

Computational Physics, Aufgabenblatt 4

Kevin Sedlaczek, Mona Kalthoff

19. Mai 2017

1 Magnetisches Pendel

Die Kraft auf die Masse am Pendel ist gegeben durch

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\alpha \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} - \gamma \sum_m \frac{1}{\left((r_x - r_{mx})^2 + (r_y - r_{my})^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} r_x - r_{mx} \\ r_y - r_{my} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Dabei beschreibt der rote Term die Reibungskraft, welche nicht konservativ ist. Dadurch ist die Gesamtenergie nicht erhalten, und lediglich für den schwarzen, konservativen Teil der Kraft, welcher durch die Magneten und die Gravitation als rücktreibende Kraft des Pendels hervorgerufen wird, kann ein Potential gefunden werden das $-\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \vec{F}$ erfüllt:

$$\int F_x dr_x = -\frac{\alpha r_x^2}{2} - \gamma \sum_m \int \frac{r_x - r_{mx}}{\left((r_x - r_{mx})^2 + (r_y - r_{my})^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dr_x \quad (2)$$

Substitution:

$$u = (r_x - r_{mx})^2 + (r_y - r_{my})^2 + z^2$$

$$du = 2(r_x - r_{mx}) dr_x$$

$$= -\frac{\alpha r_x^2}{2} - \frac{\gamma}{2} \sum_m \int u^{-\frac{3}{2}} du = -\frac{\alpha r_x^2}{2} - \frac{\gamma}{2} \sum_m \left(-\frac{2}{\sqrt{u}}\right) \quad (3)$$

$$= -\frac{\alpha r_x^2}{2} + \gamma \sum_m \frac{1}{\sqrt{(r_x - r_{mx})^2 + (r_y - r_{my})^2 + z^2}}. \quad (4)$$

Analog gilt:

$$\int F_y dr_y = -\frac{\alpha r_y^2}{2} + \gamma \sum_m \frac{1}{\sqrt{(r_x - r_{mx})^2 + (r_y - r_{my})^2 + z^2}}. \quad (5)$$

Somit ist das Potential, das in Abbildung 1 als dreidimensionaler Plot dargestellt ist, gegeben durch

$$V(\vec{r}) = \frac{\alpha}{2} (r_x^2 + r_y^2) - \gamma \sum_m \frac{1}{\sqrt{(r_x - r_{mx})^2 + (r_y - r_{my})^2 + z^2}}. \quad (6)$$

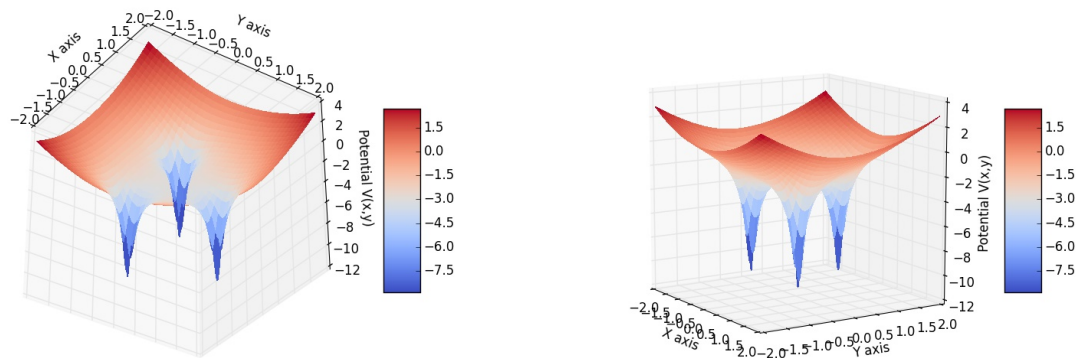


Abbildung 1: Durch die Magneten erzeugtes Potential aus zwei verschiedenen Blickwinkeln

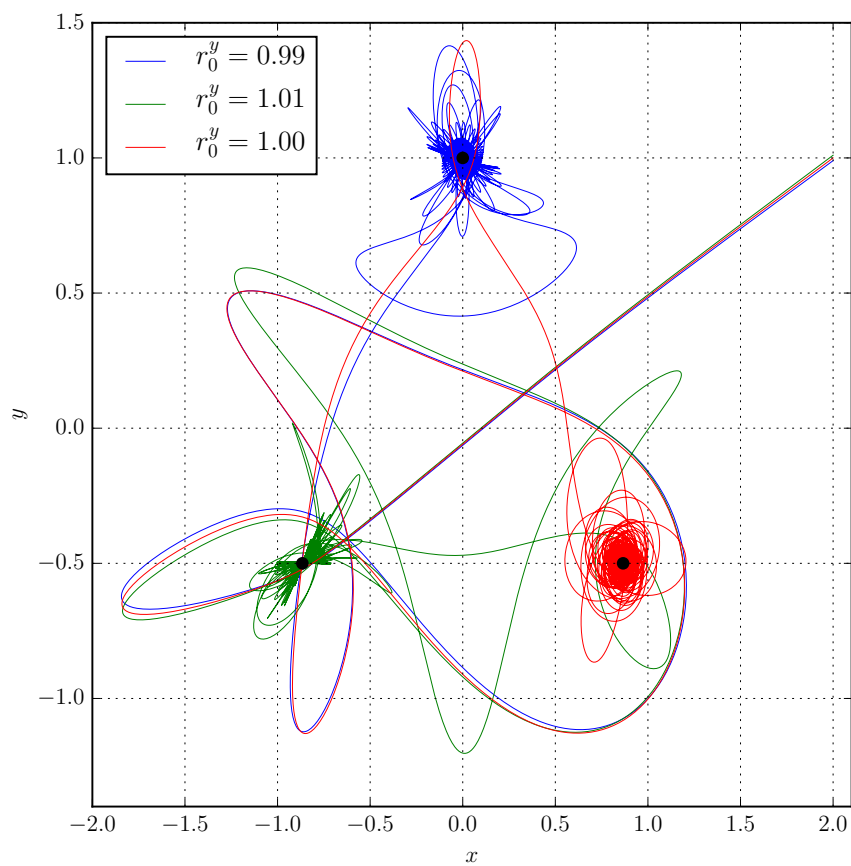


Abbildung 2: Trajektorien der Pendelmasse für 3 verschiedene Startwerte

Die Trajektorien des Pendels wurden für die drei Startwerte $\vec{r}_0 \in \{(2, 0.99)^T, (2, 1.01)^T, (2, 1.00)^T\}$ mittels eines Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung der Schrittweite $h = 0.01$ berechnet. Die verwendeten Parameter sind $\alpha = 1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 1$ und $z = 0.1$. Wie in Abbildung 2 zu sehen führen diese 3 leicht verschiedenen Startwerte alle dazu, dass das Pendel in einer anderen Potentialmulde, also bei einem anderen Magneten zur Ruhe kommt.

Der zeitliche Verlauf der kinetischen-, der potentiellen- und der Gesamtenergie sind in Abbildung 3 dargestellt. Dabei ist die Gesamtenergie am Anfang, wenn die kinetische Energie null ist, am größten. Von da an nimmt die kinetische Energie ab, wobei die Abnahme der Energie dann am größten ist, wenn die Geschwindigkeit groß ist, da dann besonders viel Energie durch Reibung verloren geht. Die kinetische Energie geht dabei Asymptotisch gegen null und die Gesamtenergie geht asymptotisch gegen den Minimalwert des Potentials, welcher bei ca. $E_{min} \approx -10.65$ liegt.

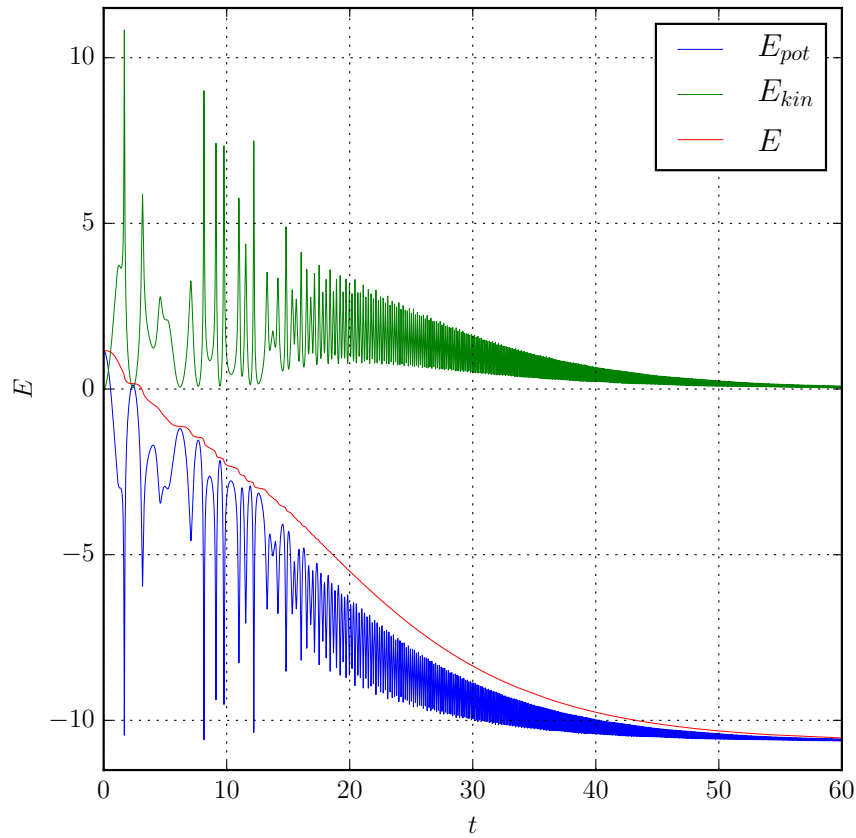


Abbildung 3: Energie der Pendelmasse für $\vec{r}_0 = (2, 1.00)^T$.

Als nächstes haben wir untersucht für welchen Startwert das System in welchem Fixpunkt endet. Als Maß dafür, dass ein Fixpunkt erreicht ist betrachten wir jeweils den Punkt, an dem die Gesamtenergie asymptotisch annähernd konstant ist, so also die Differenz zwischen der Gesamtenergie im zurückliegenden Schritt und im aktuellen unterhalb einer gewissen Toleranz lag. Diese Toleranz

setzten wir bei einer Schrittweite von $h = 0.01$ auf $\text{toleranz} = 1e - 4$. Wenn dieser Zustand erreicht ist testen wir, welchem Magneten sich die Masse am nächsten befindet. Das Ergebnis für die beiden Proportionalitätsfaktoren der Reibung $\beta_1 = 0.1$ und $\beta_2 = 0.25$ in Abbildung 4 dargestellt. Wir bestimmten dabei den Fixpunkt in Abhängigkeit des Startwertes, indem wir das Intervall $\{-2,2\}$ mit der x und y Koordinate in Schritten der Schrittweite 0.01 durchliefen, sodass wir den Fixpunkt für $400^2 = 160000$ Startwerte bestimmen und somit eine deutlich höhere Auflösung als die geforderte erzielen. Die Startgeschwindigkeit wählten wir immer zu $\vec{v}_0 = 0$

Bei der Betrachtung des Ergebnisses in Abbildung 4 ist deutlich zu erkennen, dass eine Symmetrie bezüglich der drei Magneten vorliegt. Startet das Pendel sehr nah an einem der Magneten, so liegt der Fixpunkt zwangsläufig in der Potentialmulde dieses Magneten, wie an den großen einheitlich gefärbten Flächen um die Magneten deutlich wird. Ist der Abstand zu den Magneten jedoch größer, so wirkt der zugehörige Fixpunkt bis auf die Symmetrie willkürlich, und bereits sehr kleine Variationen in den Parametern führen zu grundsätzlich verschiedenen Resultaten. Das System verhält sich also chaotisch. Ein Vergleich der Ergebnisse für einen größeren und kleineren Proportionalitätsfaktor der Reibung β zeigt, dass der Bereich in dem sich das System deterministisch verhält für den größeren Faktor deutlich größer ist. Dies entspricht der Erwartung, da das Pendel bei einem höheren Reibungsfaktor deutlich schneller an Energie verliert, und somit auch schneller langsamer wird. So lange das Pendel eine hohe kinetische Energie aufweist kann es sein, dass es sich zu einem gegebenen Zeitpunkt näher an einem Magneten befindet als an allen anderen, jedoch einen weiter entfernten Magneten als Fixpunkt hat. Unterhalb einer bestimmten Energieschwelle ist dies jedoch nicht mehr möglich. Für einen höheren Reibungsparameter ist diese Energieschwelle früher, und damit weiter entfernt vom Magneten, erreicht.

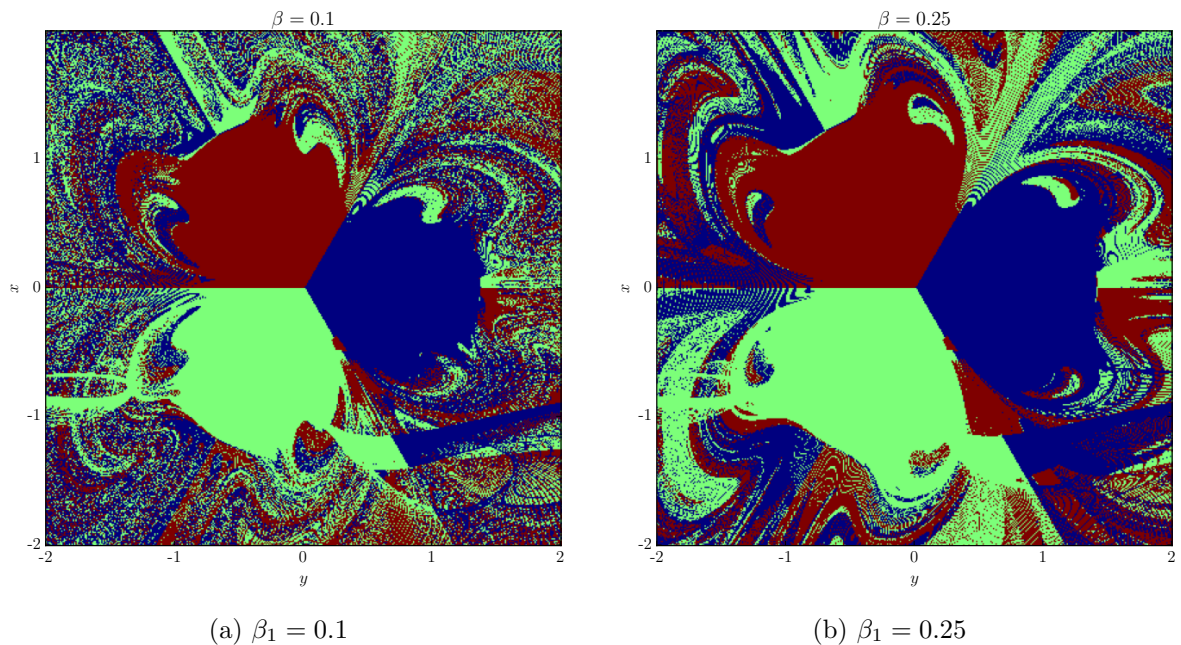


Abbildung 4: Fixpunkte in Abhängigkeit der Startwerte für verschiedene Reibungsparameter

2 Doppelpendel

Für den Startwert θ_{period} ergeben sich für die Massen des Doppelpendels geschlossene, ellipsenförmige Trajektorien welche in Abbildung 5 dargestellt sind. Dies entspricht den Trajektorien eines harmonischen Oszillators. Auch der Verlauf der Energie ist einem harmonischen Oszillator zuzuordnen, da die kinetische und die potentielle Energie gegenphasig schwingen und mit konstanter Frequenz zwischen null und der Gesamtenergie von ca. $E_{\text{period}} \approx 0.19595$ oszillieren. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die zu diesem Startwert gehörende Energie vergleichsweise gering ist, und somit nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage möglich sind.

Auch die Trajektorien der beiden Massen für θ_{quasi} , welche in Abbildung 6 dargestellt sind, sind geschlossen, ihr Verlauf ist jedoch aufgrund der höheren Energie schon deutlich komplexer. Es kommt noch nicht zum Überschlagen des Pendels, es treten also keine Koordinaten auf, welche im Betrag größer sind als π . Der Verlauf der Energie ist in Abbildung 8 a) dargestellt. Noch immer Schwingen die kinetische und die potentielle Energie gegenphasig, jedoch wird nicht mehr in jeder Periode die Gesamtenergie $E_{\text{period}} \approx 9.9994$, sowie eine verschwindende Energie erreicht. Vielmehr haben die Oszillationen variierende Amplituden, welche jedoch periodisch wiederkehren.

Bei dem Startwert θ_{chaos} tritt ein Überschwingen anders als zuvor sehr wohl auf, weshalb wir bei Winkel welche größer als π bzw. kleiner als $-\pi$ sind jeweils so lange 2π addiert bzw. subtrahiert haben, bis diese im Intervall $\{-\pi, \pi\}$ lagen. Auch kann keine Aussage mehr darüber gemacht werden ob die Trajektorien geschlossen sind oder nicht, da diese, wie in Abbildung 7 zu sehen, teils sehr nah bei einander liegen und für sehr große Schrittzahlen N nicht mehr zu unterscheiden sind. Noch immer schwingen kinetische und potentielle Energie, welche in Abbildung 8 b) dargestellt sind, gegenphasig und die Gesamtenergie $E_{\text{chaos}} \approx 69.998$ ist erhalten. Jedoch schneiden die Energien zwischen zwei Energiemaxima anders als zuvor nicht mehr zwangsläufig die Symmetrieachse bei $\frac{E_{\text{gesamt}}}{2}$. Allgemein variieren die Amplituden sehr viel stärker als zuvor, und es kann keine Periodizität mehr festgestellt werden.

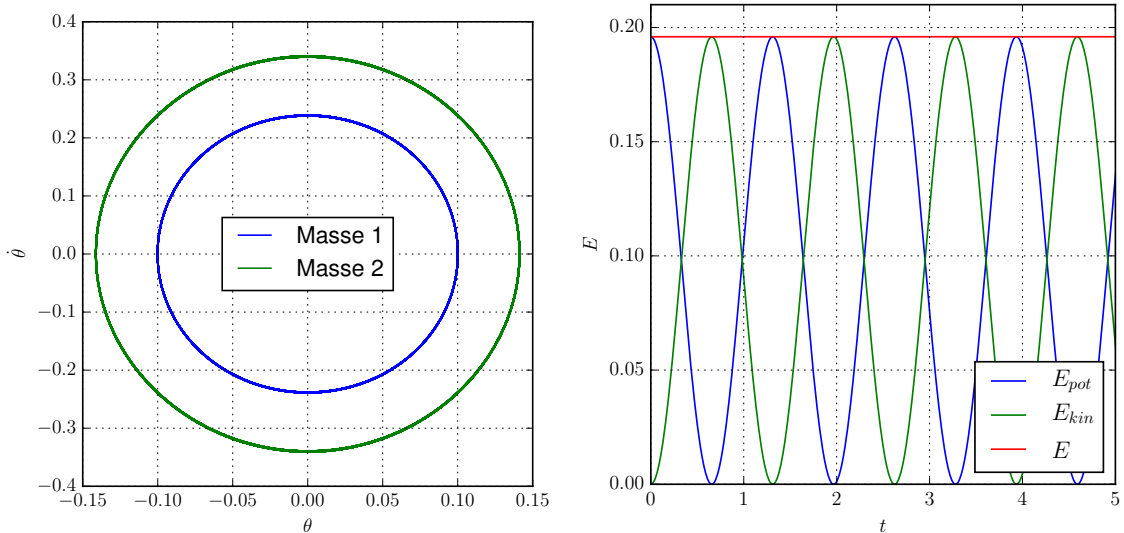


Abbildung 5: Trajektorien der Massen und Energieverlauf des Systems für die Startwerte θ_{period}

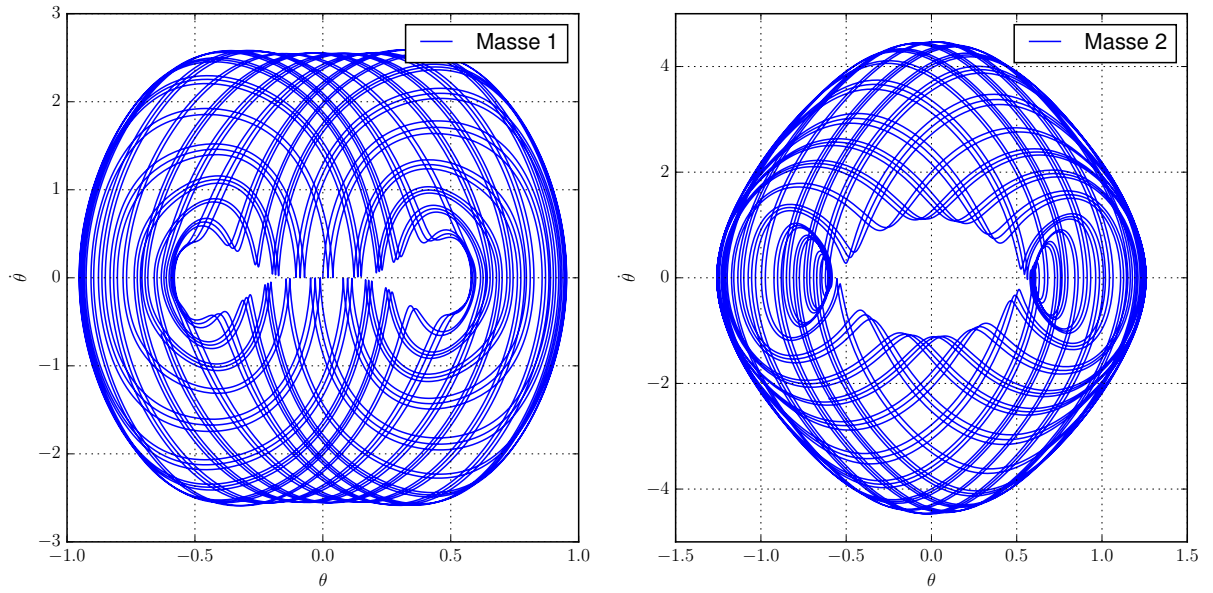


Abbildung 6: Trajektorien der beiden Massen für die Startwerte θ_{quasi}

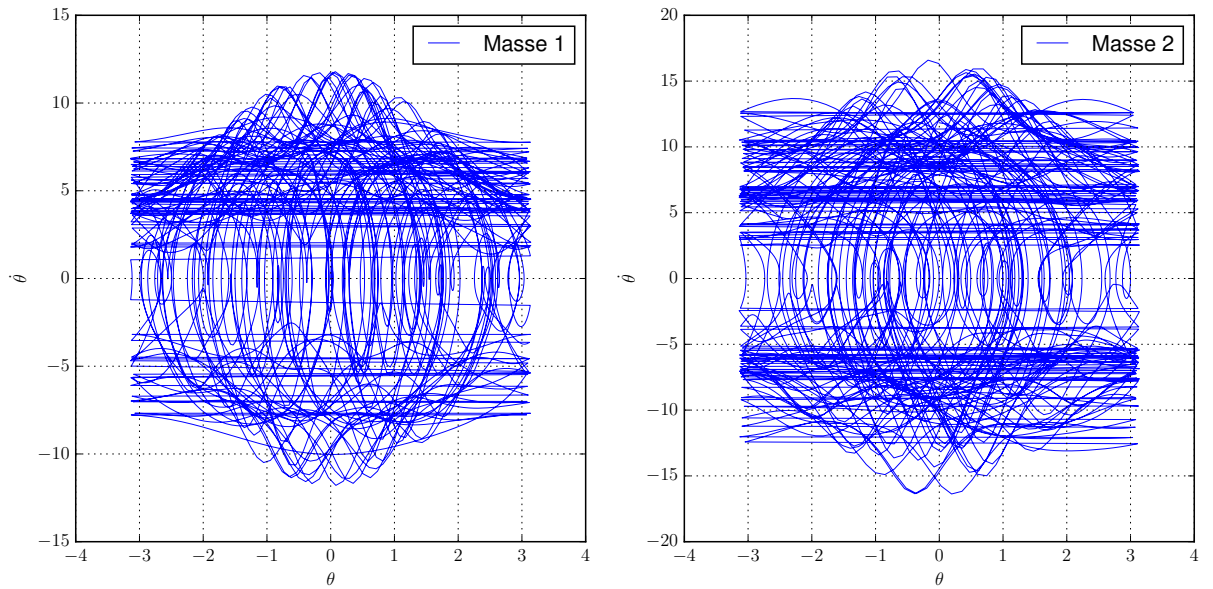


Abbildung 7: Trajektorien der beiden Massen für die Startwerte θ_{chaos}

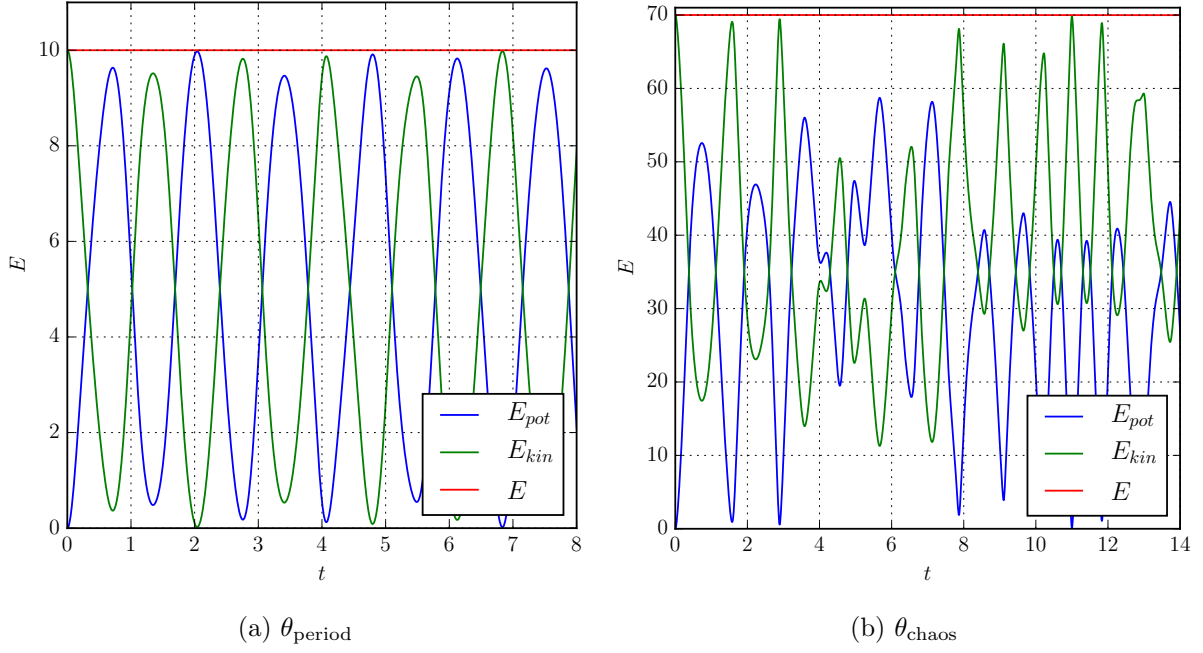


Abbildung 8: Verlauf der kinetischen, potentiellen und gesamten Energie für die Startwerte θ_{period} und θ_{chaos}

Die Koordinaten und Geschwindigkeiten der beiden Massen sind gegeben durch

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} L_1 \sin(\theta_1) \\ -L_1 \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2) \\ -L_1 \cos(\theta_1) - L_2 \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\dot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix} L_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ L_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{r}}_2 = \begin{pmatrix} L_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + L_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ L_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + L_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

wobei die Energie genau dann null ist, wenn $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -L_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -(L_1 + L_2) \end{pmatrix}$ gilt. Dann ist die Höhe der ersten Masse über der Ruhelage gegeben durch

$$h_1 = L_1 - L_1 \cos(\theta_1) = L_1 (1 - \cos(\theta_1)) \quad (9)$$

und die Höhe der zweiten Masse beträgt

$$h_2 = L_1 + L_2 - L_1 \cos(\theta_1) - L_2 \cos(\theta_2) = L_1 (1 - \cos(\theta_1)) + L_2 (1 - \cos(\theta_2)). \quad (10)$$

Daraus resultiert für die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = g \cdot (L_1 (m_1 + m_2) (1 - \cos(\theta_1)) + m_2 L_2 (1 - \cos(\theta_2))). \quad (11)$$

Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} \left(\left(L_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \right)^2 + \left(L_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \right)^2 \right) \quad (12)$$

$$+ \frac{m_2}{2} \left(\left(L_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + L_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right)^2 + \left(L_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + L_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right)^2 \right). \quad (13)$$