Prof. Joachim Stolze
joachim.stolze@tu-dortmund.de

Sommersemester 2017
Technische Universität Dortmund

Computational Physics
Übungsblatt 4

Ausgabe: 12.05.2017 Abgabe: 19.05.2017 bis 10:00 Uhr

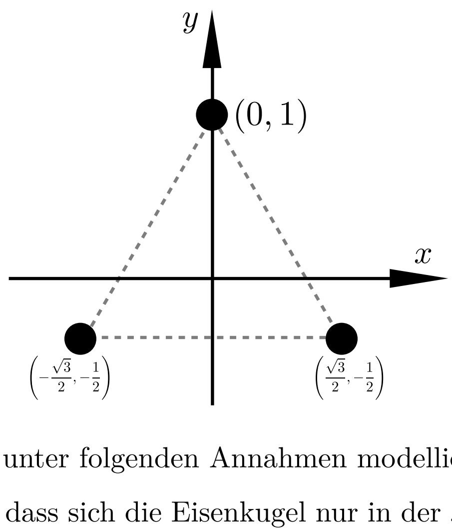
Achtung: Aufgabe 1 a)-c) gibt 7 Punkte und Aufgabe 2 a)-b) gibt 7 Punkte. Von den Teilaufgaben 1 d) und 2 c) kann **eine** ausgewählt werden, die 6 Punkte gibt.

Verständnisfragen

- Welche Schwierigkeiten treten bei der Simulation chaotischer Systeme auf? Wie können Sie diese umgehen?
- Was ist ein Poincaré-Schnitt? Wie können Sie daran erkennen, ob ein System chaotisch ist oder nicht?
- Wie geht man mit Differentialgleichungen höherer Ordnung um?
- Was ist eine MD-Simulation? Welche Verfahren zum Lösen der auftretenden Differentialgleichungen bieten sich an? Warum?

Aufgabe 1. Magnetisches Pendel (7 (+6) P.)

Wir betrachten eine an einem Faden aufgehängte Eisenkugel, die über auf dem Boden fixierte Magnete schwingen kann. Die Länge des Fadens sei dabei so gewählt, dass die Magnete gerade nicht berührt werden. Die Magneten seien in einem gleichseitigen Dreieck (siehe Skizze) angeordnet sein.



Das magnetische Pendel soll unter folgenden Annahmen modelliert werden:

- Das Pendel sei so lang, dass sich die Eisenkugel nur in der xy-Ebene mit einem Abstand $z > 0$ über den Magneten bewege. Die z-Komponente der Eisenkugel ist damit fest und im Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ der Eisenkugel müssen nur die x- und die y-Komponente berücksichtigt werden.

- Aufgrund der großen Pendellänge sei die rücktreibende Kraft (verursacht von der Gravia-tion) proportional zur Auslenkung $\boldsymbol{r}$ der Eisenkugel mit einem Proportionalitätsfaktor α.
- Die Reibungskräfte durch die Luft und das Pendelgelenk seien proportional zur Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ des Pendels mit einem Proportionalitätsfaktor β.
- Die Anziehung der Magneten sei der Einfachheit halber proportional zum inversen Abstandsquadrat mit dem Proportionalitätsfaktor γ. (Auch wenn das die Existenz magnetischer Monopole bedeuten würde.)
- Die Eisenkugel habe eine einheitenlose Masse $M = 1$.

Somit ergibt sich die (einheitenlose) Gesamtkraft

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = -\alpha \boldsymbol{r} - \beta \boldsymbol{v} - \sum_{m=1}^{3} \gamma \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_m}}{\left((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\mathrm{m})^2 + z^2\right)^{3/2}} \tag{1}$$

mit den Konstanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$ und den Magnetpositionen $\boldsymbol{r}_\mathrm{m}$.

a) Bestimmen Sie analytisch das von der Graviation und den drei Magneten erzeugte Potential. Stellen Sie $V(x, y)$ im Bereich $-2 < x, y < 2$ grafisch dar. Verwenden Sie die Parameter $\alpha = 1, \beta = 0.1, \gamma = 1$ und $z = 0.1$.

   Abgabe: Analytisches Ergebnis, Plot und Daten von $V(x, y)$

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen des Pendels numerisch mit einem Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung mit den Startwerten $\boldsymbol{r}_0 = (2, 0.99), (2, 1.00), (2, 1.01)$ ($\boldsymbol{v}_0 = 0$) und stellen Sie die Trajektorie in der xy-Ebene dar. Verwenden Sie die Parameter aus a) und eine Schrittweite von $h = 0.01$.

   Abgabe: Plot und Daten der drei Trajektorien

c) Bestimmen Sie die kinetische, potentielle und gesamte Energie in Abhängigkeit von der Zeit für den Startwert $\boldsymbol{r}_0 = (2, 1)$. Erläutern Sie das Verhalten.

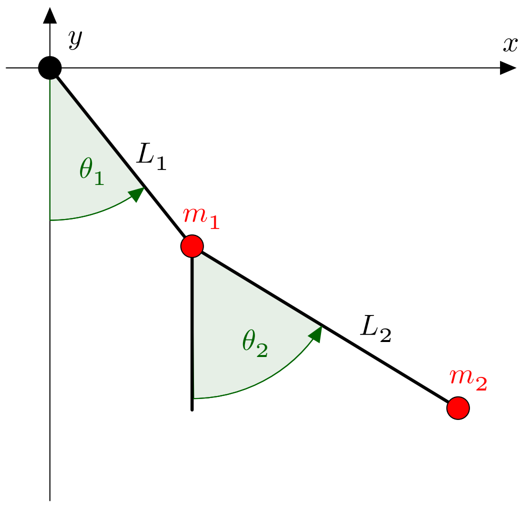
   Abgabe: Plot und Daten der Energien

d) *(Optional)* Nun soll eine Karte erstellt werden, die farblich kennzeichnet, bei welchem der drei Magneten das Pendel abhängig von der Startposition stoppt. Berechnen Sie hierzu die Trajektorien zu Startpositionen auf einem quadratischen Gitter im Bereich $-2 < x, y < 2$. Die Auflösung sollte dabei mindestens 100x100 betragen. Gehen Sie hierzu schonend mit ihren Rechenkapazitäten um und überlegen Sie sich ein einfaches Kriterium, um den Magneten zu bestimmen, in dessen Nähe das Pendel endet. Führen Sie die Rechnung mit $\beta = 0.1$ und $\beta = 0.25$ aus. Wählen Sie alle anderen Parameter wie in a). Erläutern Sie die Unterschiede.

   Abgabe: Plots und Daten der beiden Karten

Aufgabe 2. Doppelpendel (7 (+6) P.)

Im Folgenden soll ein Doppelpendel aus zwei Massen m_1 und m_2 an Stäben der Länge L_1 bzw. L_2 betrachtet werden.



Aus der analytischen Mechanik sind die Bewegungsgleichungen für die Winkel bekannt (Vorsicht beim Abtippen):

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= \frac{1}{1-\mu\cos^2(\theta_2-\theta_1)}\Big[\mu\, g_1 \sin(\theta_2)\cos(\theta_2-\theta_1) + \mu\,\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2-\theta_1)\cos(\theta_2-\theta_1) \qquad (2a)\\ &\quad - g_1\sin(\theta_1) + \frac{\mu}{\lambda}\,\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2-\theta_1)\Big]\\ \ddot{\theta}_2 &= \frac{1}{1-\mu\cos^2(\theta_2-\theta_1)}\Big[g_2 \sin(\theta_1)\cos(\theta_2-\theta_1) - \mu\,\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2-\theta_1)\cos(\theta_2-\theta_1) \qquad (2b)\\ &\quad - g_2\sin(\theta_2) - \lambda\,\dot{\theta}_1{}^2 \sin(\theta_2-\theta_1)\Big]\end{aligned}$$

Dafür wollen wir die Massen $m_1 = m_2 = 1\,\mathrm{kg}$ gleichsetzen, sodass sich $\mu = \dfrac{m_2}{m_1+m_2} = \dfrac{1}{2}$ ergibt. Weiterhin haben wir die Abkürzungen λ und g_i definiert, deren Werte wir für die Rechnung als $L_1 = L_2 = 1\,\mathrm{m}$ annehmen,

$$\lambda := \frac{L_1}{L_2} = 1 \quad \text{und} \qquad (3)$$

$$g_i := \frac{g}{L_i} = 9.81\,\mathrm{s}^{-2} \quad . \qquad (4)$$

Im Folgenden sollen die drei folgenden Anfangsbedingungen betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
\theta_{1,\text{period}} &= 0.1 & \dot{\theta}_{1,\text{period}} &= 0 \\
\theta_{2,\text{period}} &= \sqrt{2} \cdot \theta_{1,\text{period}} & \dot{\theta}_{2,\text{period}} &= 0 \\
\\
\theta_{1,\text{quasi}} &= 0 & \dot{\theta}_{1,\text{quasi}} &= 0 \\
\theta_{2,\text{quasi}} &= 0 & \dot{\theta}_{2,\text{quasi}} &= 4.472 \\
\\
\theta_{1,\text{chaos}} &= 0 & \dot{\theta}_{1,\text{chaos}} &= 0 \\
\theta_{2,\text{chaos}} &= 0 & \dot{\theta}_{2,\text{chaos}} &= 11.832
\end{aligned} \tag{5}$$

a) Berechnen Sie mithilfe Ihres Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung ein Phasenraumbild $(\dot{\theta}_1, \theta_1)$ mit den drei verschiedenen Startbedingungen. Was stellen Sie fest?

   Abgabe: Drei Plots $\dot{\theta}_1$ gegen θ_1 und Daten zu den verschiedenen Startbedingungen zusätzlich zum Quelltext

b) Stellen Sie für das System die kinetische und potentielle Energie als Funktion der Winkel und Winkelgeschwindigkeiten auf. Die Energie sei so definiert, dass $\theta_i = 0, \dot{\theta}_i = 0$ einer Energie von $E = 0$ entspricht. Welche Gesamtenergie hat das System für die verschiedenen Startbedingungen?

   Abgabe: analytische Formeln, 3 Gesamtenergiewerte

c) *(Optional)* Berechnen Sie abschließend Poincaré-Schnitte des Systems für die drei Energien aus b). Nehmen Sie dazu Punkte $(\dot{\theta}_1, \theta_1)$ auf, falls θ_2 gerade einen Nulldurchgang zeigt ($\theta_2 = 0$) und sich nach rechts bewegt, also zusätzlich $\dot{\theta}_2 + \lambda\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) > 0$ gilt. Sehen Sie dazu die Winkel als periodische Variable an. Es bietet sich an, die Punkte $(\dot{\theta}_1, \theta_1)$ direkt vor und nach dem Nulldurchgang linear zu interpolieren. Es genügt nicht mit nur einer Startbedingung zu starten, es müssen mindestens 20 Startbedingungen der gleichen Energie gewählt werden. Wählen Sie eine Schrittweite von $h = 0.001$ und eine möglichst große Schrittanzahl (ungefähr $10^6 - 10^7$), um gut gefüllte Plots zu erhalten.

   Abgabe: Drei reich gefüllte Poincaré-Schnitte. Daten nur, falls die Dateien nicht zu groß sind, zusätzlich der Quelltext