Gruppövning 5

1. $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 0{,}8$ $\lambda_3 = 0{,}6$

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$v = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3$

a) Enligt Sats 8.14 + 8.15 kommer egenvektorer till olika egenvärden vara linjärt oberoende. En kvadratisk matris med k olika egenvärden kommer ha åtminstone k linjärt oberoende egenvektorer. Detta betyder att de 3 egenvektorerna till 3x3-matrisen utsär basvektorerna till $\mathbb{R}^3$, och därför gäller följande:

$\bar{v} \in \mathrm{Span}(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\})$

Dvs. vi kan nå varje punkt i $\mathbb{R}^3$ med $\bar{v}$, och vi kan skriva alla 3-vektorer som en linjärkombination av $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$.

b) $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$

$A^n\bar{v}_1 = \lambda_1^n\bar{v}_1 = 1^n\bar{v}_1 = \bar{v}_1$

$A^n\bar{v}_2 = \lambda_2^n\bar{v}_2 = 0.8^n\bar{v}_2$

$A^n\bar{v}_3 = \lambda_3^n\bar{v}_3 = 0.6^n\bar{v}_3$

$A^n v = x_1\bar{v}_1 + x_2(0{,}8^n\bar{v}_2) + x_3(0{,}6^n\bar{v}_3)$

c) $A^n\bar{v} = A^n(x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3) = A^n x_1\bar{v}_1 + A^n x_2\bar{v}_2 + A^n x_3\bar{v}_3 =$

$= (A^n\bar{v}_1)x_1 + (A^n\bar{v}_2)x_2 + (A^n\bar{v}_3)x_3$

Då $n \to \infty$ kommer $(A^n\bar{v}_1) = 1$ medans $A^n\bar{v}_2 \to 0$ och $A^n\bar{v}_3 \to 0$ eftersom de två sista går mot 0 kommer x_2 och x_3 inte spela roll. Däremot kommer x_1 påverka. Mer exakt gäller: $A^n\bar{v} \to \bar{v}_1 x_1$

d) $A^n\bar{v} = A^n(x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3) = A^n\bar{v}_1 x_1 + A^n\bar{v}_2 x_2 + A^n\bar{v}_3 x_3 =$

$= \lambda_1^n \bar{v}_1 x_1 + \lambda_2^n \bar{v}_2 x_2 + \lambda_3^n \bar{v}_3 x_3 = (\lambda_1^n x_1)\bar{v}_1 + (\lambda_2^n x_2)\bar{v}_2 + (\lambda_3^n x_3)\bar{v}_3$

Det finns 3 fall för varje term:

1. $\lambda = 1$

   då $n \to \infty$ gäller $\lambda^n = 1$

2. $-1 < \lambda < 1$

   då $n \to \infty$ gäller $\lambda^n \to 0$

3. $1 < \lambda$

   då $n \to \infty$ gäller $\lambda^n \to \infty$

Sedan finns specialfallen $\lambda < -1$ och $\lambda = -1$.
För dessa kan vi inte säga vad de går mot då λ^n kommer vara jämt för jämna n och udda för udda n. $\lambda = -1$ kommer alternera mellan 1 och -1, medans $\lambda < -1$ kommer gå mot oändligheten, men den kommer inte stanna på den positiva eller negativa oändligheten.
Vi kan dock dra slutsatsen att då $n \to \infty$ kommer $A^n\bar{v}$ vara någon linjärkombination av egenvektorerna. Vi kan dock inte säga vad linjärkombinationen kommer gå mot då detta hade implicerat att ∞ är udda eller jämn. (då λ^n alternerar mellan jämt och udda.)

e) Vi använder Def. 8.19:

$A = PDP^{-1}$ där P är inverterbar matris $(\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3)$ och

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Vi vet att P är inverterbar och därmed att A är diagonaliserbar då A är en 3x3 matris med 3 olika egenvärden. $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ är därmed linjärt oberoende och därför gäller Sats 8.20.