

Aufgabe 1: Der gute alte harmonische Oszillatator

a)

Die Trajektorie nimmt je nach Anfangsbedingung eine Ellipse (Abbildung 1) oder eine einfache Linie (Abbildung 2) an, bei der der Oszillatator zwischen zwei Punkten auf einer direkten Linie hin und her schwingt.

Eine Ellipse ergibt sich, wenn $\vec{v}(0) \neq 0$ und eine zu $\vec{r}(0)$ tangentiale Komponente besitzt.

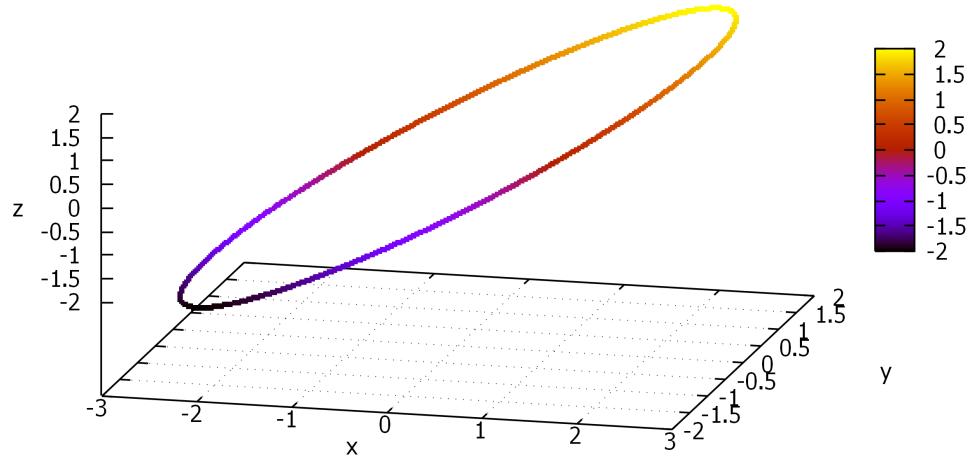


Abbildung 1: Beispiel einer ellipsenartigen Trajektorie mit Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (2, 2, 2)^T$ und $\vec{v}(0) = (1, 0, 0)^T$.

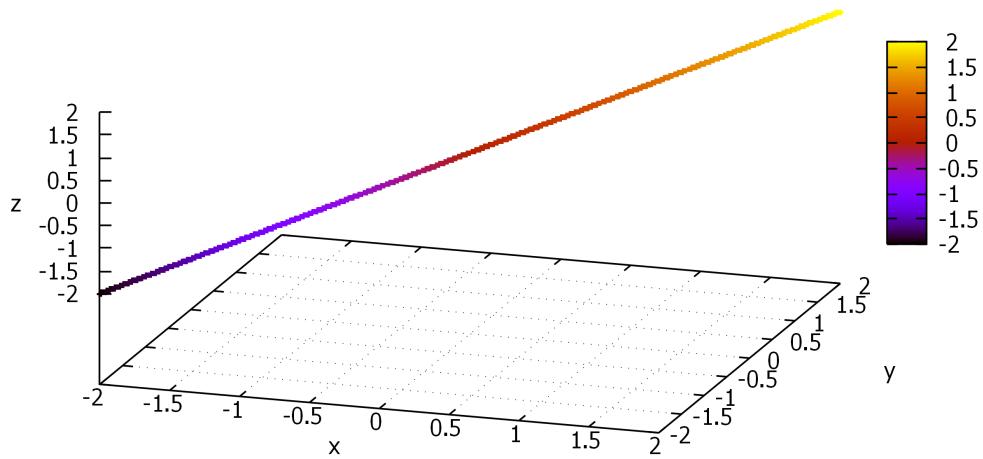


Abbildung 2: Beispiel einer linienartigen Trajektorie mit Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (2, 2, 2)^T$ und $\vec{v}(0) = (0, 0, 0)^T$.

b)

Nimmt der harmonische Oszillatator eine ellipsenartige Trajektorie ein, so ist $\vec{v}(t)$ niemals der Nullvektor. Für sich genommen gilt allerdings für jede Komponente, dass sie ihre maximale Auslenkung erreicht, wenn die jeweilige Geschwindigkeitskomponente verschwindet.

In Abbildung 3 ist $|\vec{r}|$ gegen $|\vec{v}|$ geplottet für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (2, 2, 2)^T$ und $\vec{v} = (1, 0, 0)^T$. Dort ist zu erkennen, dass $|\vec{v}| = 0$ wegen der ellipsenartigen Trajektorie nie erreicht wird.

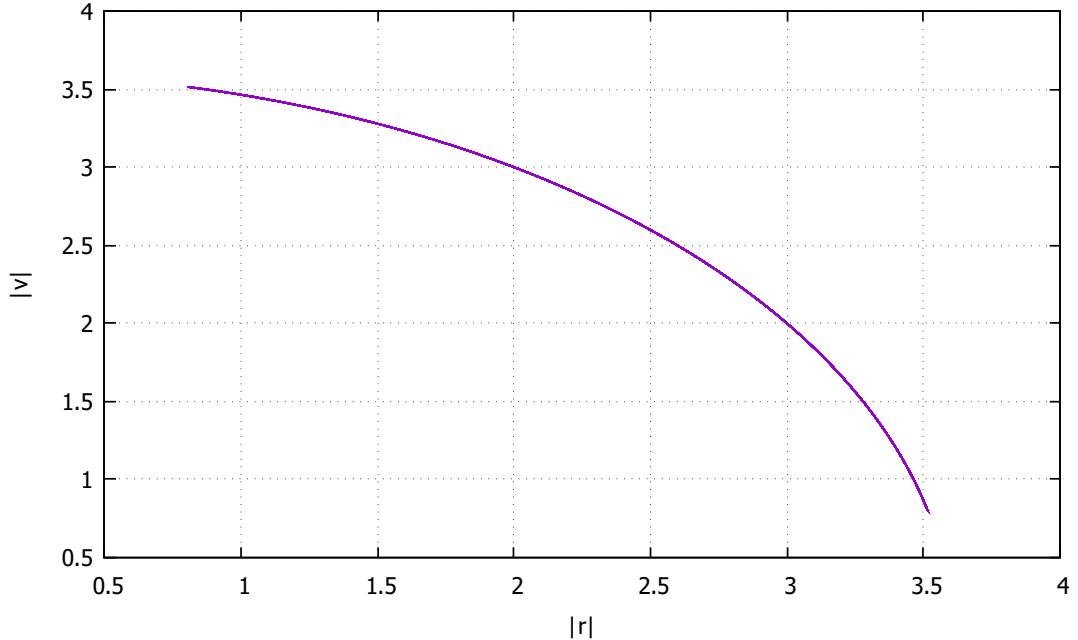


Abbildung 3: Plot von $|\vec{r}|$ gegen $|\vec{v}|$ mit Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (2, 2, 2)^T$ und $\vec{v}(0) = (1, 0, 0)^T$. Der maximale Ausschlag wird bei $t = 0$ erreicht, allerdings ist dort $\vec{v} \neq 0$.

c)

Es wird der relative Fehler $f_{\text{rel}}(h)$ abhängig von der Schrittweite geplottet auf einer logarithmischen h -Skala (Abbildung 4).

Für den Test wird das leichteste System mit Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)^T$ und $\vec{v} = 0$ gewählt, sodass die Schwingung einer einfachen cos-Funktion in x entspricht. Diese ist 2π -periodisch. Es wird fünf Schwingungen gewartet, und dann der relative Fehler gemäß

$$f_{\text{rel}}(h) = \text{abs} \left(\frac{\cos(10\pi) - x_{\text{num}}(10\pi)}{\cos(10\pi)} \right) = \text{abs} (1 - x_{\text{num}}(10\pi))$$

bestimmt.

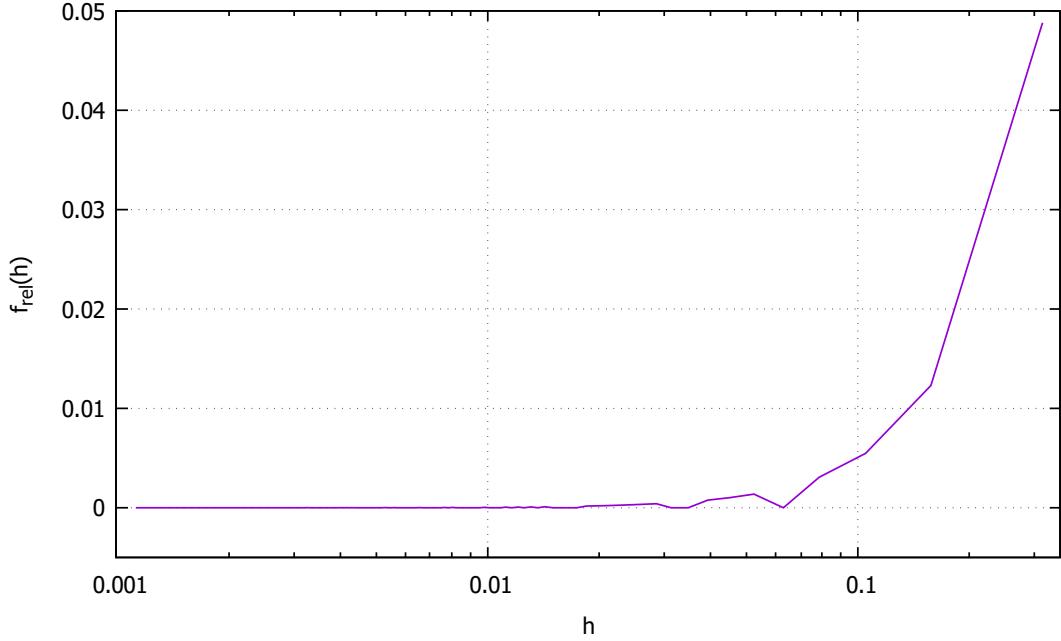


Abbildung 4: Plot vom relativen Fehler $f_{\text{rel}}(h)$ der maximalen Auslenkung numerisch berechnet nach fünf Schwingungsperioden für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)^T$ und $\vec{v}(0) = (0, 0, 0)^T$. Für kleinere h wird tendenziell der relative Fehler verringert. Bereits bei $h < 0.01$ ist $f_{\text{rel}}(h) \approx 0$ und keine Veränderung mehr erkennbar.

Die kinetische Energie, die potentielle Energie sowie die Gesamtenergie sind in Abbildung 5 dargestellt. Energieerhaltung ist gewährleistet.

Da außerdem an dieser Stelle die Aufgabenstellung nicht ganz eindeutig war, wurde auch der relative Fehler $f_{\text{rel}}(h)$ der Gesamtenergie mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)^T$ und $\vec{v}(0) = 0$ berechnet gemäß

$$f_{\text{rel}}(h) = \text{abs} \left(\frac{E(0) - E_{\text{num}}(10\pi)}{E(0)} \right) = \text{abs} (1 - 2 \cdot E_{\text{num}}(10\pi))$$

und in Abbildung 8 dargestellt.

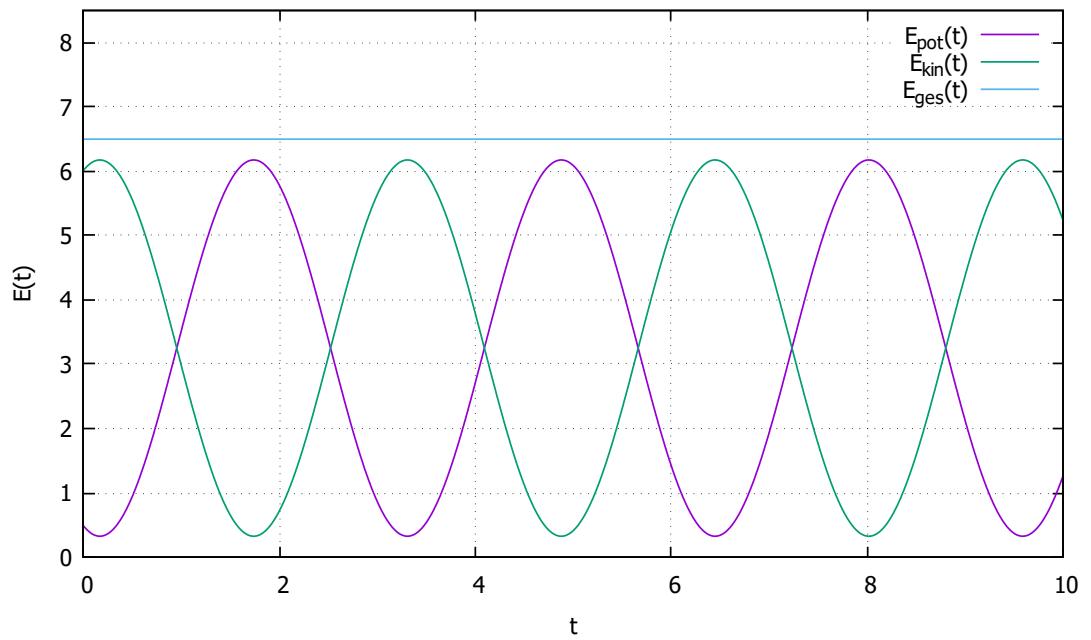


Abbildung 5: Plot von kinetischer, potentieller und Gesamtenergie für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (2, 2, 2)^T$, $\vec{v}(0) = (1, 0, 0)^T$.

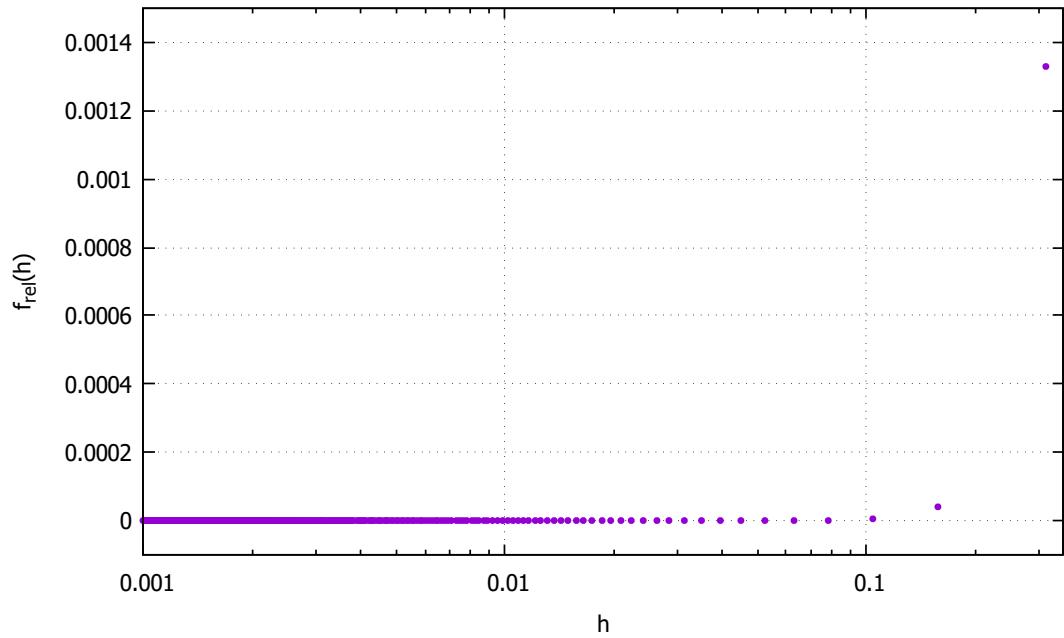


Abbildung 6: Plot vom relativen Fehler $f_{\text{rel}}(h)$ der Gesamtenergie numerisch berechnet nach fünf Schwingungsperioden für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)^T$ und $\vec{v}(0) = (0, 0, 0)^T$. Der relative Fehler der Gesamtenergie ist bereits bei $h < 0.01$ verschwindend gering.

d)

Als Startbedingung wird

$$\begin{aligned}\vec{r}(0) &= (1, 0, 0)^T \\ \vec{v}(0) &= (0, 1, 0)^T\end{aligned}$$

gewählt und die Trajektorie in der xy -Ebene, sowie der zeitliche Verlauf $y(t)$ mit und ohne zusätzlichem Kraftfeld betrachtet.

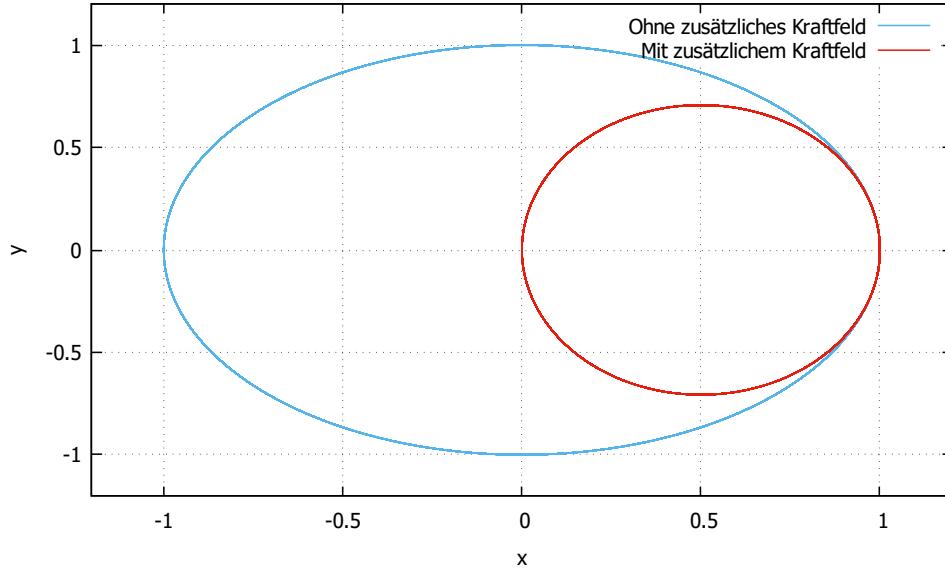


Abbildung 7: Vergleich zwischen den Trajektorien mit und ohne zusätzlichem Kraftfeld bei gleichen Anfangsbedingungen.

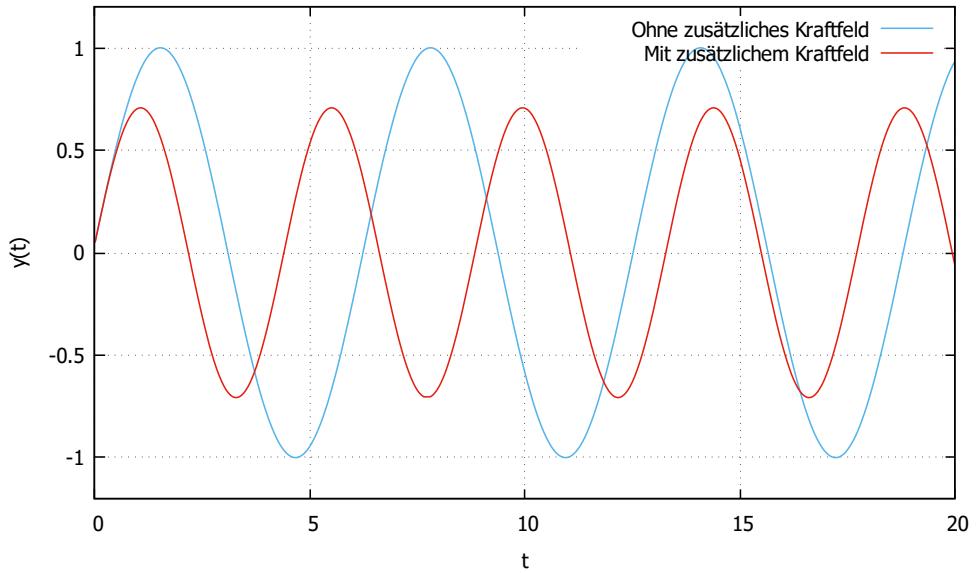


Abbildung 8: Vergleich zwischen dem Verlauf der y -Koordinate mit und ohne zusätzlichem Kraftfeld bei gleichen Anfangsbedingungen. Durch die Kraft entsteht eine Phasenverschiebung und eine Verschiebung in der Amplitude.

Aufgabe 2: Kepler-Ellipsen

a)

Eine mögliche Anfangsgeschwindigkeit zum Startpunkt $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)^T$, bei der die Trajektorie des Teilchens eine Ellipse beschreibt, ist

$$\vec{v} = (0.43, 1, -0.3)^T.$$

Die Trajektorie zu diesen Anfangsbedingungen ist in Abbildung 9 dargestellt.

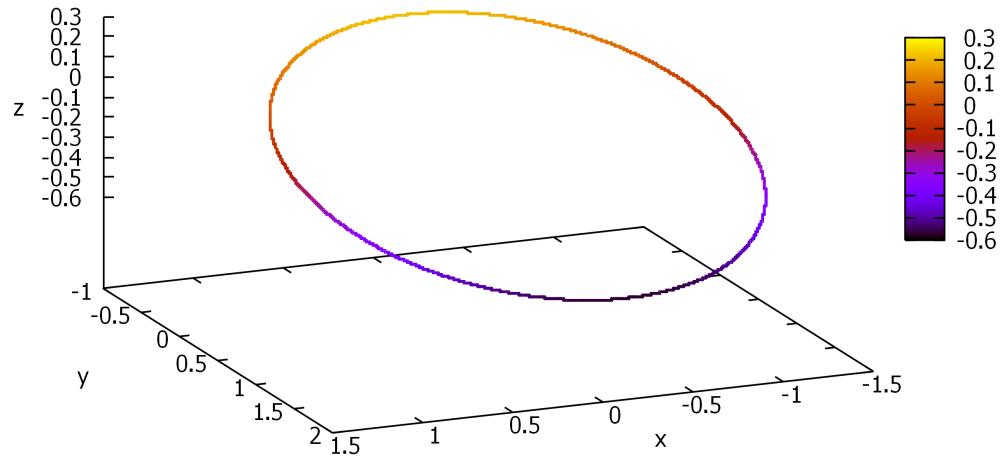


Abbildung 9: Darstellung der Trajektorie eines Teilchens im Gravitationspotential mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)^T$ und $\vec{v}(0) = (0.43, 1, -0.3)^T$. Die Teilchenbahn stellt eine geschlossene Ellipse dar.

Bei sehr kleinen Anfangsgeschwindigkeiten wird das Teilchen zum Ursprung gezogen, bis in der Kraft durch Null geteilt wird, weil der Radius zu klein geworden ist.

b)

Energie und Drehimpuls sind in Abbildung 10 dargestellt.

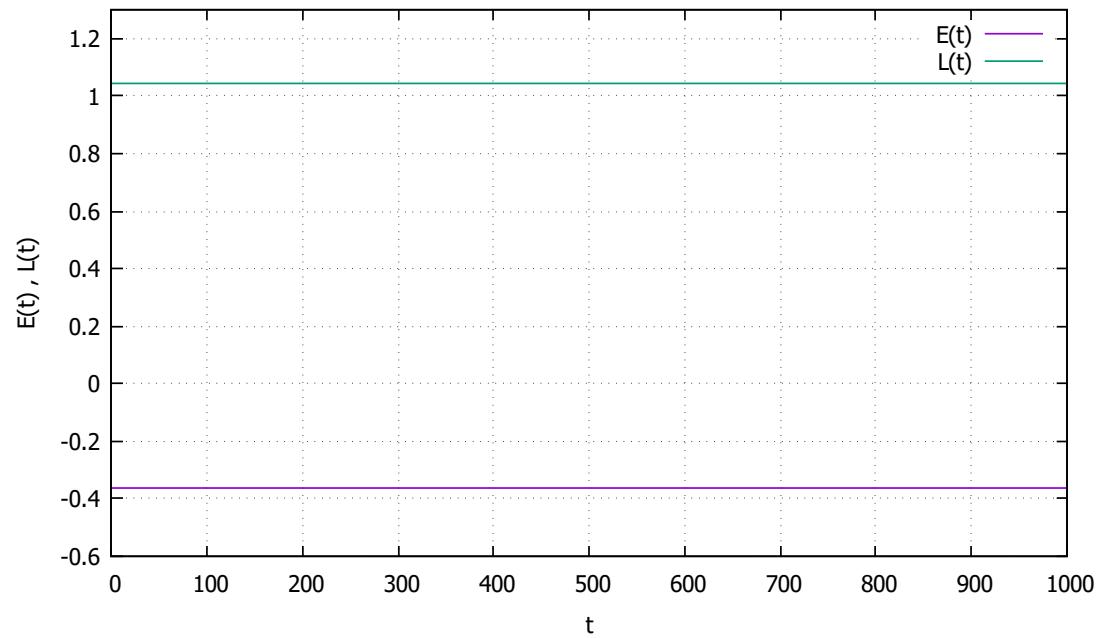


Abbildung 10: Energie $E(t)$ und Drehimpuls $L(t)$ sind über den gesamten Simulationszeitraum erhalten und ändern sich lediglich in der 10. Nachkommastelle.

c)

Die Plots für die beiden Fälle $\alpha = 0.9$ und $\alpha = 1.1$ sind in den Abbildungen 11 bzw. 12 dargestellt. Die Anfangsbedingungen werden aus den vorangegangenen Aufgabenteilen übernommen. Desweiteren ist im Unterordner 'Aufgabe 2' eine .gif-Datei enthalten, die die Bewegung des Teilchens bei $\alpha = 1.1$ veranschaulicht.

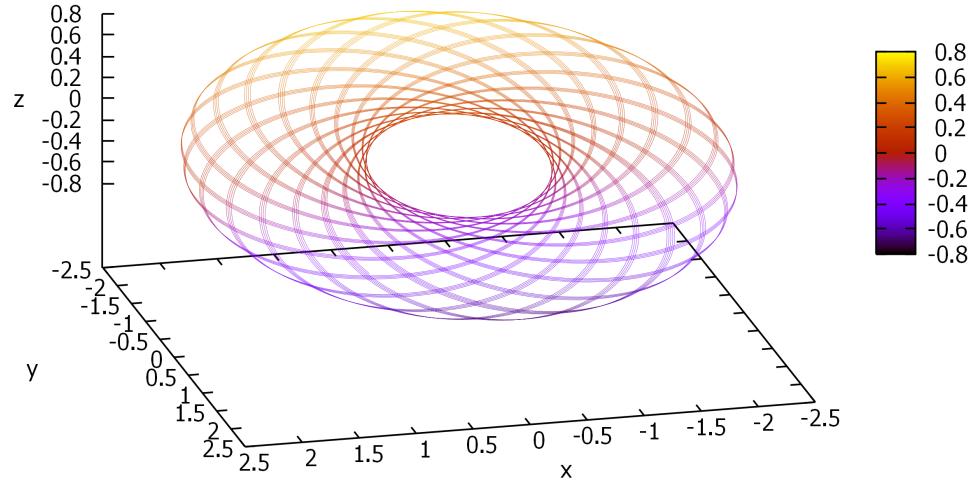


Abbildung 11: Darstellung der resultierenden Trajektorie bei einem wirkenden Potential $V(r) \propto -1/r^\alpha$ für $\alpha = 0.9$ mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)^T$ und $\vec{v}(0) = (0.43, 1, -0.3)^T$.

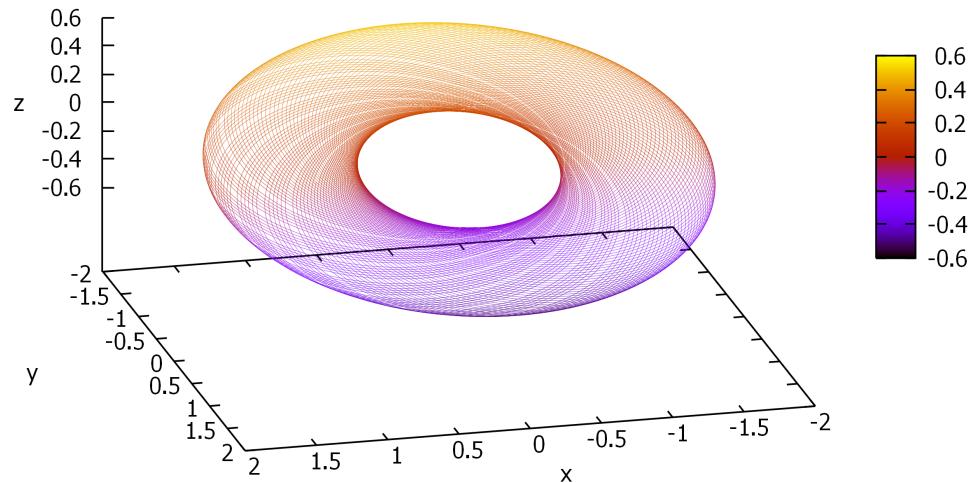


Abbildung 12: Darstellung der resultierenden Trajektorie bei einem wirkenden Potential $V(r) \propto -1/r^\alpha$ für $\alpha = 1.1$ mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)^T$ und $\vec{v}(0) = (0.43, 1, -0.3)^T$.

d) / e)

Auf Mond und Planeten wirken nun jeweils die Kraft der Sonne, sowie die Kraft des jeweils anderen Himmelskörpers.

In Abbildung 13 sind die Trajektorien von Mond und Planet dargestellt. Die Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\text{Planet}}(0) &= (1, 0, 0)^T \\ \vec{v}_{\text{Planet}}(0) &= (0, \sqrt{3/2}, 0)^T \\ \vec{r}_{\text{Mond}}(0) &= (1.1, 0, 0) \\ \vec{v}_{\text{Mond}}(0) &= (0, 4.7, 0)\end{aligned}$$

Des Weiteren ist im Unterordner 'Aufgabe 2' eine .gif-Datei, welche die Bewegung der Himmelskörper veranschaulicht.

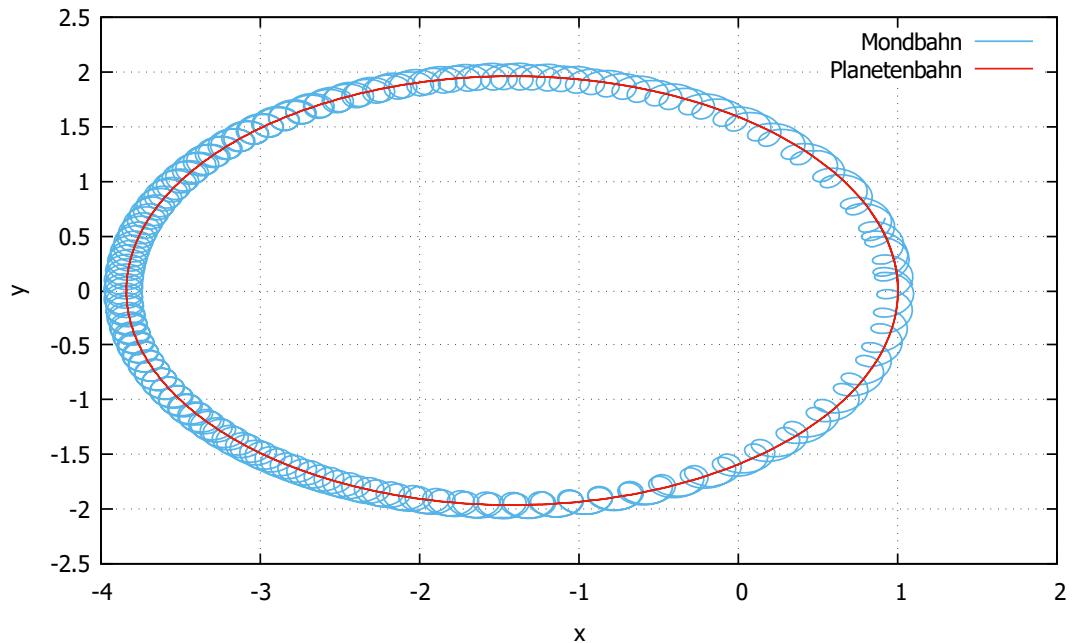


Abbildung 13: Darstellung der Trajektorien von Mond und Planet um eine fixierte Sonne im Ursprung. Der Planet umkreist die Sonne, während der Mond Kreisbewegungen um den Planeten vollführt.

Die Bahnkurve vom Mond, relativ zur Erde, wird annähernd durch eine geschlossene Ellipse beschrieben. Der entsprechende Plot ist in Abbildung 14 dargestellt.

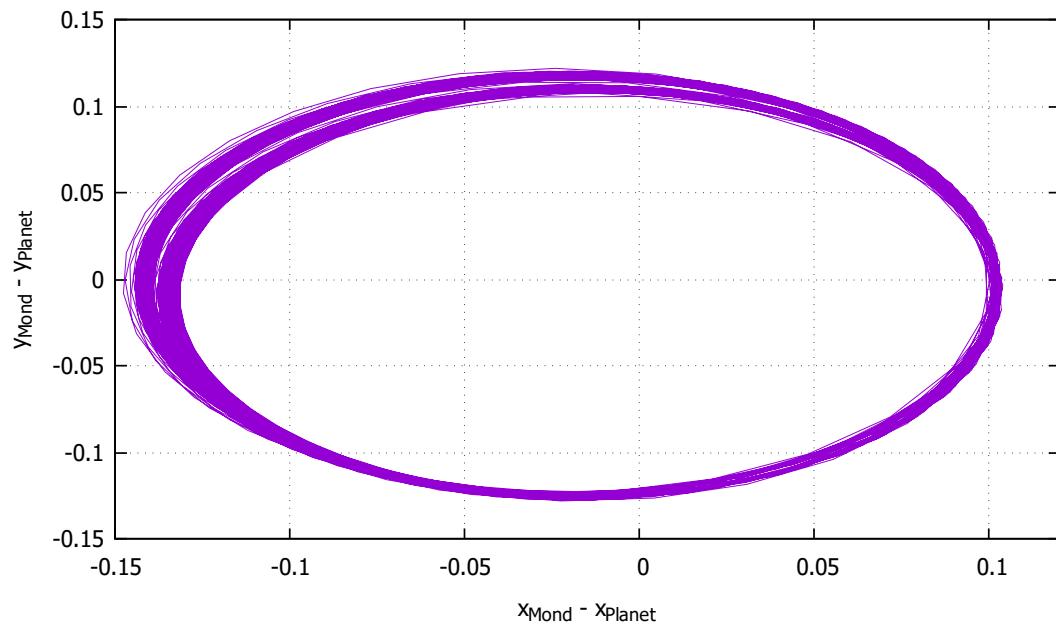


Abbildung 14: Darstellung der relativen Trajektorie vom Mond zum Planeten. Es handelt sich annähernd um eine geschlossene Ellipse, durch die Einwirkung von Planet und fixierter Sonne wird die Bewegung jedoch 'gestört'.

In Abbildung 15 sind zwei Trajektorien mit obigen Anfangsbedingungen dargestellt. Eine Trajektorie beschreibt die Planetenbewegung mit Mond, die andere ohne Mond.

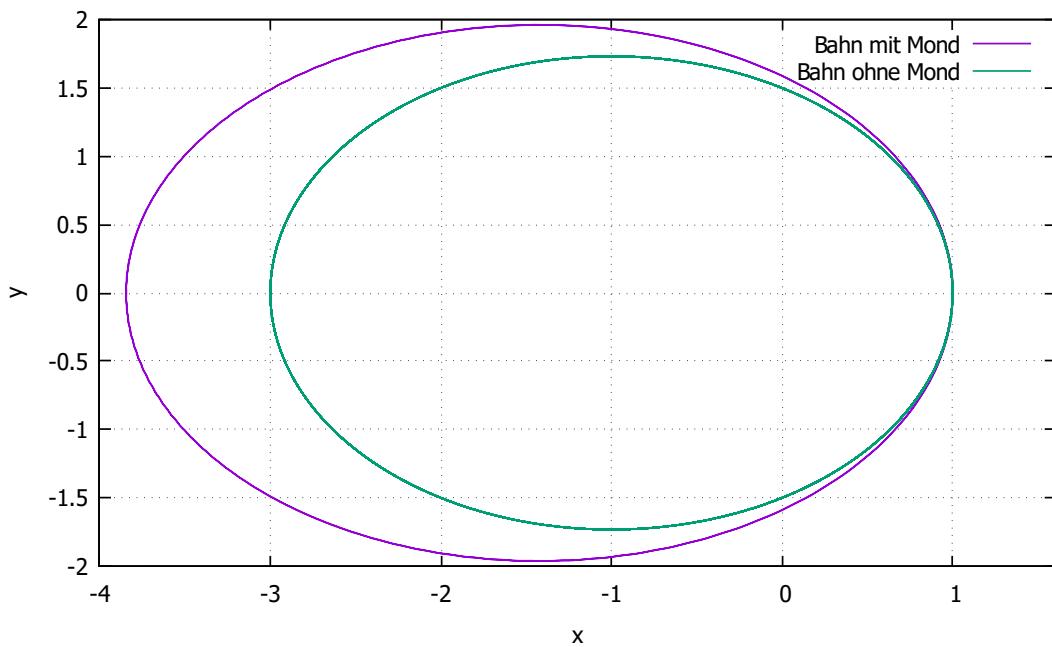


Abbildung 15: Vergleich der Trajektorien des Planeten mit und ohne Mond. Der Mond verhält sich störend gegenüber der Erde.