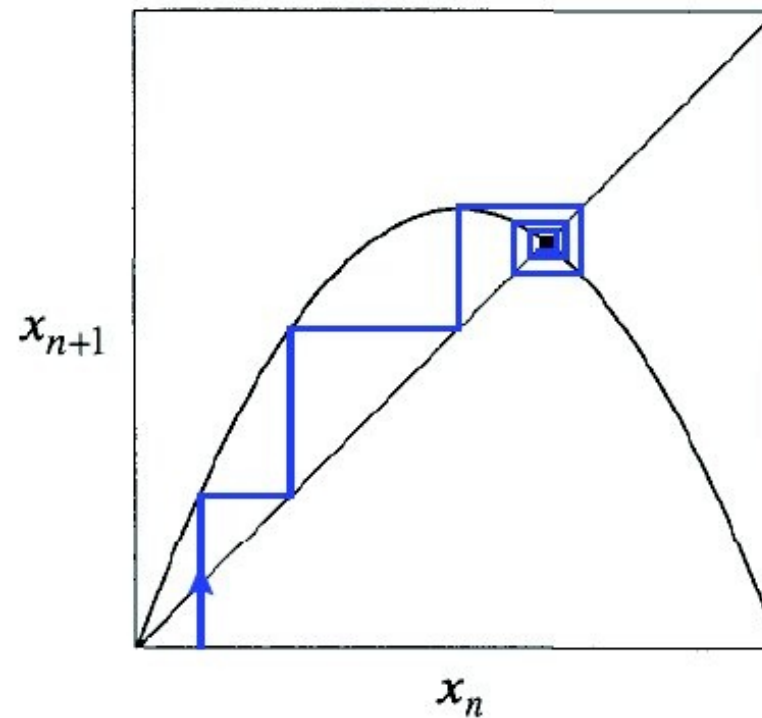
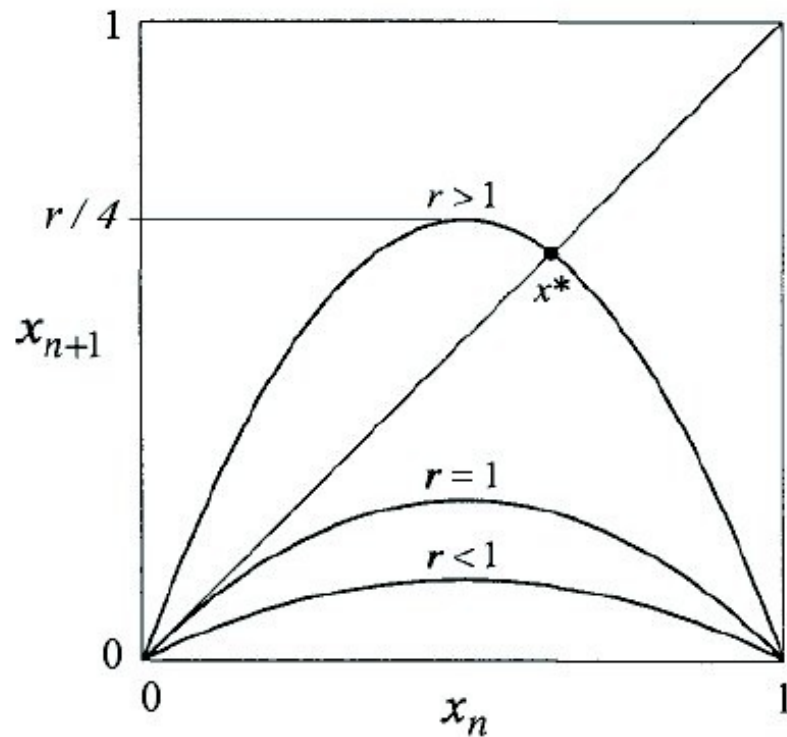
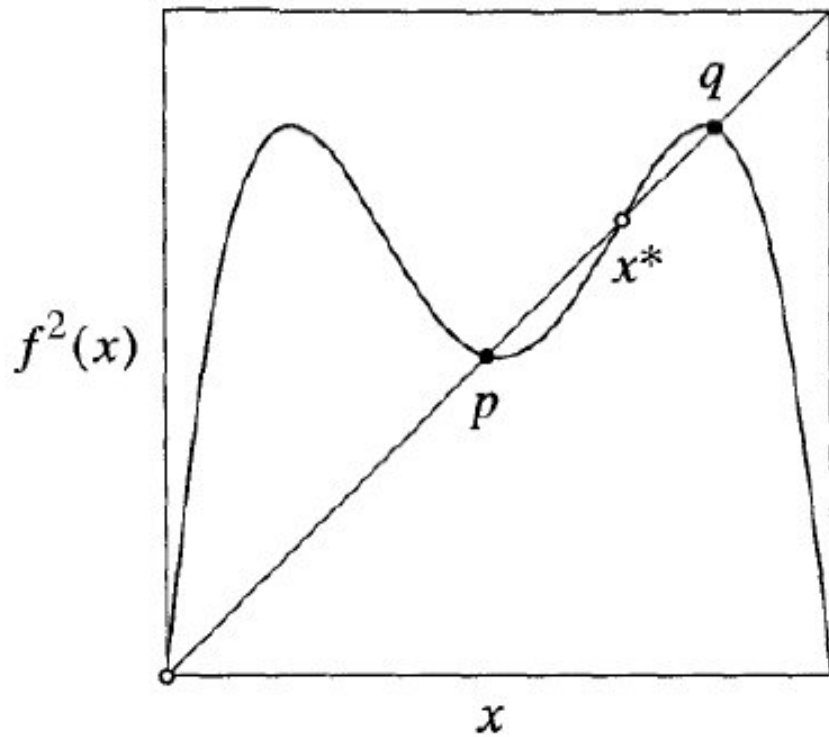


Die logistische Abbildung für verschiedene r



Links: Verlauf der logistischen Abbildung für verschiedene Werte von r . Rechts: Grafische Iteration (“Spinnennetz-Konstruktion”) der logistischen Abbildung. Von einem Startwert x_n erhält man den nächsten Wert x_{n+1} indem man nach oben bis zum Funktionsgraphen läuft. Um diesen Wert als neuen Startwert zu benutzen, muss er auf die x -Achse übertragen werden, indem man horizontal bis zur Winkelhalbierenden läuft. Dann wieder hoch zum Funktionsgraphen... Sie verstehen es schon. (Quelle [\[6\]](#).)

Periodenverdopplung



$$r_1 = 3$$

(Periode 2 wird geboren)

$$r_2 = 3.449\dots$$

4

$$r_3 = 3.54409\dots$$

8

$$r_4 = 3.5644\dots$$

16

$$r_5 = 3.568759\dots$$

32

\vdots

\vdots

$$r_\infty = 3.569946\dots$$

∞

Das Bifurkationsdiagramm

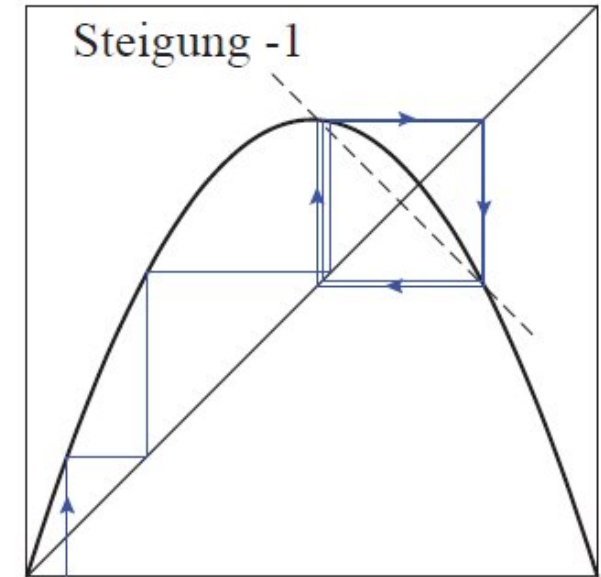
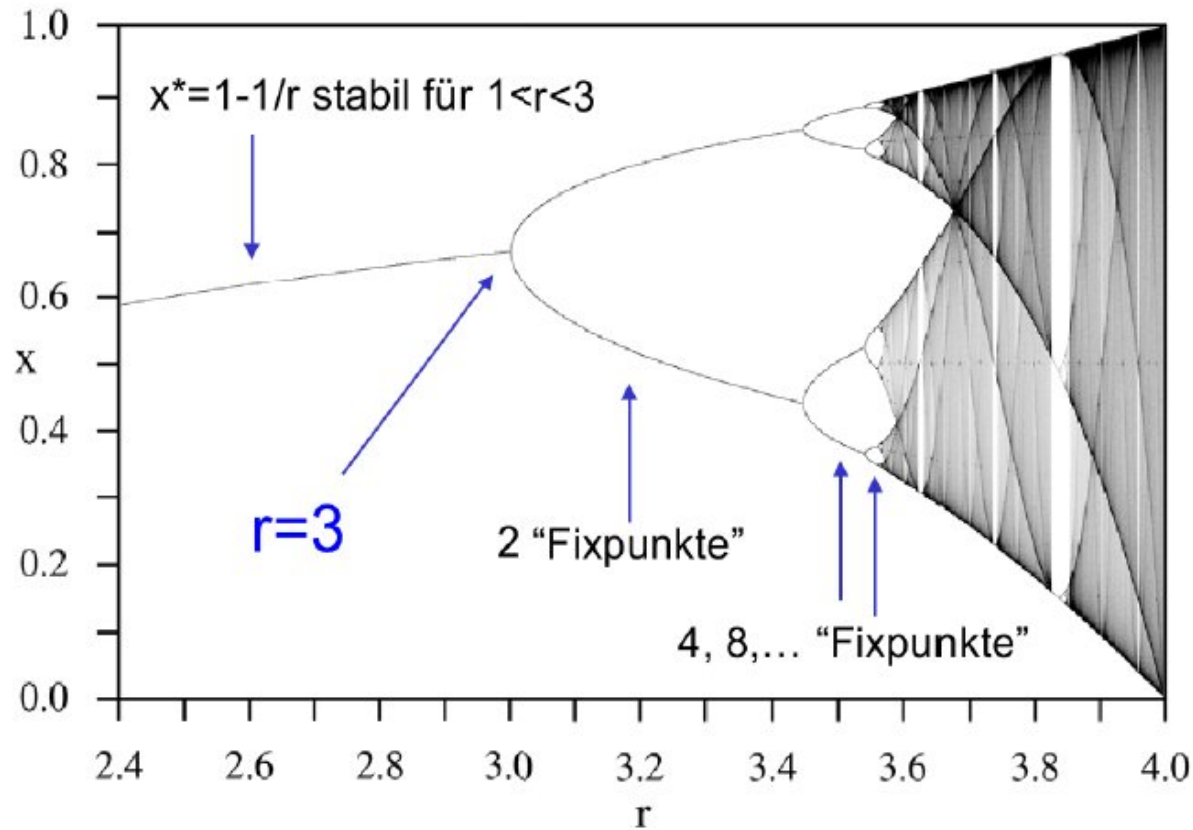


Abbildung 7.11: Links: Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung. Rechts: Zustandekommen eines Orbits der Periode 2 in der grafischen Iteration. Das "Spinnennetz" kann sich nicht mehr zusammenziehen, wenn die Steigung am Fixpunkt $|f'(x)| > 1$ ist.

Selbstähnlichkeit

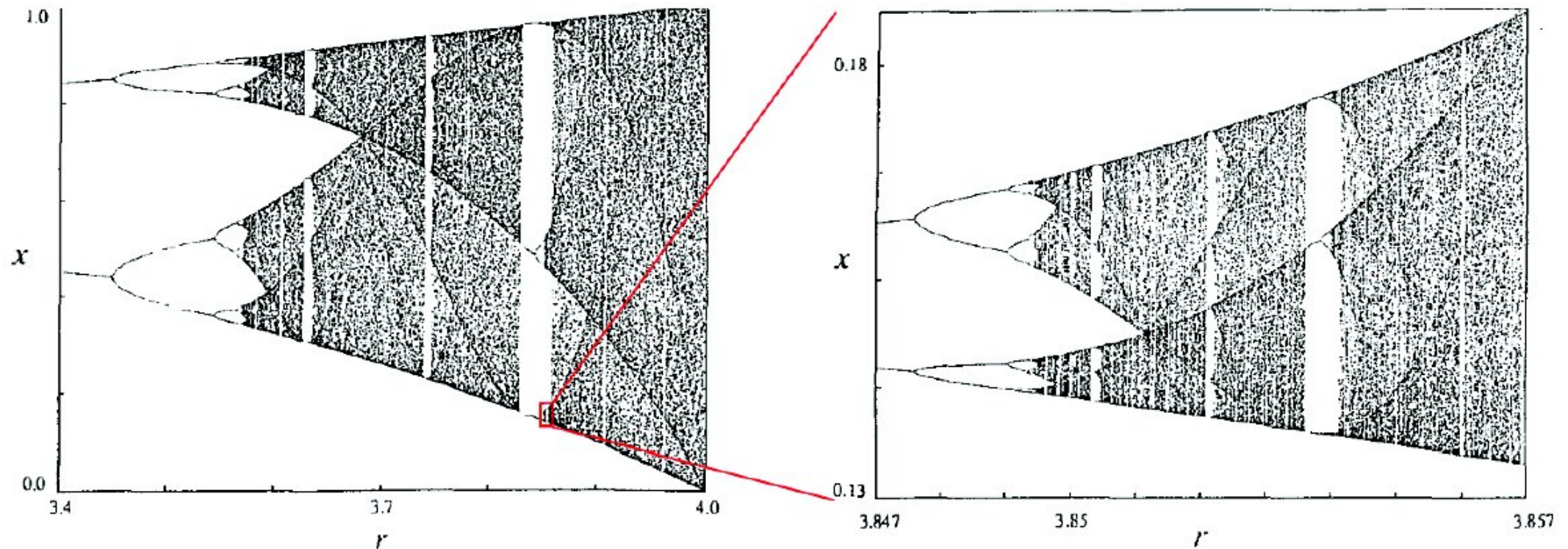


Abbildung 7.13: Selbstähnlichkeit des Bifurkationsdiagramms der logistischen Abbildung auf verschiedenen Skalen. (Quelle [6].)

Universalität

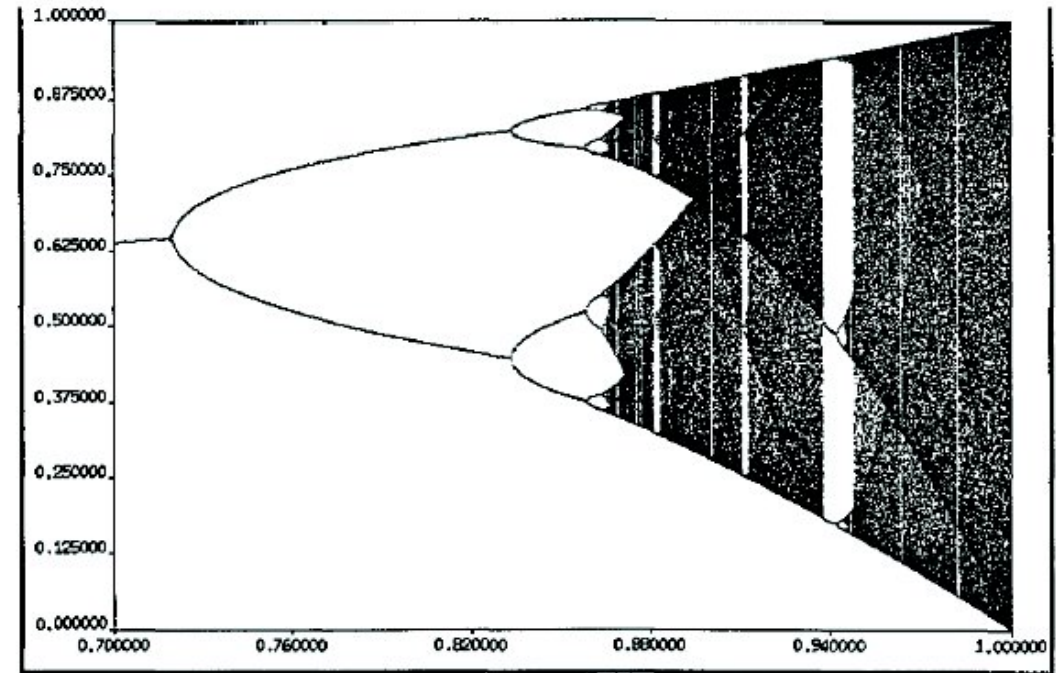
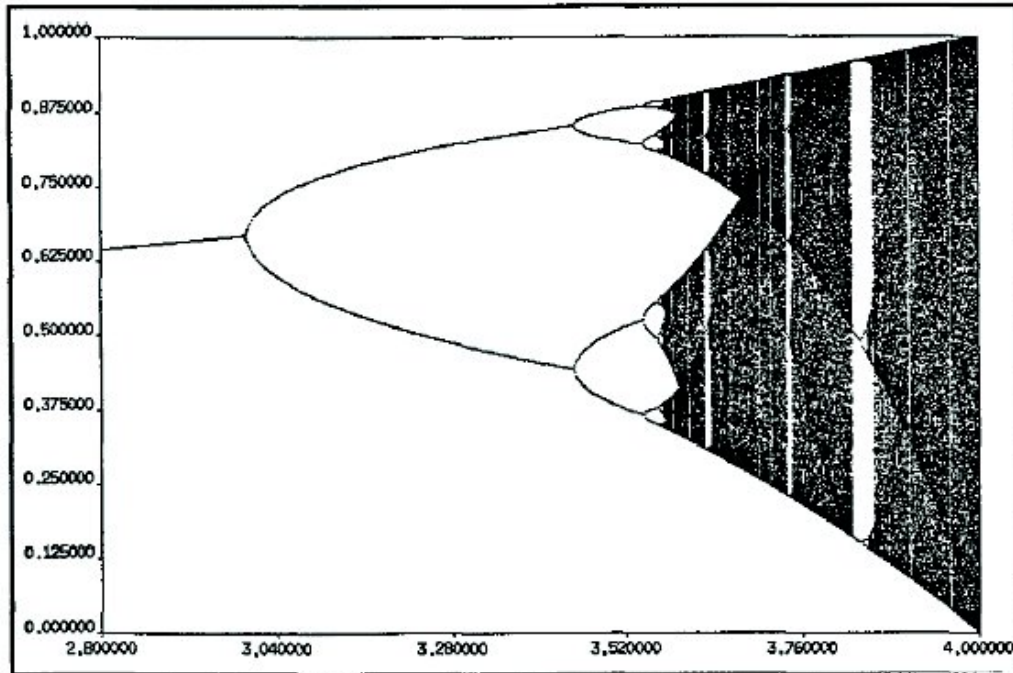


Abbildung 7.14: Universalität des Bifurkationsdiagramms für unimodale Abbildungen. Gezeigt sind Diagramme für die Logistische Abbildung $f(x) = rx(1-x)$ (links) und die Sinus-Funktion $f(x) = r \sin(\pi x)$ (rechts). (Quelle [\[6\]](#).)

§7, Schluss: Poincaré-Schnitte, Nichtlineare Dynamik und Chaos

Nichtlineare Bewegungsgleichungen können zu chaotischem Verhalten führen. Ein Beispiel ist das ebene **Doppelpendel**

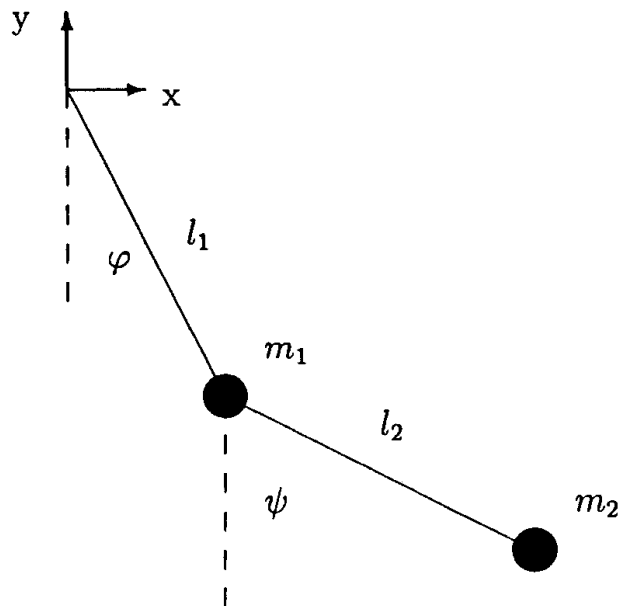


Fig. 5.1. The double pendulum: Parameters and coordinates.

Literatur: Kapitel 5 von H.J. Korsch und H.-J. Jodl, *Chaos — A program collection for the PC*; N. Srivastava, C. Kaufman, G. Müller: *Hamiltonian Chaos*, Computers in Physics **4**, 549 (1990).
(Bild aus Korsch-Jodl)
Die Lagrangefunktion ist

$$L = \frac{1}{2}M l_1^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\psi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi} \dot{\psi} \cos(\psi - \phi) - M g l_1 (1 - \cos \phi) - m_2 g l_2 (1 - \cos \psi), \quad (51)$$

wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse ist, und die Bewegungsgleichungen ergeben sich zu

$$\ddot{\phi} = \{1 - \mu \cos^2(\psi - \phi)\}^{-1} [\mu g_1 \sin \psi \cos(\psi - \phi) + \mu \dot{\phi}^2 \sin(\psi - \phi) \cos(\psi - \phi) - g_1 \sin \phi + \frac{\mu}{\lambda} \dot{\psi}^2 \sin(\psi - \phi)], \quad (52)$$

$$\ddot{\psi} = \{1 - \mu \cos^2(\psi - \phi)\}^{-1} [g_2 \sin \phi \cos(\psi - \phi) - \mu \dot{\psi}^2 \sin(\psi - \phi) \cos(\psi - \phi) - g_2 \sin \psi - \lambda \dot{\phi}^2 \sin(\psi - \phi)], \quad (53)$$

mit

$$\lambda := \frac{l_1}{l_2}, \quad g_1 := \frac{g}{l_1}, \quad g_2 := \frac{g}{l_2}, \quad \mu := \frac{m_2}{M}. \quad (54)$$

Man beachte die diversen Nichtlinearitäten und überlege sich, wie für kleine Auslenkungen alles linear wird, etc.

Die Energie (erhalten!) ist

$$E = \frac{1}{2} M l_1^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\psi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi} \dot{\psi} \cos(\psi - \phi) + M g l_1 (1 - \cos \phi) + m_2 g l_2 (1 - \cos \psi). \quad (55)$$

Zitat aus Srivastava et al.:

It is instructive to write a short program that simulates the double pendulum and displays its motion on a computer screen. Except for small-amplitude oscillations, the motion of the two point masses is rather complex and evokes a sense of unpredictability.

Es empfiehlt beim Programmieren, gewisse Kontrollmöglichkeiten einzubauen; beispielsweise ist mit Sicherheit etwas faul, wenn die (gelegentlich berechnete) Energie nicht konstant ist.

Im günstigsten Fall ist nur die Schrittweite in der Zeit zu groß. Auch kann es lehrreich sein, irgendwann die Bewegung umzukehren und zu überprüfen, ob der Startpunkt wieder erreicht wird.

Wer nicht selbst programmieren möchte, kann z.B. Mathematica verwenden.

Im günstigsten Fall ist nur die Schrittweite in der Zeit zu groß. Auch kann es lehrreich sein, irgendwann die Bewegung umzukehren und zu überprüfen, ob der Startpunkt wieder erreicht wird.

Wer nicht selbst programmieren möchte, kann z.B. Mathematica verwenden.

Warum muss es ein **Doppel**pendel sein?

Weil Systeme mit nur einem Freiheitsgrad bereits mithilfe der Energieerhaltung integriert werden können:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad t(x_1) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

In diesem Unterkapitel:

Wie kann man Chaos charakterisieren?

Wodurch unterscheiden sich chaotische und andere Systeme?

Wie kann man mit nichtlinearen Bewegungsgleichungen umgehen?

Hauptsächlich werden hier konservative (Hamiltonsche) Systeme betrachtet; es sei betont, dass Chaos in dissipativen Systemen ebenfalls auftritt und wichtig ist.

Als Gegensatz zu den chaotischen Systemen betrachten wir zunächst...

Integrable Systeme

Alle verallgemeinerten Koordinaten **zyklisch** (d.h. Lagrangefunktion hängt nicht von den verallgemeinerten Koordinaten ab) \Rightarrow alle verallgemeinerten Impulse sind **erhalten**, das Problem „löst sich von selbst“; man spricht von einem **integrablen** System. (Häufig auch „separabel“, unter bestimmten Zusatzvoraussetzungen; hier nicht betrachtet.)

Genauer: Ein **autonomes** ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) System

$$H = H(\vec{p}, \vec{q}) \quad (2)$$

mit k Freiheitsgraden ($2k$ -dimensionaler Phasenraum) heißt *integrabel*, wenn es k unabhängige Konstanten der Bewegung gibt, also k Phasenraumfunktionen

$$F_j(\vec{p}, \vec{q}) = c_j = \text{const} \quad j = 1, \dots, k. \quad (3)$$

Das ist der Fall, wenn die **Poissonklammern** mit H verschwinden:

$$\frac{dF_j}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial F_j}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F_j}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] =: [F_j, H] = 0 \quad j = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Die Erhaltungsgrößen sind „miteinander verträglich“ und führen zu einer besonders einfachen Struktur im Phasenraum, wenn sie *in Involution* miteinander sind, d.h.

$$[F_j, F_i] = 0 \quad \forall i, j. \quad (5)$$

(Eins der F_i ist normalerweise die Gesamtenergie.)

Unter diesen Voraussetzungen ist die Bewegung im $2k$ -dimensionalen Phasenraum beschränkt auf eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Topologie eines *Torus* (k -Torus).

Der Beweis dieser allgemeinen Aussagen überschreitet den Rahmen dieser Vorlesung; mögliche Referenzen sind die Bücher von Thirring, Lichtenberg und Lieberman, Arnold und Avez und ähnliche differentialgeometrisch und topologisch ausgerichtete Behandlungen der Mechanik.

Anschauliches Argument für die Torus-Topologie in zwei Dimensionen:

- i) Es muss eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit sein.
- ii) Auf dieser Mannigfaltigkeit definieren die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ein Richtungsfeld, das frei von Singularitäten sein sollte.

Wenn man sich die Mannigfaltigkeit also als ein **behaartes** Objekt vorstellt, muss man es ohne Scheitel und Wirbel **kämmen** können, und das geht mit einem Torus, nicht aber mit einer Sphäre!

Beispiel in zwei Freiheitsgraden: Bewegung eines Teilchens in einem Zentralpotential in zwei Dimensionen: Energie und Drehimpuls erhalten; zwei Erhaltungsgrößen liefern Bewegung auf einem 2-Torus.

Für die bei integrablen Systemen vorliegenden **Winkel- und Wirkungsvariablen** benutzt man häufig eine eigene Nomenklatur:

k Winkelvariable $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$; k Wirkungsvariable $\vec{I} = (I_1, \dots, I_k)$, mit

$$H = H(\vec{I}), \text{ die Winkelvariablen } \theta_i \text{ sind also zyklisch:} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \dot{I}_k = -\frac{\partial H}{\partial \theta_k} = 0 \Rightarrow \vec{I} \text{ erhalten} \quad (7)$$

$$\dot{\theta}_k = \frac{\partial H}{\partial I_k} = \omega_k(\vec{I}). \quad (8)$$

Die ω_k sind ebenfalls Konstanten der Bewegung, natürlich nicht unabhängig von den I_k .

$$\Rightarrow \theta_k = \theta_k(t=0) + \omega_k(\vec{I})t \quad (9)$$

Dann müssen nur noch die „wirklichen“ Phasenraumvariablen durch die I_k, θ_k ausgedrückt werden und das Problem ist gelöst. Die $\omega_k(\vec{I})$ sind die Frequenzen, mit denen das System die verschiedenen „Richtungen“ des Torus umkreist. (Bild aus Korsch-Jodl)

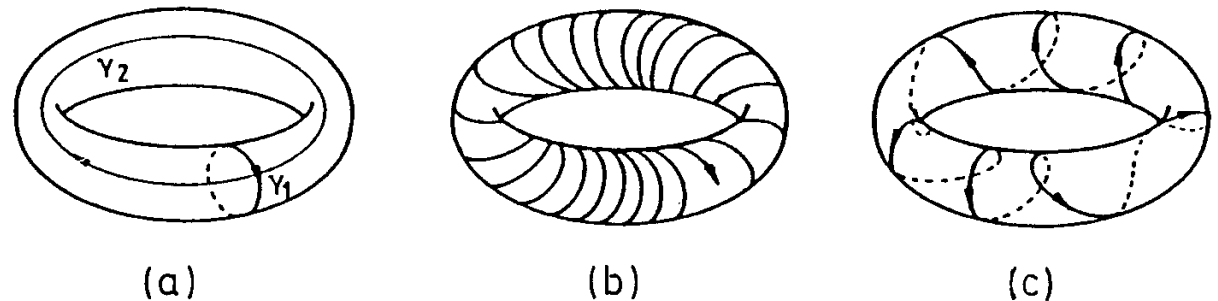


Fig. 2.1. Two-dimensional torus in phase space: (a) Topologically different paths γ_i . (b) A typical quasiperiodic trajectory. (c) Torus supporting periodic orbits.

Beispiele für integrable Systeme:

- a) Alle Systeme mit $k = 1$ (Integration durch Energiesatz)
- b) Lineare Systeme, $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ (\vec{x} : Phasenraumvektor, A : Matrix). Dann ist nämlich $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0)$ wobei e^{At} z.B. durch die Potenzreihe der Exponentialfunktion definiert werden kann.
- c) Spezielle nichtlineare Systeme, die man durch Variablentransformation auf entkoppelte eindimensionale Systeme zurückführen kann, z.B. Teilchen in 1D mit Wechselwirkungspotentialen ϕ zwischen benachbarten Teilchen („nichtlineare Federn“)

$$\phi(x) = ae^{-bx} + cx + d \text{ (Todagitter)} \quad \phi(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2} \text{ (Calogheromodel).}$$

- d) “All textbook-exercises and -examples the student is supposed to solve”.
(Robert H.G. Helleman)

Systeme, die nicht integrabel sind, muss man „mit Gewalt“, also **numerisch** integrieren.
(Mit Runge-Kutta 4. Ordnung oder besseren Verfahren)

Anwachsen kleiner Abweichungen

...ist eine charakteristische Eigenschaft von chaotischen Systemen. (Erinnert sei an den bis zum Überdruß ;-) zitierten Schmetterling in irgendeinem Urwald, dessen Flügelschlag eine Wetterkatastrophe in einem anderen Teil der Welt nach sich zieht.)

Die Bewegungen chaotischer Systeme sind **instabil** gegenüber kleinen Störungen.

Wichtiger Begriff aus der Stabilitätsanalyse: **Lyapunov-Exponent**.

Betrachte Bewegung im Phasenraum, gemäß Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, t) \quad ; \quad \vec{x}(t = 0) = \vec{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}(t). \quad (10)$$

Bewegung mit leicht geänderten Anfangsbedingungen:

$$\vec{x}(t = 0) = \vec{x}_0 + \Delta\vec{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}(t) + \Delta\vec{x}(t) \quad (11)$$

Für hinreichend kleine $\Delta\vec{x}_0$ erfüllt $\Delta\vec{x}(t)$ eine **lineare** Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\Delta\vec{x} = M\Delta\vec{x} \quad (12)$$

mit einer Matrix M , die im allgemeinen Fall von t abhängen wird. Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass M *nicht* von der Zeit abhängt. Diese Differentialgleichung hat

einfache Lösungen in Gestalt der *Eigenvektoren* \vec{y}_i von M :

$$M\vec{y}_i = m_i\vec{y}_i \quad ; \quad i = 1, \dots, 2k \text{ (Dimension des Phasenraums)} \quad (13)$$

Dann gilt nämlich

$$\Delta\vec{x}(t=0) = \vec{y}_i \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{x}(t) = e^{m_i t} \vec{y}_i. \quad (14)$$

Die Eigenwerte m_i heißen Lyapunov-Exponenten (oder Stabilitäts-Exponenten).

Positive (Realteile von) Lyapunov-Exponenten signalisieren Instabilität!

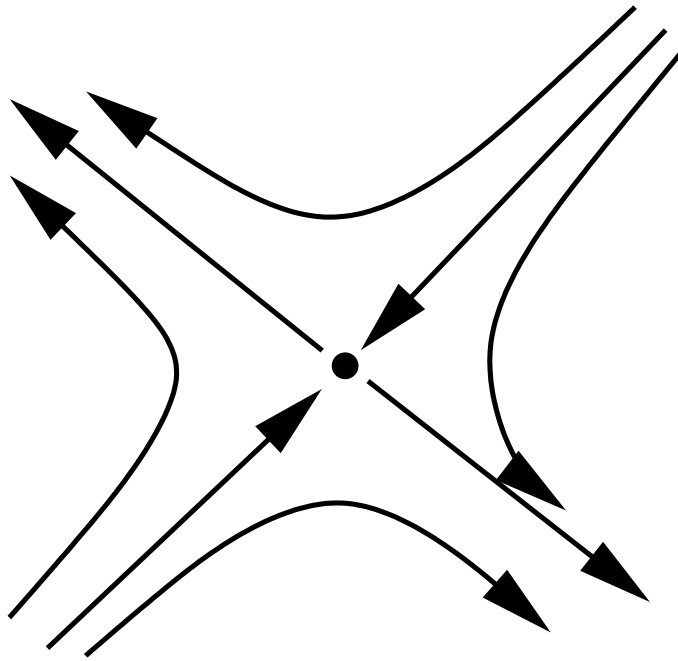
$$\operatorname{Re} m_i > 0 \quad \Rightarrow \quad |\Delta\vec{x}(t)| \rightarrow \infty \quad (15)$$

Für Hamiltonsche Systeme gibt es Beziehungen zwischen den Lyapunov-Exponenten. Nach dem Satz von Liouville bleiben Volumina im Phasenraum erhalten; insbesondere auch das zur Zeit $t = 0$ von den Eigenvektoren von M aufgespannte Volumen. Wenn dieses Volumen zur Zeit t denselben Wert haben soll wie zur Zeit $t = 0$, dann muss gelten

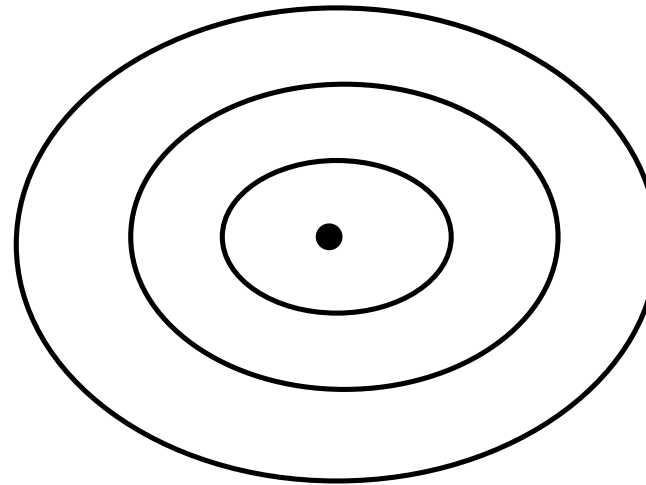
$$\prod_{i=1}^{2k} e^{m_i t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{2k} m_i = 0 \quad (16)$$

Eigenvektoren zu Eigenwerten mit positiven Realteilen kennzeichnen dann die **abstoßenden** Richtungen des Fixpunkts $\Delta\vec{x} = 0$, solche mit negativen Realteilen die **anziehenden** Richtungen. Solche (instabilen) Fixpunkte heißen *hyperbolisch* da sich Anfangsvektoren $\Delta\vec{x}(0)$, die nicht Eigenvektoren sind, auf Hyperbeln weiterbewegen. Sind die Realteile aller Eigenwerte Null, so ist der Fixpunkt stabil bzw. elliptisch.

hyperbolischer Fixpunkt



elliptischer Fixpunkt



Leider kann man die Matrix M in aller Regel nicht berechnen, da die Lösungen der Bewegungsgleichungen nur *numerisch* bekannt sind \Rightarrow **Praktisches Verfahren** zur numerischen Bestimmung von Lyapunov-Exponenten muss her!

Das geht sehr einfach:

- Berechne eine Trajektorie mit Startpunkt $\vec{x}(t = 0)$, bis zu einer gewünschten Endzeit.
 - Starte erneut, mit $\vec{x}(t = 0) + \Delta\vec{x}(t = 0)$ und rechne nur bis $t = \tau$. Bilde den Quotienten $\frac{|\Delta\vec{x}(\tau)|}{|\Delta\vec{x}(0)|}$, der ein Maß für die Wachstumsrate der Abweichung ist.
 - Reskalierung: Bringe $\Delta\vec{x}(\tau)$ wieder auf die ursprüngliche Länge von $\Delta\vec{x}(0)$.
 - Starte erneut bei $t = \tau$, mit der reskalierten Abweichung, gehe bis $t = 2\tau$ und verfare wie gehabt.
 - Aus dem Mittelwert von $\ln\left(\frac{|\Delta\vec{x}(n\tau)|}{|\Delta\vec{x}((n-1)\tau)|}\right)$ über alle Schritte kann dann eine Schätzung für den Realteil des „schlimmsten“ Lyapunov-Exponenten (bei dem gegebenen Start- \vec{x}) ermittelt werden. (Bild aus Korsch-Jodl)
- Funktioniert „immer“, auch für t -abhängige M .

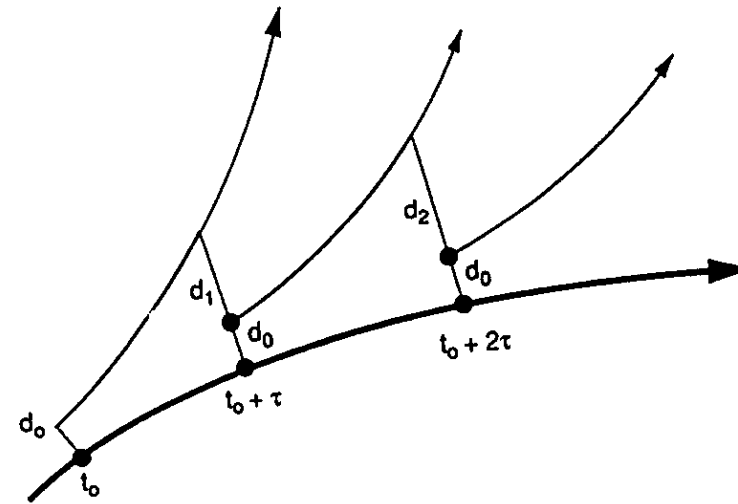


Fig. 2.12. Computation of the Lyapunov exponent by repeated rescaling of the distance of a displaced trajectory from a reference orbit.

Viele weitere mathematische Größen, die das Chaos **quantitativ** beschreiben, darunter diverse Spielarten von *Dimensionen*, die angeben, wie „zerfasert“ oder „kompakt“ der vom System ausgefüllte Phasenraumbereich ist.

Andere Möglichkeit: *Frequenzspektrum* des Systems: im integrablen System gibt es nur wenige ω_k (vgl. 9); Fourier-Analyse der Bewegungen eines chaotischen Systems zeigt ein anderes Frequenzmuster, aus dessen Form man etwas über Mechanismen lernen kann. Wir wollen noch **qualitativ**-anschauliche Indikatoren für chaotisches Verhalten kennenlernen.

Chaos im Bild

Anschauliche Darstellung von Bewegungen?

Kein Problem für $k = 1$ Freiheitsgrad: zweidimensionaler Phasenraum; leider langweilig, da nie Chaos.

Was ist mit $k = 2$?

- Phasenraum: $d = 4$; ungeeignet für graphische Darstellung
- Energiefläche: $d = 3$; auch nicht besonders
- Poincaréschnitt: $d = 2$; ok

(Bild aus Korsch-Jodl)

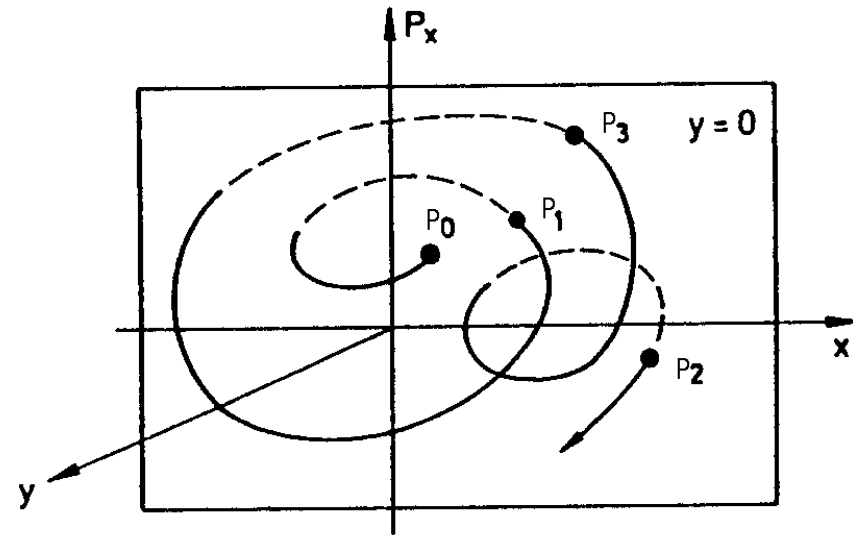


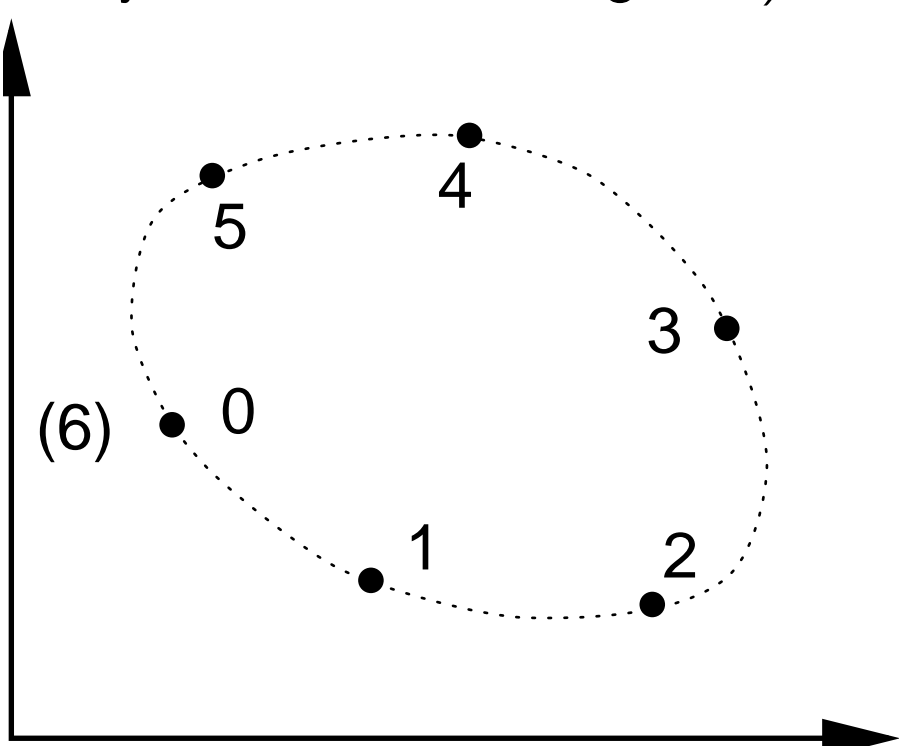
Fig. 2.2. A Poincaré section reduces the dynamics to a discrete mapping.

Rezept für Poincaréschnitt: Man definiere “irgendeine” Fläche im Phasenraum und einen Richtungssinn (Normalenvektor). Man markiere einen Punkt auf der Fläche, wenn die Trajektorie mit den gewählten Anfangsbedingungen im definierten Sinn die Fläche durchstößt \Rightarrow Punktfolge P_0, P_1, P_2, \dots . Dies definiert auch die *Poincaré-Abbildung* (der Poincaré-Schnittfläche auf sich):

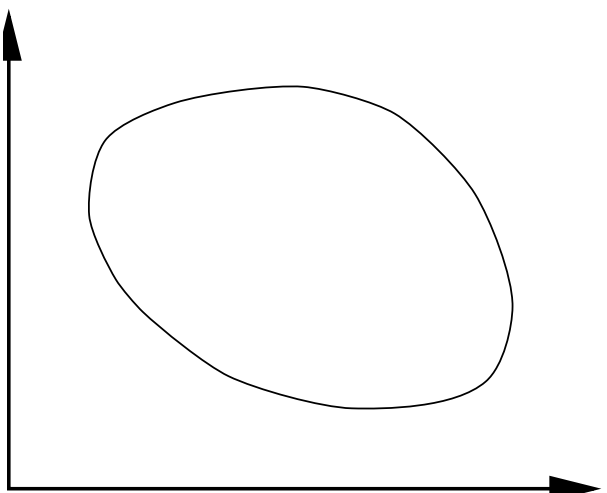
$$P_i \longrightarrow T(P_i) = P_{i+1}, \quad (17)$$

die analytisch in der Regel *nicht* angebbbar ist.

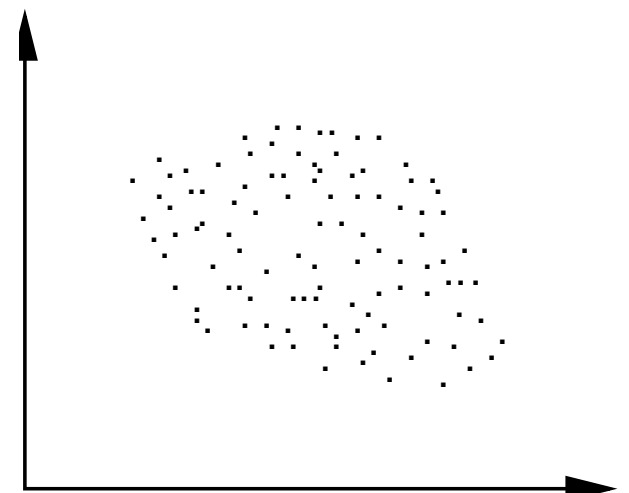
Typische Bilder der Schnittebene mit den markierten Durchstoß-Punkten der Trajektorie (für ein System mit 2 Freiheitsgraden):



Das System ist integrabel; ω_1, ω_2 (vgl. (9)) kommensurabel \Rightarrow endlich viele Punkte. Die Menge $\{P_0, \dots, P_5\}$ ist invariant unter der Poincaré-Abbildung. Bei leicht anderen Anfangsbedingungen hätte man eine andere endliche Punktmenge auf der punktierten Linie erhalten. Die punktierte Linie ist der Schnitt der Poincaré-Fläche mit einem invarianten Torus, und damit invariant unter der Poincaré-Abbildung.



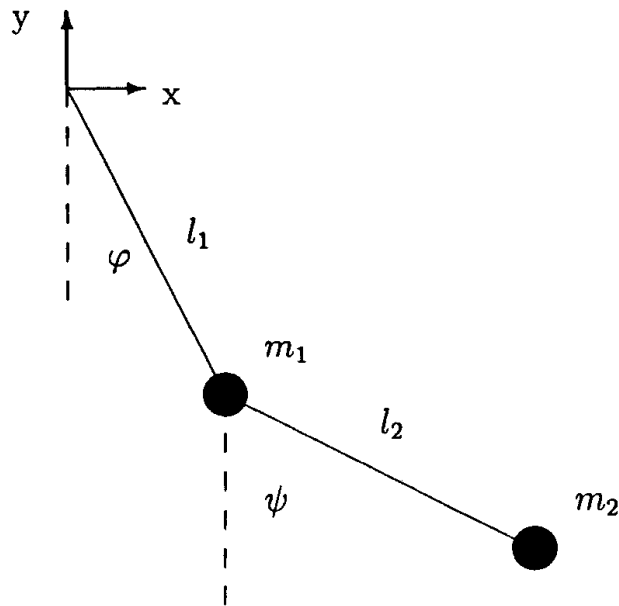
Poincaré-Schnitt für ein integrables System mit inkommensurablen Frequenzen (links) und für ein chaotisches System (rechts).



Beispiele zur nichtlinearen Dynamik

Beispiele: Autonome Systeme mit zwei Freiheitsgraden

Das ebene Doppelpendel



It is instructive to write a short program that simulates the double pendulum and displays its motion on a computer screen. Except for small-amplitude oscillations, the motion of the two point masses is rather complex and evokes a sense of unpredictability.

Systematischer als das einfache Anschauen: Poincaréschnitt. Beispielsweise kann man als Poincarébedingung fordern

Fig. 5.1. The double pendulum: Parameters and coordinates.

$$\psi = 0 \quad \text{Energieerhaltung} \Rightarrow \quad (18)$$

$$\dot{\psi}_{\pm} = -\frac{l_1}{l_2} \dot{\phi} \cos \phi \pm \sqrt{\left(\frac{l_1}{l_2} \dot{\phi} \cos \phi\right)^2 - \frac{2}{m_2 l_2^2} \left(M g l_1 (1 - \cos \phi) + \frac{1}{2} M l_1^2 \dot{\phi}^2 - E \right)} \quad (19)$$

und man wählt dann eine der beiden Möglichkeiten in (19), z.B.

$$\dot{\psi} + \frac{l_1}{l_2} \dot{\phi} \cos \phi > 0 \quad (20)$$

als zusätzliche Poincaré-Bedingung. Praktisch geht man so vor, dass man in der DGI-Routine das Vorzeichen von $\dot{\psi}$ kontrolliert, und bei einem Vorzeichenwechsel (wenn auch noch (20) erfüllt ist) zwischen den beiden letzten Punkten der Lösung z.B. linear interpoliert, um den wirklichen Schnittpunkt mit der Poincaré-Ebene zu bestimmen.

Einige Poincaréplots fürs Doppelpendel aus Korsch-Jodl. Jeder Plot rührt von *mehreren* Trajektorien her, und sie sind in energetisch aufsteigender Reihenfolge angeordnet.

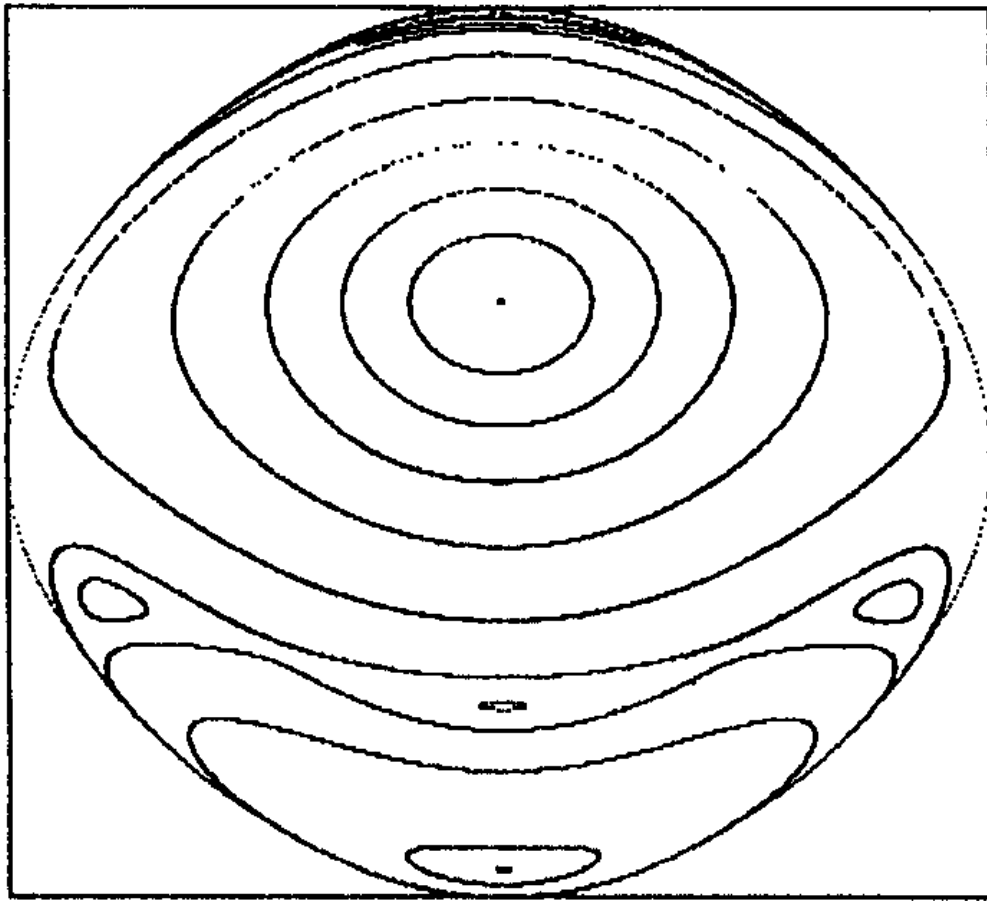


Fig. 5.6. Poincaré section for the double pendulum at energy $E_{\text{tot}} = 4$.

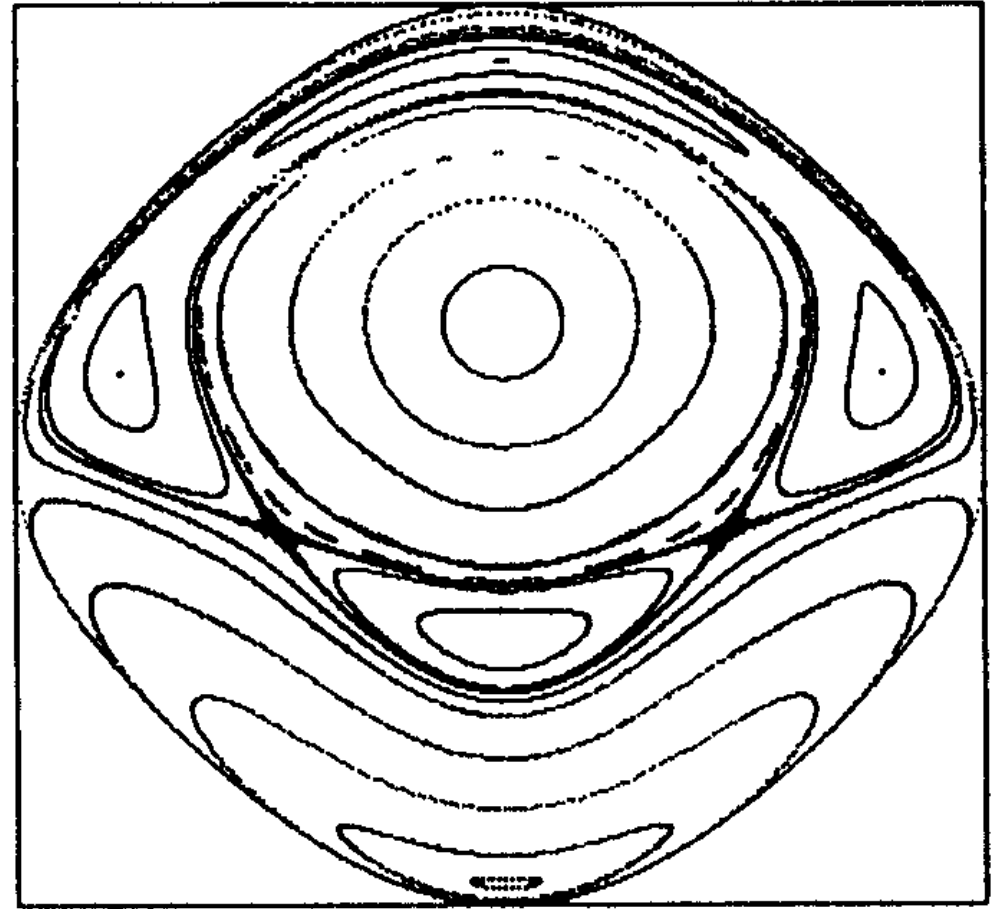
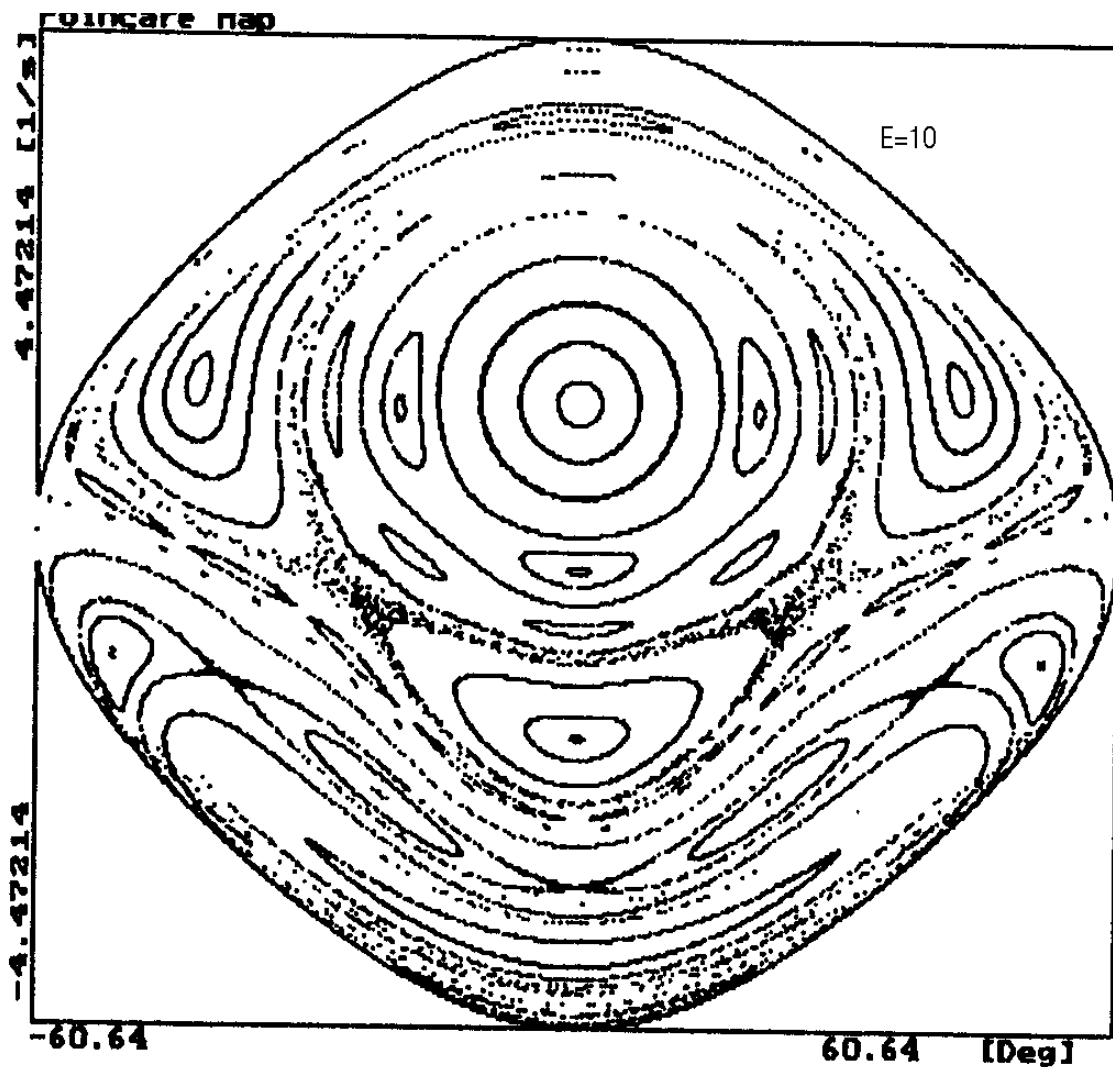


Fig. 5.7. Poincaré section for the double pendulum at energy $E_{\text{tot}} = 8$.

Die sehen noch ganz ordentlich aus; im zweiten Bild sieht man aber schon, wie sich von den Separatrices her erste Anzeichen von Chaos ausbreiten, die sich für höhere Energien weiter verstärken.



Hier ist man im Bereich des „Aufbrechens“ von Tori, der durch das so genannte KAM-Theorem (Kolmogoroff, Arnold, Moser) beschrieben wird. Für wachsende Energie verdrängt die chaotische Bewegung zunehmend die reguläre, aber bei weiter zunehmender Energie kommt man zur geordneten Bewegung zurück. Bild: Poincaré-Schnitt fürs Doppelpendel, $E = 10$.

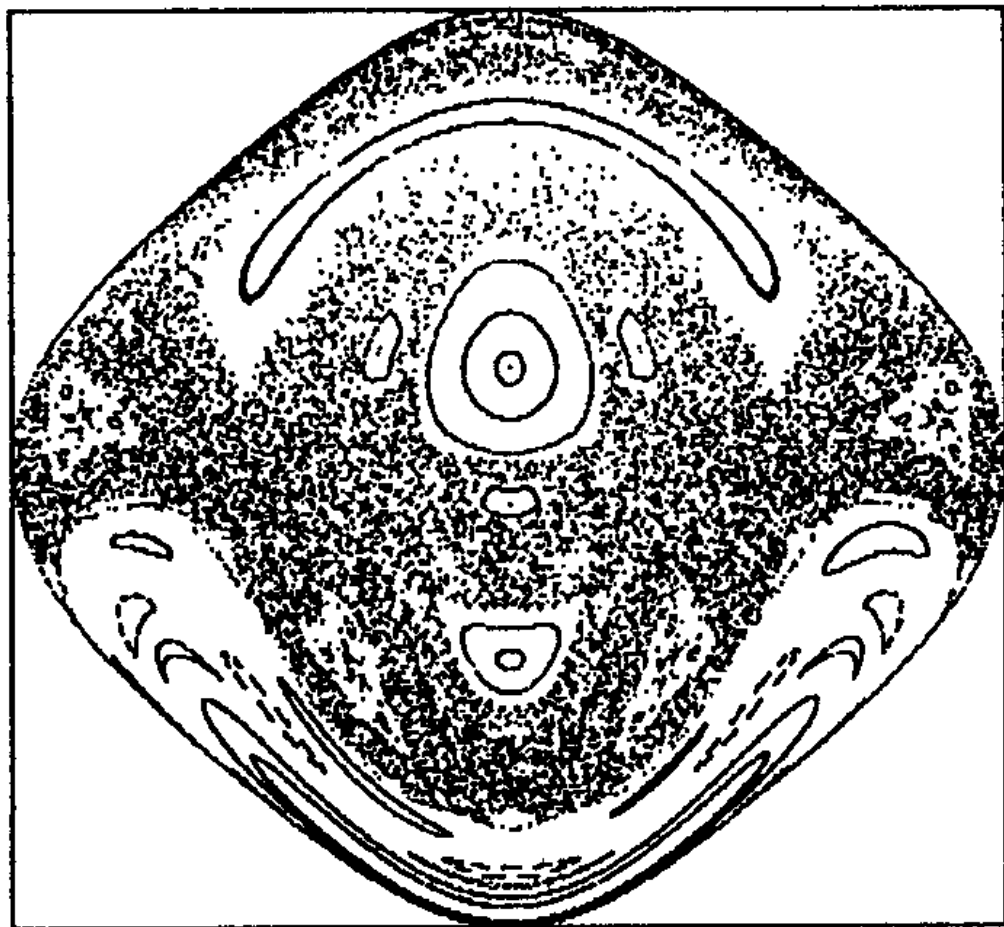


Fig. 5.13. Poincaré section for the double pendulum at energy $E_{\text{tot}} = 15$.

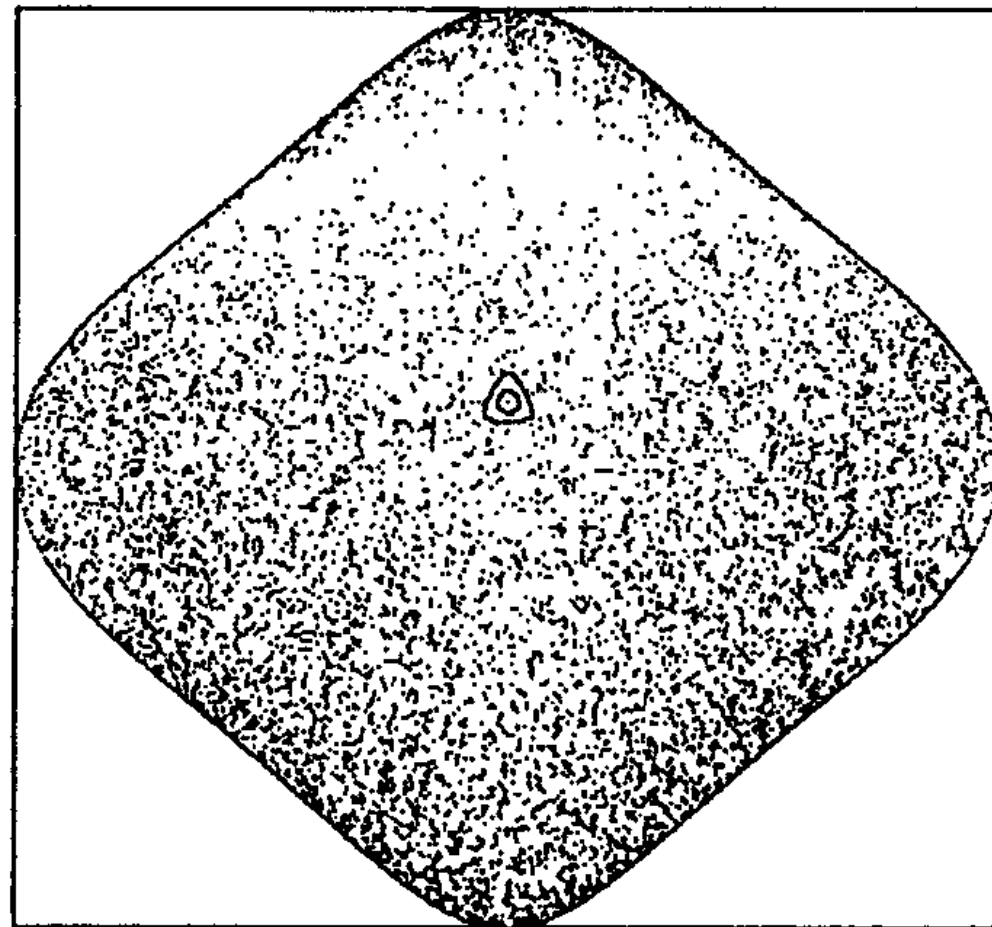


Fig. 5.14. Poincaré section for the double pendulum at energy $E_{\text{tot}} = 25$.

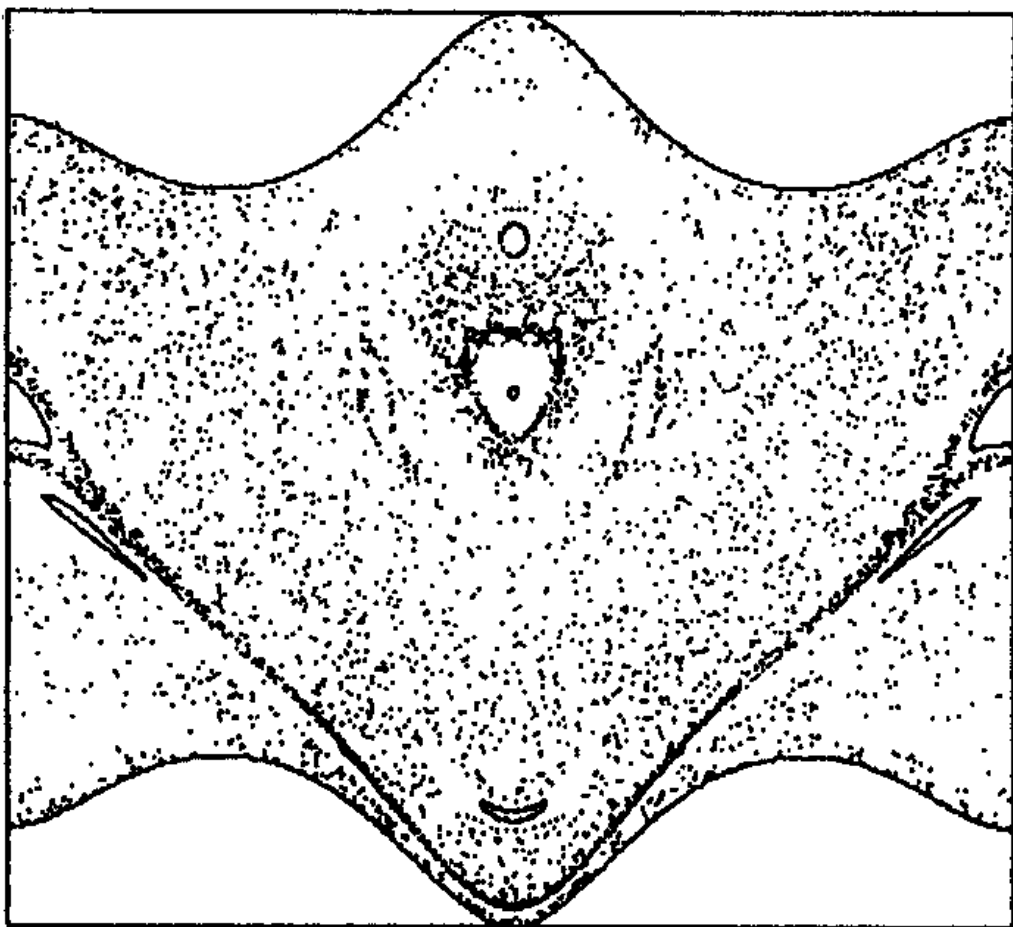


Fig. 5.17. Poincaré section for the double pendulum at energy $E_{\text{tot}} = 100$.

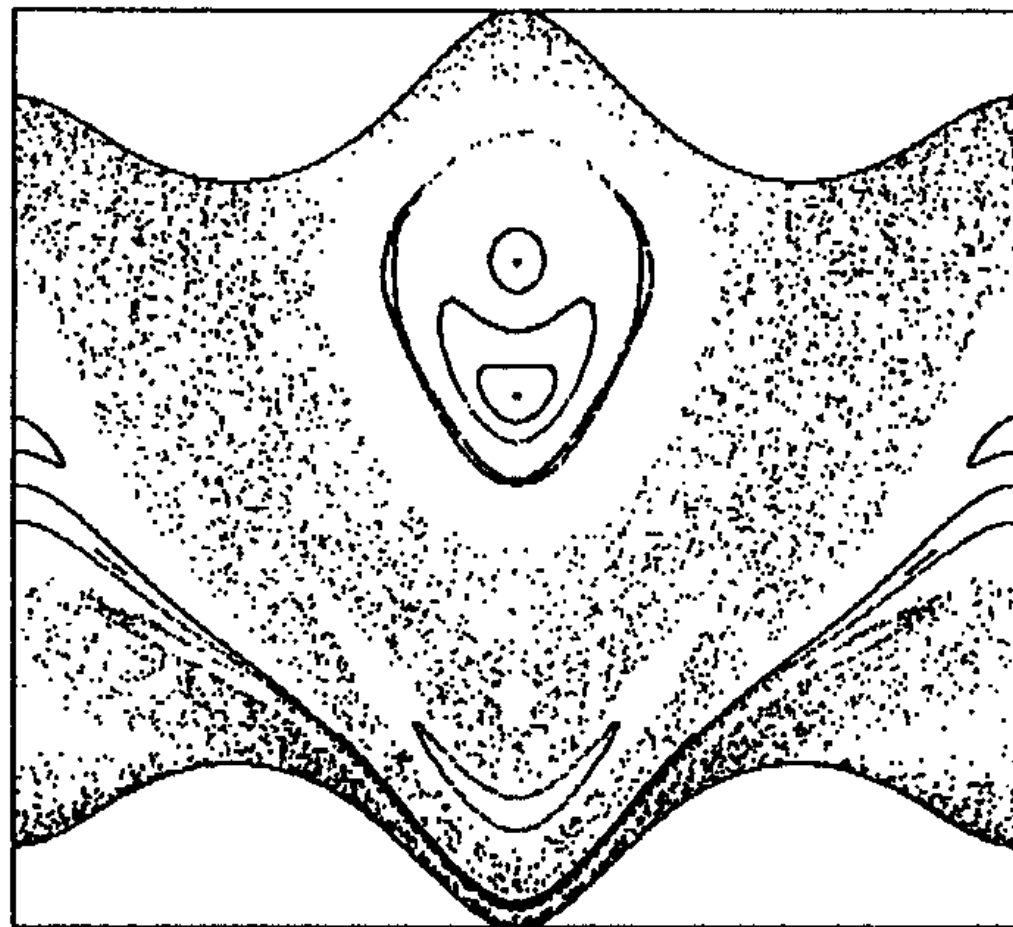
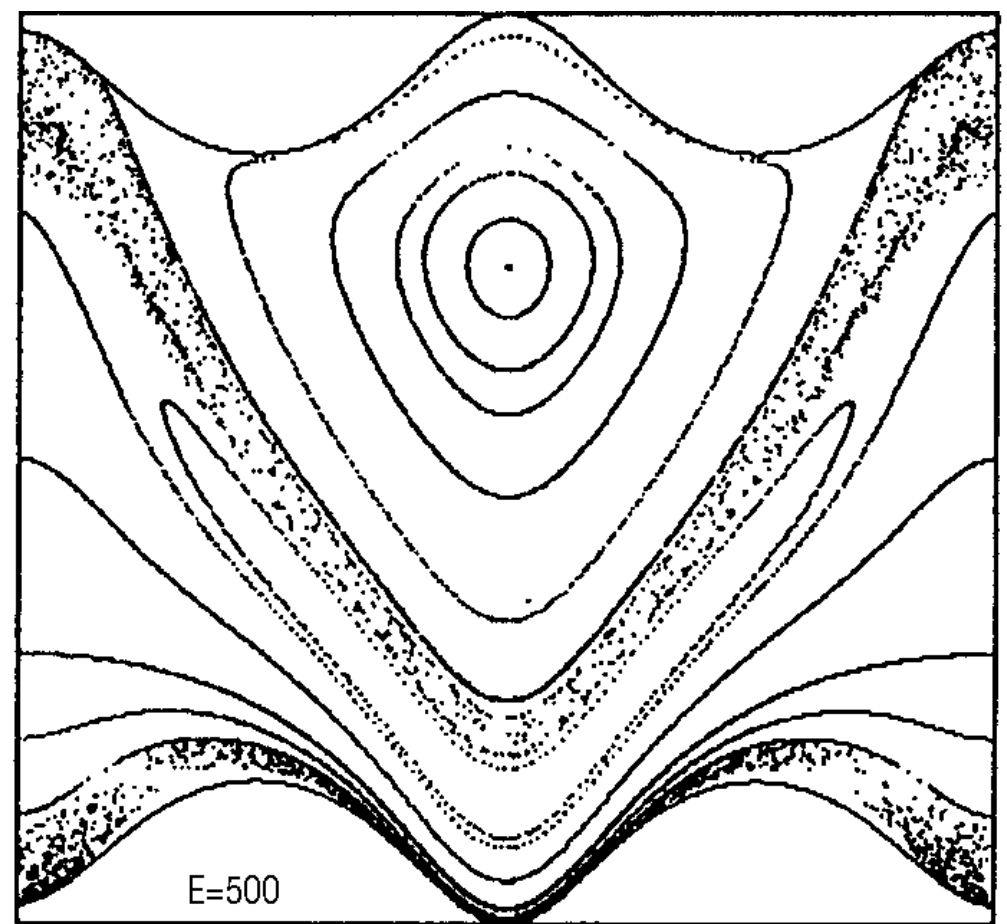
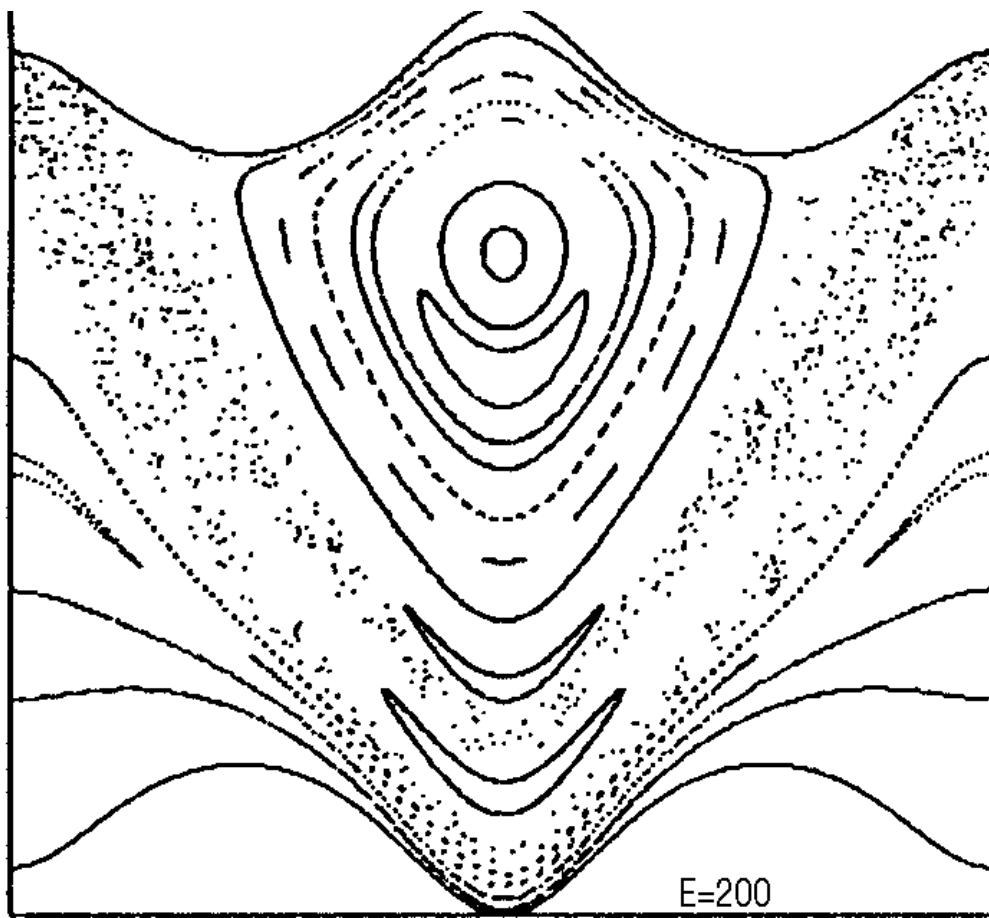


Fig. 5.22. Poincaré section for the double pendulum at energy $E_{\text{tot}} = 120$.



Poincaré-Schnitte fürs Doppelpendel, $E = 200$ und 500 .

Das letzte Bild bei sehr hoher Energie wird dominiert durch einen stabilen periodischen Orbit, der einer Rotation des Pendels in gestreckter Konfiguration ($\phi = \psi$) entspricht. Die Energie ist hier so groß, dass das Gravitationsfeld die Rolle der „kleinen Störung“ spielt, die die geordneten Phasenraumstrukturen der freien Rotation zerstört.

Das Hénon-Heiles-System

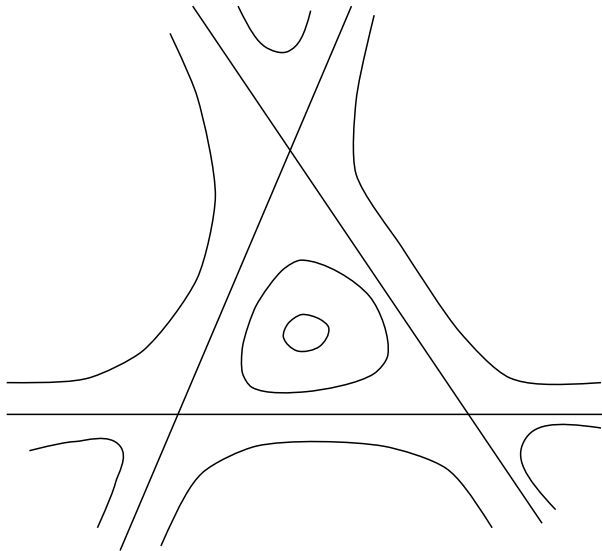
Literatur: Chapt. 8 in M. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*.

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{q_2^3}{3}, \quad (21)$$

also zwei nichtlinear gekoppelte harmonische Oszillatoren. In Polarkoordinaten lautet das Potential

$$V(\vec{r}) = \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \sin 3\phi, \quad (22)$$

wobei ϕ der Winkel bezüglich der q_2 -Achse ist. Hier sieht man, dass das Potential eine dreizählige Symmetrie hat, ein Minimum im Ursprung und drei Sattelpunkte, über die das Teilchen bei genügend hoher Energie ins Unendliche entweichen kann. (s. Skizze der Äquipotentiallinien)



Das System kommt aus der Astrophysik und beschreibt die ebene Bewegung eines Teilchens (Stern) in einem Potential mit gestörter Zylindersymmetrie (Galaxis). Es ist eines der am ausführlichsten untersuchten nichtlinearen Systeme.

Eine leichte Variation erhält man, wenn man den Term $q_2^3/2$ in (21) wegläßt. Das ist das sog. Barbanis-System, das gleichfalls astronomischen Ursprungs ist. Auch hier gibt es Sattelpunkte im Potential, etc.

Das quadratisch-quartische System

Literatur: F.J. Romeiras, J. Math. Phys. **36**, 3559 (1995).

Wissenschaftssoziologische Randbemerkung: Wer hätte gedacht, dass man heutzutage noch mit der Lösung eines klassisch-mechanischen Problems mit zwei Freiheitsgraden wissenschaftlichen Lorbeer ernten kann ?

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + Aq_1^2 + Bq_2^2 + \alpha q_1^4 + \beta q_2^4 + \delta q_1^2 q_2^2. \quad (23)$$

Das System hat *vier* nichttriviale ($\delta \neq 0$) integrable Fälle, und in allen ist die zweite Invariante explizit bekannt, ebenso wie die Variablen, in denen die Bewegungsgleichungen separieren. (Diese Variablen ergeben sich nicht automatisch bei Kenntnis der Invarianten, d.h. Integrabilität impliziert nicht Separabilität, vgl. Gutzwiller.) Hier nur die Bedingungen für Integrabilität:

$$(I)\beta = \alpha, \quad \delta = 2\alpha, \quad \alpha, A, B \text{ beliebig.} \quad (24)$$

(Dann ist der quartische Term rotationsinvariant, nicht aber der quadratische.)

$$(II)\beta = \alpha, \quad \delta = 6\alpha, \quad B = A, \quad \alpha, A \text{ beliebig} \quad (25)$$

$$(III)\beta = 16\alpha, \quad \delta = 12\alpha, \quad B = 4A, \quad \alpha, A, \text{ beliebig.} \quad (26)$$

$$(IV)\beta = 8\alpha, \quad \delta = 6\alpha, \quad B = 4A, \quad \alpha, A, \text{ beliebig.} \quad (27)$$

Für $A = B = 0$ ist das Potential eine homogene Funktion 4. Grades in den q s und das System besitzt *mechanische Ähnlichkeit* (vgl. z.B. Landau und Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik I, Mechanik), d.h. man kann z.B. aus einer gegebenen Bahn durch geeignete Transformationen von Koordinaten und Zeit eine ähnliche Bahn mit einer anderen Gesamtenergie erzeugen. Daraus folgt z.B. dass Poincaréschnitte bei verschiedenen Energien sich aufeinander transformieren lassen. Man muß dann nur einen anschauen. (Wer je einen Sack voll Poincaréschnitte erzeugt hat, weiß das zu schätzen.) Man hat dann ein System von zwei gekoppelten *quartischen* Oszillatoren.

Für das quadratisch-quartische System lassen sich die Lyapunov-Exponenten analytisch ausrechnen.

Übergang zum „Soft Chaos“: das KAM-Theorem

Kolmogoroff (1954), Arnold (1963), Moser (1962)

Erfahrung: Integrale Bewegung geht nicht schlagartig in chaotische über, sondern allmählich.
Beispiel: Vom Minimalwert aus zunehmende Energie beim Doppelpendel bewirkt, dass das System zunehmend nichtlineare Bereiche der potentiellen Energie „erkundet“, so dass reguläre Bereiche im Phasenraum bzw. Poincaréschnitt zugunsten von chaotischen verschwinden.

KAM-Theorem: wie geht diese Verdrängung beim **langsamen** Einschalten einer **weichen** Nichtintegrität vor sich? Wir geben hier nur eine ganz grobe Idee von der Aussage des Theorems; Details z.B. bei Lichtenberg und Lieberman.

„Gestörtes“ integrables System

$$H(\vec{I}, \vec{\theta}) = H_0(\vec{I}) + \mu V(\vec{I}, \vec{\theta}). \quad (28)$$

$H_0(\vec{I})$ ist, da nur von den Wirkungsvariablen abhängig, integrabel. μ ist ein Parameter, mit dem die „Stärke“ der nichtintegrablen **Störung** $V(\vec{I}, \vec{\theta})$ gesteuert werden kann. $V(\vec{I}, \vec{\theta})$ erfüllt gewisse Glattheitsbedingungen.

KAM: Für hinreichend kleines μ werden die meisten invarianten Tori der integrablen Bewegung nicht zerstört, sondern nur verformt

Welche Tori werden zerstört? Betrachte nur zwei Freiheitsgrade; Torus ist dann charakterisiert durch das Verhältnis ω_1/ω_2 zweier Umlauffrequenzen, die **Windungszahl**. **Rationale Windungszahlen destabilisieren den Torus**.

Grund: Nichtlinearitäten führen zu höheren Harmonischen; z.B.

$$\cos^4 \omega t = \frac{1}{8}(\cos 4\omega t + 4 \cos 2\omega t + 3).$$

Wenn dann

$$n\omega_1 = m\omega_2 \quad (29)$$

ist, kann es zu Resonanzen kommen, die den Torus zerstören. Formal sieht man das an der „Störungsentwicklung“, bei der man den Einfluss des Zusatzterms in H nach Potenzen des kleinen Parameters μ zu entwickeln versucht. In den **Nennern** der Entwicklungskoeffizienten ergeben sich dann Kombinationen $n\omega_1 - m\omega_2$.

Irrationale Tori sollten also widerstandsfähiger gegen das Chaos sein. Es gibt nun unterschiedliche Grade von Irrationalität. Eine reelle Zahl heißt irrationaler als eine andere, wenn sie schlechter durch eine rationale Zahl approximierbar ist. Wenn die Windungszahl eines Torus so irrational ist, dass

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m}{s} \right| > \frac{K(\mu)}{s^{2.5}} \text{ für alle } m, s \quad (30)$$

wobei $K(\mu) \rightarrow 0$ mit $\mu \rightarrow 0$, wenn sie also nur **schlecht** durch eine rationale Zahl approximierbar ist, dann ist der entsprechende Torus für kleine μ invariant. Die Abbildung (aus Korsch-Jodl) zeigt die durch (30) ausgeschlossenen Bereiche für kleine Nenner s (mit $K = 0.3$).

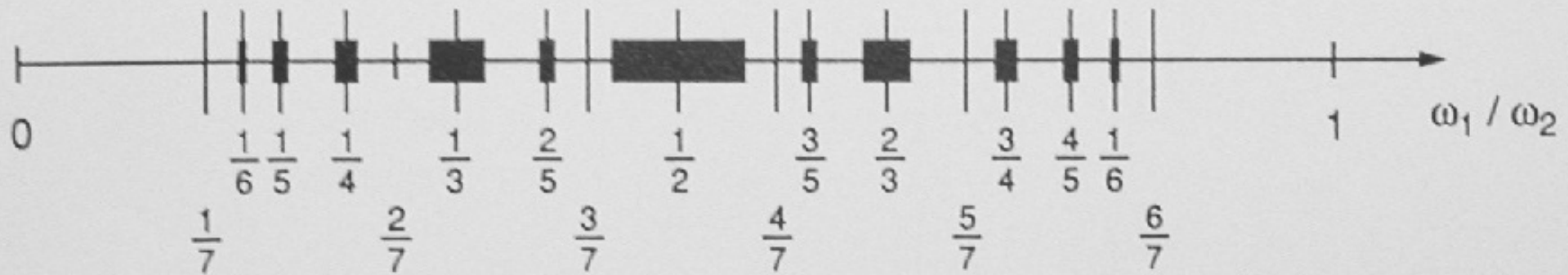


Fig. 2.4. Destroyed zones of length $K/s^{2.5}$ at rational frequency ratio r/s .

Die **irrationalste** Zahl ist

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (31)$$

die mit dem so genannten „goldenen Schnitt“ der Antike verbunden ist: Eine Strecke so zu teilen, dass der kleinere Teil sich zum größeren so verhält wie der größere zur ganzen Strecke; man teilt eine Strecke der Gesamtlänge τ in ein Stück der Länge 1 und eines der Länge $\tau - 1$. Rationale Approximationen von τ sind die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder der Zahlenfolge $\{f_i\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ d.h. $f_{i+1} = f_{i-1} + f_i$. (Fibonacci-Zahlen, nach Leonardo Pisano Fibonacci, 1170-1250).

Facit: **Golden lebt am längsten.**

Getriebene gedämpfte Systeme mit einem Freiheitsgrad

Wir betrachten gedämpfte getriebene *anharmonische* Oszillatoren. Unsere Diskussion wird „mechanisch“ sein, aber die Realisierung solcher Systeme ist „elektrisch“ leichter. (Weniger Umwelteinflüsse, höhere Frequenzen und damit kürzere Messzeiten).

Das gedämpfte getriebene ebene Pendel

Literatur: S.N. Rasband, Chaotic dynamics of nonlinear systems, Chapt. 6.4. (Bilder aus dieser Quelle)

Läßt sich elektronisch gut simulieren; Bewegungsgleichung beschreibt auch Phasendifferenz an einem getriebenen „Josephson-Kontakt“ (supraleitendes Bauelement).

DGI:

$$\ddot{x} + \Omega^2 \sin x = -\alpha \dot{x} + f \cos \omega t. \quad (32)$$

Da das System nur einen Freiheitsgrad besitzt, kann man im Prinzip die Bahnen im 2dim Phasenraum leicht verfolgen bzw. plotten. Für ein ungetriebenes ($f = 0$) Pendel werden die Trajektorien sich spiralförmig auf einen Punkt $x = 2n\pi, \dot{x} = 0$ zubewegen.

Für etwas größeres f wird das System sich irgendwann einmal (vielleicht) in einem dynamischen Gleichgewicht zwischen Reibung und Antrieb befinden; dies entspricht dem Umlauf auf einem „Grenzzyklus“ im Phasenraum. Für stärkeren Antrieb kann die Bewegung kompliziert werden.

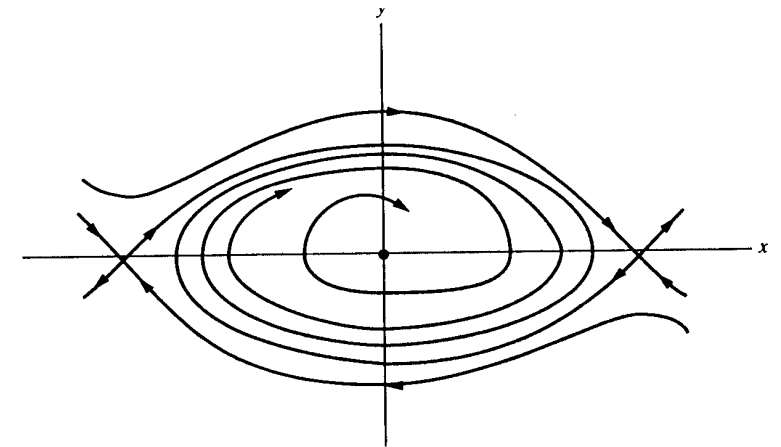
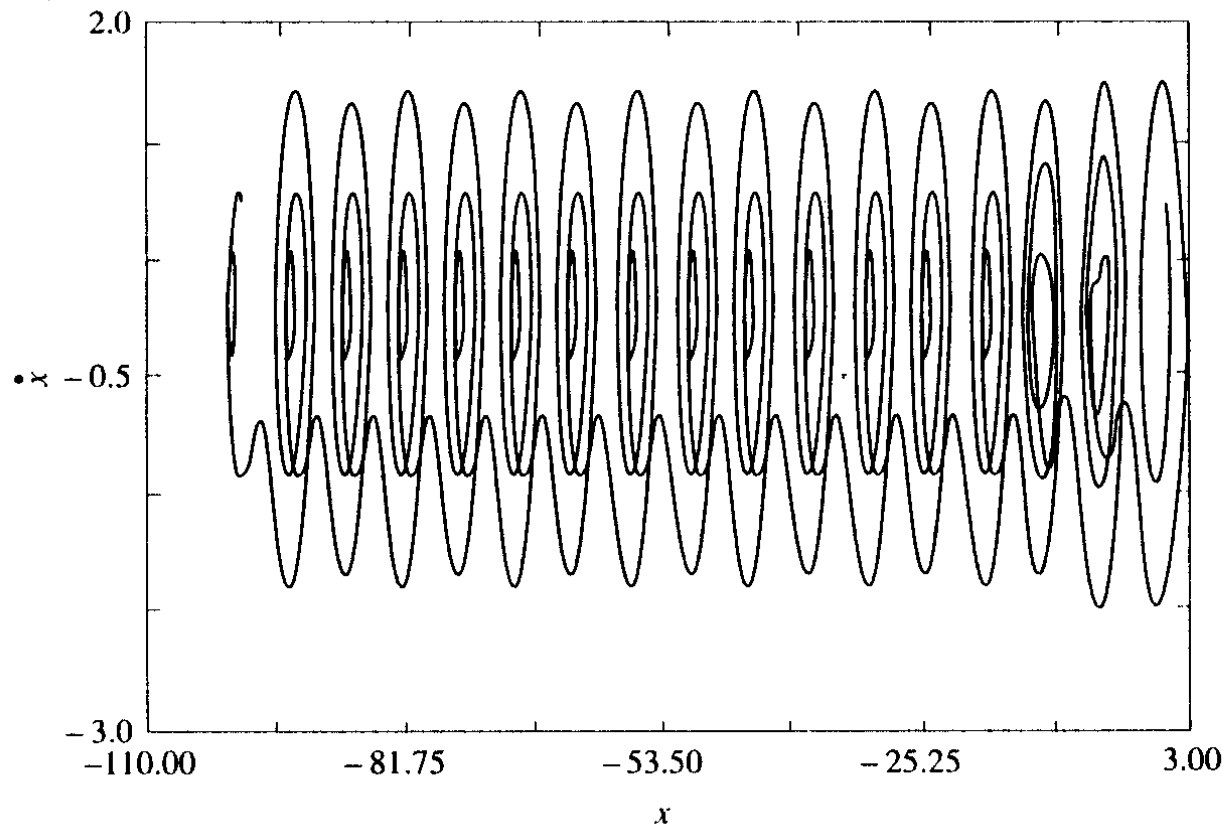


FIGURE 6.8 Phase curves of a damped simple pendulum.



Hier macht das Pendel immer drei Schwingungen und dann einen Überschlag.

FIGURE 6.11 Trajectory segment for a period-3 limit cycle. Parameters and initial conditions are the same as in Fig. 6.10 except $\omega = 0.694$.

Da Bilder der Bahnen irgendwann zu detailreich werden, versucht man auch hier die Datenflut zu reduzieren, ähnlich wie man das bei den autonomen Systemen mit 2 Freiheitsgraden mit Poincaréplots tut. Hier verwendet man stattdessen *stroboskopische Plots*, bei denen der Phasenraumpunkt (x, \dot{x}) zu Zeiten $0, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega}, \dots$, also jeweils nach einer Periode der treibenden Kraft, geplottet wird.

Die Komplexität des getriebenen gedämpften Pendels sieht man gut in dieser Abbildung, in der aufgetragen ist, in welcher Art von Endzustand das System landet, wenn es für einen bestimmten (festen) Anfangszustand und $\alpha = 0.2$ mit einer gegebenen Frequenz ω (in Einheiten von Ω) und Amplitude f getrieben wird. In den dunkleren Bereichen ist die Bewegung chaotisch, in dem zusätzlich schraffierten Bereich kompliziert periodisch. In den mit einem Zahlenpaar gekennzeichneten Bereichen ist die Bewegung periodisch mit einem Vielfachen der Antriebsperiode (*Subharmonische*). Die zweite Zahl hat mit der Realisierung als Josephson-Kontakt zu tun.

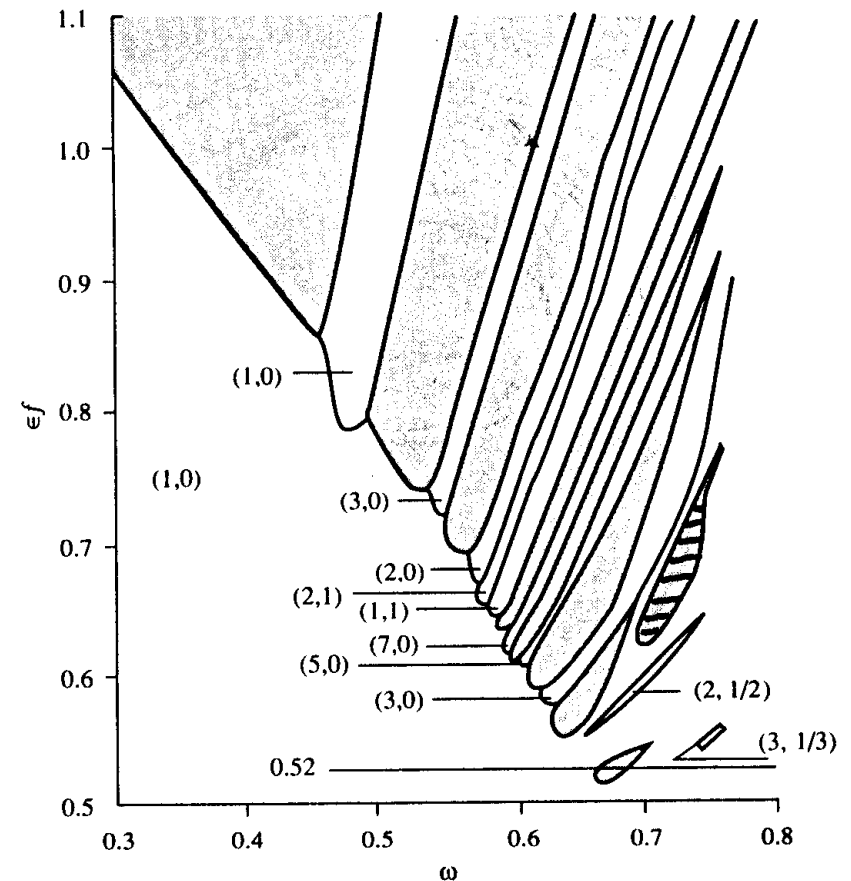


FIGURE 6.9 Shows dynamical behavior for a region of parameter space. For this plot $\alpha = 0.2$ in (6.29). The cross-hatched region represents chaos; the hatched region is for complicated periodic behavior and the indexing is for mode-locked states. From Pederson and Davidson (1981).

Man beachte, dass das Bild sich völlig ändern kann (und wird), wenn man mit einem anderen Anfangszustand beginnt.

Der Duffing-Oszillator: Literatur: Korsch-Jodl Chapt. 8; die Originalarbeit erschien bemerkenswerterweise schon 1918.

DGL:

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \cos \omega t. \tag{33}$$

Ohne Reibung und Antrieb ($r = f = 0$) beschreibt das die Bewegung in einem Potential

$$V(x) = \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4. \tag{34}$$

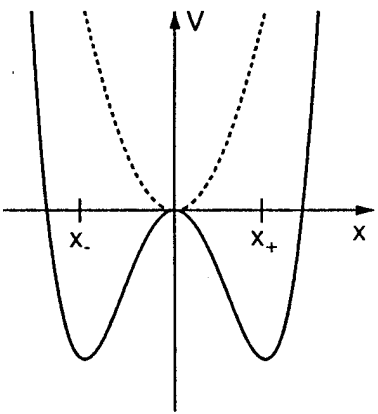
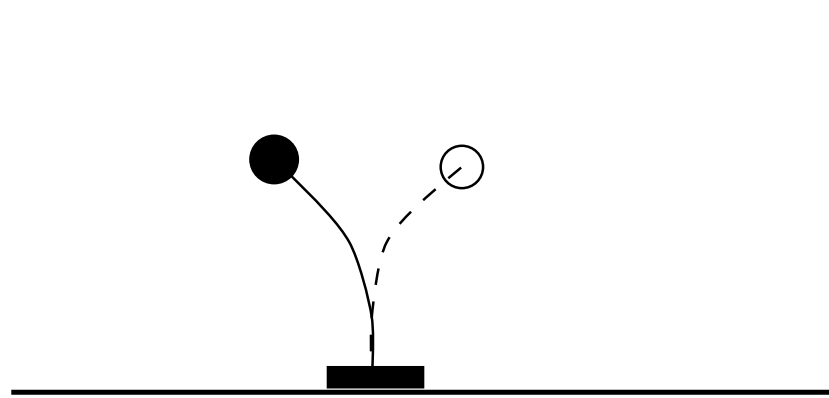


Fig. 8.1. Potential $V(x)$ for positive (\cdots) and negative ($-$) values of ω_0^2 .

Je nach Vorzeichen von ω_0^2 ist das Potential entweder mono- (Bild aus Korsch-Jodl) stabil oder bistabil.



Dies Potential ist insofern universell, als es die führenden Terme der Taylorentwicklung eines beliebigen symmetrischen anharmonischen Potentials umfaßt. Eine simple mechanische Realisierung benutzt eine unten vertikal eingespannte Blattfeder im Schwerfeld mit einer geeigneten Masse am oberen Ende; das System hat dann zwei stabile Gleichgewichtslagen. Vgl. auch das aus dem Physikpraktikum bekannte „Pohlsche Rad“ (Drehpendel mit Unwucht).

Dass die resultierende Bewegung kompliziert aussehen kann, sei durch zwei Bilder (eine Trajektorie, eine stroboskopische Abbildung, beide aus Korsch-Jodl) demonstriert.

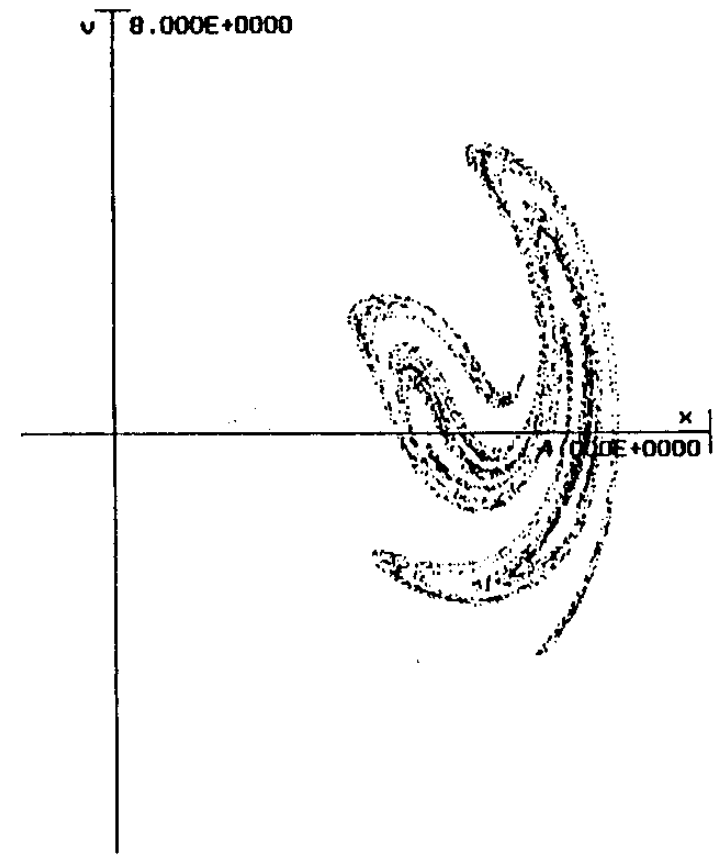
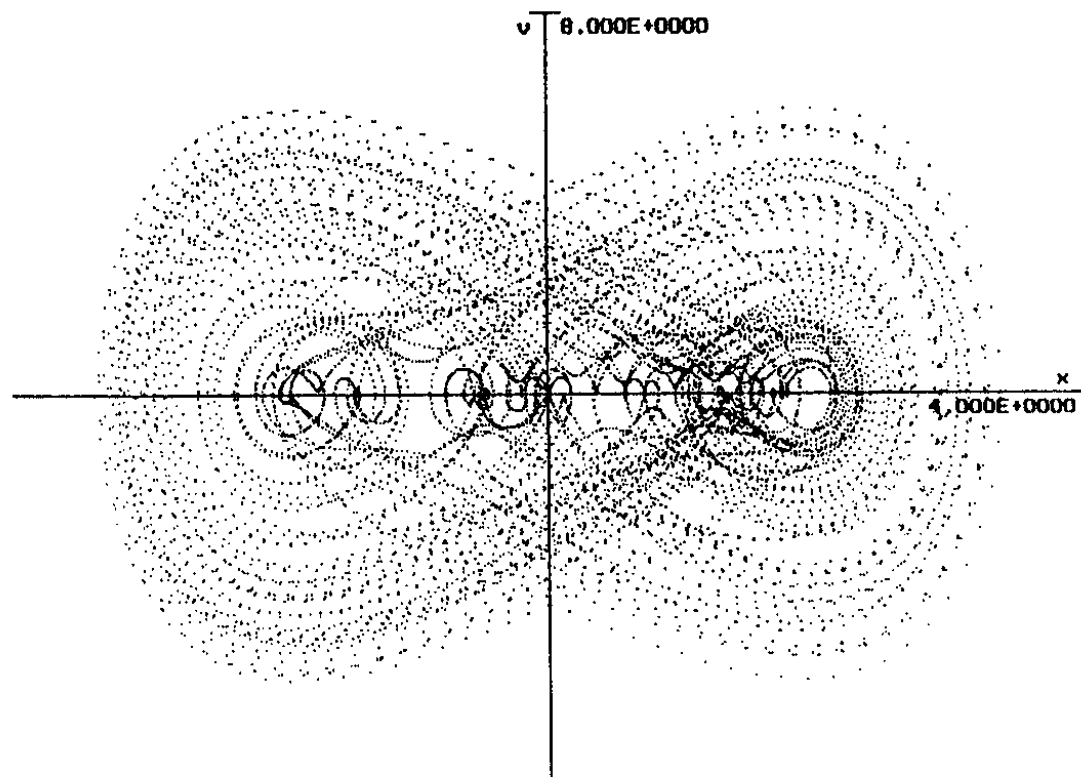


Fig. 8.14. Phase space plot of a trajectory approaching a strange attractor.

Ein komplexes System, auf wenige Freiheitsgrade reduziert: das Lorenz-System

Literatur: Schuster, *Deterministic Chaos*.

Eine Flüssigkeitsschicht mit positivem Volumenausdehnungskoeffizienten werde von unten erhitzt (oder von oben gekühlt). Die warme Flüssigkeit dehnt sich aus und möchte aufsteigen, wird aber durch Viskosität gebremst. Wenn die Temperaturdifferenz nicht zu groß ist, kann der T -Gradient durch Wärmeleitung ohne Strömung aufrechterhalten (bzw. die Wärme abgeführt) werden. Wird die T -Differenz zu groß, setzen Konvektionsströmungen ein, idealerweise in Form von Konvektionsrollen: [Rayleigh-Bénard-Instabilität](#). Statt einer Flüssigkeitsschicht darf es auch die Atmosphäre sein (\rightarrow Meteorologie).

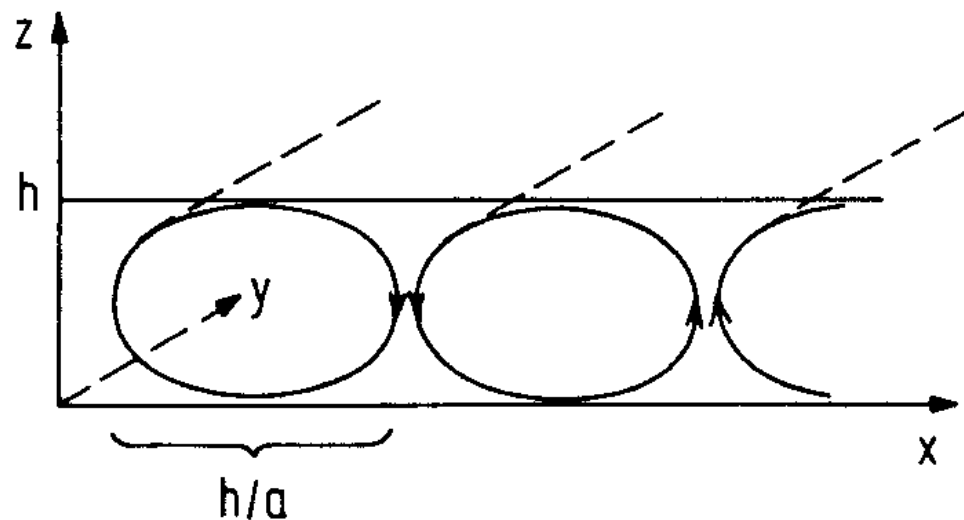


Abb. 161: Konvektionsrollen und Geometrie beim Bénardexperiment.

(Bild aus Schuster)

Konvektionsrollen werden in praxi durch Randbedingungen oft leicht deformiert und verwandeln sich in Konvektionszellen, die man häufig beobachten kann:

- in ungerührtem Milchkaffe
- in einer Ölschicht in einer Pfanne mit hinreichend dickem Boden (homogene T -Verteilung)
- in der Atmosphäre (Reihen von "Schäfchenwolken")

Das Lorenz-Modell beschreibt das „Einsetzen“ der Konvektionsrollen. Diese werden beschrieben durch eine wellenförmige **Modulation der Temperatur und der Strömungsgeschwindigkeit** → räumliche Fourier-Entwicklung dieser Größen. Einsetzen in die **Navier-Stokes-Gleichung** (Impulsbilanz in Hydrodynamik mit Viskosität), **Wärmeleitungsgleichung** und **Kontinuitätsgleichung** liefert, wenn man nur die wichtigsten (=langwelligen) Fourierkoeffizienten mitnimmt, das **Lorenz-Gleichungssystem**

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= rX - Y - ZX \\ \dot{Z} &= XY - bZ.\end{aligned}\tag{35}$$

$X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$ sind die maßgeblichen Fourier-Amplituden, der Punkt die Ableitung nach einer geeignet skalierten Zeit, σ ist die Prandtl-Zahl (Verhältnis Viskosität/Wärmeleitfähigkeit), b hängt nur vom Seitenverhältnis a ab und $r \propto \Delta T$ ist der externe Kontrollparameter. (Mehr Details in Anhängen bei Schuster) Es ergibt sich ein kritischer Wert für r , oberhalb dessen

Chaos auftritt:

$$r_c = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}. \quad (36)$$

Das Lorenzmodell wurde nicht diskutiert, weil es so wichtig wäre, sondern weil hier ein recht komplexes (auch mit Computer nicht ohne Näherungen behandelbares) physikalisches Problem auf seine wesentlichen Freiheitsgrade reduziert werden kann.

Eines der bekanntesten Chaos-Bilder (aus Schuster) zeigt eine Trajektorie des Lorenzmodells ($r = 28, \sigma = 10, b = 8/3$, Startpunkt $(0, 0.01, 0)$). Diese lässt ahnen, wo die beiden instabilen Fixpunkte des Systems sitzen und gibt einem ein Gefühl für die Struktur des "Attraktors", zu dem für lange Zeiten "alle" Trajektorien dieses dissipativen chaotischen Systems hingezogen werden, obwohl sich für kleinste Änderungen in den Anfangsbedingungen im Detail völlig andere Trajektorien ergeben.

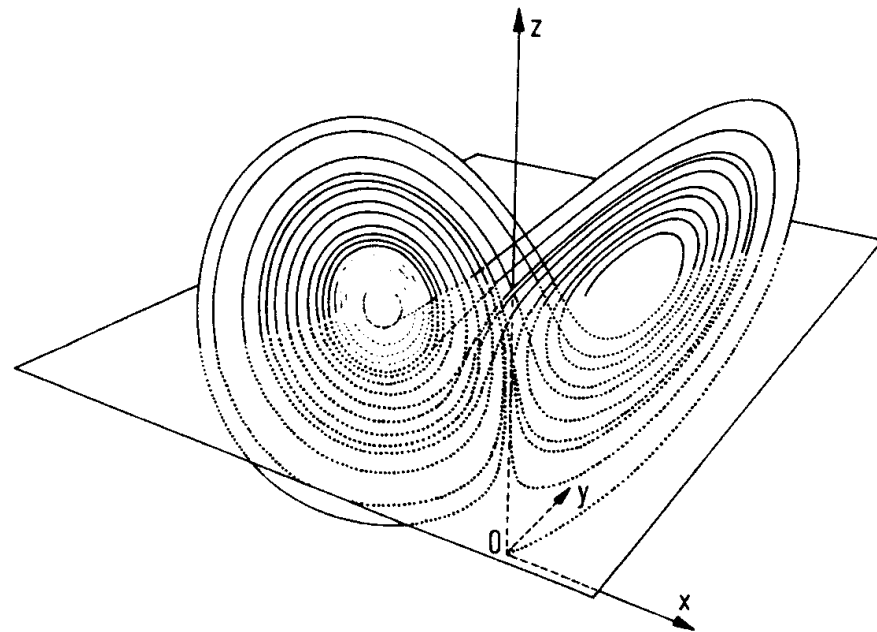


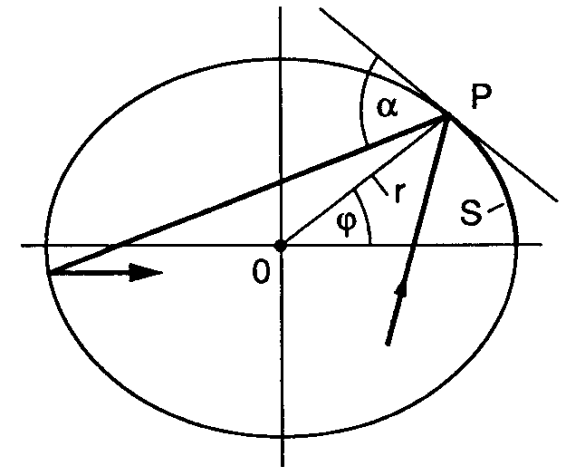
Abb. 66: Der Lorenzattraktor (nach einer Computerrechnung von Lanford 1977).

Nichtlineare gekoppelte Differentialgleichungen beschreiben auch viele andere komplexe dynamische Modelle, z.B. Dynamik von Räuber-Beute-Beziehungen in Ökosystemen (*Lotka-Volterra-Modell*), autokatalytische chemische Reaktionen (*Belousov-Zhabotinskii-Reaktion*) u.v.a.m.

Billards: einfache Systeme mit „hartem“ Chaos

Billard= von reflektierenden Wänden begrenztes Gebiet in der Ebene, in dem sich ein Massenpunkt bewegt, **frei** bis auf Reflexionen am Rand \Rightarrow **keine** Bewegungsgleichungen müssen gelöst werden. Bewegung zwischen den Stößen mit der Wand ist trivial; vollständige Beschreibung durch Angabe von zwei Koordinaten für jeden Stoß n :

- Auftreffpunkt der Bahn am Rand, z.B. durch Angabe der Bogenlänge S_n bezüglich eines Referenzpunkts
- Einfallswinkel (=Ausfallswinkel) α_n bezüglich der lokalen Tangente an den Rand, z.B. als $p_n := \cos \alpha_n$.

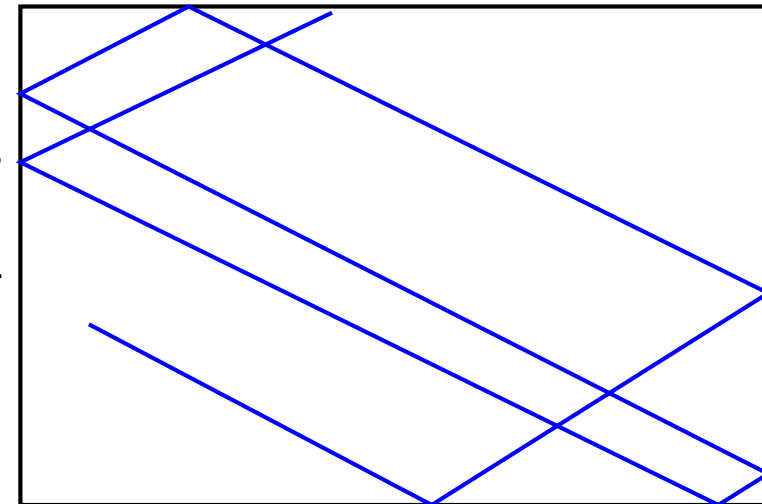


(Bild aus Korsch-Jodl)

Bei einem Billard ist die Dynamik tatsächlich **vollständig** beschrieben durch die Abbildung der (zwei) Koordinaten eines Auftreffpunkts auf die des nächsten. Das Studium der Eigenschaften von Abbildungen hat also durchaus etwas mit der Dynamik realer Systeme zu tun!

Das Rechteckbillard

ist integrabel: $\alpha_n = \alpha$ oder $\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \forall n$.



Das Kreis-Billard

ist integrabel: Rotationsinvarianz \Rightarrow Drehimpulserhaltung; $p_n = \text{const}$

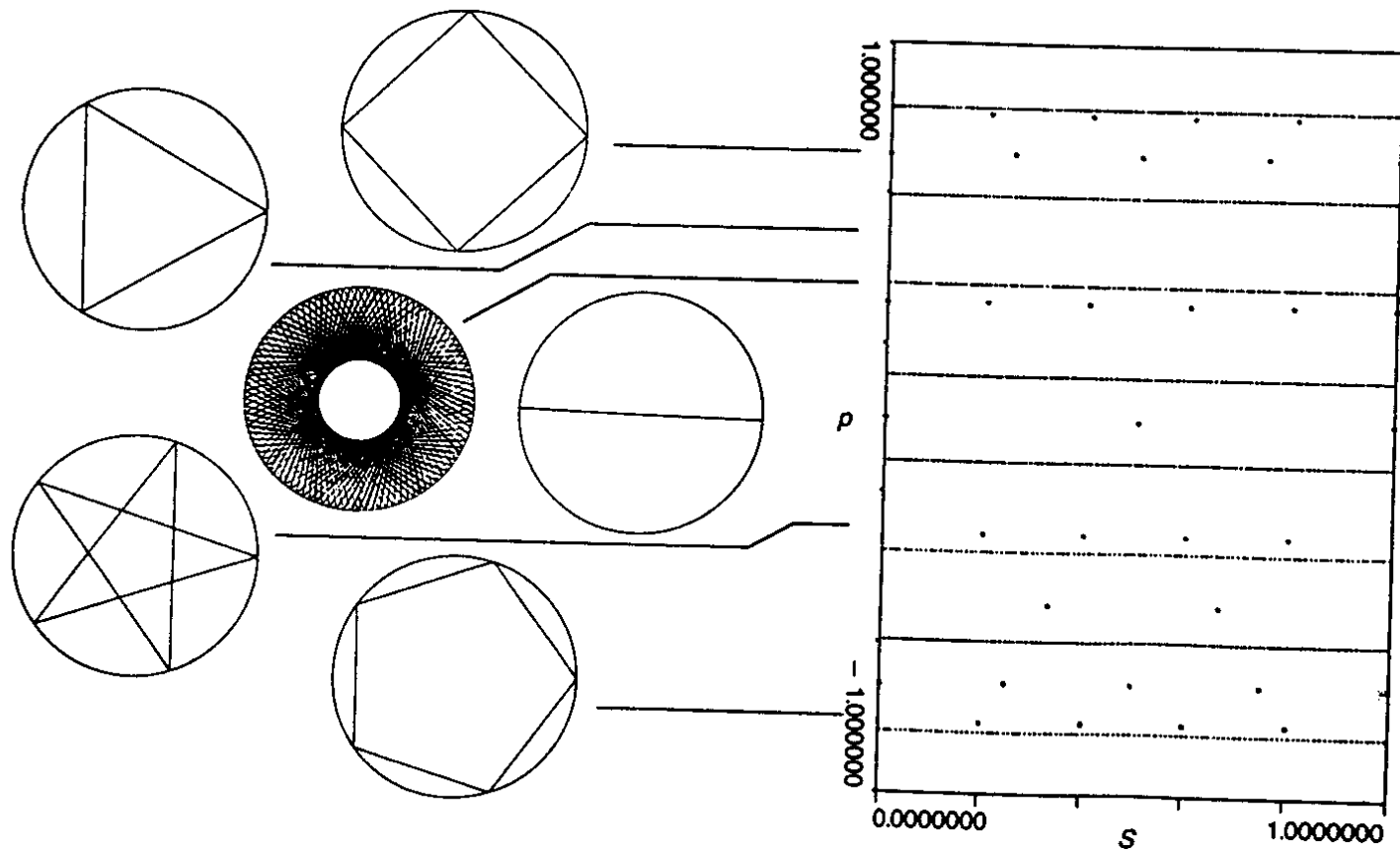


Fig. 3.3. Circular billiard: Trajectories and Poincaré section for periodic and non-periodic orbits. (Reproduced, with permission, from [3.7].)

(Bild aus Korsch-Jodl)

Das Ellipsen-Billard

ist integrabel: das Produkt der Drehimpulse bezüglich der beiden Brennpunkte ist erhalten; der „Poincaréplot“ erinnert an das Phasenraumbild des freien Pendels.

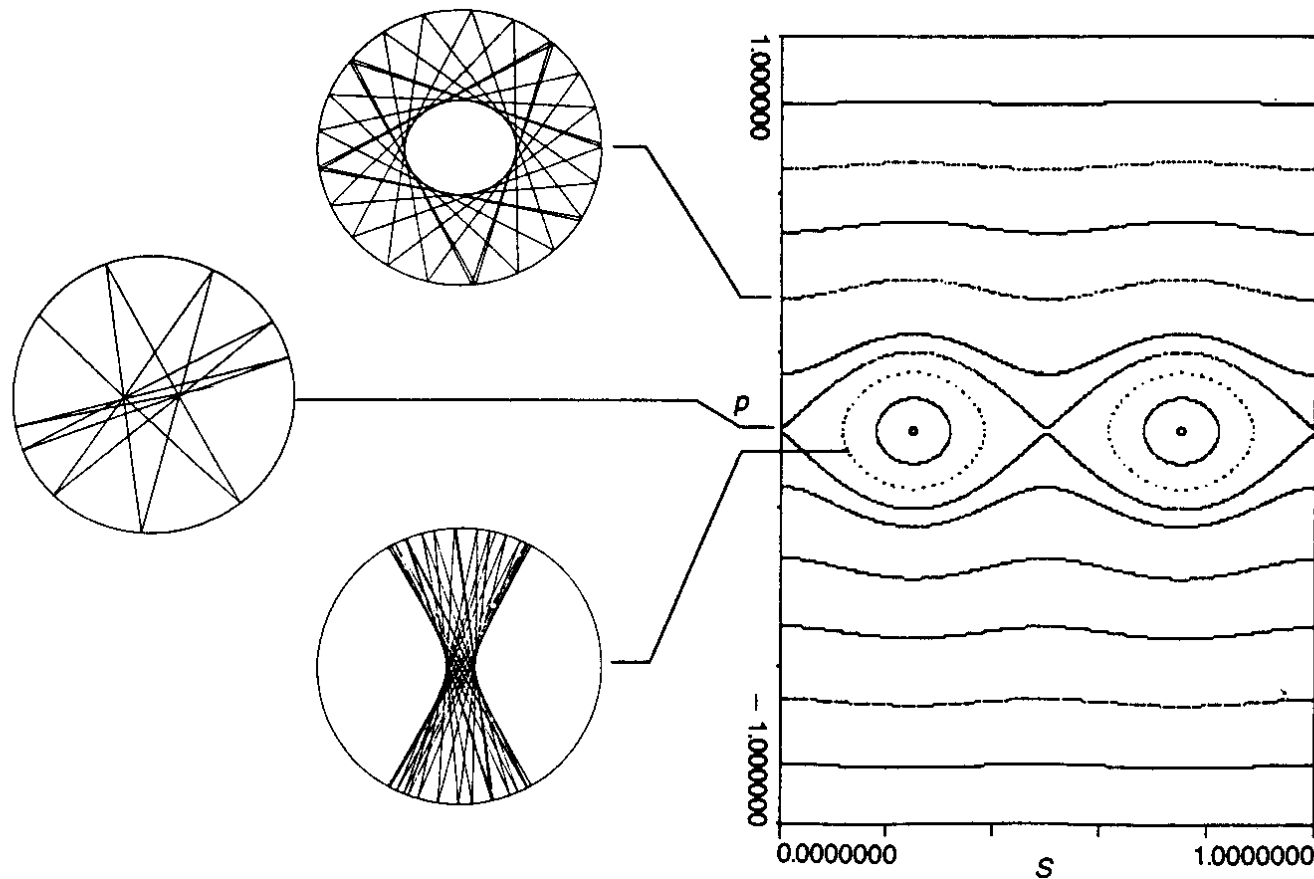
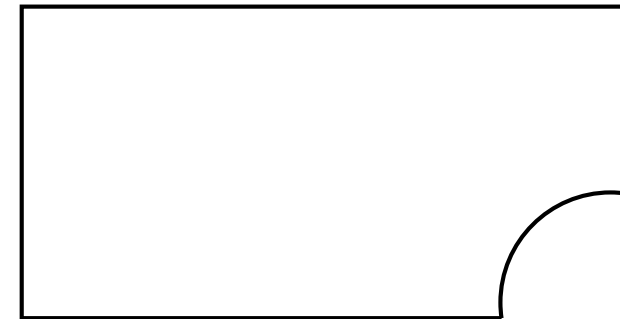
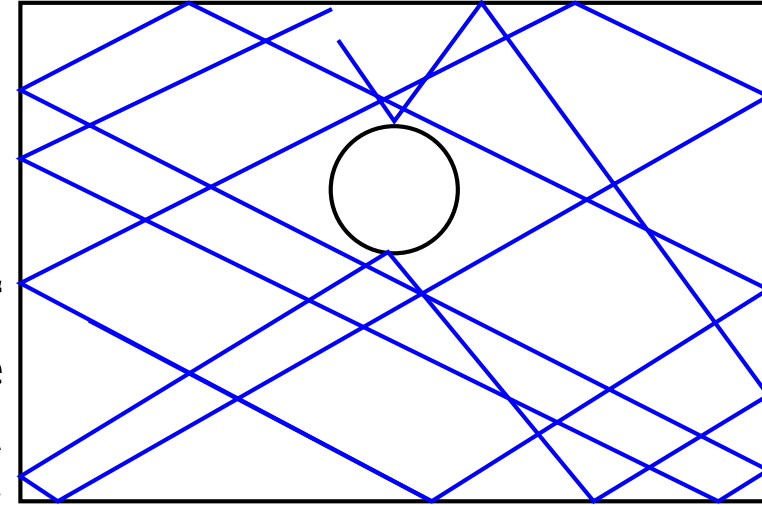


Fig. 3.4. Elliptical billiard with eccentricity $\varepsilon = 0.2$: Trajectories and Poincaré phase space section. (Reproduced, with permission, from [3.7].) This figure is stored (files ELLIPSE.PIC, -.DAT).

(Bild aus Korsch-Jodl)

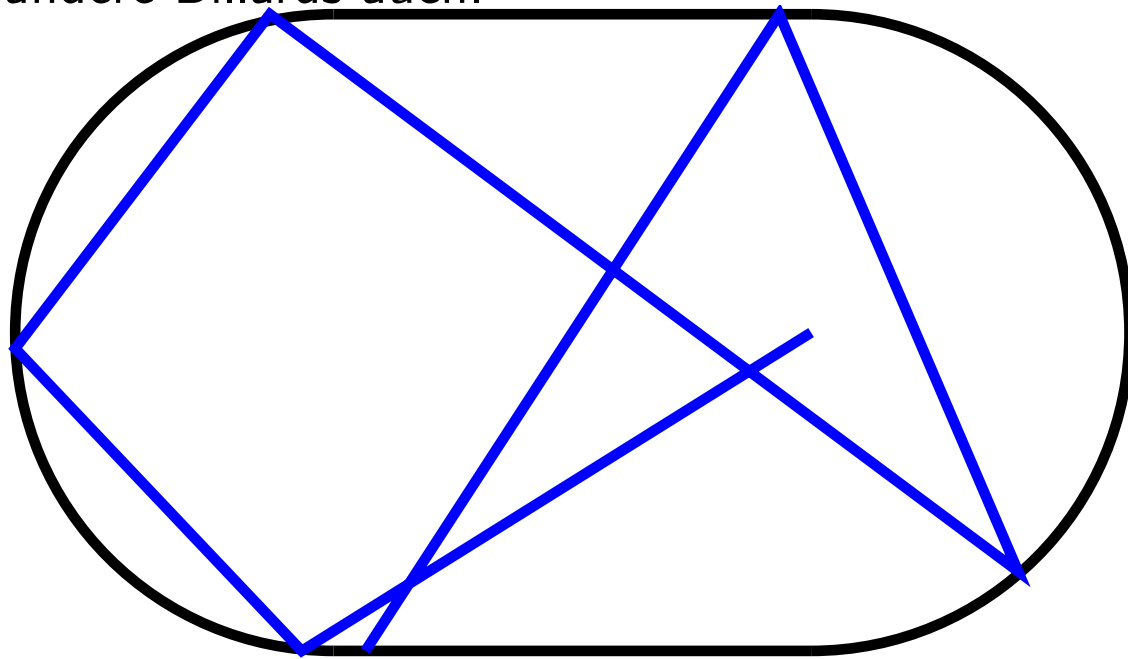
Das Sinai-Billard

ist nicht integrabel, sondern **ergodisch**: für fast jede Anfangsbedingung kommt das System jedem Punkt im „Phasenraum“ der (S_n, p_n) für lange Zeiten beliebig nahe. Ergodizität ist eine wichtige Eigenschaft für die Statistische Mechanik; sie erlaubt es, die **zeitliche Mittelung** über den Verlauf der Bewegung eines Systems zu ersetzen durch die **Mittelung über den Phasenraum**. (Diese Eigenschaft wird **fast immer** angenommen, kann aber **fast nie** streng bewiesen werden.)



Das Stadion-Billard

(=Rechteck mit zwei „angeklebten“ Halbkreisen)
ist nicht integrabel, sondern gleichfalls ergodisch.
Bewegung eines **quantenmechanischen** Teilchens
in einem solchen Gebiet wurde vielfach untersucht
und kann mithilfe elektromagnetischer Hohlraum-
resonatoren experimentell untersucht werden, wie
andere Billards auch.



o



(Bild aus Korsch-Jodl)

Ein Billard mit einstellbarem Chaos

Begrenzt durch die Kurve (in Polarkoordinaten)

$$r(\phi) = 1 + \epsilon \cos \phi \tag{37}$$

$\epsilon = 0$: Kreis; $\epsilon = 1$: Kardioide (Herzkurve);
dazwischen: „Pascalsche Schnecke“.

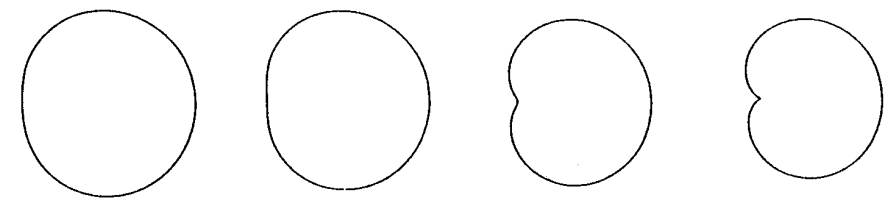


Fig. 3.8. The ‘typical’ cos-billiard for increasing deformation parameters $\epsilon = 0.4, 0.5, 0.8,$ and 1.0 .

(Bilder aus Korsch-Jodl)

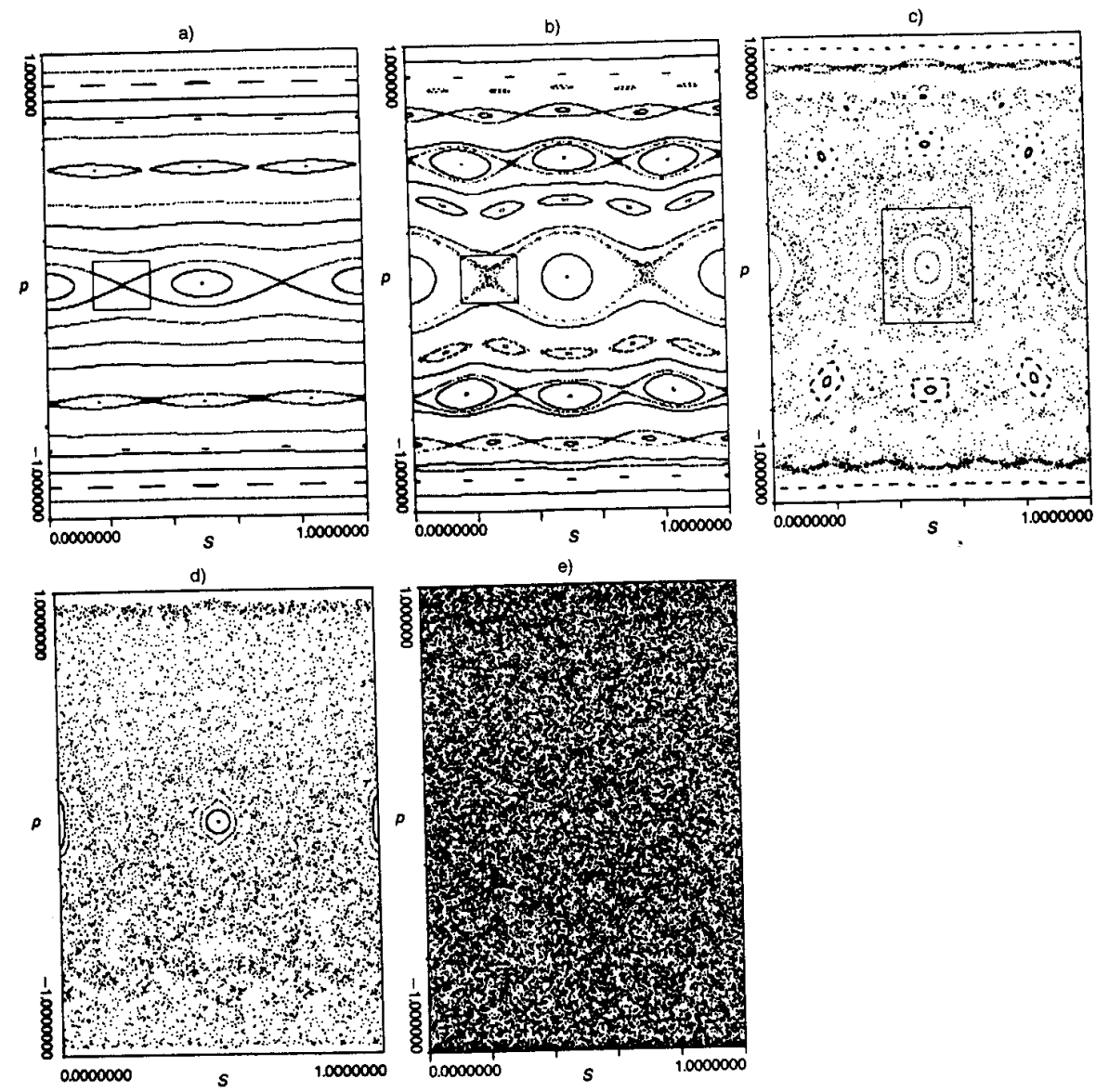


Fig. 3.9. Phase space diagram for the ‘typical’ cos-billiard for deformation parameters $\epsilon = 0.1$ (a), 0.2 (b), 0.3 (c), 0.4 (d), 0.5 (e). (Reproduced, with permission, from [3.7].) Figure (a) is stored on disk 2.

Sukzessive Vergrößerungen von Ausschnitten zeigen integrable Tori, verwoben mit chaotischen Bereichen auf allen Skalen.

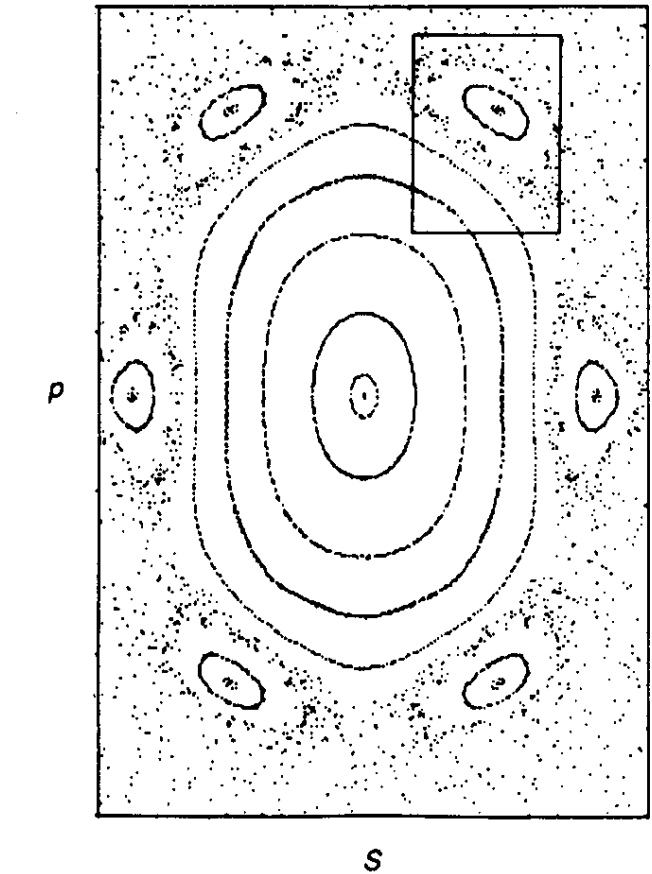


Fig. 3.10. Magnification of the neighborhood of the central fixed point in Fig.3.9 (c). (Reproduced, with permission, from [3.7].)

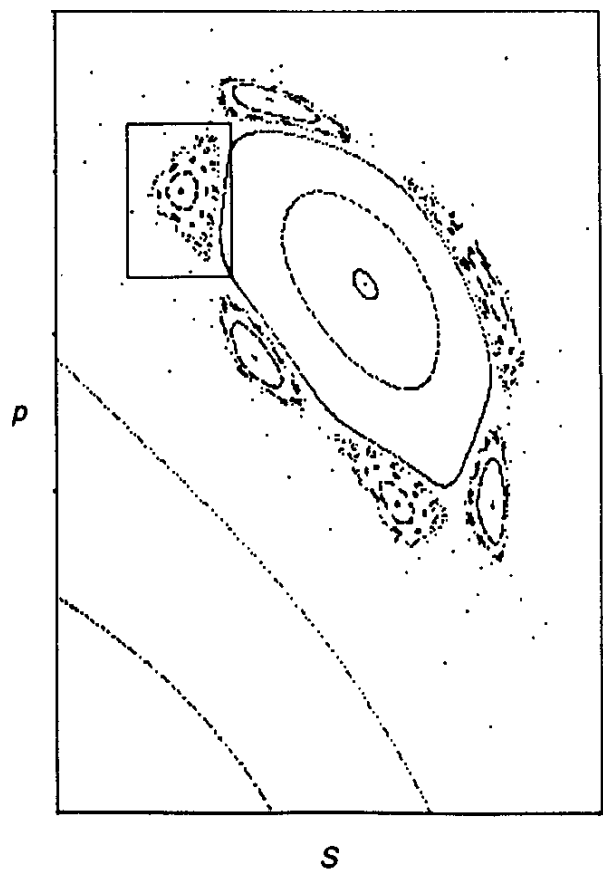


Fig. 3.12. Magnification of the island in the upper right corner of Fig.3.10. (Reproduced, with permission, from [3.7].)

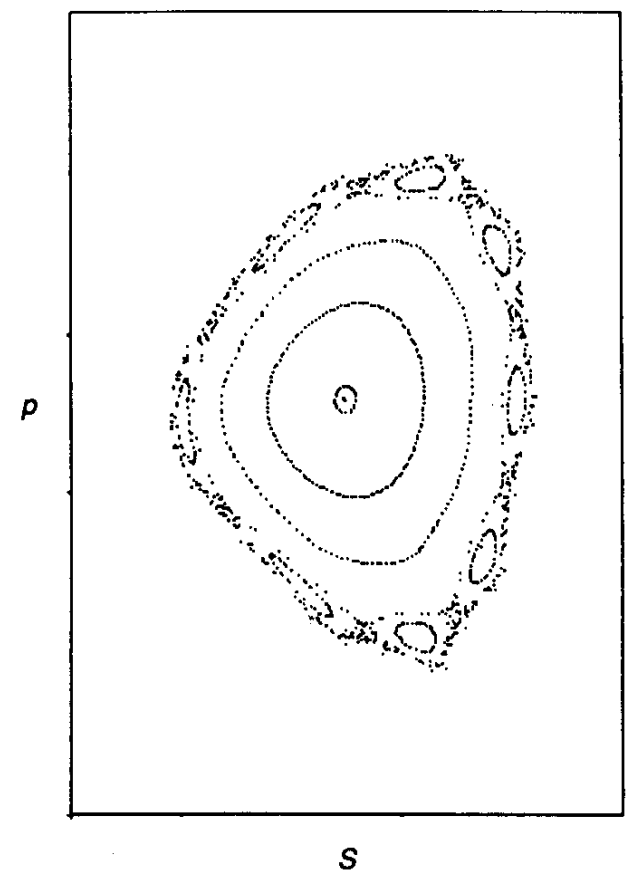
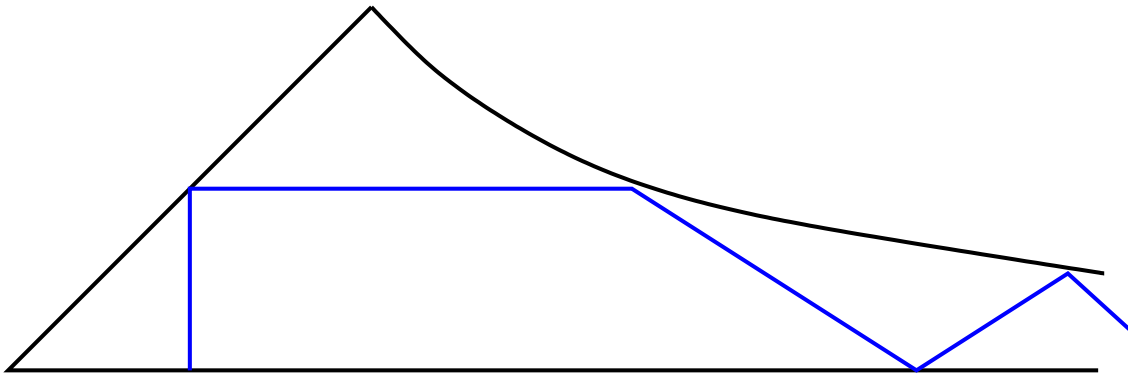


Fig. 3.13. Magnification of the island in the upper left corner of Fig.3.12. (Reproduced, with permission, from [3.7].)

Das Hyperbel-Billard

...ist als Programmier-Übung bestens geeignet für einen verregneten Nachmittag. Begrenzt durch die Kurven

$$y = 0 \quad ; \quad y = x \quad ; \quad y = \frac{1}{x} \quad (38)$$



Gegeben einen Startpunkt x_0 auf der x -Achse und einen Startwinkel α_0 , kann man (x_1, α_1) für den nächsten Stoß mit der x -Achse **analytisch** ausrechnen und z.B. x_n als Funktion von n auftragen. Ergebnis: das Teilchen unternimmt unterschiedlich weite „Ausflüge“ in Richtung großer x , kehrt aber **immer** wieder zurück.