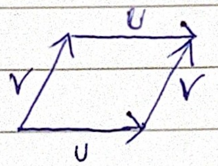
Teoriövning (Grupp 47)

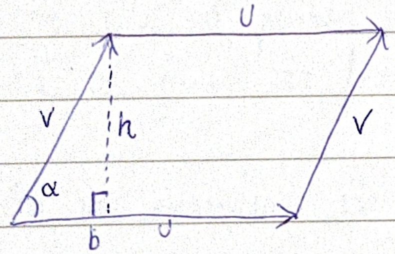
1) a) Med 3 punkter (P_1, P_2, P_3) kan vi skapa två vektorer, t.e.x $\overrightarrow{P_1P_2}$ och $\overrightarrow{P_1P_3}$

~~Vi~~ För läsbarheten definierar vi två variabler u och v så att $u = \overrightarrow{P_1P_2}$ och ~~vi~~ $v = \overrightarrow{P_1P_3}$

Då kan vi rita parallellogrammet



~~Vi vet att för att~~ För att beräkna arean av ett parrallelogram kan vi multiplicera basen b med höjden h. Från diagrammet är det tydligt att $b = \|u\|$. För att beräkna höjden måste vi använda trignometri som visas nedan med hjälp av ett diagram.



Från diagrammet till vänster är det tydligt att $\sin\alpha = \frac{h}{\|v\|} \Rightarrow h = \|v\|\sin\alpha$

Nu har vi en formel föra att beräkna arean av ett parallellogram: $A_{\text{parallellogram}} = \|u\|\|v\|\sin\alpha$

För att beräkna arean av triangeln som skapas av de 3 punkterna, dvs hälften av parallellogrammets area, kan vi dividera med 2 så att $A = \frac{\|u\|\,\|v\|\sin\alpha}{2}$

Men vi vet att $\|u\|\,\|v\|\sin\alpha = \|u \times v\|$ så vi kan förenkla formeln till

$$A = \frac{\|u \times v\|}{2} = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\|}{2}$$

Vi ska använda var formel med värdena $\overrightarrow{P_1P_2} = u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{P_1P_3} = v = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$A = \frac{\|(3,1)\times(-2,6)\|}{2} = \frac{\|(3,1)\|\,\|(-2,6)\|\sin\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{40}\sin\alpha}{2} = 10\sin\alpha$$

För att beräkna α kan vi använda skalärproduktformel så att

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$$

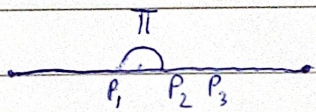
$$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{(3,1)\cdot(-2,6)}{\sqrt{10}\,\sqrt{40}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{400}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{\pi}{2}$$

Eftersom arean $A = 10 \sin\alpha$ och $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, vet vi att $A = 10$
Notera att vi ignorerar fallet $\alpha = \frac{-\pi}{2}$ för att arean kan inte vara negativt.

b) Om alla 3 punkter ligger på en linje så vet vi att α från vår formel är π som visas i diagrammet



Om vi använder vår formel

$$A = \frac{\|u\|\,\|v\|\,\sin(\pi)}{2}$$

$$= \frac{(\|u\|\,\|v\|)\cdot 0}{2}$$

$$= 0$$

Det är ett rimligt svar eftersom om de 3 ~~pun~~ punkterna låg på samma linje, då borde arean vara 0.