Hauptwertintegrale und Kramers-Kronig-Relationen / Dispersionsrelationen

Betrachte ein lineares kausales ($R(t-t') = 0$ für $t < t'$) System:

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t-t')\, F(t')\, dt' \qquad (25)$$

Anregung

Antwort

Response-Funktion

Beispiel 3. Semester

$A(t)$	Auslenkung	des gedämpften H.O.
$F(t')$	anregende Kraft	
$R(t-t')$	Greenfunktion	

Faltungssatz:

$$\tilde{A}(\omega) = \tilde{R}(\omega)\, \tilde{F}(\omega) \qquad (26)$$

Wobei F.T. def durch

$$\tilde{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, A(t)\, e^{i\omega t} \iff A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{A}(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (27)$$

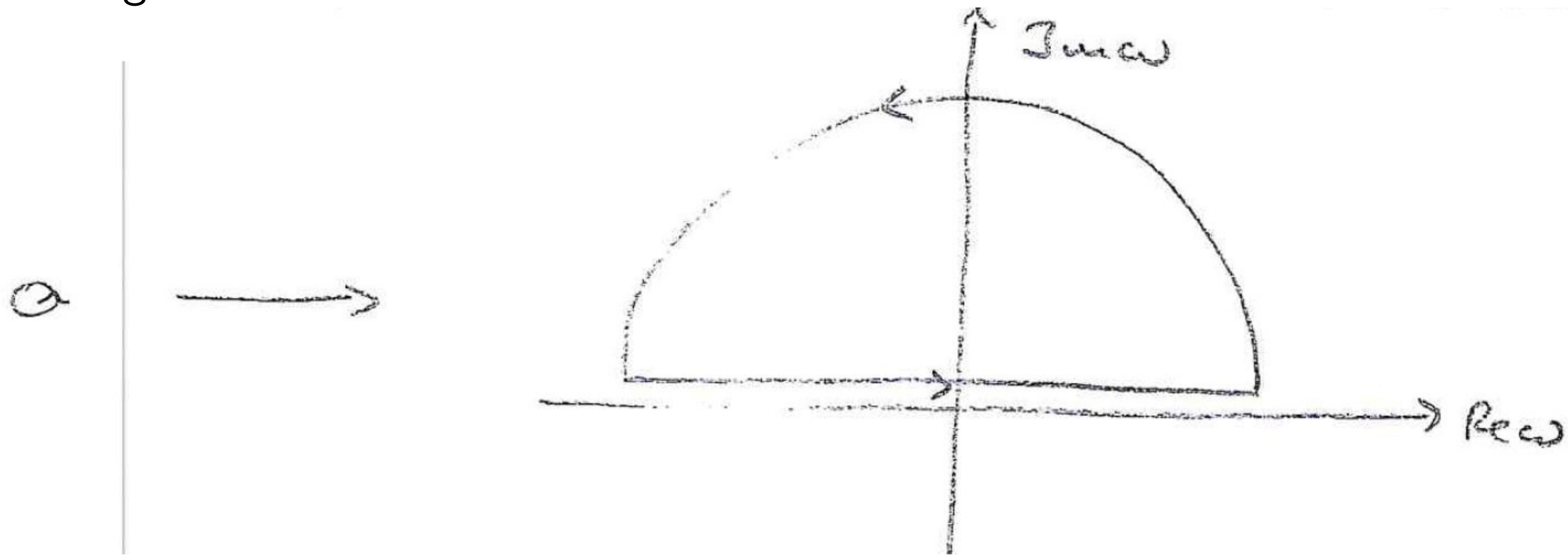
Für komplexe ω ist wegen Kausalität

$$\tilde{R}(\omega) = \int_{0}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} R(t) \qquad (29)$$

analytisch in der oberen ω-Halbebene und damit liefert der Residuensatz für ω in der oberen Halbebene, mit einer kleinen Integrationskontur

$$\tilde{R}(\omega) = \oint \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\tilde{R}(\omega')}{\omega' - \omega} \qquad (30)$$

Die kleine Integrationskontur kann man vergrößern (innerhalb der oberen Halbebene!), ohne den Wert des Integrals zu ändern.



Der Beitrag des (unendlich großen) Halbkreises ist Null und es bleibt ein Integral über die reelle Achse übrig:

$$\tilde{R}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{reell}}}{\omega} + i\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{\tilde{R}(\overset{\text{auch reell}}{\omega'})}{\omega' - \omega - i\varepsilon} \qquad (31)$$

Mit einer rasch bewiesenen symbolischen Identität...

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{x \pm i\eta} = \underline{P} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x) \qquad (32)$$

...ergab sich dann

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\tilde{R}(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{1}{2} \tilde{R}(\omega \qquad (36)$$

Das kann man nach $\tilde{R}(\omega)$ auflösen und in Real- und Imaginärteil zerlegen.

$$\mathrm{Re}\,\tilde{R}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\mathrm{Im}\,\tilde{R}(\omega')}{\omega' - \omega}$$

Hilbert-Transformation

(37)

$$\mathrm{Im}\,\tilde{R}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\mathrm{Re}\,\tilde{R}(\omega')}{\omega' - \omega}$$

Das sind die Kramers-Kronig-Relationen.

Anwendungen:

Festkörperphysik:

Brechungsindex $n(\omega)$. Realteil $\rightarrow$ Brechung, Reflektivität. Imaginärteil $\rightarrow$ Absorption.
Damit verwandt: $\sigma(\omega)$: AC-Leitfähigkeit; $\varepsilon(\omega)$: Dielektrizitätsfunktion.

In der Streutheorie für Photonen oder auch andere Teilchen gilt das optische Theorem:

$$\mathrm{Im}\, f(\omega) = \frac{\omega}{4\pi}\, \sigma_T(\omega)$$

Vorwärtsstreuamplitude (für Photonen)

totaler (Photonen-) Absorptions-querschnitt

3. Vorlesung
25-4-17