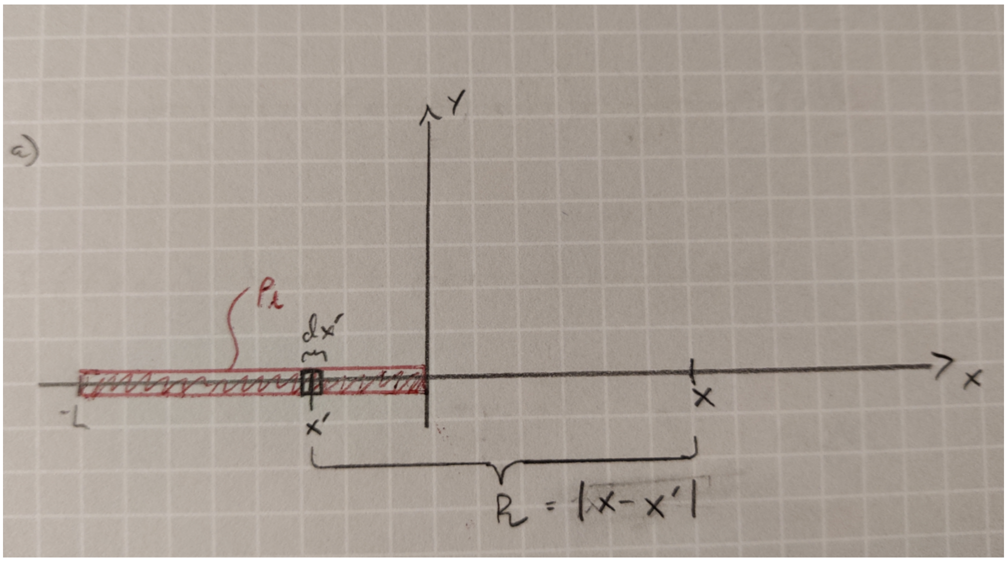
Exercise 2.16: En halv linje

a)

Skisse av systemet:



Ladningen i x' er lik $dq = \rho_l dx'$.

Vi vet at det elektriske potensialet i et punkt $\vec{r}$ som kommer av en punktladning Q er lik: $V(\vec{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r}$

Bidraget dV til potensialet i punktet $\vec{r} = (x, 0)$ som kommer av ladningen dq er da:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{\rho_l dx'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|x - x'|}$$

b)

Det totale potensialet i $\vec{r} = (x, 0)$ som kommer av linjeladningen fra $x = -L$ til $x = 0$ er da:

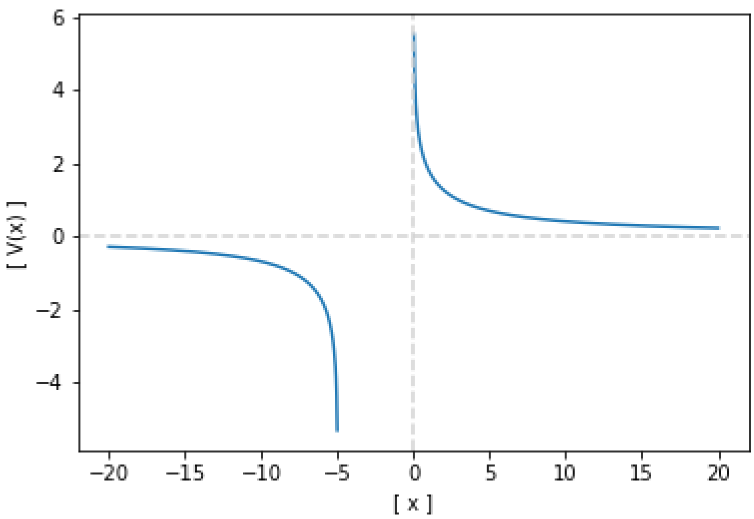
$$
\begin{aligned}
V(x) &= \int_{-L}^{0} \frac{\rho_l dx'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x - x'|} \, dx' \\
&= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{0} \frac{1}{|x - x'|} \, dx' \\
&= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{0} \frac{1}{x - x'} \, dx' \qquad (\text{siden x} > 0) \\
&= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{0} \frac{1}{-x' + x} \, dx' \\
&= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} [-\ln(-x' + x)]_{-L}^{0} \\
&= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} (-\ln(x) + \ln(L + x)) \\
&= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln(\frac{L + x}{x})
\end{aligned}
$$

Plotter potensialet:

In [ ]:

```
from tkinter.ttk import Style
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
L = 5
x = np.linspace(-L*4, L*4, 1000)
V = np.log((L+x)/x)
plt.plot(x, V)
plt.xlabel("[ x ]")
plt.ylabel("[ V(x) ]")
plt.axhline(0,color='lightgrey', ls='--') # x = 0
plt.axvline(0,color='lightgrey', ls='--') # y = 0
plt.show()
```

```
d:\kevin\Anaconda3\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:6: RuntimeWarni
ng: invalid value encountered in log
```



Fra plottet ser vi at potensialet $V(x)$ går mot null når x går mot $\pm\infty$ og at det går mot utendelig ved x=-L og x=0. Dette virker rimelig.

c)

Det elektriske feltet langs x-aksen er da deriverte av potensialet:

$$
\begin{aligned}
E_x(x,0) &= -\frac{dV}{dx} \\
&= -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{dx}(\ln(\frac{L+x}{x})) \\
&= -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{dx}(\ln(L+x)-\ln(x)) \\
&= -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{L+x}-\frac{1}{x}) \\
&= -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\frac{x-(L+x)}{x(L+x)} \\
&= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{x(L+x)}
\end{aligned}
$$

Vi ser at når x går mot null, så blir E-feltet uendelig stort. Og når x blir større, så blir E-feltet mindre. Dette virker rimelig.

d)

Vi kan ikke bruke potensialet $V(x)$ til å finne $E_y(x,0)$ ettersom $V(x)$ kun er definert langs x-aksen. Hvis vi ønsker å finne $E_y(x,0)$ så må vi finne $V(x,y)$, som er definert langs x-aksen og y-aksen.