南京大學
NANJING UNIVERSITY
朱晓胜

线性代数（第一层次）

第一章　行列式(1)

课程使用教材

线性代数讲义

江惠坤　邵荣 范红军 编　科学出版社

参考书目

1、**线性代数(第二版)** 居余马等编著　清华大学出版社

2、**高等代数**　北京大学数学系前代数小组编　高等教育出版社

主要参考如下几章：

行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换等

参考课程平台

爱课程（中国大学MOOC）（http://moocs.unipus.cn）

1.1 二、三阶行列式

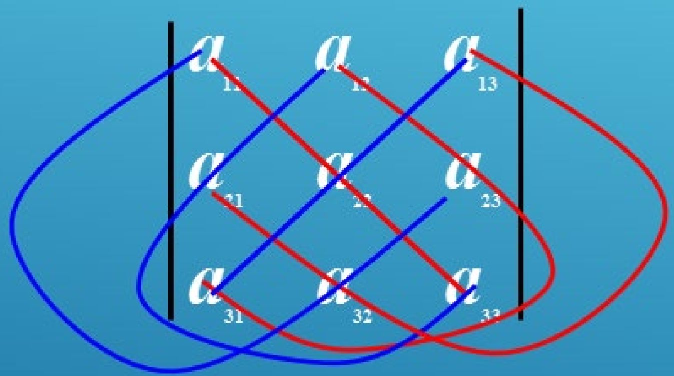
二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

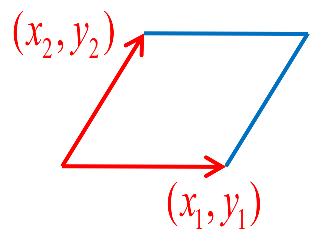
对角线法则



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

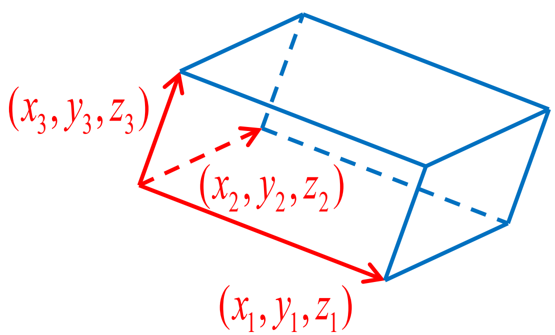
行列式的几何意义：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$ 表示平行四边形面积



逆时针面积为正

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$ 表示平行六面体体积



右手向体积为正

1.2 n 阶行列式

1.2.1 n阶行列式的定义

n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$

此处，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为D_n中元素a_{ij}的代数余子式

M_{ij}是 划去D_n中元素a_{ij}所在的第i 行和第j列后得到的$n-1$ 阶行列式，称为元素a_{ij}的余子式。

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注1：行列式的其它定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中，$j_1 j_2 \cdots j_n$是1，2，…，n的一个排列，$\sum$ 是对这n！个排列求和，$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$是排列$j_1 j_2 \cdots j_n$的逆序数。

注2：逆序数

在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数。

例如：排列2431中，21，43，41，31是逆序，故其逆序数$\tau(2431)$=4

排列45321的逆序数$\tau(45321)$=9

逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例1： 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

此行列式称为下三角行列式，即：当$i<j$ 时，$a_{ij}=0$，也就是说主对角线上方的元素全为0。

解：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

1.2.2 行列式的性质

定义1：（转置行列式） 设

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_n' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们称D_n'为**行列式D_n的转置行列式**。不难看出，D_n'是行列式D_n行与列互换后所得到的行列式。通常D_n的转置行列式也用$\boxed{D_n{}^T}$来表示。

性质1： 行列式与它的转置行列式相等，即：$D_n = D_n^{\ T}$

证：首先证明：行列式可以按照第一列展开。

用归纳法证明。

当$n=2$时，结论成立。假设$n=m-1$时结论已被证明成立，

考虑$n=m$时的情形。

根据定义有：$D_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1m}A_{1m}$

考虑D_m第一列的元素与其对应的代数余子式的乘积之和：

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{m1}A_{m1}$$

要证明结论成立，即证明：

$$\boxed{a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{m1}A_{m1} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1m}A_{1m}}$$

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{m1}A_{m1}$$
$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{21}(-1)^{2+1}M_{21}+\cdots+a_{m1}(-1)^{m+1}M_{m1}$$

$$=a_{11}\,(-1)^{1+1}M_{11}+\sum_{i=2}^{m}a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} \qquad ①$$

考虑M_{i1}, $2\le i\le m$。事实上，

$$M_{i1}=\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1m} \\ a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1m} \\ a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mj-1} & a_{mj} & a_{mj+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}=\sum_{j=2}^{m}a_{1j}\,(-1)^{1+(j-1)}M_{i1,1j} \quad ②$$

其中$M_{i1,1j}$ 是M_{i1}中a_{1j}对应的余子式。

注意：a_{1j}在M_{i1}中的真正位置是第1行第$j-1$列。

把②式代入①式，有

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{m1}A_{m1}$$

$$=a_{11}\,(-1)^{1+1}M_{11}+\sum_{i=2}^{m}a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}$$

$$=a_{11}\,(-1)^{1+1}M_{11}+\sum_{i=2}^{m}a_{i1}(-1)^{i+1}\sum_{j=2}^{m}a_{1j}\,(-1)^{1+(j-1)}M_{i1,1j}$$

$$=a_{11}\,(-1)^{1+1}M_{11}+\sum_{j=2}^{m}\sum_{i=2}^{m}a_{1j}a_{i1}(-1)^{j+i+1}M_{i1,1j} \qquad ③$$

另一方面，

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1m}A_{1m}=a_{11}\,(-1)^{1+1}M_{11}+\sum_{j=2}^{m}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} \qquad ④$$

考虑M_{1j}。由于M_{1j}是$m-1$阶行列式，由归纳假设，可以得到：

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1m} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{im} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj-1} & a_{mj+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}=\sum_{i=2}^{m} a_{i1}\,(-1)^{(i-1)+1}M_{1j,i1} \quad ⑤$$

其中$M_{1j,i1}$是M_{1j}中a_{i1}对应的余子式。

注意：a_{i1}在M_{1j}中的真正位置是第$i-1$行第1列。

把⑤式代入④式，有

$$\begin{aligned} & a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1m}A_{1m} \\ & = a_{11}\,(-1)^{1+1}\,M_{11}+\sum_{j=2}^{m} a_{1j}(-1)^{1+j}\sum_{i=2}^{m} a_{i1}\,(-1)^{(i-1)+1}M_{1j,i1} \\ & = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+\sum_{j=2}^{m}\sum_{i=2}^{m} a_{1j}a_{i1}\,(-1)^{j+i+1}M_{1j,i1} \qquad ⑥ \end{aligned}$$

由②式和⑤式，可以看到 $M_{i1,1j}=\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1m} \\ a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mj-1} & a_{mj+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}=M_{1j,i1}$

由③式和⑥式，可得

$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{m1}A_{m1}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1m}A_{1m}=D_m$。

所以，行列式可以按照第一列展开。

其次证明：行列式与它的转置行列式相等。

用归纳法证明。

当 $n=2$ 时，结论成立。假设 $n-1$时结论已被证明成立，

考虑 n 时的情形。

由前面所证结论知，行列式可以按照第一列展开。考虑$D_n{}^T$，按照第 1 列展开，有

$$D_n{}^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}N_{11} + a_{12}(-1)^{2+1}N_{21} + \cdots + a_{1n}(-1)^{n+1}N_{n1}$$

N_{i1}是$D_n{}^T$第（i, 1）位置上元素对应的余子式。

由于 N_{i1}是$n-1$阶行列式，由归纳假设知， $N_{i1} = N_{i1}{}^T$ 。

而$N_{i1}{}^T$与行列式D_n中第（1，i）位置上元素对应的余子式是相同的。故有

$N_{i1} = N_{i1}{}^T = M_{1i}$，此处$M_{1i}$是行列式$D_n$中第（1，$i$）位置上元素对应的余子式。

于是

$$D_n{}^T = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{2+1}M_{12} + \cdots + a_{1n}(-1)^{n+1}M_{1n}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = D_n\text{。}$$

注：性质1表明，在行列式中，行与列的位置是对称的，因之凡是有关行的性质，对列也同样成立。

例2： 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

此行列式称为上三角行列式，即：当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$，也就是说主对角线下方的元素全为0。

解：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

特别地，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

此行列式称为对角行列式，即：当 $i \neq j$ 时，$a_{ij} = 0$，也就是说主对角线以外的元素全为0。

性质2： 对调行列式中两行（两列）的位置，行列式反号。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{j1} \quad a_{j2} \quad \cdots \quad a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{j1} \quad a_{j2} \quad \cdots \quad a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证：首先证明：对调行列式的相邻两行，行列式相差一个符号。

用归纳法证明。

当$n=2$时，结论成立。假设 $n-1$ 时结论已被证明成立，

考虑 n 时的情形。

设 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-21} & a_{i-22} & \cdots & a_{i-2n} \\ \boxed{a_{i-11} \quad a_{i-12} \quad \cdots \quad a_{i-1n}} \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$， $\widetilde{D_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-21} & a_{i-22} & \cdots & a_{i-2n} \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \boxed{a_{i-11} \quad a_{i-12} \quad \cdots \quad a_{i-1n}} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

其中$\widetilde{D_n}$表示将D_n中的第$i-1$行和第i行的元素对调后得到的行列式。

设N_{t1} 表示$\widetilde{D_n}$中$(t,1)$位置上的元素在$\widetilde{D_n}$中对应的余子式。

设M_{t1} 表示D_n中$(t,1)$位置上的元素在D_n中对应的余子式。

由归纳假设，有

$$N_{t1} = \begin{cases} M_{i1}, & t = i-1 \text{ 时}, \\ M_{i-11}, & t = i \text{ 时}, \\ -M_{t1}, & t \neq i-1, i \text{ 时}。 \end{cases}$$

将$\widetilde{D_n}$按第1列展开

$$\widetilde{D_n} = \sum_{t=1}^{i-2} a_{t1}(-1)^{t+1} \underset{\underset{-M_{t1}}{\|}}{N_{t1}} + a_{i1}(-1)^{(i-1)+1} \underset{\underset{M_{i1}}{\|}}{N_{i-11}} + a_{i-11}(-1)^{i+1} \underset{\underset{M_{i-11}}{\|}}{N_{i1}} + \sum_{t=i+1}^{n} a_{t1}(-1)^{t+1} \underset{\underset{-M_{t1}}{\|}}{N_{t1}}$$

$$= \sum_{t=1}^{i-2} a_{t1}(-1)^{t+1}(-M_{t1}) + a_{i1}(-1)^{(i-1)+1} M_{i1} + a_{i-11}(-1)^{i+1} M_{i-11} \sum_{t=i+1}^{n} a_{t1}(-1)^{t+1}(-M_{t1})$$

$$= -\sum_{t=1}^{i-2} a_{t1}(-1)^{t+1} M_{t1} + a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i-11}(-1)^{(i-1)+1} M_{i-11} \sum_{t=i+1}^{n} a_{t1}(-1)^{t+1} M_{t1}$$

$$= -\sum_{t=1}^{n} a_{t1} A_{t1} = -D_n$$

最后证明：任意对调行列式的第 i 行和第 j 行，行列式相差一个符号。

假设第 i 行和第 j 行之间有 k 行, 则可以经过 $2k+1$ 次相邻行调换，故交换第 i 行和第 j 行后的行列式的值与原来行列式的值相差 $(-1)^{2k+1} = -1$ 倍。

推论1：如果行列式中有两行（两列）相同，那么行列式为零。

推论2：行列式可以按照任意一行（列）展开。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

证：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{1+j}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}M_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

性质3：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{ka_{i1} \quad ka_{i2} \quad \cdots \quad ka_{in}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这就是说，行列式一行（一列）的公因子可以提出去，或者说以一数乘行列式的一行（一列）就相当于用这个数乘此行列式。

证：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} k\, a_{ij} A_{ij} = k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论： 若行列式中两行（两列）成比例，那么行列式为零。

性质4：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1}+b_{i1}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{in}+b_{in}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{b_{i1}} & \boxed{\cdots} & \boxed{b_{in}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\,A_{ij}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质5：把行列式一行（列）的倍数加到另外一行（列），行列式不变。即：

第j行$\times k$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+kba_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{j1} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6：行列式任意一行（列）的元素与另外一行（列）元素的代数余子式对应乘积之和为零。即：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D_n, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D_n, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

注：

$$a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_n$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

证： $0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第}j\text{行展开}} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$ （$i \neq j$）

A_{jk}是D_n中(j,k)位置上的元素对应的代数余子式。

几个符号：

$r_i \leftrightarrow r_j$: 交换第 i 行和第 j 行

$\frac{1}{k} r_i$: 第 i 行提出公因子 k

$r_i + k r_j$: 把第 j 行乘以数 k 加到第i行

$c_i \leftrightarrow c_j$: 交换第 i 列和第 j 列

$\frac{1}{k} c_i$: 第 i 列提出公因子 k

$c_i + k c_j$: 把第 j 列乘以数 k 加到第 i 列

例1： 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&3&0&1\\3&0&1&4\\1&1&2&1\\0&1&1&0\end{vmatrix}$

解： 法一 $D=\begin{vmatrix}1&3&0&1\\3&0&1&4\\1&1&2&1\\0&1&1&0\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2+(-3)r_1\\r_3+(-1)r_1}}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&3&0&1\\0&-9&1&1\\0&-2&2&0\\0&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-9&1&1\\-2&2&0\\1&1&0\end{vmatrix}$

$\overset{\text{按最后一列展开}}{=\!=\!=\!=}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2&2\\1&1\end{vmatrix}=-4$

法二 $D=\begin{vmatrix}1&3&0&1\\3&0&1&4\\1&1&2&1\\0&1&1&0\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2+(-3)r_1\\r_3+(-1)r_1}}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&3&0&1\\0&-9&1&1\\0&-2&2&0\\0&1&1&0\end{vmatrix}\underset{c_2\leftrightarrow c_4}{=\!=\!=\!=}$

$=-\begin{vmatrix}1&1&0&3\\0&1&1&-9\\0&0&2&-2\\0&0&1&1\end{vmatrix}\overset{r_4+(-\frac{1}{2})r_3}{=\!=\!=\!=}-\begin{vmatrix}1&1&0&3\\0&1&1&-9\\0&0&2&-2\\0&0&0&2\end{vmatrix}=-4$

例2： 证明：$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d_1 \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d_1 & 0 \end{vmatrix}=0$

证：

$$D_5=D_5^T=\begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & 0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_2 & b_1 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_3 & b_2 & c_1 & 0 & -d_1 \\ a_4 & b_3 & c_2 & d_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{每一行乘}(-1)}(-1)^5\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d_1 \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d_1 & 0 \end{vmatrix}=-D_5$$

故 $D_5=0$

注： 上述行列式称为反对称行列式。一般地，奇数阶反对称行列式的值为 0。

例4：设$x \neq a_i (i = 1,2,\cdots,n)$，计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

解：把其它各行减去第一行

$$D_n \xlongequal[r_n - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \cdots}} \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & \cdots & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{c_1 \times \frac{1}{a_1 - x} \\ c_2 \times \frac{1}{a_2 - x} \\ \cdots \\ c_n \times \frac{1}{a_n - x}}}$$

$$(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \cdots & \frac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

把后面各列加到第一列，得到：

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i - x) \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{a_i - x}\right) & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \cdots & \frac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left[1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{a_i - x}\right)\right] \prod_{i=1}^{n}(a_i - x).$$

例1： 证明n阶范德蒙德（Vandermonde）行列式（$n \geq 2$）

$$D_n(x_1, x_2, \cdots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

注： $$\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{2 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

证明： 用归纳法证明。　$n = 2$时，

$$D_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)$$

此时，结论成立。假设$n-1$阶时结论已被证明成立，考虑n阶的情形。

将第 $n-1$ 行 $(-x_1)$ 倍加到第 n 行, 第 $n-2$ 行 $(-x_1)$ 倍加到第 $n-1$ 行, 这样依次下去, 最后将第 1 行 $(-x_1)$ 倍加到第 2 行, 得

$$D_n(x_1,x_2,\cdots x_n) \xlongequal[\substack{r_2+(-x_1)r_1}]{\substack{r_n+(-x_1)r_{n-1} \\ r_{n-1}+(-x_1)r_{n-2} \\ \cdots \\ r_3+(-x_1)r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

按第一列展开, 并提出各列的公因子 (x_i-x_1) $(i=2,3,\cdots,n)$, 得到递推公式:

$$D_n(x_1,x_2,\cdots x_n) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$\|$ 由归纳假设

$$\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

例3：设 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 2025,$ 试求：$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ ，此处，

A_{ij}是D_n中第（i，j）位置上的元素对应的代数余子式。

解：$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \underset{\substack{\| \\ D_n}}{\sum_{j=1}^{n} 1 \times A_{1j}} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{\sum_{j=1}^{n} 1 \times A_{2j}} = 2025。$$

例2 证明： $n+m$ 阶行列式

$$D_{n+m}=\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{matrix}} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

证：对 n 用数学归纳法。 $n=1$时，

$$D_{1+m}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

此时，结论成立。假设$n-1$时结论已被证明成立，考虑n时的情形。

$$D_{n+m}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & B_m & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & M_{11} & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{12} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & B_m & \vdots \\ c_{m2} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & B_m & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m,i-1} & c_{m,i+1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & M_{1n} & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n-1} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & B_m & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m,n-1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

令$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

由归纳假设

$$D_{n+m}=a_{11}(-1)^{1+1}\,M_{11}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+a_{1i}(-1)^{1+i}\,M_{1i}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}\,M_{1n}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_{11}(-1)^{1+1}\,M_{11}+\cdots+a_{1i}(-1)^{1+i}\,M_{1i}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}\,M_{1n}\right)\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

注1：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

注2：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

内容小结

① 行列式定义

② 行列式性质

③ 行列式计算

④ 范德蒙德（Vandermonde）行列式

Thank You !

谢谢！