Polynôme de Bernstein

Les **polynômes de Bernstein**, nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Sergeï Bernstein (1880-1968), permettent de donner une démonstration constructive et probabiliste[1] du théorème d'approximation de Weierstrass. Ils sont également utilisés dans la formulation générale des courbes de Bézier.

Sommaire

En mathématiques, le **théorème de Stone-Weierstrass** est une généralisation du **théorème d'approximation de Weierstrass** en analyse réelle, selon lequel toute fonction continue définie sur un segment peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales.

Description

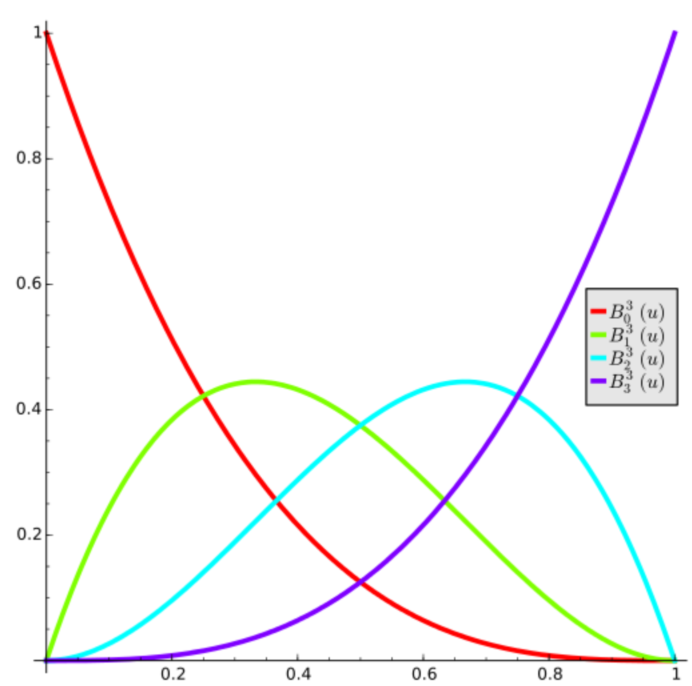
Pour un degré $m \geq 0$, il y a $m + 1$ polynômes de Bernstein $B_0^m, \ldots, B_m^m$ définis, sur l'intervalle $[0, 1]$, par

$$B_i^m(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i},$$

où les $\binom{m}{i}$ sont les coefficients binomiaux.

Ces polynômes présentent quatre propriétés importantes : $\forall u \in [0, 1]$

- partition de l'unité : $\sum_{i=0}^{m} B_i^m(u) = 1,$
- positivité : $\forall i \in \{0, \ldots, m\} \quad B_i^m(u) \geq 0,$
- symétrie : $\forall i \in \{0, \ldots, m\} \quad B_i^m(u) = B_{m-i}^m(1-u),$
- formule de récurrence : pour $m > 0,\ B_i^m(u) = \begin{cases} (1-u)B_i^{m-1}(u) & \text{si } i = 0 \\ (1-u)B_i^{m-1}(u) + uB_{i-1}^{m-1}(u) & \forall i \in \{1, \ldots, m-1\} \\ uB_{i-1}^{m-1}(u) & \text{si } i = m. \end{cases}$



Polynômes de Bernstein de degré 3.

Lien avec la loi binomiale

D'un point de vue probabiliste, pour tout $p \in [0,1]$, $B_i^m(p)$ est la probabilité $P(X=i)$, où X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (m,p). C'est d'ailleurs l'interprétation qu'en fait Bernstein dans sa démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass.

Notes et références

1. Sergeï Natanovitch Bernstein, « Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités » (http://www.math.technion.ac.il/hat/fpapers/bern1.pdf), dans *Comm. Soc. Math. Kharkov Ser. 2*, vol. 13, 1912.

Voir aussi

- Les courbes de Bézier sont construites à l'aide des polynômes de Bernstein
- Algorithme de De Casteljau, permet de calculer efficacement les polynômes de Bernstein
- Approximation de Bernstein, permet d'approcher uniformément des fonctions continues