

## Ukesoppgave 4 - FYS1120

4.9)

a) Skisse av systemet:



Sidenylinderet går uendelig langt langs  $z$ -aksen, så vil ikke systemet være noe annerledes om vi forandrer på  $z$ . Hvisylinderet har en konstant ladningsfordeling betyr dette at potensialet ikke vil være avhengig av  $z$ . Det samme gjelder for  $\phi$ , ettersom hvis vi endrer på  $\phi$  så vil vi ha det samme systemet.

Forandrer vi på  $r$  derimot så vil systemet  
se enten mindre eller større ut, som igjen  
vil påvirke potensialet  $V$ .

$V$  avhenger altså bare av  $r$  og ikke av  $\phi$  eller  $z$ .

b) Benytter Laplaces likning for å finne  $V$ :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{dr}{dr} \frac{dV}{dr} + r \frac{d^2 V}{dr^2} \right) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{d^2 V}{dr^2} = 0$$

altså:

$$\frac{d^2 V}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

Denne har løsningen:

$$V(r) = A \ln(r) + B$$

$$\text{ettersom } (A \ln(r) + B)' = A \frac{1}{r} \text{ og}$$

$$(A \ln(r) + B)'' = -A \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r} A \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} (A \ln(r) + B)'.$$

Randbetingelsene  $V(a) = V_0$  og  $V(r) = 0$

gir oss  $A$  og  $B$ :

$$V(a) = A \ln(a) + B = V_0 \quad (1)$$

$$V(b) = A \ln(b) + B = 0 \quad (2)$$

(2) gir oss  $B = -A \ln(b)$ . Setter dette

inn i (1):

$$A \ln(a) - A \ln(b) = V_0$$

$$A \ln\left(\frac{a}{b}\right) = V_0$$

$$A = V_0 / \ln(a/b)$$

Setter dette inn i (2) igjen:

$$B = -\left(V_0 / \ln(a/b)\right) \ln(b) = -V_0 \frac{\ln(b)}{\ln(a/b)}$$

Med dette har vi at potensialet er:

$$V(r) = \frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln(r) - V_0 \frac{\ln(b)}{\ln(a/b)}$$

$$= \frac{V_0}{\ln(a/b)} (\ln(r) - \ln(b))$$

$$= \frac{V_0}{\ln(a/b)} \ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

Det elektriske feltet er da den negativt

deriverte av dette:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= -\nabla V \\
 &= -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} \\
 &= -\left(\frac{V_0}{\ln(\frac{a}{b})} \frac{1}{b} \frac{1}{r/b}\right) \hat{r} \\
 &= -\frac{V_0}{\ln(\frac{a}{b})} \frac{1}{r} \hat{r}
 \end{aligned}$$


---

Dette virker ikke så ille med tanke på  
at feltstyrken vil øge fra  $r=a$  til  $r=b$ .