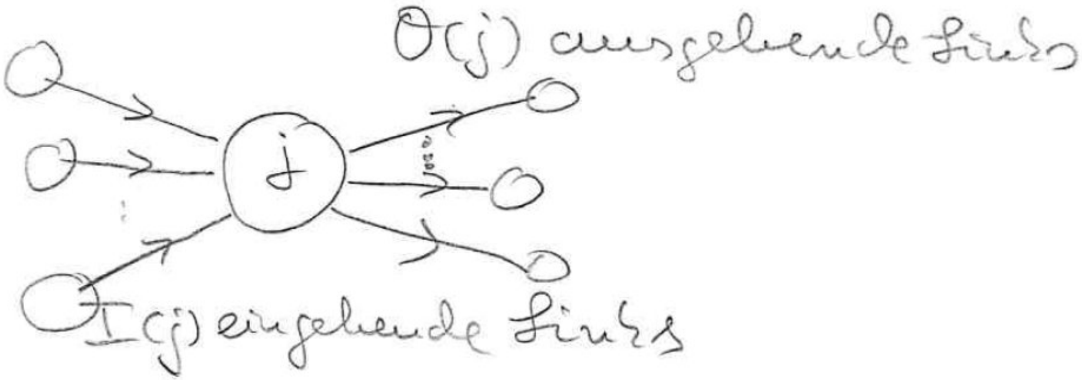
§8.8 Google PageRank

Gesucht: Wichtigkeit r_j der WWW-Seite j in einer Liste von Suchergebnissen.
Dimension des Wichtigkeits-Vektors $\vec{r}$ ist groß: # Seiten im Internet..

Prinzip: Wichtigkeit „strömt“ durchs Netz wie Strom einer erhaltenen Ladung.



Die Summe der eingehenden Wichtigkeiten definiert r_j; anschließend wird r_j gleichmäßig auf die ausgehenden Links verteilt:

$$r_i = c \sum_{j \text{ zeigt auf } i} \frac{r_j}{O(j)} \quad (c\text{: Normierung}) \tag{46}$$

Konnektivitätsmatrix:

$$C_{ij} := \begin{cases} 1 & j \text{ zeigt auf } i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{47}$$

$$\Rightarrow \; O(j) = \sum_i C_{ij} \tag{48}$$

$$r_i = c \sum_j C_{ij} \frac{r_j}{O(j)} = c \sum_j \frac{C_{ij}}{\sum_k C_{kj}} r_j := c \sum_j S_{ij} r_j \tag{49}$$

wobei S_{ij} die Elemente der Google-Matrix S sind.

Also gilt die Eigenwertgleichung

$$S\vec{r} = \frac{1}{c}\vec{r}. \tag{50}$$

Potenzmethode würde helfen, wenn $\frac{1}{c}$ der dominante EW von S wäre; dann würde die Iteration

$$\vec{r}_{n+1} = S\vec{r}_n \tag{51}$$

konvergieren. Hier hilft Erweiterung des Theorems von Perron-Frobenius:

Wenn *alle* $S_{ij} > 0$,
dann ist der betragsmäßig größte EW λ_1 reell, nicht entartet und der zugehörige EV $\vec{r}$ hat nur positive Elemente $r_i > 0$.
Alle anderen EV haben mindestens ein nicht positives Element.
Wenn S eine stochastische Matrix ist, ist $\lambda_1 = 1$.
(Stochastische Matrix S hat $\sum_i S_{ij} = 1$ und $S_{ij} > 0$.)

Also: Wenn S stochastisch ist...

- konvergiert (51) gegen EV $\vec{r}$ mit EW $\frac{1}{c} = 1$.
- $r_i > 0$; wenn man $\sum_i r_i = 1$ normiert, ist r_i die Wahrscheinlichkeit, bei zufälligem Surfen auf i zu stoßen.
- $\vec{r}$ entspricht der stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung, die sich nach sehr langem zufälligen Surfen (Gehe jeweils auf *irgendein* Link) ergibt.

Ist S denn stochastisch???

$$\sum_i S_{ij} = \sum_i \frac{C_{ij}}{\sum_k C_{kj}} = 1 \text{ ok, aber nicht } S_{ij} > 0.$$

Abhilfe: Benutze statt S die Matrix $\tilde{S}$ mit Elementen

$$\tilde{S}_{ij} = p\frac{C_{ij}}{O(j)} + (1-p) > 0. \tag{52}$$

Der zweite Term beschreibt den Sprung zu irgendeiner Seite, verlinkt oder nicht.
Google benutzt $p = 0.85$.

§8.9 Matrixdiagonalisierung in der Quantenmechanik

Stationäre Schrödingergleichung

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle; \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H} \text{ (Hilbertraum)} \tag{53}$$

Energieeigenzustände (stationäre Zustände) erfüllen

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle; \quad E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq ... \tag{54}$$

($E_0 =$ Grundzustandsenergie). Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist der Raum der quadratintegrablen komplexen Funktionen auf irgendeinem Grundgebiet, also ∞-dimensional: ungünstig.

Schränke H ein auf einen N-dimensionalen Unterraum U, aufgespannt von einer Basis $\{|\phi_1\rangle, ..., |\phi_N\rangle\}$; dann ist die Restriktion von H auf U gegeben durch die Elemente

$$H_{ij} = \langle\phi_i|H|\phi_j\rangle = \langle\phi_i|H_U|\phi_j\rangle. \tag{55}$$

Die (numerische) Diagonalisierung von (55) liefert N reelle EW $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \leq ... \leq \varepsilon_{N-1}$ mit zugehörigen EV $|u_i\rangle$ mit Komponenten $u_j^{(i)}$:

$$|u_i\rangle = \sum_{j=1}^{N} u_j^{(i)}|\phi_j\rangle; \quad H_U|u_i\rangle = \varepsilon_i|u_i\rangle.$$

Und was hat man davon? In welcher Beziehung stehen die ε_i zu den wirklichen EW E_i?

Theorem von Hylleraas und Undheim:
a) $\varepsilon_i \geq E_i \; \forall i = 0, 1, ..., N-1$; die ε_i sind also obere Schranken für die E_i.
b) Verschieden-dimensionale Unterräume liefern verschachtelte EW:

$$U \subset U' \subset \mathcal{H} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_i \geq \varepsilon_i' \geq \varepsilon_{i-1},$$

für größer werdende Unterräume nehmen die ε_i ab, werden also besser.

Das Theorem beweist man mit geeigneten Erweiterungen des quantenmechanischen Variationsprinzips; vgl. z.B. Kapitel 3.5 in W. Thirring, Lehrbuch der Mathematischen Physik 3.

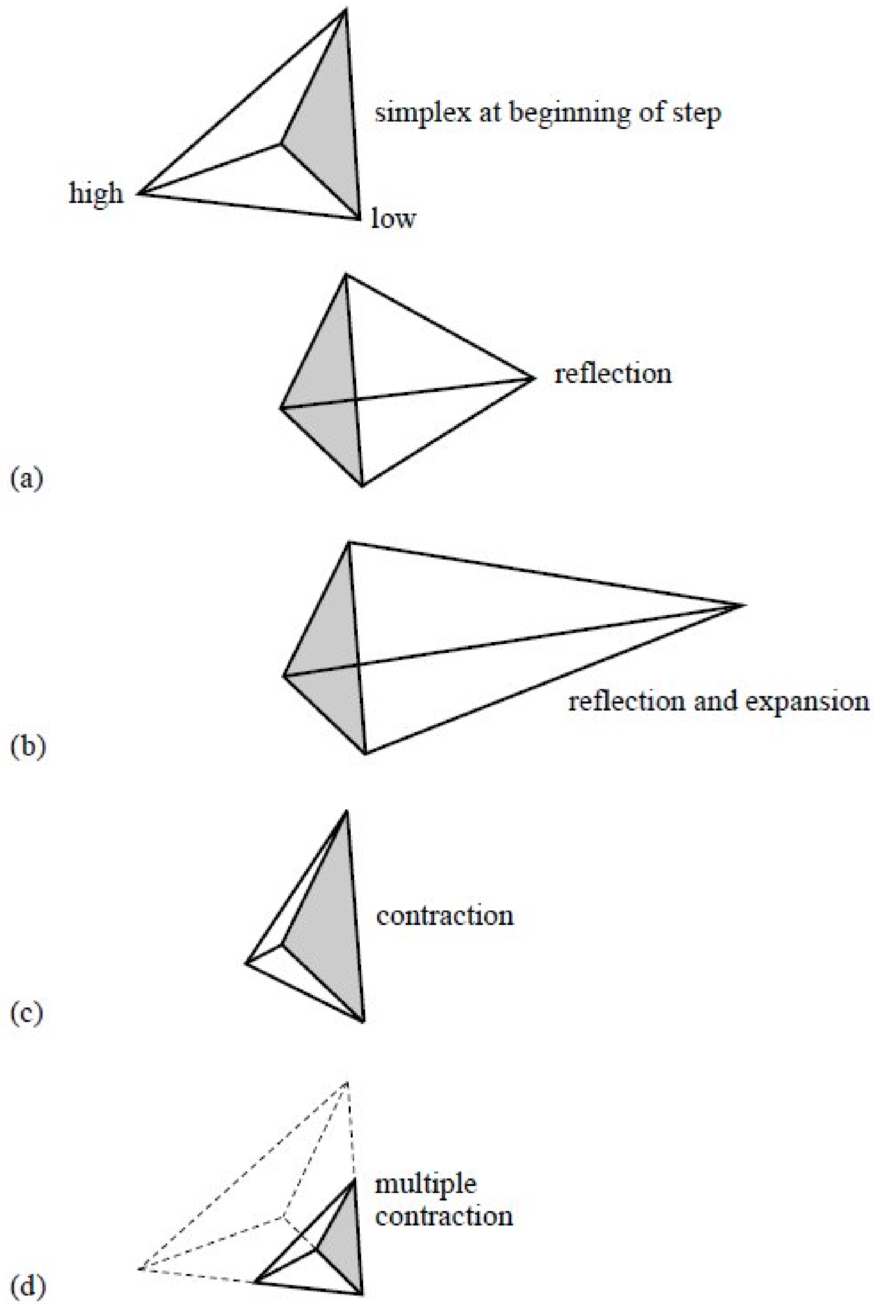


Figure 10.4.1. Possible outcomes for a step in the downhill simplex method. The simplex at the beginning of the step, here a tetrahedron, is shown, top. The simplex at the end of the step can be any one of (a) a reflection away from the high point, (b) a reflection and expansion away from the high point, (c) a contraction along one dimension from the high point, or (d) a contraction along all dimensions towards the low point. An appropriate sequence of such steps will always converge to a minimum of the function.