Computational Physics, Aufgabenblatt 2

Kevin Sedlaczek, Mona Kalthoff

4. Mai 2017

1 Wettervorhersage

Eigentlich sollten die Werte bei denen das Produkt der Anzahl der Integrationsintervalle mit der Schrittweite $(N{\cdot}h)$ gleich ist, also jeweils die Diagonalwerte für x und y in Tabelle 1 übereinstimmen. Da die Werte jedoch sehr stark von einander abweichen kann darauf geschlossen werden, dass es sich um ein chaotisches System handelt.

Tabelle 1: Anzahl der Integrationsintervalle N, Schrittweiten h und zugehöriger Wert der Koordinaten x und y.

N	10	10	100	100	1000	1000
h	x	y	x	y	x	y
0.05	-21.85359018	-18.06344595	-nan	-nan	-nan	-nan
0.005	-0.295558256	13.4307003	1.802282765	-0.4078430329	-5.204094253	0.7403984965
0.0005	-8.780764138	14.85787205	-0.4967323392	13.44523927	2.482516845	0.3829519681

Analytisch lassen sich die Fixpunkte des Systems wie folgt berechnen:

$$\dot{X} = \sigma\left(-X+Y\right) \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad X = Y \tag{1}$$

$$\dot{Y} = X\left(-Z+r\right) - Y \overset{X=Y}{=} X\left(-Z+r-1\right) \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} X = Y = 0 \\ Z = (r-1)\ , X = Y \end{cases} \tag{2}$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \overset{X=Y}{=} X^2 - bZ \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} X = Y = Z = 0 \\ Z = (r-1)\ , X^2 = Y^2 = b\left(r-1\right) \end{cases} \tag{3}$$

Die Fixpunkte sind also gegeben durch $X = Y = Z = 0$ und $X = Y = \pm\sqrt{b\left(r-1\right)}$. Für $r = 20$ und $r = 28$ bedeutet dies bei $b = \frac{8}{3}$ und $\vec{X} \neq \vec{0}$:

$$\vec{X}_{fix,20} = (\pm 7.11805217\,, \pm\, 7.11805217\,, 19)^T \tag{4}$$

$$\vec{X}_{fix,28} = (\pm 8.48528137\,, \pm\, 8.48528137\,, 27)^T \tag{5}$$

Diese Fixpunkte sind in den Abbildungen 2 und 1 jeweils rot markiert. Außerdem werden in Abbildung 2 die Kurven für einen leicht variierenden Startwert vergleichen. Dabei Fällt bereits beim Betrachten der Abbildungen auf, dass sich die Kurven trotz der geringen Variation des Startwertes

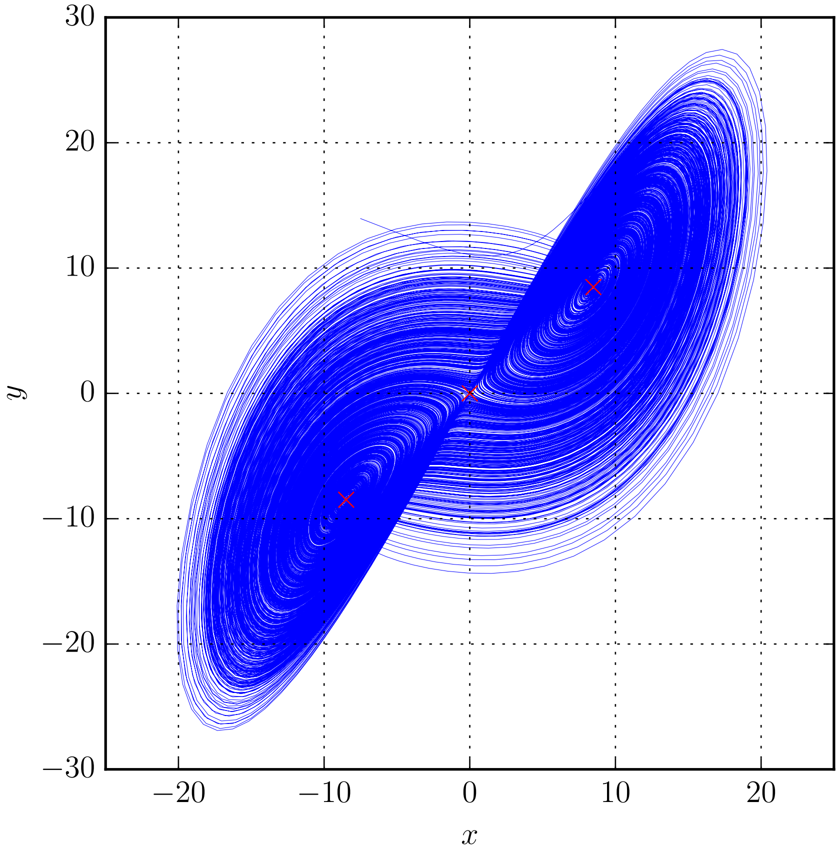


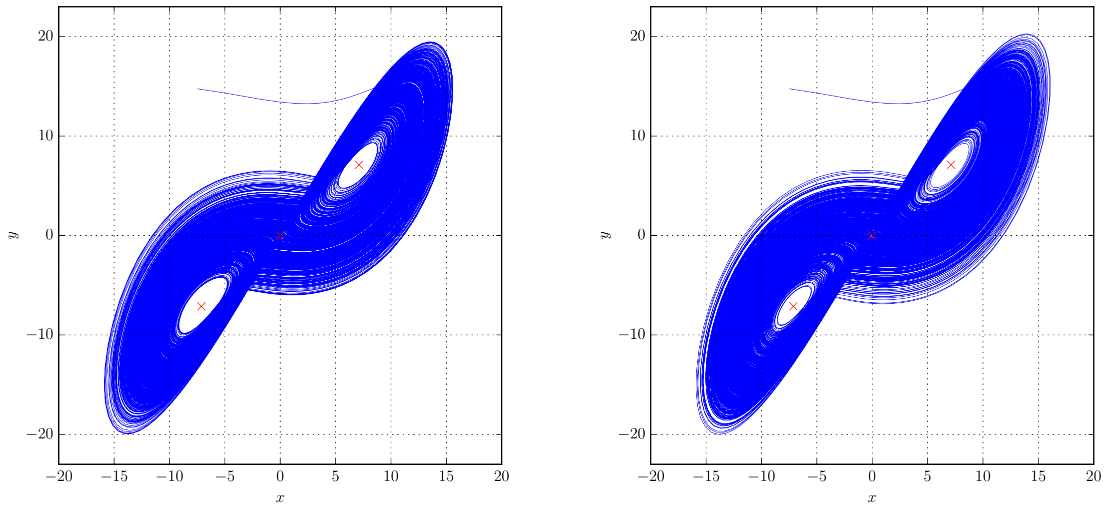
Abbildung 1: Projektion der Zeitentwicklung auf die XY-Ebene mit $r = 20$, $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$

vergleichsweise stark unterscheiden. Wie gravierend dieser Unterschied ist, fällt bei der numerischen Berechnung der Fixpunkte für beide Startwerte auf. Während im ersten Fall der Fixpunkt bei $X{,}Y < 0$ zuerst erreicht wird, läuft die Funktion für den zweiten Startwert in den Fixpunkt bei $X{,}Y > 0$. Die numerisch berechneten Fixpunkte bei einer Schrittweite von $h = 0.001$ und $N = 10^5$ sind gegeben durch

$$\vec{X}_{num,fix,20} = (-7.11813600\,,\,-7.11717693\,,19.0015297)^T \quad \text{bei} \quad \vec{X}_{start} = (-10{,}15{,}19)^T \tag{6}$$
$$\vec{X}_{num,fix,20} = (7.11795263\,,7.11889380\,,18.9984803)^T \quad \text{bei} \quad \vec{X}_{start} = (-10.01{,}15{,}19)^T \tag{7}$$

Diese Fixpunkte haben in der x- und in der y-Komponente jeweils einen relativen Fehler von

$$\varepsilon_x = 1.17771140 \cdot 10^{-5}\,, \quad \varepsilon_y = 1.22960131 \cdot 10^{-4} \quad \text{bei} \quad \vec{X}_{start} = (-10{,}15{,}19)^T \tag{8}$$
$$\varepsilon_x = 1.39833584 \cdot 10^{-5}\,, \quad \varepsilon_y = 1.18238758 \cdot 10^{-4} \quad \text{bei} \quad \vec{X}_{start} = (-10.01{,}15{,}19)^T \tag{9}$$



(a) Startwert $\vec{X} = (-10{,}15{,}19)^T$ (b) Startwert $\vec{X} = (-10.01{,}15{,}19)^T$

Abbildung 2: Projektion der Zeitentwicklung auf die XY-Ebene mit $r = 20$, $\sigma = 10$ und $b = \frac{8}{3}$

2 Integrale

Das Hauptwertintegral

$$I_1 = \mathcal{P}\int_{-1}^{1} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

kann in drei Abschnitte aufgeteilt werden:

$$I_1 = \int_{-1}^{\Delta} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\Delta}^{1} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\mathcal{P}\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t}_{I_\Delta} \tag{11}$$

Dabei wird nur in I_Δ über die Singularität integriert, sodass die anderen beiden Integrale numerisch (z.B. mit der Trapezregel) ausgewertet werden können. Das verbleibende Hauptwertintegral kann mit Hilfe folgender Substitution umgeformt werden:

$$u(t) = \frac{t}{\Delta \cdot t} \quad \rightarrow \quad t = \Delta \cdot s(t), \quad \mathrm{d}t = \Delta\,\mathrm{d}s \tag{12}$$

$$\mathcal{P}\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{P}\int_{-1}^{1} \frac{e^{\Delta\cdot s(t)}}{\Delta \cdot s(t)} \cdot \Delta\,\mathrm{d}s = \mathcal{P}\int_{-1}^{1} \frac{e^{\Delta\cdot s(t)}}{s(t)}\,\mathrm{d}s \tag{13}$$

Da außerdem

$$\mathcal{P}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}\int_{-1}^{1} \frac{e^0}{s}\,\mathrm{d}s = 0 \tag{14}$$

gilt, kann Gleichung (14) von Gleichung (13) abgezogen werden, sodass sich

$$I_\Delta = \mathcal{P}\int_{-1}^{1} \frac{e^{\Delta\cdot s(t)}}{s(t)}\,\mathrm{d}s = \mathcal{P}\int_{-1}^{1} \frac{e^{\Delta\cdot s(t)} - 1}{s(t)}\,\mathrm{d}s \tag{15}$$

ergibt. Nun kann die Exponentialfunktion für kleine x gemäß $e^x \overset{x<<1}{\approx} 1+x+\frac{x^2}{2}$ entwickelt werden. Da der Parameter Δ klein gewählt wird ergibt dies

$$I_\Delta = \mathcal{P}\int_{-1}^{1} \frac{1+s(t)\Delta+\frac{s^2(t)}{2}-1}{s(t)}\,\mathrm{d}s = \mathcal{P}\int_{-1}^{1}\left(\Delta+\frac{s(t)}{2}\right)\mathrm{d}s \tag{16}$$

Numerisch wird nun die Größe Δ in

$$I_1 = \int_{-1}^{\Delta}\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\Delta}^{1}\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1}\left(\Delta+\frac{s}{2}\right)\mathrm{d}s \tag{17}$$

immer weiter Reduziert, bis die Änderung zum analytischen Wert kleiner als 10^{-5} ist. Dann ergibt sich der Wert des Integrals nach 6 Iterationen zu $I_1 = 2.11451672$.

Das zweite Integral ist gegeben durch

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\,, \tag{18}$$

wobei der Integrand bei der unteren Grenze singulär wird. Dies kann gelöst werden, indem das Integral durch die Substitution

$$t = x^2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \tag{19}$$

in ein Gausintegral umgeformt wird:

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{20}$$

Da der Integrand für große x schnell abfällt kann das Integral numerisch berechnet werden, indem die obere Grenze kontinuierlich vergrößert wird bis der relative Fehler kleiner als 10^{-5} ist. Nach 3 Iterationen ergibt sich $I_2 = 1.77245385$.

Beim dritten Integral haben wir lediglich ausgenutzt, dass es symmetrisch ist. Zwar wird

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \tag{21}$$

bei $t=0$ singulär, aber es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1 \tag{22}$$

und wenn dies als Exception in die Funktion eingebaut wird kann das Integral numerisch berechnet werden. Dabei ergibt sich nach 25 Iterationen der Wert $I_3 = 3.14157936$. Zur analytischen Berechnung des Integrals kann ausgenutzt werden, dass die Funktion $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ die inverse Fouriertransformierte der Indikatorfunktion von -1 bis 1 ist. Dabei wird folgende Definition der Fouriertransformation verwendet:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[f(\omega)\right](x) = f(x) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{i\omega x} f(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{23a}$$

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega) = f(\omega) \quad = \quad \int e^{-i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{23b}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(t)}{t} &= \frac{1}{t}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}}{it} - \frac{e^{-it}}{it}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{it\omega}}{it}\right]_{\omega=-1}^{\omega=1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{it\omega}\,\mathrm{d}\omega && \text{(24a)}\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\,\chi_{\{-1,1\}}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\,\chi_{\{-1,1\}}(\omega)\,\mathrm{d}\omega && \text{(24b)}\\
&= \pi\cdot\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\{-1,1\}}(\omega)\right](t) && \text{(24c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right]_{\omega=0} && \text{(25a)}\\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\pi\cdot\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\{-1,1\}}(\omega)\right](t)\,\mathrm{d}t\right]_{\omega=0} && \text{(25b)}\\
&= \pi\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\{-1,1\}}(\omega)\right](t)\,\mathrm{d}t\right]_{\omega=0} && \text{(25c)}\\
&= \pi\cdot\left[\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\chi_{\{-1,1\}}(\omega)\right](t)\right)(\omega)\right]_{\omega=0} && \text{(25d)}\\
&= \pi\cdot\left[\chi_{\{-1,1\}}(\omega)\right]_{\omega=0} && \text{(25e)}\\
&= \pi\cdot\chi_{\{-1,1\}}(0) && \text{(25f)}\\
&= \pi && \text{(25g)}
\end{aligned}
$$