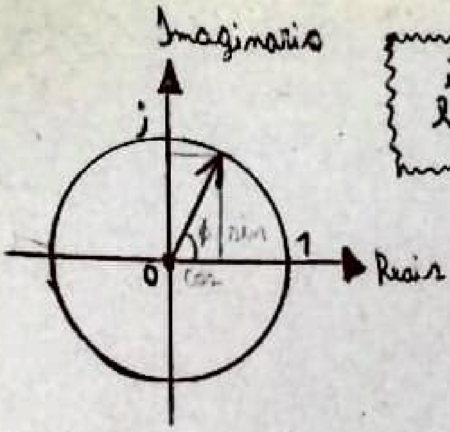


$$\boxed{e^{j\phi} = \cos\phi + j \operatorname{sen}\phi}$$

Relações De Euler

$$\boxed{\begin{matrix} j^0 = 1 & j^2 = -1 \\ j^1 = j & j^3 = -j \end{matrix}}$$

$Z = X + Yj$

$\bar{Z} = X - Yj$

$|Z| = \sqrt{X^2 + (Yj)^2}$

Relação de função complexa, trigonométrica, e exponenciais

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos X + i \operatorname{sen} X \\ e^{-ix} = \cos X - i \cdot \operatorname{sen} X \end{cases} \longrightarrow \text{substituindo } X \text{ por } \pi$$

Soma: $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos X$

$$\left[\cos X = \frac{e^{ix} + e^{-iX}}{2}\right]$$

Subtração: $e^{ix} - e^{-iX} = 2j \operatorname{sen} X$

$$\left[\operatorname{sen} X = \frac{e^{ix} - e^{-iX}}{2j}\right]$$

$e^{i\pi} = \cos\pi + j \operatorname{sen}\pi$

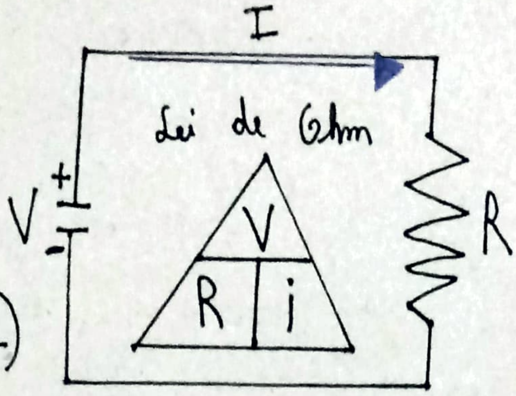
$e^{j\pi} = -1 + \cancel{j \cdot 0}$

$$\left[e^{j\pi} + 1 = 0\right]$$

Aplicações de EDO de 2º ordem

13/04/2021

Circuitos Elétricos



$V \rightarrow$ Tensão - V (Volts)

* diferença de potencial elétrico

$R \rightarrow$ Resistência - Ω (Ohm)

* Resistência elétrica

$I \rightarrow$ Intensidade - A (Ampéres)

* corrente elétrica

* Resistência R (Ohms - Ω)

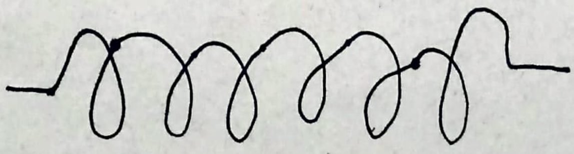
capacidade de um material se opor a passagem de corrente elétrica.

$V = R \cdot i$

* Indutância L (henrys - h)

capacidade de circuitos elétricos gerarem uma força eletromotriz por indução magnética

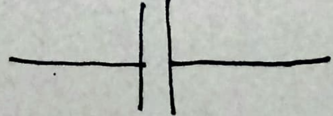
$$V = L \frac{di}{dt}$$



* Capacitância C (farads - f)

capacidade de um material armazenar energia elétrica

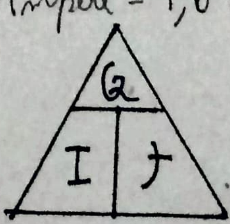
$$V = \frac{1}{C} \int i \, dt$$



$$i = \frac{dQ^{\text{carga}}}{dt_{\text{Tempo}}} \quad (\text{corrente})$$

$$\text{Amperi} = \frac{\text{columbs}}{\text{segundo}}$$

$$\text{Amperi} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \frac{C}{s}$$

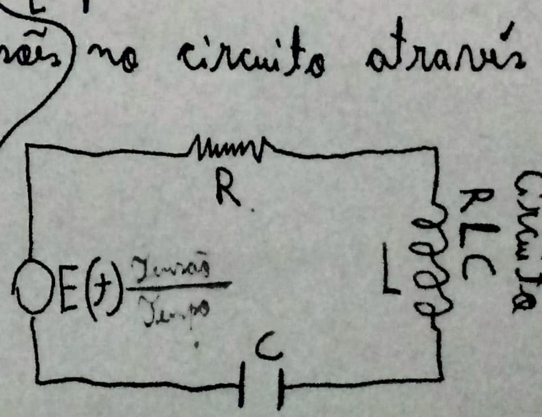


$$\boxed{E(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q} \quad (q = \text{carga})$$

Gy

* De acordo com a segunda lei de Kirchhoff, a [diferença de potencial E(t) em um circuito fechado é igual a soma das tensões] no circuito através de um indutor, um capacitor e um resistor.

$$\boxed{E(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i \, dt} \quad (i = \text{corrente})$$



$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\,\text{sen}\,\phi \tag{9.16b}$$

Portanto, z poderia ser escrito como indicado a seguir

$$\boxed{z = x + jy = r\angle\phi = r(\cos\phi + j\,\text{sen}\,\phi)} \tag{9.17}$$

A adição e a subtração de números complexos são mais bem realizadas na forma retangular; a multiplicação e a divisão são mais bem efetuadas na forma polar. Dados os números complexos

$$z = x + jy = r\angle\phi, \qquad z_1 = x_1 + jy_1 = r_1\angle\phi_1$$
$$z_2 = x_2 + jy_2 = r_2\angle\phi_2$$

as seguintes operações são importantes.

Adição:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \tag{9.18a}$$

Subtração:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \tag{9.18b}$$

Multiplicação:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle\phi_1 + \phi_2 \tag{9.18c}$$

Divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\phi_1 - \phi_2 \tag{9.18d}$$

Inverso:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\angle-\phi \tag{9.18e}$$

Raiz quadrada:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\angle\phi/2 \tag{9.18f}$$

Conjugado Complexo:

$$z^* = x - jy = r\angle-\phi = re^{-j\phi} \tag{9.18g}$$

Observe que da Equação (9.18e):

$$\frac{1}{j} = -j \tag{9.18h}$$

Estas são as propriedades básicas dos números complexos de que precisaremos. Outras propriedades dos números complexos podem ser encontradas no Apêndice B.

A ideia da representação de fasor se baseia na identidade de Euler. Em geral,

$$\boxed{e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\,\text{sen}\,\phi} \tag{9.19}$$

Tabela 9.1 • Transformação senoide-fasor.

Representação do domínio do tempo	Representação no domínio dos fasores
$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \underline{/\phi}$
$V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$	$V_m \underline{/\phi - 90^\circ}$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \underline{/\theta}$
$I_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$	$I_m \underline{/\theta - 90^\circ}$

A partir das Equações (9.23) e (9.24), $v(t) = \text{Re}(\mathbf{V}e^{j\omega t}) = \text{V}_m \cos(\omega t + \phi)$ de modo que

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\omega V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \omega V_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \\ &= \text{Re}(\omega V_m e^{j\omega t} e^{j\phi} e^{j90^\circ}) = \text{Re}(j\omega \mathbf{V} e^{j\omega t})\end{aligned} \tag{9.26}$$

Diferenciar uma senoide equivale a multiplicar seu fasor correspondente por $j\omega$.

Isso mostra que a derivada de $v(t)$ é transformada para o domínio dos fasores como $j\omega\mathbf{V}$

$$\underset{\text{(Domínio do tempo)}}{\frac{dv}{dt}} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{(Domínio dos fasores)}}{j\omega\mathbf{V}} \tag{9.27}$$

Integrar uma senoide equivale a dividir seu fasor correspondente por $j\omega$.

De forma similar, a integral de $v(t)$ é transformada para o domínio dos fasores como $\mathbf{V}/j\omega$

$$\underset{\text{(Domínio do tempo)}}{\int v\,dt} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{(Domínio dos fasores)}}{\frac{\mathbf{V}}{j\omega}} \tag{9.28}$$

A Equação (9.27) possibilita a substituição de uma derivada em relação ao tempo com a multiplicação de $j\omega$ no domínio dos fasores, enquanto a Equação (9.28) possibilita a substituição de uma integral em relação ao tempo pela divisão por $j\omega$ no domínio dos fasores. As Equações (9.27) e (9.28) são úteis na descoberta da solução em regime estacionário, que não requer conhecimento prévio dos valores iniciais da variável envolvida. Esta é uma das importantes aplicações dos fasores.

Somar senoides de mesma frequência equivale a somar seus fasores correspondentes.

Além da diferenciação e integração do tempo, outro importante emprego dos fasores é na adição de senoides de mesma frequência. Isso é mais bem ilustrado por meio de um exemplo, e o Exemplo 9.6 fornece um.

As diferenças entre $v(t)$ e $\mathbf{V}$ devem ser enfatizadas.

1. $v(t)$ é a representação *instantânea ou no domínio do tempo*, enquanto $\mathbf{V}$ é a representação em termos de *frequência ou no domínio dos fasores*.
2. $v(t)$ é dependente do tempo, enquanto $\mathbf{V}$ não é. (Esse fato é normalmente esquecido pelos estudantes.)
3. $v(t)$ é sempre real sem nenhum termo complexo, enquanto $\mathbf{V}$ geralmente é complexo.

Finalmente, devemos ter em mente que a análise de fasores se aplica apenas quando a frequência é constante; e também na manipulação de dois ou mais sinais senoidais apenas se eles tiverem a mesma frequência.

Eletricidade Aplicada - Formulas

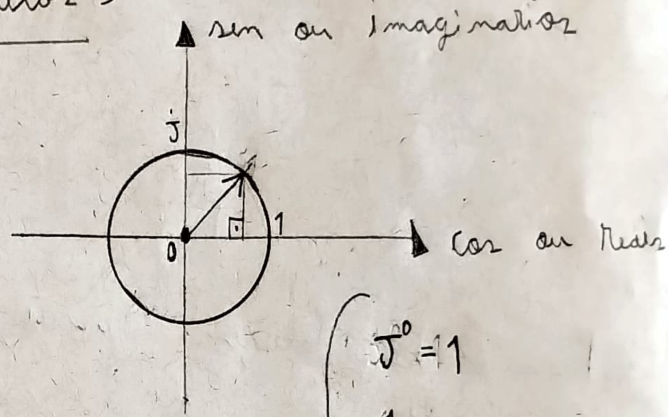
Função de onda → (Domínio do tempo)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Formas de representar números complexos → (Domínio da frequência)



Forma retangular: $z = x + jy$

Forma polar: $z = r \angle \phi$

Forma exponencial: $z = r e^{j\phi}$

Identidade de Euler: $e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j \operatorname{sen}\phi$

$$\begin{cases} j^0 = 1 \\ j^1 = j \\ j^2 = -1 \\ j^3 = -j \end{cases}$$

...

Forma retangular → Forma polar

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad \phi = tg^{-1} \dfrac{y}{x}$

Forma polar → Forma retangular

$x = r \cos\phi$ $\qquad y = r j \operatorname{sen}\phi$

Portanto:

$$z = x + jy = r\angle\phi = r(\cos\phi + j \operatorname{sen}\phi)$$

- Para traçar a função trigonométrica ($\pm 90°$)

$$\begin{cases} \cos \to \operatorname{sen} : +90° \\ \operatorname{sen} \to \cos : -90° \end{cases}$$

- Para cancelar a amplitude negativa: ($\pm 180°$)

$$\begin{cases} -\operatorname{sen} \to \operatorname{sen} : +180° \\ -\cos \to \cos : -180° \end{cases}$$

Domínio do Tempo	Domínio dos Fasores
$\frac{\partial V}{\partial t}$	$JW\,V$
$\int V\,dt$	$\frac{1}{JW}\,V$

$$V = JWLI \qquad V = \frac{I}{JWC}$$

$$I = C\,\frac{dV}{dt} \qquad I = JWCV$$

* Resumo das relações Tensão - corrente

Elemento	Domínio do Tempo	Domínio da Frequência
Resistor Ω R	$V = R\,j$	$V = R.I$
Indutor h L	$V = L \cdot \frac{dj}{dt}$	$V = JWLI$
capacitor f C	$j = C \cdot \frac{dV}{dt}$	$V = \frac{I}{JWC}$

- Impedância em paralelo 2 a 2

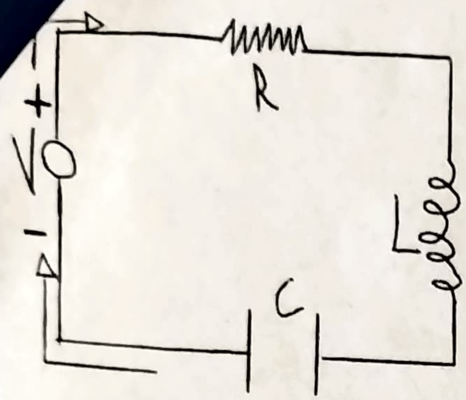
$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

- Impedância em paralelo para n elementos

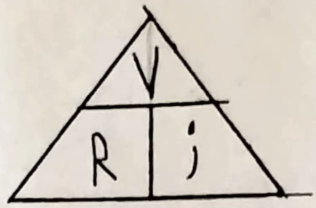
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_n} \quad \therefore$$

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_n}\right)^{-1}$$

cuito: RLC



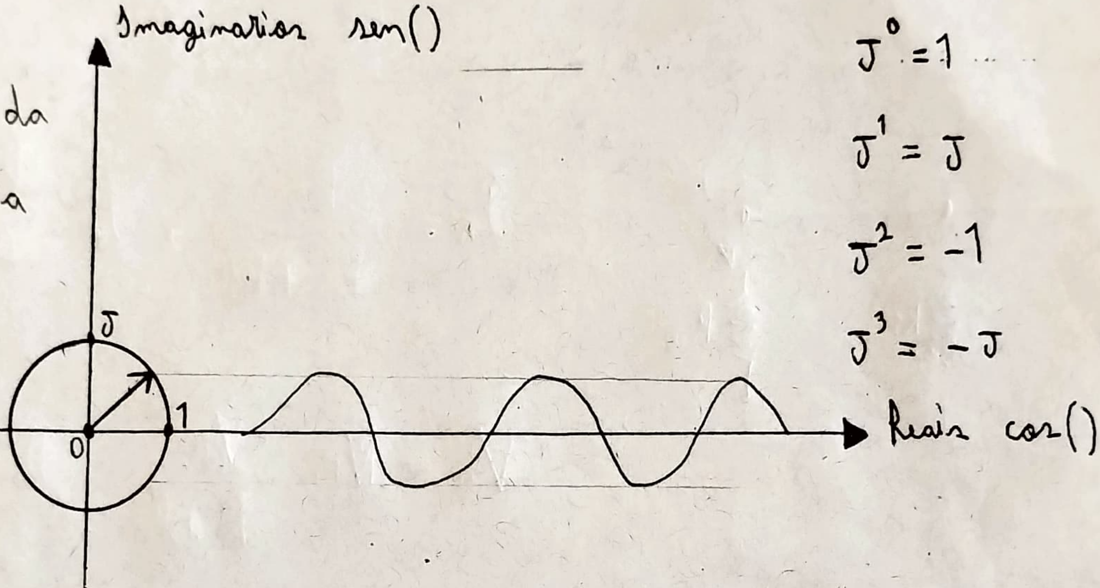
Lei de Ohm $Z = R$ e $Y = \frac{1}{Z}$



$$Z = \frac{V}{I}$$

$$Y = \frac{I}{V}$$

• Domínio da Frequência



$J^0 = 1$

$J^1 = J$

$J^2 = -1$

$J^3 = -J$

Z: Impedância (Ω) $\quad ( )^{-1} \quad$ **Y**: Admitância siemens (S)

R	$Z = R$	Ω	R	$Y = \frac{1}{R}$	Ω
L	$Z = JWL$	H	L	$Y = \frac{1}{JWL}$	H
C	$Z = \frac{1}{JWC}$	F	C	$Y = JWC$	F

Imaginaria: Reatância

Real: Resistência

Im +: Reatância indutiva

Im −: Reatância capacitiva

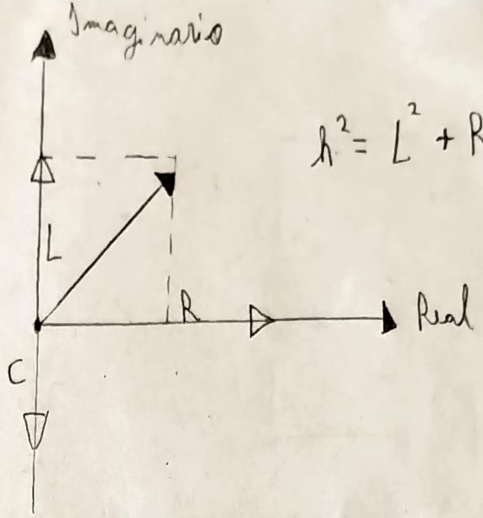
Imaginario: Susceptância

Real: condutância

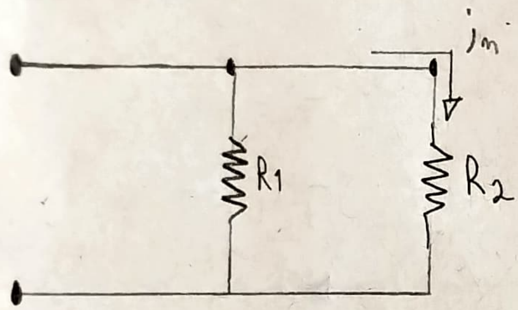
Indutor: atrasado 90°

capacitor: adiantado 90°

Resistor: eixo real



$h^2 = L^2 + R^2$



$$i_n = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \cdot i_T$$ Divisor de corrente

$$V_n = V_T \frac{R_2}{R_2 + R_1}$$ Divisor de tensão

Lei de Kirchhoff das correntes [LKC]

A soma algébrica das correntes que entram em um nó é igual a zero, ou seja, a soma do que entra no nó é igual a soma do que sai.

corrente que entra: +

corrente que sai: −

$$\left[I_1 + I_2 + I_3 + I_n = 0 \right]$$