Computational Physics, Aufgabenblatt 10

Kevin Sedlaczek, Mona Kalthoff

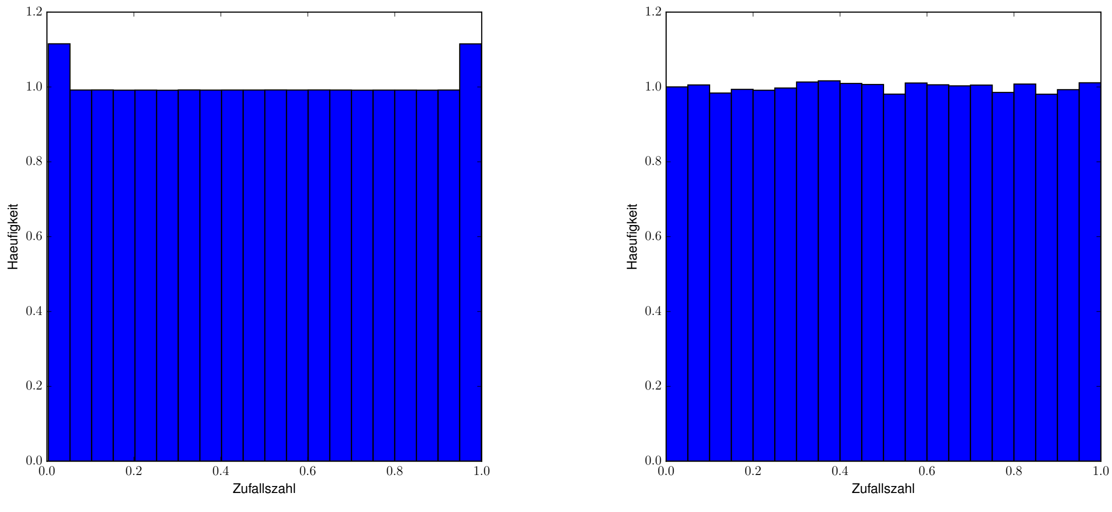
Abgabe: 7. Juli 2017

1 Linear kongruente Generatoren

Zunächst wird die Funktion *void lkGenerator* erstellt, welche N Zufallszahlen mittels der Rekursion

$$r_{n+1} = (ar_n + c) \bmod m \tag{1}$$

berechnet. Die damit erstellten Zufallszahlen werden für 2 verschiedene Parametersätze in Histogrammen aufgetragen, welche in Abbildung 1 dargestellt sind.



(a) $r_0 = 1234$, $a = 20$, $c = 120$, $m = 6075$ (b) $r_0 = 123456789$, $a = 65539$, $c = 0$, $m = 2^{31}$

Abbildung 1: Histogramme der Linear kongurenten Generatoren für 2 Verschiedene Parametersätze und $N = 10^5$

Zufallszahlen sollten möglichst gleich-verteilt sein, daher führen die Parameter im zweiten Fall offensichtlich zu besseren Resultaten. Zusätzlich wurden noch N Zufallszahlen mit einem *Mersenne Twister* generiert. Das dazu gehörige Diagramm befindet sich in Abbildung 2. Allein anhand

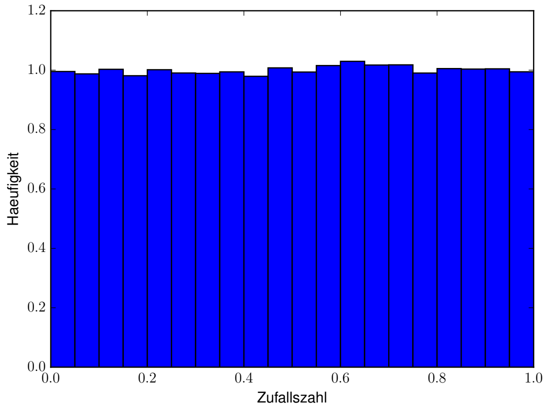
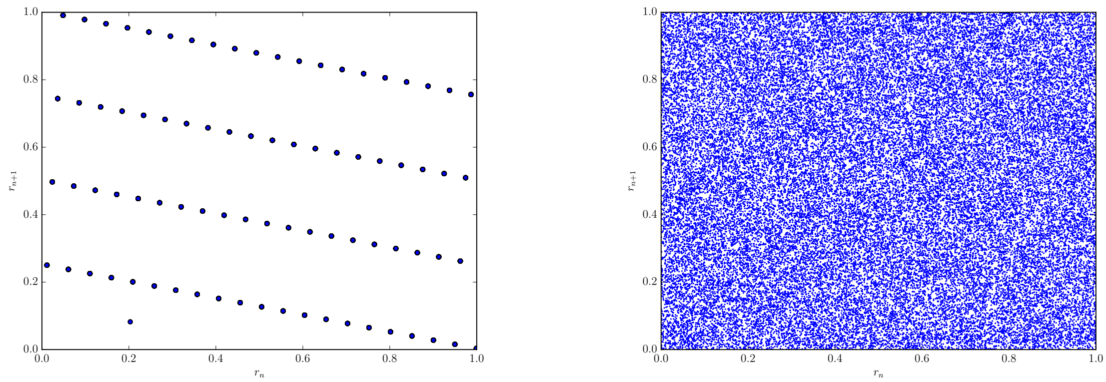


Abbildung 2: Histogramm der von einem *Mersenne Twister* generierten Zufallszahlen

des Histogramms ist keine wesentliche Verbesserung gegenüber dem linear kongruenten Generator mit dem zweiten Parametersatz erkennbar. Generell sind die Gütekriterien für einen Zufallszahlengenerator eine **hohe Geschwindigkeit**, eine **lange Periodenlänge** (wobei die maximale Periodenlänge der linearen kongruenten Generatoren m ist), sowie die **Abwesenheit von Korrelationen**.



(a) $r_0 = 1234$, $a = 20$, $c = 120$, $m = 6075$

(b) $r_0 = 123456789$, $a = 65539$, $c = 0$, $m = 2^{31}$

Abbildung 3: 2-Dimensionaler Einheitswüfel mit Tupeln von Zufallszahlen der linear kongurenten Generatoren

Genau diese Abwesenheit von Korrelationen ist jedoch für linear kongruente Generatoren nicht gegeben. Sie unterliegen dem **Marsaglia-Effekt**, das heißt Tupel von aufeinander folgenden Zufallszahlen liegen im mehrdimensionalen Einheitswürfel in Netzebenen. Um dies zu zeigen berechnet die Funktionen *void lkGenerator_Test* jeweils Tupel von 2 und 3 aufeinander folgenden Zufallszahlen, welche dann in zwei- bzw. dreidimensionalen Einheitswürfeln aufgetragen werden. Beim ersten Parametersatz sind die Hyperebenen, wie in Abbildung 3 zu sehen, bereits in zwei Dimensionen deutlich erkennbar. Für den zweiten Paramertersatz ist jedoch in zwei Dimensionen keine Ordnung erkennbar. In drei dimensionen betrachten wir lediglich $N = 6000$, da der Einheitswürfel sonst für den 2. Parametersatz so eng besetzt ist, dass eine Ordnung nur schwer zu identifizieren ist. Die regelmäßige Anordnung der Tupel aus dem ersten Parametersatz ist auch im dreidimensionalen deutlich zu erkennen. Abbildung 4 zeigt die Anordnung aus drei verschiedenen Winkeln, in denen die Hyperebenen eindeutig identifizierbar sind.

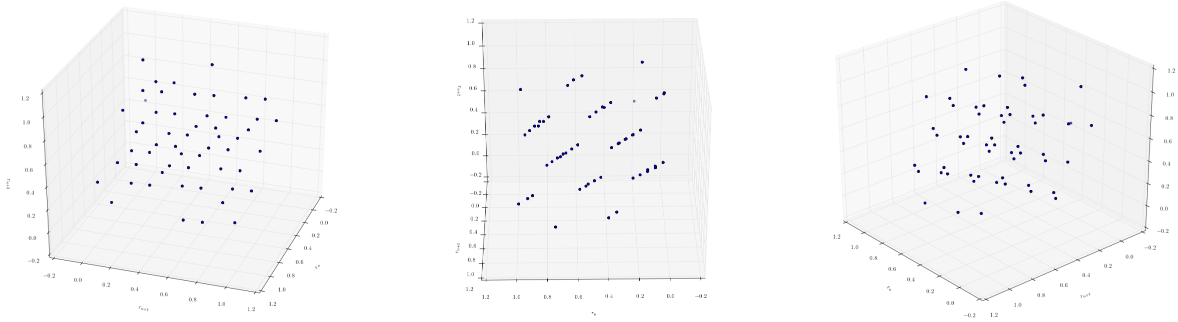


Abbildung 4: Hperebenen des Linear kongurenten Generatoren für $r_0 = 1234$, $a = 20$, $c = 120$, $m = 6075$ und $N = 6000$

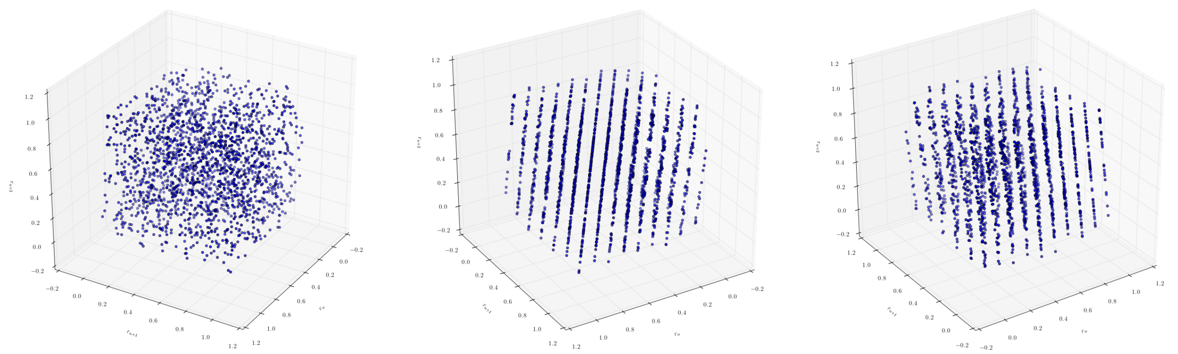


Abbildung 5: Hperebenen des Linear kongurenten Generatoren für $r_0 = 123456789$, $a = 65539$, $c = 0$, $m = 2^{31}$ und $N = 6000$

Auf Grund der langen Periodendauer und der daraus resultierenden großen Anzahl an unterschiedlichen Tupeln im zweiten Parametersatz sind die Hyperebenen, wie in Abbildung 5 dargestellt, nicht aus jedem Winkel erkennbar. Betrachtet man die Anordnung jedoch aus dem Richtigen Winkel, so sind die Ebenen, also die Korrelationen zwischen den Zufallszahlen auch hier eindeutig erkennbar. Für den *Mersenne Twister* konnten wir, wie in Abbildung 6 zu sehen, weder in einer noch in zwei Dimensionen Hyperebenen finden. Zuletzt soll das **Rückweisungsverfahren** angewandt werden, um Zufallszahlen im Intervall $[0\,,1[$ zu generieren, die der Verteilung $p(x) = n \cdot \sin^4(\pi x)$ folgen. Dazu werden erneut Tupel von zwei Zufallszahlen betrachtet, jedoch für jedes Tupel $(x\,,y)$ geprüft, ob $y < p(x)$ gilt. Nur wenn dies der Fall ist wird x in eine Datei geschrieben. wenn x und y gleich-

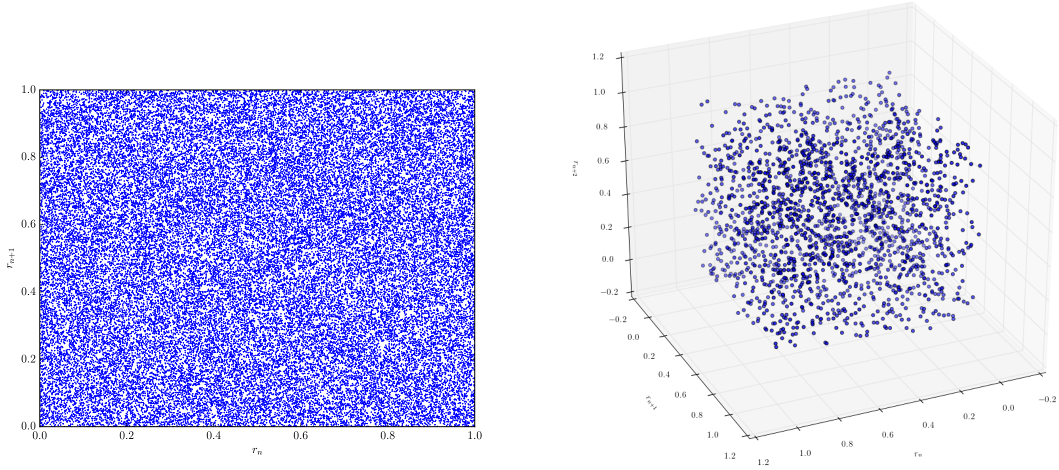
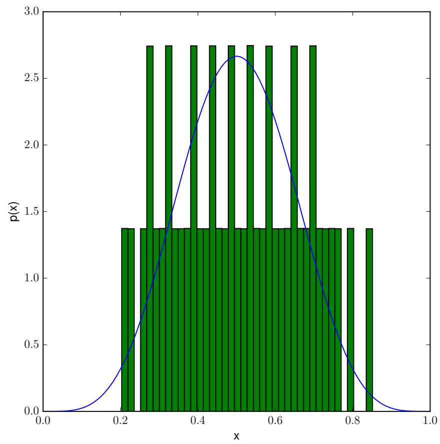
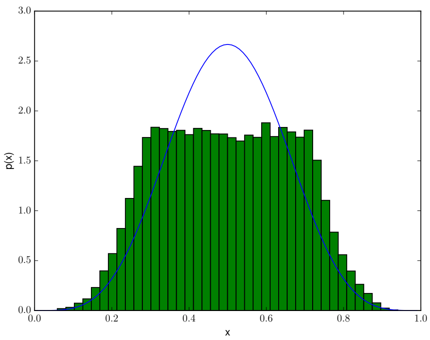


Abbildung 6: Ein und zweidimensionale Darstellung der Tupel von durch den *Mersenne Twister* generierten Zufallszahlen.

verteilte Zufallszahlen sind, sollte x nun der Verteilung $p(x)$ folgen. Wir betrachten in diesem Fall die Normierte Funktion $p(x)$ mit $n = \frac{8}{3}$ und das normierte Histogramm von x. Das Ergebnis für die linear kongruenten Generatoren ist in Abbildung 7 dargestellt. Für den *Mersenne Twister* ist der Verlauf in Abbildung 8 dargestellt. Wir sparen uns an dieser Stelle jegliche Interpretation, da unsere Werte offensichtlich falsch sind. Zumindest für den *Mersenne Twister* sollte die Verteilung von x annähernd $p(x)$ folgen. In der Abgabe befinden sich daher auch die *Python-Skripte*, falls unser Fehler nicht in den Daten, sondern im Plot liegt.



(a) $r_0 = 1234$, $a = 20$, $c = 120$, $m = 6075$



(b) $r_0 = 123456789$, $a = 65539$, $c = 0$, $m = 2^{31}$

Abbildung 7: Rückweisungsmethode mit Zufallszahlen der linearen kongruenten Generatoren

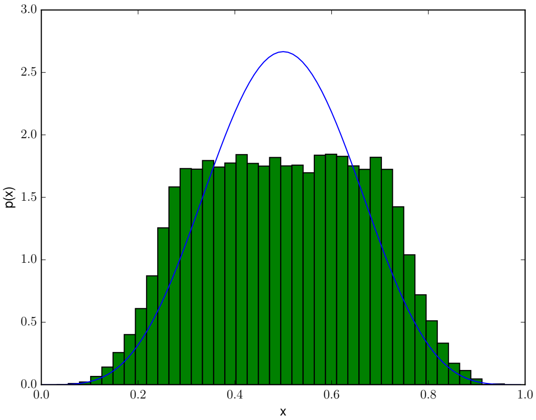


Abbildung 8: Rückweisungsmethode mit Zufallszahlen des *Mersenne Twisters*