Prof. Joachim Stolze
joachim.stolze@tu-dortmund.de

Sommersemester 2017
Technische Universität Dortmund

Computational Physics
Übungsblatt 3

Ausgabe: 05.05.2017

Abgabe: 12.05.2017 bis 10:00 Uhr

Verständnisfragen

- Worin sehen Sie den wesentlichen Unterschied zwischen expliziten und impliziten Verfahren zur Integration von Differentialgleichungen? Wann würden Sie implizite Verfahren nutzen?
- Für welche Probleme würden Sie ein Integrationsverfahren mit Schrittweitenanpassung verwenden? Worauf müssen Sie dabei achten?
- Bei welchen Verfahren sollten Sie aufpassen, wenn Sie die Gesamtenergie des Systems berechnen wollen?

Aufgabe 1. Der gute alte harmonische Oszillator (10 P.)

Wir wollen das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit fester Schrittweite implementieren, um die Newtonschen Bewegungsgleichung für ein Teilchen in einem Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}\,, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

zu lösen. Das Programm sollte eine Funktion $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ übergeben bekommen, mit der Sie ein beliebiges Kraftfeld angeben können.

Schreiben Sie das Programm zumindest für drei Raumdimensionen ($\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^3$), Sie können es aber auch allgemein für D Raumdimensionen schreiben.

Für den harmonischen Oszillator lautet unser Kraftfeld.

$$\frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r}\,. \tag{3}$$

a) Welche Formen kann die Trajektorie annehmen? Für welche Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}(0)$ und $\boldsymbol{v}(0)$ erhalten Sie welche Trajektorien?

   Abgabe: Plots und Daten von $\boldsymbol{r}(t)$ und $\boldsymbol{v}(t)$ sowie Plot der Trajektorie.

b) *Der harmonische Oszillator erreicht seine höchste Auslenkung bei* $\boldsymbol{v}(t) = 0$.
   Gibt es Trajektorien für welche diese Aussage nicht oder nur eingeschränkt gilt?

   Abgabe: Plots und Daten zur Untermauerung Ihrer Antwort.

c) Testen Sie, wie klein Sie die Schrittweite machen müssen, damit Ihr Oszillator bei mehreren Oszillationen immer wieder seine maximale Anfangsauslenkung erreicht. Testen Sie außerdem die Energieerhaltung.

   Abgabe: Plots und Daten der relativen Abweichungen für verschiedene Schrittweiten. Plot des zeitlichen Verlaufs der kinetischen, potentiellen und der Gesamtenergie.

d) Was passiert wenn Sie zusätzlich zu Ihrem Kraftfeld ein weiteres harmonisches Kraftfeld

$$\frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) \tag{4}$$

   mit $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)^T$ einschalten?

Aufgabe 2. Kepler-Ellipsen (10 P.)

Das kompliziertere Problem, das wir nun in drei Raumdimensionen behandeln wollen, ist das Kepler-Problem mit $V(r) = -m_0 G/r$ oder

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -G m_0 m_1 \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{5}$$

mit einer Konstanten G, wobei Sie erst einmal $G = 1$, $m_0 = 1$ und $m_1 = 1$ setzen. Wir betrachten die Bewegung der Masse m_1 im Potential der Zentralmasse m_0, weshalb m_0 im Koordinatenursprung fixiert sei.

a) Berechnen Sie numerisch die Bahn des Teilchens für $\boldsymbol{r}(0) = (1, 0, 0)$ mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung. Finden Sie eine Anfangsgeschwindigkeit, sodass das Teilchen eine Ellipse beschreibt. Wählen Sie Ihre Schrittweite sinnvoll. Welches Problem bekommen Sie bei sehr kleinen Anfangsgeschwindigkeiten?

b) Überprüfen Sie numerisch die Energieerhaltung und die Drehimpulserhaltung.

c) Was passiert mit Ihrer Ellipsenbahn, wenn Sie das Potential abändern zu $V(r) = -m_0 G/r^\alpha$, wobei $\alpha \neq 1$? Untersuchen Sie die beiden Fälle $\alpha = 0.9$ und $\alpha = 1.1$.

d) Gehen wir nun wieder zurück zum klassischen Fall mit $\alpha = 1$. Wir wollen jetzt unser Modell erweitern indem wir unserem "Planeten" m_1, der die "Sonne" m_0 umkreist, einen "Mond" mit der Masse $m_2 = 0.01 m_1$ hinzufügen. m_0 sei dabei weiterhin im Ursprung fixiert. Erweitern Sie Ihre Runge-Kutta-Methode, sodass Sie in der Lage sind, auch die Bahn des Mondes zu berechnen. Welche Kräfte wirken jetzt auf die einzelnen Körper?

e) Testen Sie nun Ihr System mit den Parametern $\boldsymbol{r}(0) = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}(0) = \left(0, \sqrt{3/2}, 0\right)$, $\boldsymbol{r}_{\text{mond}}(0) = (1.1, 0, 0)$ und $\boldsymbol{v}_{\text{mond}}(0) = (0, 4.7, 0)$. Wählen Sie dazu $N = 1/h = 5000$ Schritte pro Zeiteinheit und iterieren Sie bis $t_n = i \cdot h = 24$. (Mit diesen Parametern sollten Sie eine stabile Bahn erhalten.) Stellen Sie die Bahnkurven $y(x)$ des Planeten und des Mondes gemeinsam grafisch dar. Plotten Sie auch die Bahn des Mondes relativ zum Planeten. Wie ändert sich die Bahnkurve des Planeten im Vergleich zum Fall ohne Mond mit sonst gleichen Parametern? Wie kommt es dazu?