

Computational Physics, Aufgabenblatt 3

Kevin Sedlaczek, Mona Kalthoff

12. Mai 2017

1 Der gute alte harmonische Oszillator

Es wird ein Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung um die Funktion

$$\vec{f} = \dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad (1)$$

zu integrieren. Dabei ist das Kraftfeld nicht zeitabhängig, wodurch die Funktion \vec{f} keine explizite Zeitabhängigkeit besitzt, daher sind im folgenden die Zeitabhängigkeiten in grau dargestellt. Außerdem wird im Folgenden $m = 1$ gesetzt. Innerhalb jedes Schrittes des Runge-Kutta-Verfahrens werden vier Hilfsgrößen berechnet:

$$\vec{k}_1 = h \cdot \vec{f}(t_n, \vec{y}_n) \quad (2)$$

$$\vec{k}_2 = h \cdot \vec{f}\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_1\right) \quad (3)$$

$$\vec{k}_3 = h \cdot \vec{f}\left(t_{n+\frac{1}{2}}, \vec{y}_n + \frac{1}{2}\vec{k}_2\right) \quad (4)$$

$$\vec{k}_4 = h \cdot \vec{f}(t_{n+1}, \vec{y}_n + \vec{k}_3) . \quad (5)$$

Dann ergibt sich für den nächsten Integrationsschritt mit Schrittweite h :

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6} \cdot (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) . \quad (6)$$

Das Kraftfeldes entspricht dem negativen Gradienten der potentiellen Energie, die kinetische Energie ist lediglich abhängig von der momentanen Geschwindigkeit:

$$-\vec{\nabla} E_{\text{pot}} = \vec{F}(\vec{r}) \quad E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot (\vec{v})^2 . \quad (7)$$

Für den Harmonischen Oszillator ist das Kraftfeld gegeben durch

$$\vec{F}_{\text{osz}} = -k \cdot \vec{r} , \quad (8)$$

und die zugehörige potentielle Energie ergibt sich zu

$$E_{\text{pot}} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{\dim(\vec{r})} (r_i)^2 . \quad (9)$$

Das Energieminimum liegt also immer bei $\vec{r} = \vec{0}$ und für $\vec{r} \neq \vec{0}$ wirkt eine rücktreibende Kraft in Richtung $\vec{r} = 0$, welche linear mit $|\vec{r}|$ zunimmt. Wie in Abbildung 1 zu sehen sind die Zeitentwicklungen der Koordinaten daher periodische Funktionen, also Sinus- oder Cosinusartige Funktionen (bzw. die Nullfunktion für Startbedingungen $\vec{r} = \vec{v} = \vec{0}$).

Existiert eine initiale Auslenkung, aber keine Startgeschwindigkeit, so liegen die Maxima, Minima und Nulldurchgänge der Koordinaten zum gleichen Zeitpunkt vor, und die initiale Auslenkung ist gleichzeitig die maximale Auslenkung. Ist jedoch eine Startgeschwindigkeit gegeben, so verschieben sich die Zeitpunkte der Maxima und Nulldurchgänge und auch die maximale Auslenkung nimmt zu.

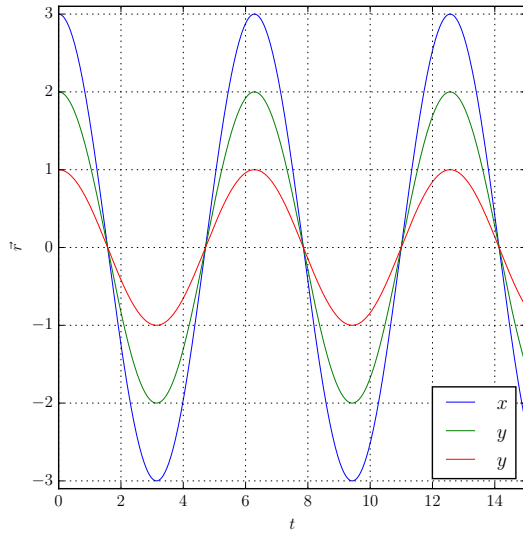
Die Periodendauer stimmt bei allen drei Koordinaten überein, sie ist unabhängig von der Schwingungsamplitude, und lediglich von der Kraftkonstante k des Oszialtors abhängig, welche in unserem Fall auf $k = m = 1$ gesetzt wurde. Damit ist sie ebenfalls unabhängig von der Energie des Systems. Dies wird bei der Betrachtung der Energie in Abbildung 2 deutlich. So ist die Gesamtenergie in beiden Fällen erhalten und potentielle und kinetische Energie schwingen in jedem Fall gegenphasig, dabei ist die Frequenz dieser Schwingungen in beiden Fällen doppelt so groß wie die der Schwingung der Koordinaten. Da sich die Systeme lediglich in ihrer Gesamtenergie, und nicht ihrer Kraftkonstanten unterscheiden, sind die Frequenzen der Schwingungen der potentiellen und kinetischen Energie für die verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten identisch. Lediglich ihre Amplitude ändert sich und weder die kinetische, noch die Potentielle Energie werden mehr null.

Betrachtet man die Trajektorien im Phasenraum, welche in Abbildung 3a) dargestellt sind, so zeigt sich dass die Trajektorien der x -Komponente des harmonischen Oszillators allgemein Ellipsenförmig, im Fall $m = 1$ sogar kreisförmig, sind. Auch das zuschalten eines weiteren harmonischen Kraftfeldes

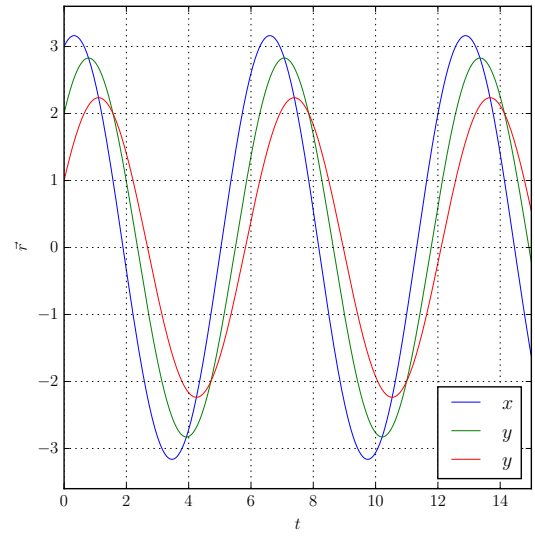
$$\frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}) = - (r - a) , \quad (10)$$

dessen Zentrum lediglich um den Vektor \vec{a} verschoben ist, resultiert in Ellipsenförmigen Bahnen, welche jedoch in ihrer Form und vor allen in ihrem Zentrum von den Bahnen des reinen harmonischen Oszillators abweichen. Die Betrachtung der Schwingungen der einzelnen Koordinaten zeigt, dass für eine Verschiebung $\vec{a} = 1 \cdot \vec{e}_x$ die Bewegungen der y - und z -Komponente identisch mit den Schwingungen ohne zusätzliches Kraftfeld sind. Lediglich für die x -Komponente verändert sich die Ruhelage, die maximale Auslenkung, nicht aber die Periodendauer.

Die Aussage, dass der harmonische Oszillator seine maximale Auslenkung bei $\vec{v}(t) = 0$ erreicht ist nur bedingt richtig. Zwar stimmt für jede Koordinate dass die Auslenkung x_i am größten ist, wenn die zugehörige Geschwindigkeit $v_i = 0$ ist, bei einer nicht verschwindenden Anfangsgeschwindigkeit kann es aber sein, dass sich das System niemals in einen Zustand mit $\vec{v} = \vec{0}$ begeben wird. Dies ist einerseits an dem Energieplot in 2b) zu sehen, da die kinetische Energie niemals null wird, andererseits wird es deutlich wenn man sich den Betrag der Auslenkung aus der Ruhelage in Abhängigkeit des Betrages des Impulses anguckt. Dies ist in Abbildung 3b) zu sehen. Für $\vec{v}_{\text{initial}} = 0$ ist die maximale Auslenkung tatsächlich dann gegeben, wenn dieser Zustand wieder erreicht wird. Für $\vec{v}_{\text{initial}} = (1,2,2)^T \neq 0$ ist der Geschwindigkeitsvektor jedoch niemals null, und die maximale Auslenkung wird erreicht wenn $|\vec{v}|$ minimal ist.

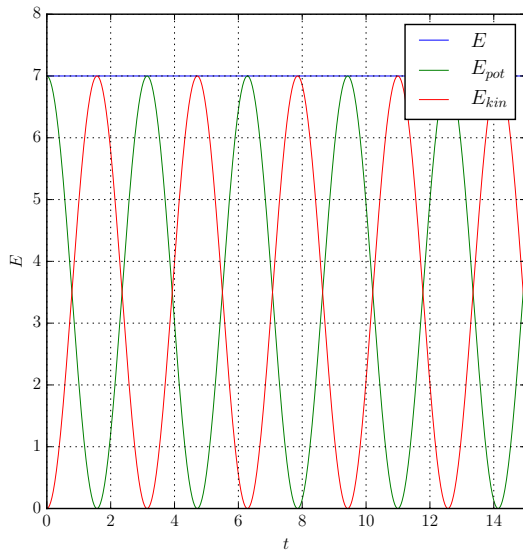


(a) Startwert $\vec{r} = (3, 2, 1)^T$ und $\vec{v} = \vec{0}$

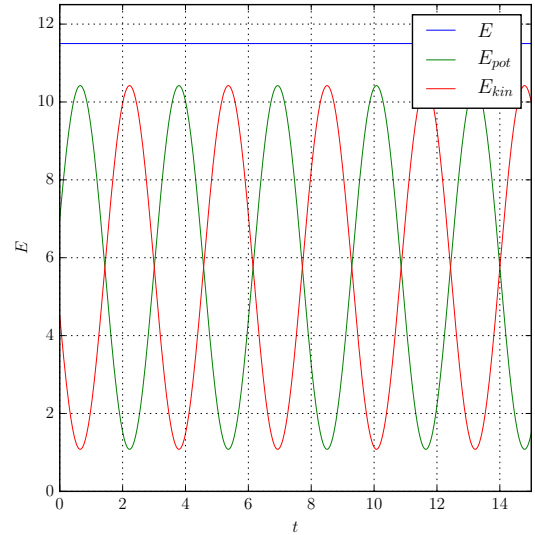


(b) Startwert $\vec{r} = (3, 2, 1)^T$ und $\vec{v} = (1, 2, 2)^T$

Abbildung 1: Zeitentwicklungen der Koordinaten für den harmonischen Oszillator mit $m = 1$, berechnet mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung und Schrittweite $h = 0.01$

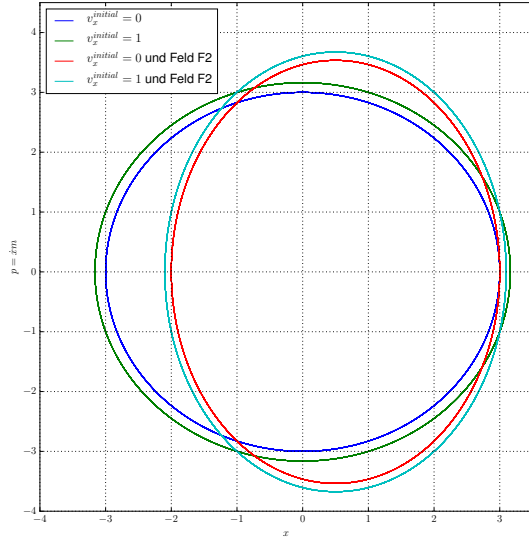


(a) Startwert $\vec{r} = (3, 2, 1)^T$ und $\vec{v} = \vec{0}$

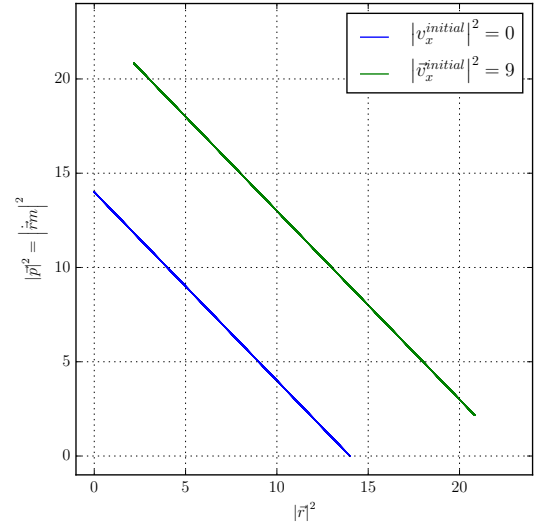


(b) Startwert $\vec{r} = (3, 2, 1)^T$ und $\vec{v} = (1, 2, 2)^T$

Abbildung 2: Zeitentwicklungen der Energie für den harmonischen Oszillator mit $m = 1$, berechnet mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung und Schrittweite $h = 0.01$

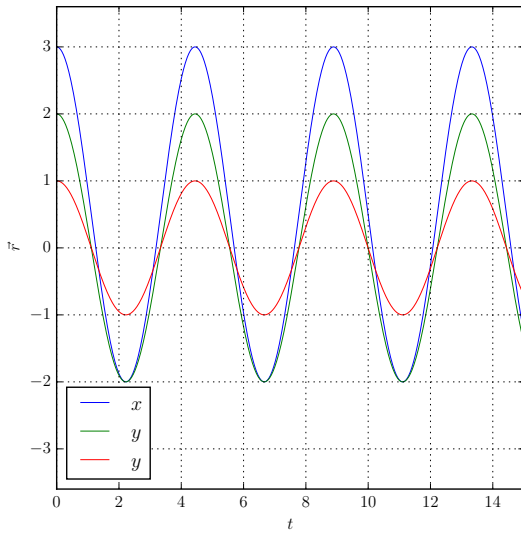


(a) Trajektorien des harmonischen Oszillators, sowie eines Oszillators mit zusätzlichem Kraftfeld im Phasenraum

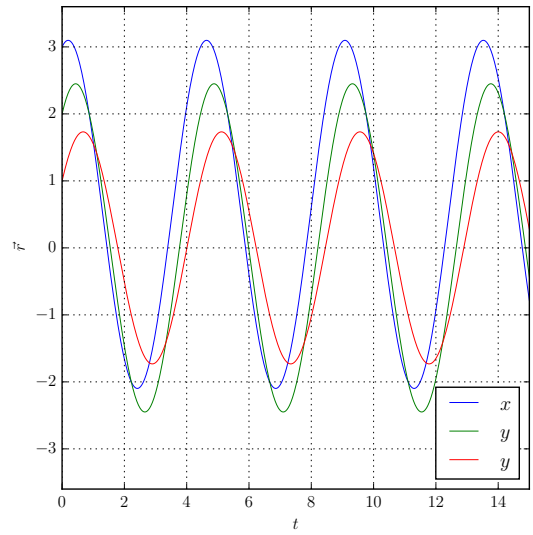


(b) Betrag der Auslenkung des harmonischen Oszillators in Abhängigkeit des Betrages des Impulses

Abbildung 3: Untersuchungen der Eigenschaften von Schwingungen mit $\vec{r} = (3,2,1)^T$ und $\vec{v}_0 = \vec{0}$ sowie $\vec{v}_1 = (1,2,2)^T$ für zwei verschiedene Kraftfelder



(a) Startwert $\vec{r} = (3,2,1)^T$ und $\vec{v} = \vec{0}$



(b) Startwert $\vec{r} = (3,2,1)^T$ und $\vec{v} = (1,2,2)^T$

Abbildung 4: Zeitentwicklungen der Koordinaten für den harmonischen Oszillator mit verschobenem, harmonischen Kraftfeld

Bezüglich der Abhängigkeit des relativen Fehlers haben wir eine Funktion geschrieben, die die Schrittweite h ausgibt, für den der relative Fehler zwischen Startwert und wieder erreichtem Wert aller Koordinaten und aller Geschwindigkeitskomponenten unterhalb eines gewissen Toleranzwertes liegt. Da wir dabei jedoch h in jedem Schritt um 10% reduzieren treten Toleranzen auf, welche bei gleichen Schrittweiten erreicht werden. Daher ist der Plot in Abbildung 5 sehr viel weniger Aussagekräftig, als der Fakt dass bereits bei $h = 0.006$ die relativen Abweichungen in allen 6 Komponenten des Vektors $\vec{y} - \vec{y}_{\text{start}}$ kleiner ist als 10^{-3} .

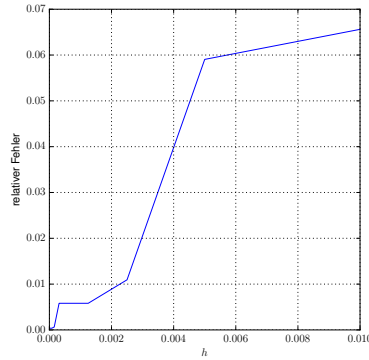


Abbildung 5: Schrittweite h in Abhängigkeit der Toleranzabweichung des relativen Fehlers aller Koordinaten von $\vec{y} = (\vec{r}, \vec{v})^T$.

2 Kepler-Ellipsen

Das Gravitationspotential, sowie die zugehörige Kraft sind gegeben durch

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G m_0 m_1 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad \text{und} \quad V(\vec{r}) = -G m_0 \frac{1}{|\vec{r}|} \quad (11)$$

Im Folgenden betrachten wir den Fall wo eine Masse (die Sonne) im Ursprung fixiert ist, und die andere Masse (ein Planet), die Sonne umkreist. Zunächst werden $G = m_0 = m_1 = 1$ gesetzt, und überprüft für welche Startwerte sich geschlossene Ellipsenbahnen ergeben. das Ergebnis ist in Abbildung 6 dargestellt. Wird die Anfangsgeschwindigkeit zu groß gewählt so nährt sich der Planet immer weiter der Sonne, bis der Betrag des Abstandes so klein ist dass in Gleichung (11) numerisch durch null geteilt wird, und die Integrationsschritte divergieren, wie in Abbildung 6b) zu sehen. Ist die Anfangsgeschwindigkeit jedoch zu groß, so begibt sich der Planet gar nicht erst auf eine Ellipsenbahn, sondern wird durch die Sonne lediglich leicht abgelenkt um sich dann immer weiter von ihr zu entfernen. Dies ist in 6c) dargestellt.

Der Drehimpuls ist gegeben durch $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m_1 (\vec{r} \times \vec{v})$. Wie in Abbildung 7 zu sehen sind sowohl der Drehimpuls, als auch die Gesamtenergie in den beiden Fällen, in denen es nicht zu numerischen Fehlern kommt, erhalten.

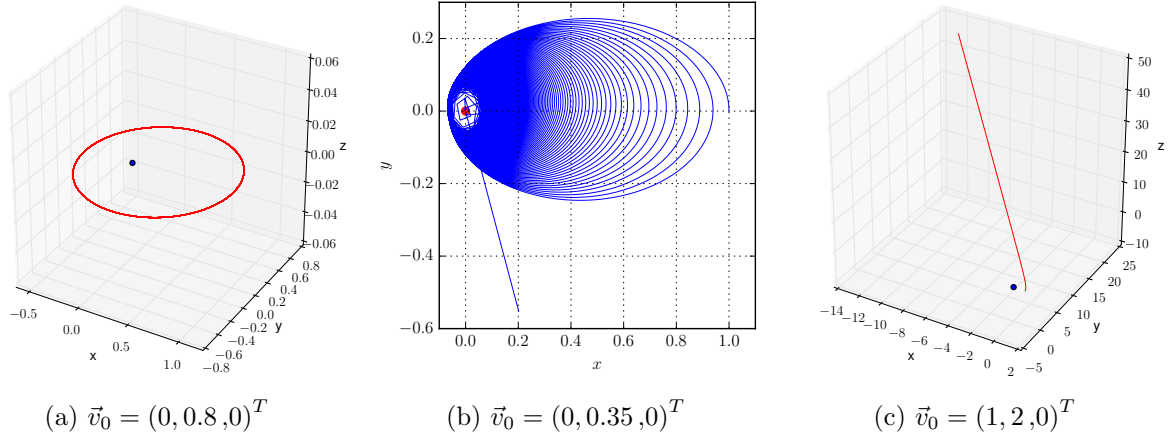


Abbildung 6: Bahn eines Planeten mit Startpunkt $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)^T$ bei verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten, berechnet mit einem Runge-Kutta-Algorithmus 4. Ordnung und Schrittweite $h = 0.01$.

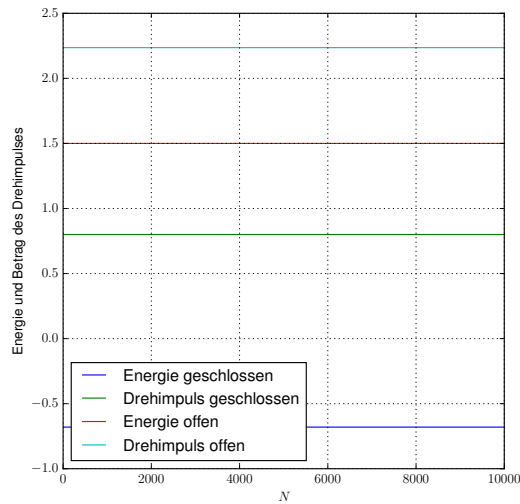


Abbildung 7: Energie und Betrag des Drehimpulses für die geschlossene Bahn mit $\vec{v}_0 = (0, 0.8, 0)^T$ und die offene Bahn mit $\vec{v}_0 = (1, 2, 0)^T$.

Liegt nicht ein $\frac{1}{r}$ -Potential wie beim Gravitationspotential vor, sondern ein allgemeines $\frac{1}{r^\alpha}$ -Potential, so ist die Kraft gegeben durch

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r^\alpha} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{1}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}} \right) = -\frac{\alpha x_i}{r^{\alpha+2}} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{\alpha \vec{r}}{|\vec{r}|^{\alpha+2}}.$$

Wir haben die Bahn des Planeten in diesem System berechnet und sind dabei weiterhin davon ausgegangen, dass die Sonne im Koordinatenursprung fixiert ist. Die berechneten Bahnkurven sind in Abbildung 8 abgebildet.

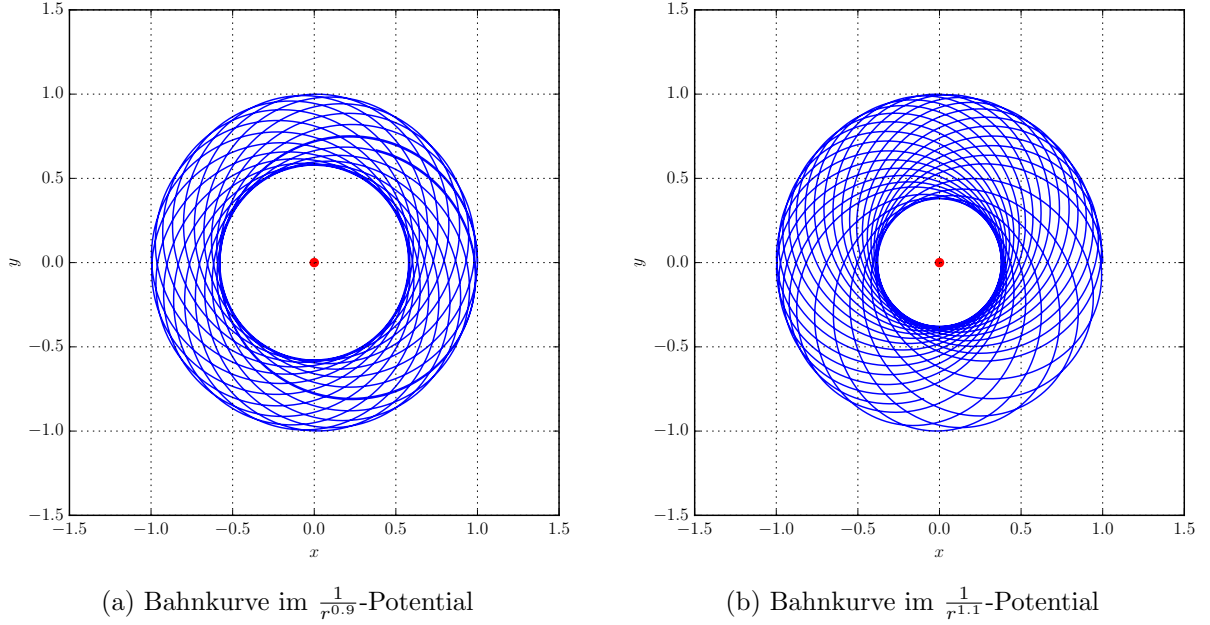


Abbildung 8: Bahn eines Planeten mit Startpunkt $\vec{r}_0 = (1,0,0)^T$ und Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (0, 0.8, 0)^T$ in verschiedenen Potentialen ($h = 0.01$).

Ist nun im $\frac{1}{r}$ Potential neben der im Ursprung fixierten Sonne und dem Planeten der Masse m_P noch ein Mond vorhanden, welcher die Masse $m_M = 0.01 \cdot m_P$ hat, so spürt der Mond das Gravitationsfeld des Planeten, aber der Planet spürt auch das Gravitationsfeld des Mondes. Die auf Mond und Planet wirkenden Kräfte sind also abhängig vom momentanen Abstandsvektor zwischen den beiden Himmelskörpern:

$$\vec{F}_{\text{Mond}}(\vec{r}_{\text{Mond}} - \vec{r}_{\text{Planet}}) = -Gm_M m_S \frac{\vec{r}_{\text{Mond}}}{|\vec{r}_{\text{Mond}}|^3} - Gm_M m_P \frac{\vec{r}_{\text{Mond}} - \vec{r}_{\text{Planet}}}{|\vec{r}_{\text{Mond}} - \vec{r}_{\text{Planet}}|^3} \quad (12)$$

$$\vec{F}_{\text{Planet}}(\vec{r}_{\text{Planet}} - \vec{r}_{\text{Mond}}) = -Gm_P m_S \frac{\vec{r}_{\text{Planet}}}{|\vec{r}_{\text{Planet}}|^3} - Gm_M m_P \frac{\vec{r}_{\text{Planet}} - \vec{r}_{\text{Mond}}}{|\vec{r}_{\text{Planet}} - \vec{r}_{\text{Mond}}|^3} \quad (13)$$

In Abbildung 9 ist die Bahn des Planeten und des Mondes um die Sonne dargestellt. Dabei bewegt sich der leichtere Mond in einer Spiralbahn um den Planeten, während dieser sich auf einer Ellipsenbahn um die Sonne bewegt. Diese Darstellung ergileten wir aber nur mit einer erheblich kleineren Schrittweite als in der Aufgabenstellung angegeben ($h = \frac{24}{N}$ und $N = 700000$).

Betrachtet man die Bahn des Planeten mit und ohne Mond, welche in Abbildung 10b) dargestellt sind, dann wird deutlich dass sich der durchschnittliche Abstand des Planeten zur Sonne durch den Mond vergrößert. Woran dies liegt kann man sich anhand der Relativbahn des Mondes zum Planeten klar machen. Innerhalb einer Umrundung des Mondes um den Planeten liegen zweimal alle drei Himmelskörper auf einer Achse. Befindet sich dabei der Mond näher an der Sonne als der Planet, so spürt er zwei Kräfte in entgegengesetzte Richtungen. Befindet sich jedoch der Planet näher an der Sonne, so wirken beide Kräfte in die gleiche Richtung. Der Mond ist somit näher am

Planeten, wenn der Planet näher an der Sonne ist. Da die Kraft die der Mond auf den Planeten ausübt dadurch stärker ist wenn der Planet näher an der Sonne ist als der Mond, wird der Planet von der Sonne weggezogen und beschreibt eine größere Bahn.

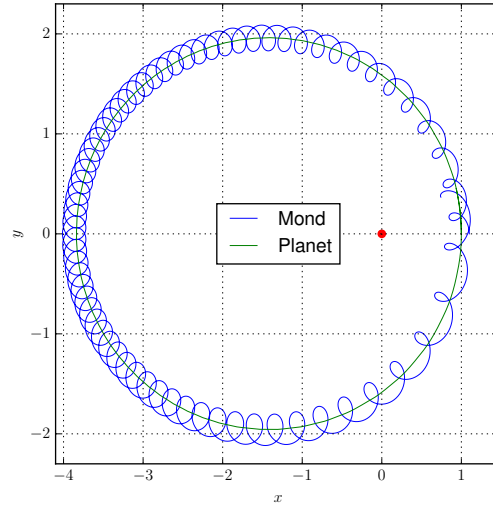
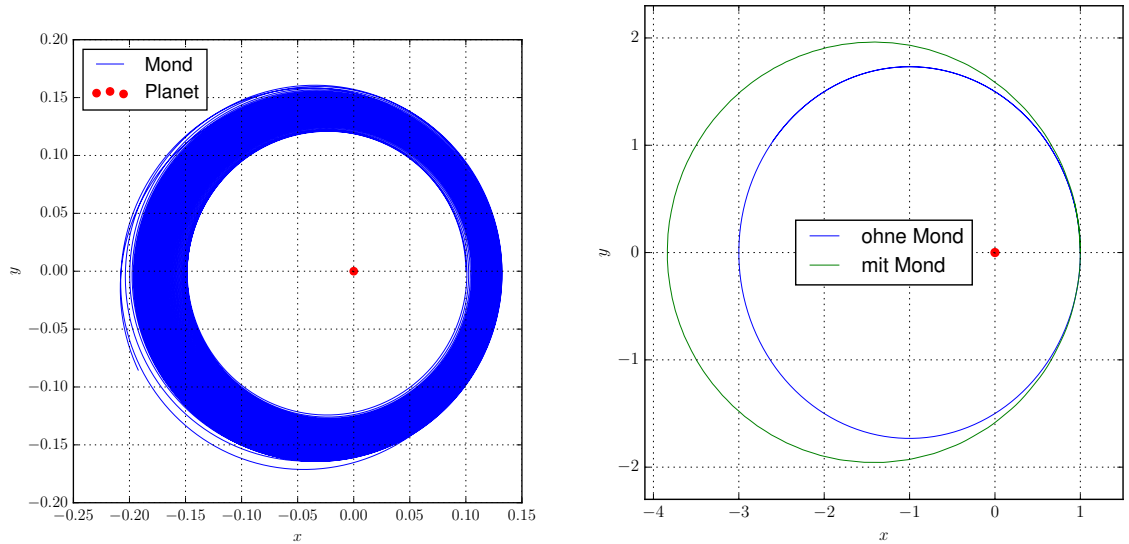


Abbildung 9: Bahn eines Planeten mit $\vec{r}_{0,\text{Planet}} = (1, 0, 0)^T$ $\vec{v}_{0,\text{Planet}} = \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)^T$ und eines Mondes mit $\vec{r}_{0,\text{Planet}} = (1.1, 0, 0)^T$ $\vec{v}_{0,\text{Mond}} = (0, 4.7, 0)^T$



(a) Bahnkurve des Mondes relativ zum Planeten (b) Bahnkurve des Planeten mit und ohne Mond

Abbildung 10: Bahnkurven, berechnet mit einem Runge-Kutta-Algorithmus 4. Ordnung der Schrittweite $h = \frac{24}{N}$ und $N = 700000$