Zettel 6

TU Dortmund, Fakultät Physik
CP

Tobias Tischler
tobias.tischler@tu-dortmund.de

Robin Röhrig
robin.roehrig@tu-dortmund.de

29.05.15

1 Aufgabe 2

b) Ausgangspunkt für die Analytische Lösung ist die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(x,y) = 0,$$

da wir $\rho = 0$ setzen. Nun benutzen wir einen Produktansatz mit

$$\Phi(x,y) = \Phi_x(x)\Phi_y(y) = \Phi_x\Phi_y$$

Dies in die Laplace-Gleichung eingesetzt und durch den Ansatz geteilt ergibt mit Separation der Variablen:

$$\frac{\Phi_x''}{\Phi_x} = -\frac{\Phi_y''}{\Phi_y} = -\lambda = \text{const}$$

Nun können wir separat die beiden Gleichungen betrachten

$$\Phi_x'' = -\lambda\Phi_x \qquad \Phi_y'' = \lambda\Phi_y$$

Unsere Randbedingungen sind jetzt

$$\Phi_x(0) = 0 \qquad \Phi_x(1) = 0$$
$$\Phi_y(0) = 0 \qquad \Phi_y(1) = 1$$

Über die Randbedingungen für Φ_x lässt sich Φ_x nun sehr leicht zu

$$\Phi_x(x) = A\text{sin}(n\pi x)$$

bestimmen. Jetzt haben wir also für beide Gleichungen $\lambda = (n\pi)^2$ bestimmt. Es kann nun Φ_y über eine Kombination von sinh und cosh bestimmt werden. Durch die Randbedingung $\Phi_y(0) = 0$ fällt der cosh direkt weg und es bleibt

$$\Phi_y(y) = B\sinh(n\pi y).$$

Wir erhalten nach erneutem zusammenführen der beiden Gleichungen

$$\Phi_n(x,y) = C_n\text{sinh}(n\pi y)\text{sin}(n\pi x)$$

Es muss jetzt C_n so bestimmt werden, dass die letzte Randbedingung ebenfalls erfüllt ist. Dazu nutzen wir, dass $\Phi_n(x,y)$ die Form eines Fourer-Gliedes hat, und sagen

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\text{sinh}(n\pi y)\text{sin}(n\pi x)$$

und mit Randbedingungen dann

$$\Phi(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\text{sinh}(n\pi)\text{sin}(n\pi x) \stackrel{!}{=} 1$$

Im folgenden wird die Orthogonalität des Sinus ausgenutzt. Dazu wird $\sin(m\pi x)$ auf beiden Seiten multipliziert und danach nach x integriert. Somit erhält man

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(n\pi)\sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(m\pi x)\mathrm{d}x$$

Es können Summe und Integral vertauscht werden. Wegen der Orthogonalität des Sinus gilt

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2} & m = n \end{cases}$$

wodurch die Summe weg fällt. Man muss nun nur noch das Integral auf der rechten Seite lösen und nach C_n auflösen:

$$\frac{1}{2} C_n \sinh(n\pi) = \frac{1 - \cos(\pi m)}{m\pi}$$

$$C_n = \frac{2(1 - \cos(\pi m))}{m\pi \sinh(n\pi)}$$

Dies wird jetzt nur noch in $\Phi(x, y)$ eingesetzt, und man erhält eine Lösung die alle Randbedingungen erfüllt. Diese lautet

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(1 - \cos(\pi m))}{m\pi \sinh(n\pi)} \sinh(n\pi y)\sin(n\pi x)$$

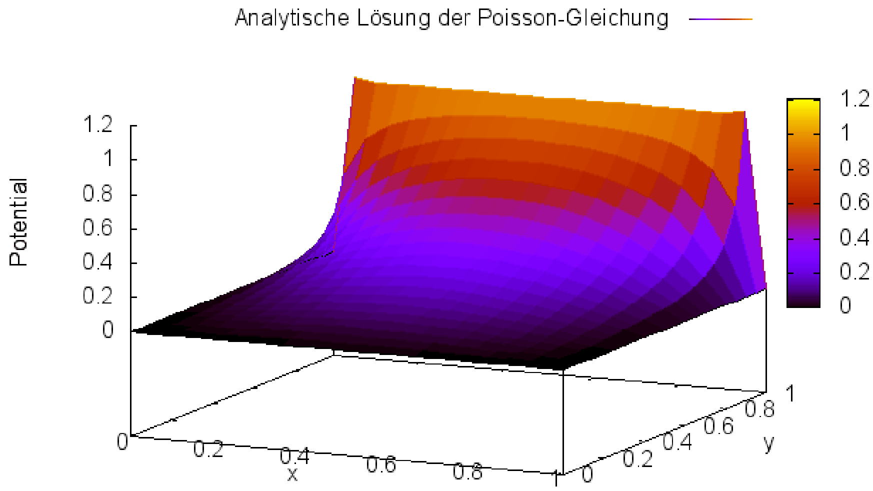

Abbildung 1: Analytische Lösung von der Poisson- Gleichung

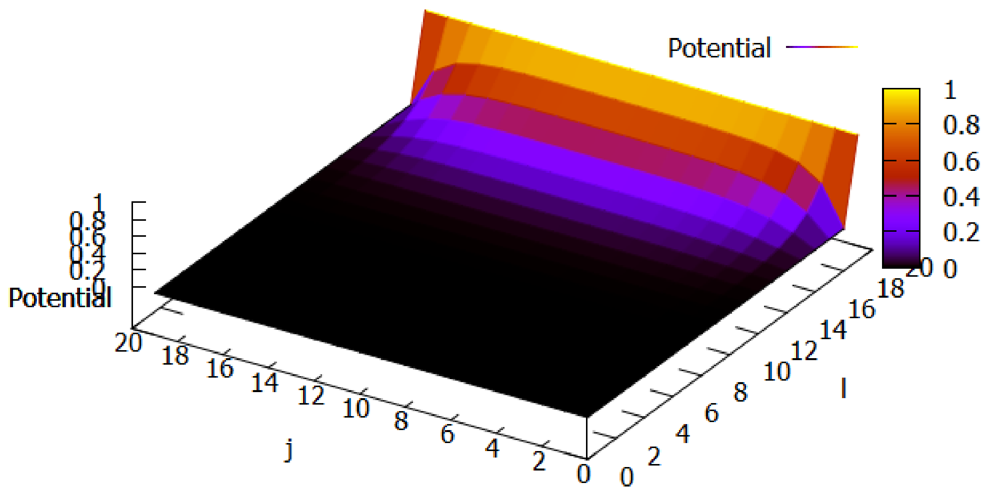

Abbildung 2: Numerische Lösung von der Poisson-Gleichung mit 11 Iterationsschritten

c und e)

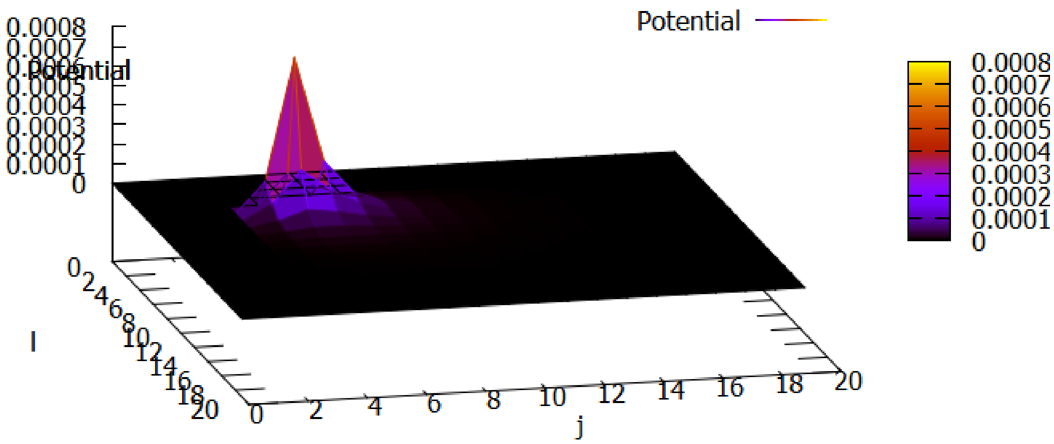

Abbildung 3: Numerische Lösung der Poisson-Gleichung mit einer Punktladung bei 5,5

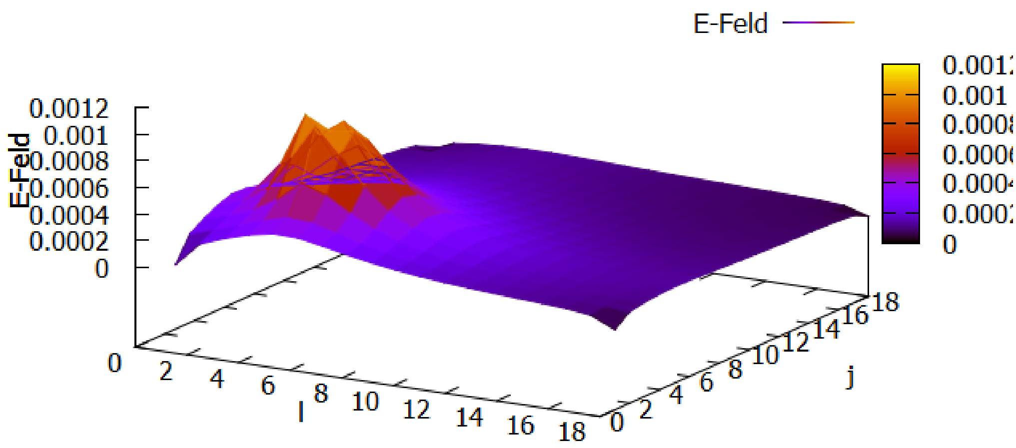

Abbildung 4: E-Feld von einer Punktladung bei 5,5

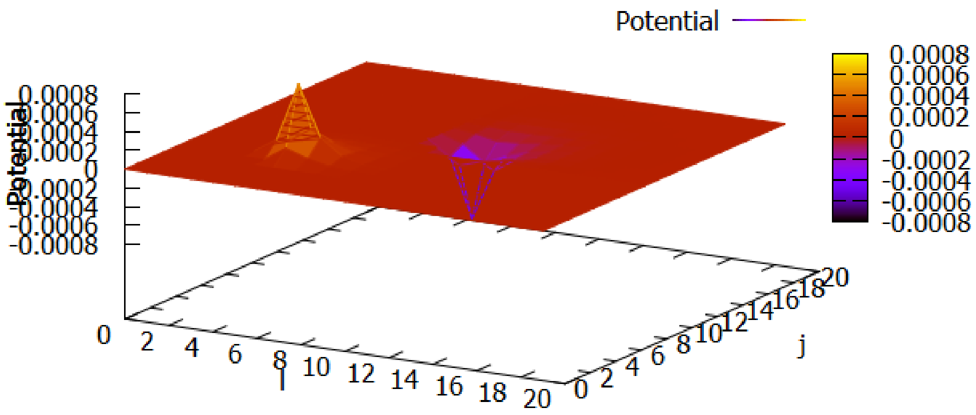

Abbildung 5: Numerische Lösung der Poisson-Gleichung mit einer Punktladung bei 5,5 und 10,10

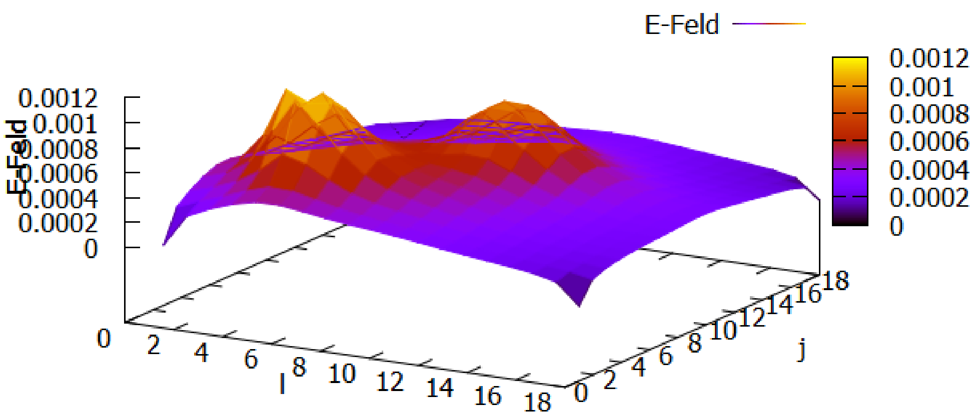

Abbildung 6: E-Feld von einer Punktladung bei 5,5 und 10,10

d und e) Das theoretische Ergebnis für die influenzierte Oberflächenladung mit der Konfiguration von der c oder der e ist null.
Das numerische Ergebnis für die influenzierte Oberflächenladung mit der Konfiguration von der c $= 1{,}61183 \cdot 10^{-23}$
Das numerische Ergebnis für die influenzierte Oberflächenladung mit der Konfiguration von der e $= 4{,}73238 \cdot 10^{-22}$
Beide Ergebnisse können als null angesehen werden.

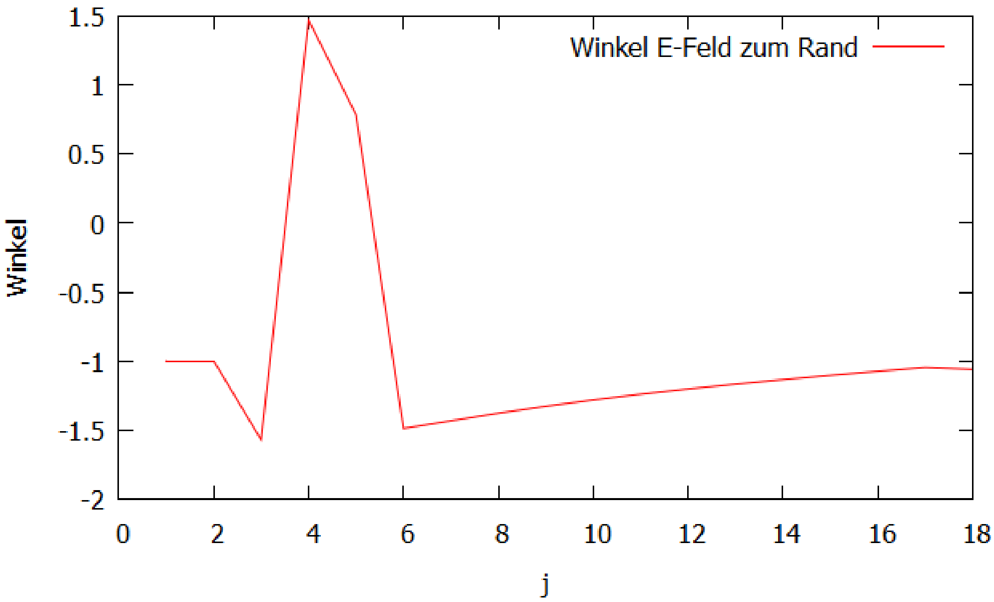

Abbildung 7: Winkel vom E-Feld zum Rand bei y = 0 und x = 0 bis 1 mit Punktladung bei 5,5

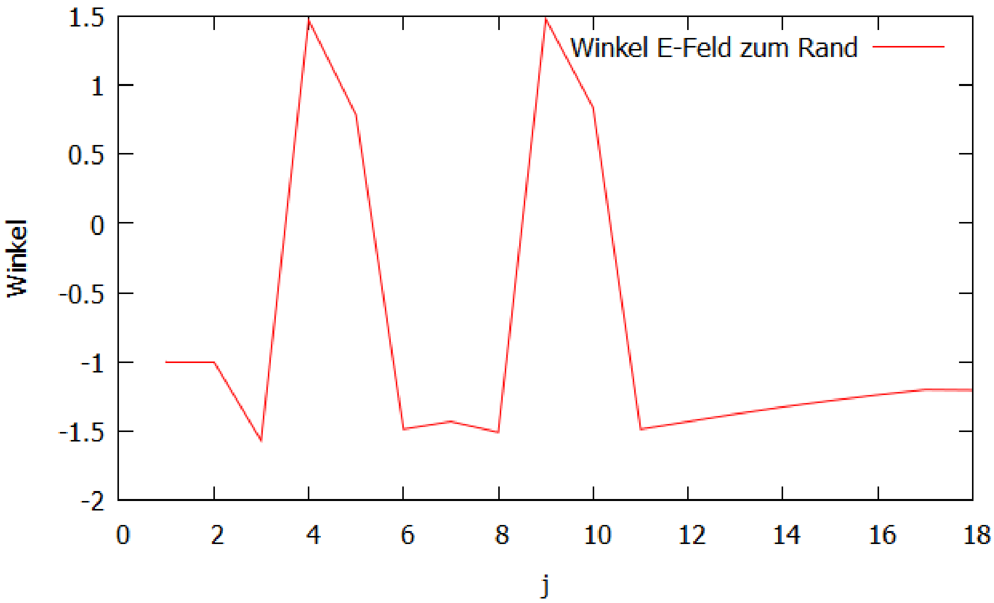

Abbildung 8: Winkel vom E-Feld zum Rand bei y = 0 und x = 0 bis 1 mit Punktladung bei 5,5 und 10,5