

Oblig 2 - FYS2160

Kevin Alexander Aslesen

I. The Einstein Crystal

(B. Structured problem formulation)

- a) For et system med $N=3$ oscillatorer og $q=3$,
finnes det følgende mikrotilstande :

1. $\{3, 0, 0\}$

2. $\{2, 1, 0\}$

3. $\{2, 0, 1\}$

4. $\{0, 3, 0\}$

5. $\{0, 2, 1\}$

6. $\{1, 2, 0\}$

7. $\{0, 0, 3\}$

8. $\{0, 1, 2\}$

9. $\{1, 0, 2\}$

10. $\{1, 1, 1\}$

altså 10 mikrotilstande

b) Den generelle formelen for antall mikrotilstander

gir oss følgende med $N=3$ og $q=3$:

$$\Omega_1(3,3) = \frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!}$$

$$= \frac{5!}{3!2!}$$

$$= \underline{\underline{10}}$$

Dette stemmer med antallet fra a).

c) System A har $N_A=2$ og $q_A=5$. Antall

mikrotilstander dette systemet har er da

$$\text{gitt ved } \Omega_A(2,5) = \frac{(5+2-1)!}{5!(2-1)!} = \frac{6!}{5!} = 6.$$

Disse mikrotilstandene er:

1. $\{5,0\}$

4. $\{2,3\}$

2. $\{4,1\}$

5. $\{1,4\}$

3. $\{3,2\}$

6. $\{0,5\}$

System B har $N_B = 2$ og $q_B = 1$. Antall

mikrotilstander dette systemet har er

$$\text{gitt ved } \Omega_B(2,1) = \frac{(1+2-1)!}{1!(2-1)!} = \frac{2!}{1!1!} = 2! = 2.$$

Disse mikrotilstandene er:

$$1. \{1,0\} \quad 2. \{0,1\}$$

Mikrotilstandene for systemet som består

av både A og B er da:

$$1. \{5,0\}\{1,0\}$$

$$7. \{5,0\}\{0,1\}$$

$$2. \{4,1\}\{1,0\}$$

$$8. \{4,1\}\{0,1\}$$

$$3. \{3,2\}\{1,0\}$$

$$9. \{3,2\}\{0,1\}$$

$$4. \{2,3\}\{1,0\}$$

$$10. \{2,3\}\{0,1\}$$

$$5. \{1,4\}\{1,0\}$$

$$11. \{1,4\}\{0,1\}$$

$$6. \{0,5\}\{1,0\}$$

$$12. \{0,5\}\{0,1\}$$

Antall mikrotilstander til dette systemet

er også $\Omega_A \cdot \Omega_B = 6 \cdot 2 = 12$.

d) Vi har $N_A = 2$ og $N_B = 2$, og at den totale energien til systemet er $q = q_A + q_B = 6$.

Verdiene q_A og q_B kan ha er da:

q_A	q_B	q
6	0	6
5	1	6
4	2	6
3	3	6
2	4	6
1	5	6
0	6	6

Altså q_A og q_B kan ha verdiene $\{6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$.

e) For en makrotilstand q_A , så kan vi finne antall mikrotilstande dette systemet har ved

$$\text{å benytte formelen } \Omega_A(N_A, q_A) = \frac{(q_A + N_A - 1)!}{q_A! (N_A - 1)!}$$

5

og sammenhengen $q_B = q - q_A$. Med denne sammenhengen finner vi Ω_{AB} , som vi bruker til å finne antall mikrotilstander med $\Omega = \Omega_A \cdot \Omega_B$. Gjør dette for alle makrotilstandene med Kode 1 (se appendiks) og får følgende resultater:

$q_A = 0$: 7 mikrotilstander

$q_A = 1$: 12 mikrotilstander

$q_A = 2$: 15 mikrotilstander

$q_A = 3$: 16 mikrotilstander

$q_A = 4$: 15 mikrotilstander

$q_A = 5$: 12 mikrotilstander

$q_A = 6$: 7 mikrotilstander

Med dette har vi at det finnes totalt

$\Omega_{\text{tot}} = 84$ mikrotilstander over alle makro-

tilstandene. Sammenhengen for hver

makrotilstand er da:

$$P(q_A=0) = \frac{7}{84} = 1/12 \approx 8.3\%$$

$$P(q_A=1) = \frac{12}{84} = 1/7 \approx 14.3\%$$

$$P(q_A=2) = \frac{15}{84} = 5/28 \approx 17.9\%$$

$$P(q_A=3) = \frac{16}{84} = 4/21 \approx 19.0\%$$

$$P(q_A=4) = \frac{15}{84} = 5/28 \approx 17.9\%$$

$$P(q_A=5) = \frac{12}{84} = 1/7 \approx 14.3\%$$

$$P(q_A=6) = \frac{7}{84} = 1/12 \approx 8.3\%$$

f) Vi ser at antall mikrotilstander systemet

har ved termisk kontakt er $\Omega_{tot}^T = 84$.

Før termisk kontakt fant vi at dette tallet

var $\Omega_{tot} = 12$, altså langt mindre. Det

ble også syv ganger så flere mikrotilstander

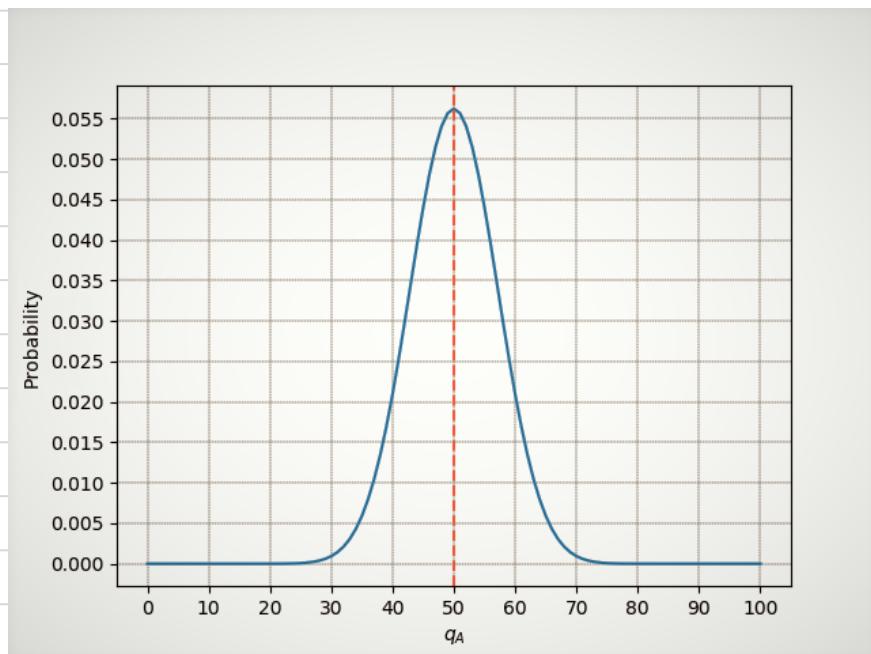
ved termisk kontakt.

Generelt sett vil jeg tro at mikrotilstandene

vil øke når to krystaller er i termisk kontakt.

g) Plotter $P(q_A)$ for et system med $N_A = 50$,

$N_B = 50$ og $q = 100$ med Kode 2:



Vi ser at $P(q_A)$ er normal fordelt om

punktet $q_A = 50$ som også da er den
most sannsynlige makrotilstanden. Denne

sannsynligheten er $P(q_A = 50) \approx \underline{\underline{56\%}}$.

(c. Finding thermodynamic properties)

a) Skal vise at formelen for antall mikrostater, aka multiplisiteten, kan skrives om på formen:

$$\Omega(N, q) = \frac{(q+N-1)!}{q! (N-1)!} \approx e^{N(\ln(\frac{q}{N}) + 1)}$$

altså:

$$\ln(\Omega(N, q)) \approx N(\ln(\frac{q}{N}) + 1)$$

Tar først logaritmen til $\Omega(N, q)$ og skriver om:

$$\ln(\Omega(N, q)) = \ln\left(\frac{(q+N-1)!}{q! (N-1)!}\right)$$

$$= \ln((q+N-1)!) - \ln(q! (N-1)!)$$

$$= \ln((q+N-1)!) - \ln(q!) - \ln((N-1)!)$$

Stirlings tilnærming $\ln(x!) \approx x \ln x - x$ gir oss:

$$\approx (q+N-1) \ln(q+N-1) - (q+N-1) - q \ln q + q - (N-1) \ln(N-1) + (N-1)$$

$$= (q+N-1) \ln(q+N-1) - q \ln q - (N-1) \ln(N-1)$$

Siden $N \gg 1$, så kan alle $N-1$ byttes med N :

$$\ln(\Omega(N, q)) \approx (q+N) \ln(q+N) - q \ln q - N \ln N$$

Hvis $\frac{N}{q} \ll 1$, så kan $\ln(q+N)$ tilnærmes til:

$$\begin{aligned}\ln(q+N) &= \ln\left(q\left(1+\frac{N}{q}\right)\right) \\ &= \ln q + \ln\left(1+\frac{N}{q}\right) \\ &\approx \ln q + \frac{N}{q}\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet at $\ln(1+x) \approx x$ når

$x \ll 1$. Med dette får tilnærmingen:

$$\begin{aligned}\ln(\Omega(N, q)) &\approx (q+N)\left(\ln q + \frac{N}{q}\right) - q \ln q - N \ln N \\ &= q \ln q + N + N \ln q + \frac{N^2}{q} - q \ln q - N \ln N \\ &= N \ln q - N \ln N + N + \frac{N^2}{q}\end{aligned}$$

Det siste leddet $\frac{N^2}{q}$ vil være svært lite

sammensattet med de andre ledene ettersom

$N/q \ll 1$, så vi dropper denne og får:

$$\begin{aligned}\ln(\Omega(N, q)) &\approx N \ln q - N \ln N + N \\ &= N \ln\left(\frac{q}{N}\right) + N \\ &= N \left(\ln\left(\frac{q}{N}\right) + 1 \right)\end{aligned}$$

som er det vi skulle vide.

- b) Entropien for et system er gitt ved $S = k \ln \Omega$, hvor k er Boltzmanns konstant og Ω multiplisiteten. Entropien for Einsteins krystallen er da tilnærmet:

$$S \approx kN \left(\ln\left(\frac{q}{N}\right) + 1 \right)$$

- c) Siden vi har at $q = \frac{U}{E}$, hvor U er total energi i krystallen, så kan vi benytte equipartition-teoremnet $U = \frac{F}{2} N k T$ til å finne temperaturen T . En unikhet på hvor mange frihetsgrader hvert atom har så lar den være F .

$$\begin{aligned}
 S &= kN \left(\ln\left(\frac{\tau}{N}\right) + 1 \right) \\
 &= kN \left(\ln\left(\frac{U}{NE}\right) + 1 \right) \\
 &= kN \left(\ln\left(\frac{FNkT}{2\varepsilon E}\right) + 1 \right) \\
 &= kN \left(\ln\left(\frac{FkT}{2\varepsilon}\right) + 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^S &= e^{kN \ln\left(\frac{FkT}{2\varepsilon}\right)} e^{kN} \\
 \frac{e^S}{e^{kN}} &= \left(\frac{FkT}{2\varepsilon}\right)^{kN}
 \end{aligned}$$

$e^{ax} = e^{bx} = x^a$

$$\left(\frac{e^{S-kN}}{e^{kN}}\right)^{1/kN} = \frac{FkT}{2\varepsilon}$$

$$T = \frac{2\varepsilon}{Fk} e^{\frac{S}{kN} - 1}$$

Vi ser at temperaturen øker når entropien øker, som gir mening ettersom hvis entropien øker så øker også energien til (hvis N er konstant).

Vi ser også at temperaturen synker når antall atomer N øker. Dette gir mening ettersom energien vil da være fordelt over flere atomer.

II. The Spin System

(B. Structured problem formulation)

a) En partikkel, "spin", kan ha enten $S = +1$ eller $S = -1$.

Hvis vi har to "spins", så kan vi ha følgende mikrotilstande:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \{+1, +1\} \\ 2. \quad \{+1, -1\} \\ 3. \quad \{-1, +1\} \\ 4. \quad \{-1, -1\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \text{ mikrotilstande} \\ = 2^2 \end{array}$$

Hvis vi et tre spin system er mikrotilstandene:

$$\left. \begin{array}{ll} 1. \quad \{+1, +1, +1\} & 5. \quad \{-1, +1, +1\} \\ 2. \quad \{+1, +1, -1\} & 6. \quad \{-1, +1, -1\} \\ 3. \quad \{+1, -1, +1\} & 7. \quad \{-1, -1, +1\} \\ 4. \quad \{+1, -1, -1\} & 8. \quad \{-1, -1, -1\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \text{ mikrotils.} \\ = 2^3 \end{array}$$

Vi har altså et N -spin system har 2^N mikrotilstande.

b) Den totale energien for spin med +1, hvor S_+ er antall +1 spin, er summen av alle enkelt enkelt energiene med spin +1 :

$$E_+ = S_+ E = S_+ (-\mu B) = -S_+ \mu B$$

Tilsvarande for spin -1 :

$$E_- = S_- E = S_- \mu B$$

Den totale energien til både +1 og -1 spinene er da summen av disse:

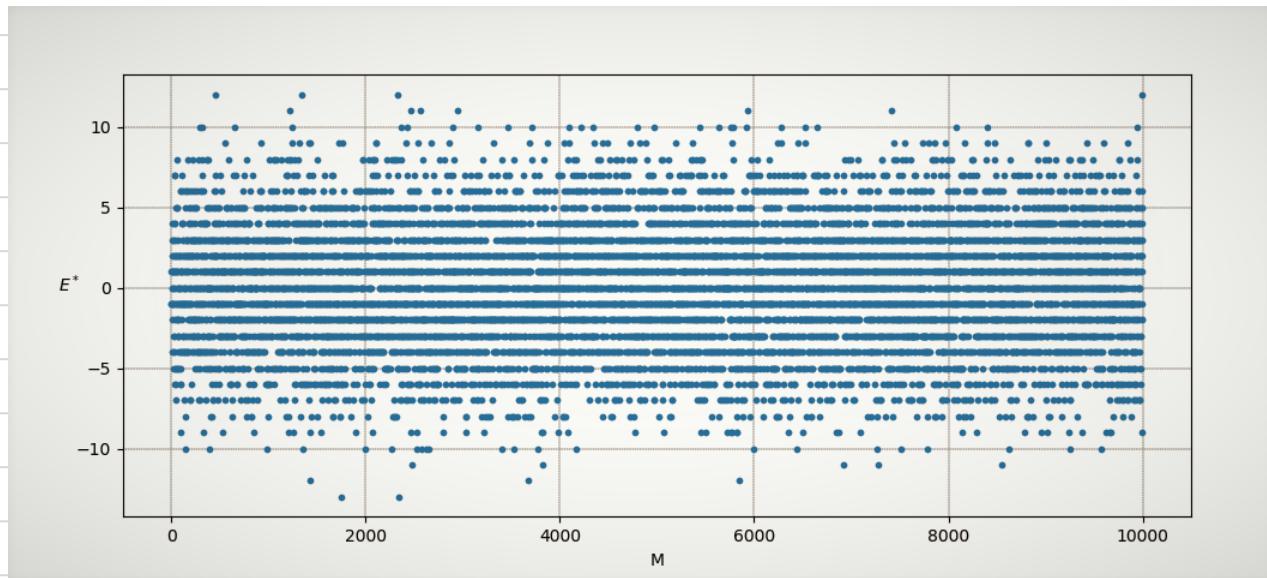
$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= E_+ + E_- \\ &= -S_+ \mu B + S_- \mu B \\ &= -\mu B (S_+ - S_-) \\ &= -\mu B \cdot 2s \\ &= -2s \mu B \end{aligned}$$

hvor $2s = S_+ - S_-$ er net spin og B er det magnetiske feltet.

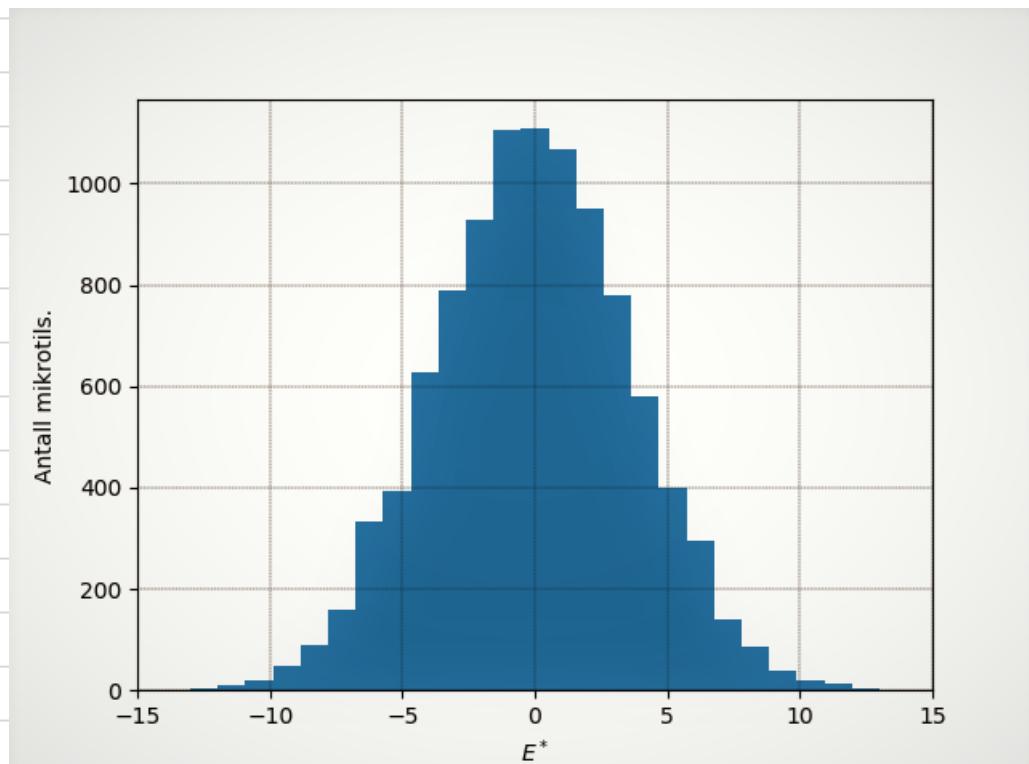
c) Generer $M = 10000$ mikrotilstander for et $N=50$

spin system tilfeldig med Kode 3 og plotter

energiene for systemet (altså hvor mikrotilstand):
 $(E^* = \frac{E_{tot}}{-k_B T})$



Plotter så et histogram over hvor ofte hver energi intveffer:



Vi ser at det er flest mikrotilstander hvor energien er lik null. Altsoi der hvor det er like mange +1 spins som -1 spins.

d) For makrotilstanden $S_+ = 1$ så finnes det N mikrotilstander siden det er N mulige plasseringer vi kan ha +1:

$$1. \{+1, -1, -1, \dots, -1\}$$

$$2. \{-1, +1, -1, \dots, -1\}$$

$$3. \{-1, -1, +1, \dots, -1\}$$

:

$$N. \{-1, -1, -1, \dots, +1\}$$

For makrotilstanden $S_+ = 2$ så finnes de først N mulige steder vi kan plassere den første +1, og deretter $N-1$ mulige steder vi kan plassere den andre +1. Dette gir $N(N-1)$ mulige kombinasjoner. Men siden $\{-1, -1, +1, \dots, +1\}$ er den samme

kombinasjonen for "først +1 i posisjon 3, så +1 i posisjon N" og "først +1 i posisjon N, så +1 i posisjon 3", så må dele på 2 for antall unike mikrotilstander.

Altså $\frac{N(N-1)}{2}$.

Tilsvarende med $S_+ = 3$, så finnes det $N(N-1)(N-2)$

kombinasjoner. Men vi må dele med 6 fordi hver

kombinasjon forekommer 6 ganger $\rightsquigarrow \{a, b, c\}$
 $\{a, c, b\}$

$$\text{Vi får da } \frac{N(N-1)(N-2)}{6} = \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \cdot \{b, a, c\} \\ \{c, a, b\} \\ \{b, c, a\} \\ \{c, b, a\}$$

Generelt har vi da at antall

mikrotilstande (multipliteten) for en makrotilstand

S_+ er :

$$\Omega(N, S_+) = \frac{N(N-1)(N-2) \dots (N-(S_+-1))}{S_+!}$$

Hvis vi setter inn $N=100$ og $S_+=3$, så får vi:

$$\Omega(100, 3) = \frac{100 \cdot (100-1) \cdot (100-2)}{3!}$$

Dette kan vi skrive som

$$\Omega(100, 3) = \frac{100 \cdot (100-1) \cdot (100-2) \cdot (100-3)!}{3! \cdot (100-3)!}$$

$$= \frac{100!}{3!(100-3)!}$$

Generelt sett vil dette da gi oss:

$$\Omega(N, s_+) = \frac{N!}{s_+! (100-s_+)!}$$

Men siden $s_+ + s_- = 100 \Rightarrow s_- = 100 - s_+$ så følger vi:

$$\Omega(N, s_+) = \frac{N!}{s_+! s_-!}$$

e) For å skrive om $\Omega(N, s_+)$ som en funksjon av s

i stedetfor s_+ , så benytter vi sammenhengene

$$2s = s_+ - s_- \quad \text{og} \quad N = s_+ + s_-.$$

Først har vi:

$$N = s_+ + s_-$$

$$N = 2s_+ - (s_+ - s_-)$$

$$N = 2s_+ - 2s$$

$$\frac{N}{2} = s_+ - s$$

$$s_+ = \frac{N}{2} + s$$

Si har vi:

$$N = S_+ + S_-$$

$$N = S_+ + 2S_- - S_-$$

$$N = 2S_- + (S_+ - S_-)$$

$$N = 2S_- + 2s$$

$$\frac{N}{2} = S_- + s$$

$$S_- = \frac{N}{2} - s$$

Setter vi disse to i multiplisitet formelen,

si før vi:

$$\Omega(N, s) = \frac{N!}{(\frac{N}{2}+s)! (\frac{N}{2}-s)!}$$

f) Skal prøve å vise at denne multiplisiteten kan skrives om på formen:

$$\Omega(N, s) = \Omega(N, 0) e^{-\frac{2s^2}{N}}$$

Tar først logaritmen av Ω og benytter Sterling tilnærmingen $\ln x! \approx x \ln x - x$:

$$\begin{aligned}
 \ln(N!) &= \ln\left(\frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+s\right)!\left(\frac{N}{2}-s\right)!}\right) \\
 &= \ln N! - \ln\left(\left(\frac{N}{2}+s\right)!\right) - \ln\left(\left(\frac{N}{2}-s\right)!\right) \\
 &\approx N \ln N - N - \left(\frac{N}{2}+s\right) \ln\left(\frac{N}{2}+s\right) + \left(\frac{N}{2}+s\right) - \left(\frac{N}{2}-s\right) \ln\left(\frac{N}{2}-s\right) + \left(\frac{N}{2}-s\right) \\
 &= N \ln N - N - \left(\frac{N}{2}+s\right) \ln\left(\frac{N}{2}+s\right) - \left(\frac{N}{2}-s\right) \ln\left(\frac{N}{2}-s\right) + \frac{N}{2} + \frac{N}{2} + s - s \\
 &= N \ln N - \left(\frac{N}{2}+s\right) \ln\left(\frac{N}{2}+s\right) - \left(\frac{N}{2}-s\right) \ln\left(\frac{N}{2}-s\right)
 \end{aligned}$$

Betydher tilnærmingen $\ln(1+x) \approx x$ når $x \ll 1$

for å skrive om $\ln\left(\frac{N}{2}+s\right)$ og $\ln\left(\frac{N}{2}-s\right)$:

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{N}{2}+s\right) &= \ln\left(\frac{N}{2}\left(1+\frac{2s}{N}\right)\right) \\
 &= \ln\left(\frac{N}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{2s}{N}\right) \quad \text{---} \frac{s}{N} \ll 1 \\
 &\approx \ln\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{2s}{N} \\
 &\approx \ln\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{s}{N}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{N}{2}-1\right) &= \ln\left(\frac{N}{2}\left(1-\frac{2s}{N}\right)\right) \\
 &= \ln\left(\frac{N}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{2s}{N}\right) \\
 &\approx \ln\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{2s}{N} \\
 &\approx \ln\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{s}{N}
 \end{aligned}$$

Setter dette inn:

$$\begin{aligned}
 \ln \Omega_s &\approx N \ln N - \left(\frac{N}{2} + s\right) \left(\ln \frac{N}{2} + \frac{s}{N}\right) - \left(\frac{N}{2} - s\right) \left(\ln \frac{N}{2} - \frac{s}{N}\right) \\
 &= N \ln N - \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} - \frac{s}{2} - s \cancel{\ln \frac{N}{2}} - \frac{s^2}{N} - \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} + \frac{s}{2} + s \cancel{\ln \frac{N}{2}} - \frac{s^2}{N} \\
 &= N \ln N - N \ln \frac{N}{2} - \frac{2s^2}{N} \\
 &= N \ln N - N \ln N + N \ln 2 - \frac{2s^2}{N} \\
 &= N \ln 2 - \frac{2s^2}{N} \\
 e^{\ln \Omega_s} &= e^{N \ln 2 - 2s^2/N} \\
 \Omega_s &= 2^N e^{-2s^2/N}
 \end{aligned}$$

altså:

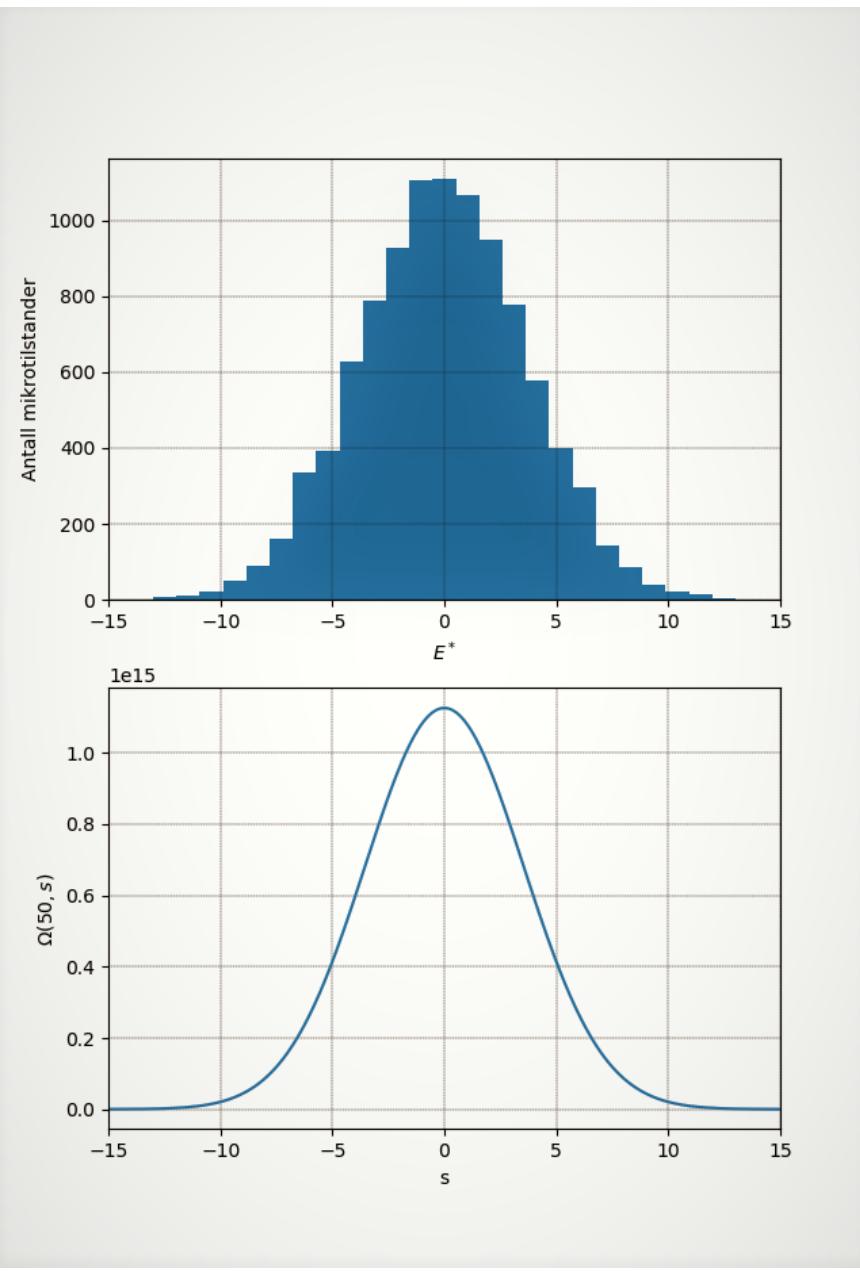
$$\Omega_s(N, s) = \Omega_s(N, 0) e^{-2s^2/N}$$

hvor $\Omega_s(N, 0) = 2^N$. Sam var det vi skulle vise.

g) Sammenligner multiplisiteten vi får med formelen for $N = 50$ over $s \in [-15, 15]$ med histogrammet fra c)

som viste antallet mikrotilstander som hadde de

ulike energiene $E^* = E / (-z_N \sigma) = s$:



Vi ser at den analytiske modellen for multiplisitet tar til seg samme form som histogrammet for de genererte mikrotilstandene. Begge multiplisitetene er sentrert om $s=0$ og har relativt høye verdier ved $s=\pm 10$. Den eneste merkeverdige forskjellen er skalaen på y -aksen. Dette skyldes av at vi genererte

"bare" $M = 10000$ mikrotilstander og ikke
 omslag $M = 10^{16}$. Utanom det kan vi si
 at den analytiske modellen passer godt
 med våre genererte verdier.

h) Entropien for den eksakte multiplisiteten er gitt
 ved formelen $S = k \ln \Omega$:

$$\begin{aligned}
 S &= k \ln(\Omega(N, S_+)) \\
 &= k \ln\left(\frac{N!}{S_+! S_-!}\right) \\
 &= k (\ln N! - \ln S_+! - \ln S_-!) \\
 &= k (\ln N! - \ln S_+! - \ln((N - S_+)!))
 \end{aligned}$$

i) Temperaturen til systemet er gitt ved:

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial S}{\partial S_+} \frac{\partial S_+}{\partial U} \right)^{-1}$$

hvor $U = E = -2s\mu B$ er den totale energien til systemet.

Vi kan skrive om S_+ som en funksjon av U :

$$S_+ = \frac{N}{2} + S = \frac{N}{2} + \left(-\frac{U}{2\mu B} \right) = \frac{1}{2} \left(N - \frac{U}{\mu B} \right)$$

Deriverer S_+ mhp. U :

$$\frac{\partial S_+}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{N}{2} - \frac{U}{2\mu B} \right) = -\frac{1}{2\mu B}$$

Deriverer S mhp. S_+ :

$$\frac{\partial S}{\partial S_+} = \frac{\partial}{\partial S_+} \left(k(\ln N! - \ln S_+! - \ln((N-S_+)!)) \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial S_+} (\ln S_+!) - \frac{\partial}{\partial S_+} (\ln((N-S_+)!))$$



ved ikke hvordan man
skal derivera faktultet

Ser ut som jeg må skrive $\frac{N!}{S_+!S_!}$ på en ikke-

faktultet form, men klarer ikke å finne noe.

Appendiks

Kode 1:

```
def micro_states(q, q_A, N_A, N_B):
    q_B = q - q_A

    states_A = factorial(q_A + N_A - 1) / ( factorial(q_A) * factorial(N_A - 1) )
    states_B = factorial(q_B + N_B - 1) / ( factorial(q_B) * factorial(N_B - 1) )

    return states_A * states_B

for q_A in range(0, 7):
    s = micro_states(6, q_A, 2, 2)
    print(s)
```

Kode 2:

```
states = []
q_A = np.linspace(0, 100, 101)
for q_Ai in q_A:
    s = micro_states(100, q_Ai, 50, 50)
    states.append(s)

states = np.array(states)
prob_states = states/sum(states)

plt.plot(q_A, prob_states)
plt.axvline(50, color='tomato', ls="--")
plt.xlabel(r"$q_A$")
plt.ylabel("Probability")
plt.grid(color='black', linestyle = '--', linewidth = 0.25)
plt.xticks(np.arange(101, step=10))
plt.yticks(np.arange(0.06, step=0.005))
plt.show()
```

Code 3:

```
N=50
s=np.zeros(10000)

for i in range(10000):
    random=np.random.choice([-1, 1], N)
    S_plus=0
    S_min=0

    for k in range(N):
        if random[k]==1:
            S_plus +=1
        else:
            S_min += 1
    s[i]= (S_plus - S_min)/2

plt.plot(s, '.')
plt.xlabel("M")
plt.ylabel(r"$E^*$", rotation=0)
plt.grid(color='black', linestyle = '--', linewidth = 0.25)
plt.show()
```

Kode 3 (forts.) Forts. av koden ovenfor som lagde

histogram og det analytiske modell plottet.

```
plt.hist(s, 25)
plt.xlabel(r"$E^*$")
plt.ylabel("Antall mikrotils.")
plt.grid(color='black', linestyle = '--', linewidth = 0.25)
plt.xlim([-15, 15])
plt.show()

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.hist(s, 25)
plt.xlabel(r"$E^*$")
plt.ylabel("Antall mikrotilstander")
plt.grid(color='black', linestyle = '--', linewidth = 0.25)
plt.xlim([-15, 15])

s = np.linspace(-15, 15, 500)
alt_multiplis = 2**N * np.e**(-2*s**2 / N)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(s, alt_multiplis)
plt.grid(color='black', linestyle = '--', linewidth = 0.25)
plt.xlabel("s")
plt.ylabel(r"$\Omega(50, s)$")
plt.xlim([-15, 15])
plt.show()
```