição: A função arco tangente é a função inversa da restrição da função tangente ao intervalo, $(-\pi/2, \pi/2)$

Restrição da função tangente:

$$f(x) = \tan x \,, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

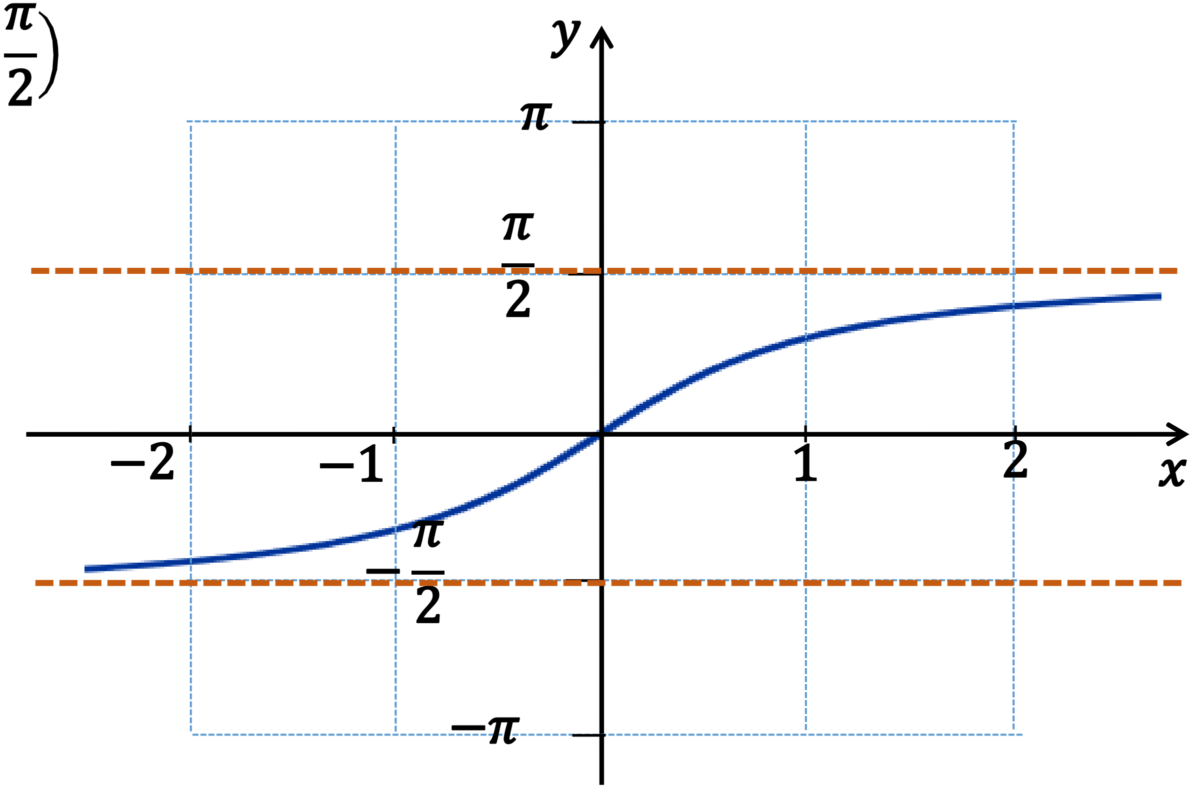


$$f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-\infty, +\infty)$$

Funções trigonométricas inversas

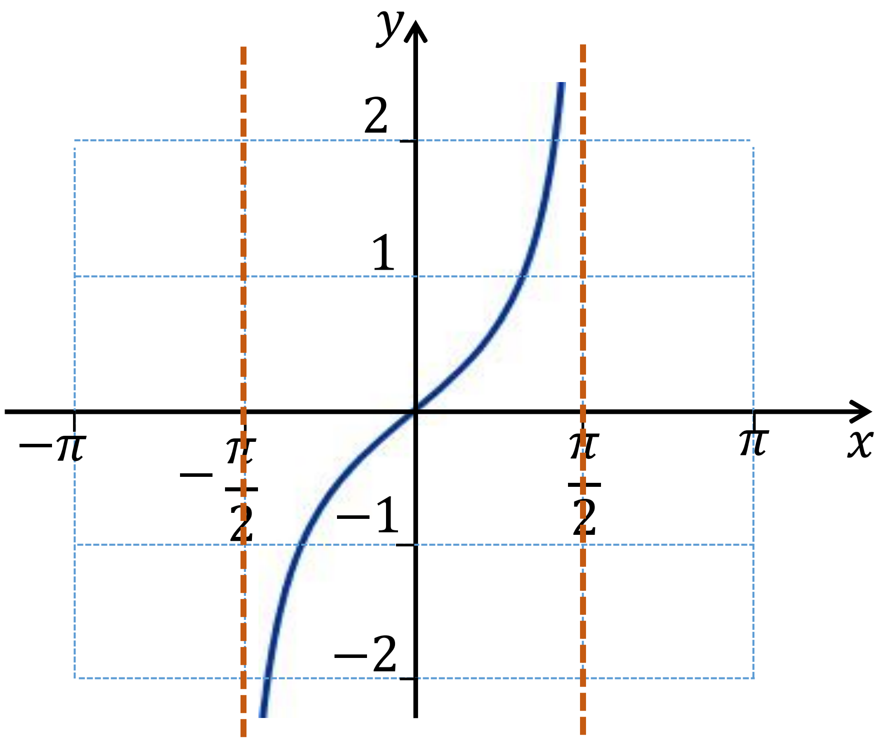
Função arco tangente

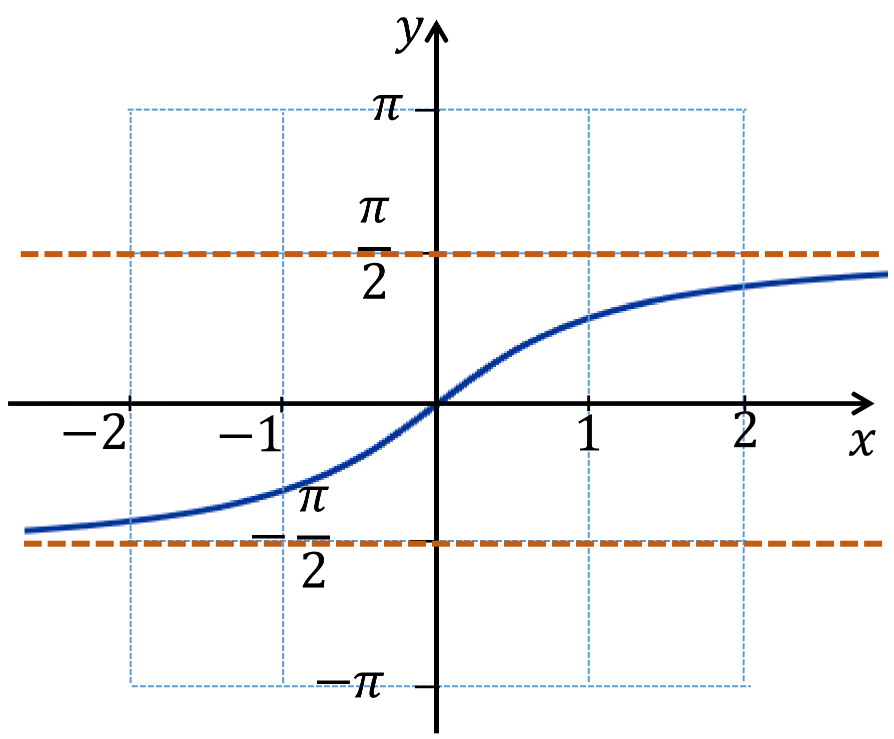
$$f^{-1}: (-\infty, +\infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



$$f^{-1}(x) = \arctan x\,, \forall x \in \ (-\infty, +\infty)$$

Funções trigonométricas inversas





$\tan(\arctan x) = x \,, \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$\arctan(\tan x) = x \,, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

EXERCITANDO 03

Nas funções seguintes classifique em:

(I) Injetora, (II) *Sobrejetora,*
(III) *Bijetora,* (IV) *Não é sobrejetora nem injetora.*

a) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$

b) g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $g_{(x)} = 1 - x^2$

c) h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $h_{(x)} = |x - 1|$

d) m: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $m_{(x)} = 3x + 2$

e) p: $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ tal que $p(x) = \frac{1}{x}$

f) q: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^3$

EXERCITANDO 04

Nas funções bijetoras abaixo, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, obtenha a lei de correspondência que define a função inversa.

(a) $g(x) = \frac{4x-1}{3}$

(b) $h(x) = x^3 + 2$

(c) $p(x) = (x-1)^3 + 2$

(d) $r(x) = \sqrt[3]{x-1}$

(e) $s(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

Respostas

Exercício 6:

a) (III)

b) $(\mathrm{I}V)$

c) (II)

d) (I)

e) (III)

f) (III)

Exercício 7:

a) $g^{-1} = \dfrac{3x+1}{4}$

b) $h^{-1} = \sqrt[3]{x-2}$

c) $p^{-1} = 1 + \sqrt[3]{x-2}$

d) $r^{-1} = x^3 + 1$

e) $s^{-1} = \sqrt[3]{1-x^3}$

Baixar o Geogebra.

www.geogebra.org

Assistir o tutorial

https://youtu.be/HPhsJ_BXVgQ

Obrigado!

carlos.castro@professor.uniateneu.edu.br