储油罐的变位识别与罐容表标定

摘要：

储存燃油的地下储油罐是加油站的主要计量储存器具，属强制检定计量设备，研究其精密计量方法具有重要的现实意义。本文首先根据平行截面面积求体积的方法，建立了无变位圆柱体油罐罐容量计量模型，其次在无变位模型的基础上建立了纵向变位角度为α的油罐罐容量计量模型，该模型根据油位高度的不同，分三种情况进行探讨，得到相应的油位高度与储油量关系的数学模型。并通过 MATLAB 仿真了两种模型的油位高度与罐内储油量的对应关系，且与实际数据进行了对比，验证了两种模型具有较高的精度，误差范围在[0,5.5%]之间。

在后面的分析中，两端为球冠体的圆柱体储油罐在纵向变位α和横向变位β后，首先将油罐体分成三部分，并针对三部分建立不同的坐标系，然后用平行截面面积求体积的方法，并在问题 1 中已证明的数学模型基础上，建立油位高度和储油量关系的数学模型，根据附件 2 给出的进油前的数据，用 Matlab 拟合仿真，得到变位角α、β的近似值，再进一步利用一次性补充进油后的数据，通过 MATLAB 仿真数据，与实际数据作对比，验证结果表明误差较小，从而证明了模型的合理性。

关键字：卧式储油罐；变位识别；罐容表标定

一 问题的提出

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/ 出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化（以下称为变位），从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。如下所示，图1-1是一种典型的储油罐尺寸及形状示意图，其主体为圆柱体，两端为球冠体。图1-2是其罐体纵向倾斜变位的示意图，图1-3是罐体横向偏转变位的截面示意图。

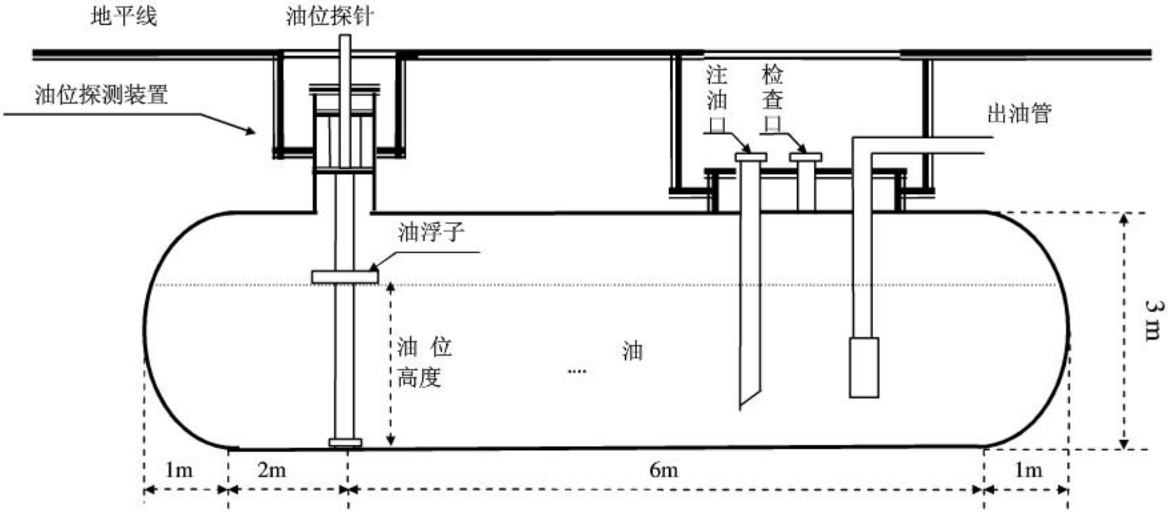


图 **1-1** 储油罐正面示意图

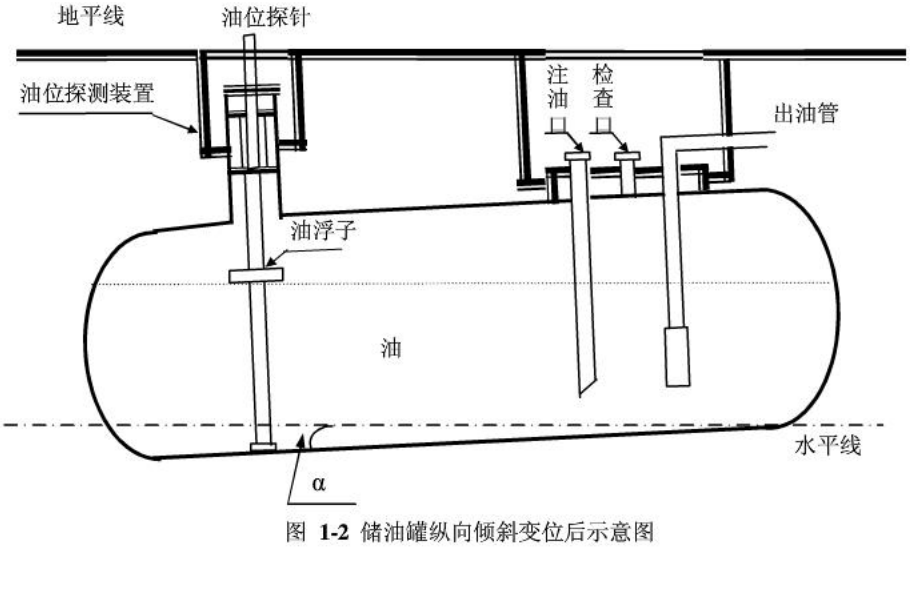
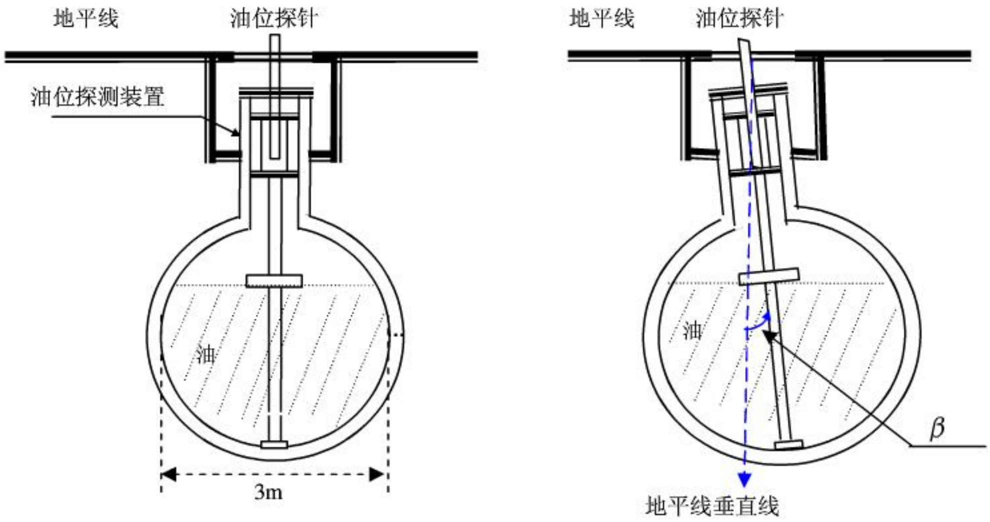
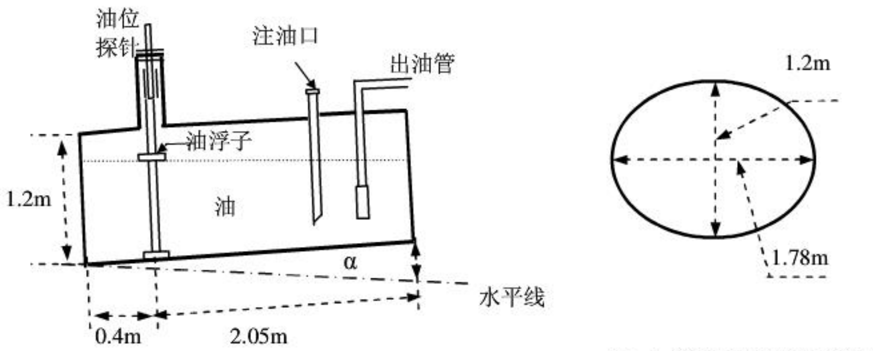


图 **1-2** 储油罐纵向倾斜变位后示意图



（a）无偏转倾斜的正截面图　　（b）横向偏转倾斜后正截面图

图 **1-3**　储油罐截面示意图



(a) 小椭圆油罐正面示意图　　(b) 小椭圆油罐截面示意图

图 **1-4** 小椭圆型油罐形状及尺寸示意图

本文的问题是：

（1）为了掌握罐体变位后对罐容表的影响，利用如图1-4的小椭圆型储油罐（两端平头的椭圆柱体），分别对罐体无变位和倾斜角为$\alpha=4.1^0$的纵向变位两种情况做了实验，实验数据如附件1所示。建立数学模型研究罐体变位后对罐容表的影响，并给出罐体变位后油位高度间隔为1cm的罐容表标定值。

（2）对于图1-1所示的实际储油罐，建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度α和横向偏转角度β ）之间的一般关系。利用附件中实际检测数据，根据所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为10cm的罐容表标定值。进一步利用实际检测数据来分析检验模型的正确性与方法的可靠性。

二 模型的假设

基于上面的问题，本文提出如下几点假设：

1． 油罐变位角度α在$[0,\frac{\pi}{2})$范围内；

2．油罐是规则的几何体；

3．假设油罐始终没有挂壁现象，忽略油罐壁的厚度；忽略外界温度等环境因素对油容积的影响；

三 符号说明

3.1 问题一符号说明

（1）a 表示圆柱体椭圆截面中长轴
（2）b 表示圆柱体椭圆截面短轴
（3）L 表示储油罐长度
（4）h 表示储油罐内液体高度
（5）S 表示椭圆截面的面积
（6）V 表示储油罐内储油量
（7）α 表示油罐的纵向变位
（8）h_1 表示探针到油罐左侧的距离；
（9）h_2 表示探针到油罐右侧的距离；

3.2 问题二符号说明

（1）R 表示圆柱体截面圆的半径
（2）H_1 表示左侧球冠体与圆柱体连接面到探针的距离
（3）H_2 表示右侧球冠体与圆柱体连接面到探针的距离
（4）a 表示球冠体的高度
（5）α 表示油罐的纵向变位
（6）β 表示油罐的横向变位

四 模型分析

4.1 问题一的分析

4.1.1 无变位模型分析

通过对储油罐在无变位情况下的分析，利用平行截面面积求积分的方法，建立计算容积的数学模型，并通过计算机仿真求出罐内储油的容积，从而得出罐内油位高度与储油量的对应关系。另外，利用matlab仿真技术进一步对实际检测数据来分析，检验模型的正确性与方法的可靠性。

4.1.2 纵向变位α度模型分析

通过对储油罐在纵向变位角为α情况下的分析，将储油罐油容积的求解分成三种情况讨论。一是在油位高度小于$2.05\tan\alpha$条件下建立数学模型；二是油位高度大于$2.05\tan\alpha$且小于$1.2-0.4\tan\alpha$条件下建立模型；三是油位高度大于$1.2-0.4\tan\alpha$且小于1.2条件下建立模型。根据平行截面面积求积分的方法，建立罐内油位高度与储油量的对应关系，并计算出罐容表标定值。另外利用 Matlab 对该模型进行仿真，并与附录表中的实测数据进行比较，参照比较的结果实现对模型的优劣判断，并计算出罐体变位后油位高度间隔为1cm 的罐容表标定值。

4.2 问题二的分析

首先分析罐内储油量和油位高度与变位参数纵向倾斜角度α关系，通过积分求得体积，为简化积分，将图形分段积分，最后得到体积关于油位高度的函数表达，再分析油罐横向偏转倾斜β后，罐内储油量与油位高度的关系，由于横向倾斜对液面的垂直距离影响很小，可近似忽略，最终可得到体积关于油位高度的数学模型。再通过最小二乘拟合，根据附表二中的数据，得到最接近实际的偏转角α、β，将α和β的近似值代入上述数学模型，并用Matlab 仿真出函数曲线，与真实曲线进行误差分析，验证模型的真实性和合理性。

五 问题的求解

5.1 问题一求解

5.1.1 无变位模型求解

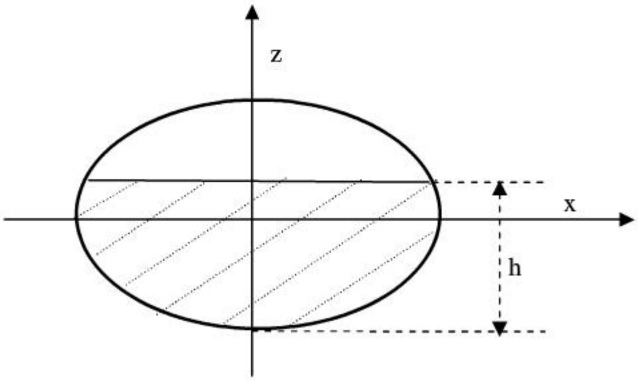


图 5-1

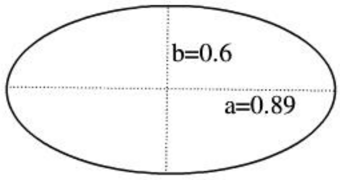


图 5-2

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-b}^{h-b} dz \int_{-a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}} dx \\
&= \int_{-b}^{h-b} 2a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}dz \\
&= \frac{2a}{b}\int_{-b}^{h-b}\sqrt{b^2-z^2}dz \\
&= \frac{a}{b}\left[(h-b)\sqrt{2hb-h^2}+b^2\arcsin\frac{h-b}{b}+\frac{\pi}{2}b^2\right] \\
V &= SL \\
&= \frac{aL}{b}\left[(h-b)\sqrt{2hb-h^2}+b^2\arcsin\frac{h-b}{b}+\frac{\pi}{2}b^2\right]
\end{aligned}
$$

通过计算机仿真实验得出在无变位情况下拟合的曲线图如下所示，深蓝色曲线为模型计算绘制的曲线，浅蓝色为实际测验得出的曲线，通过观察比较可知，在拟合效果上满足要求。

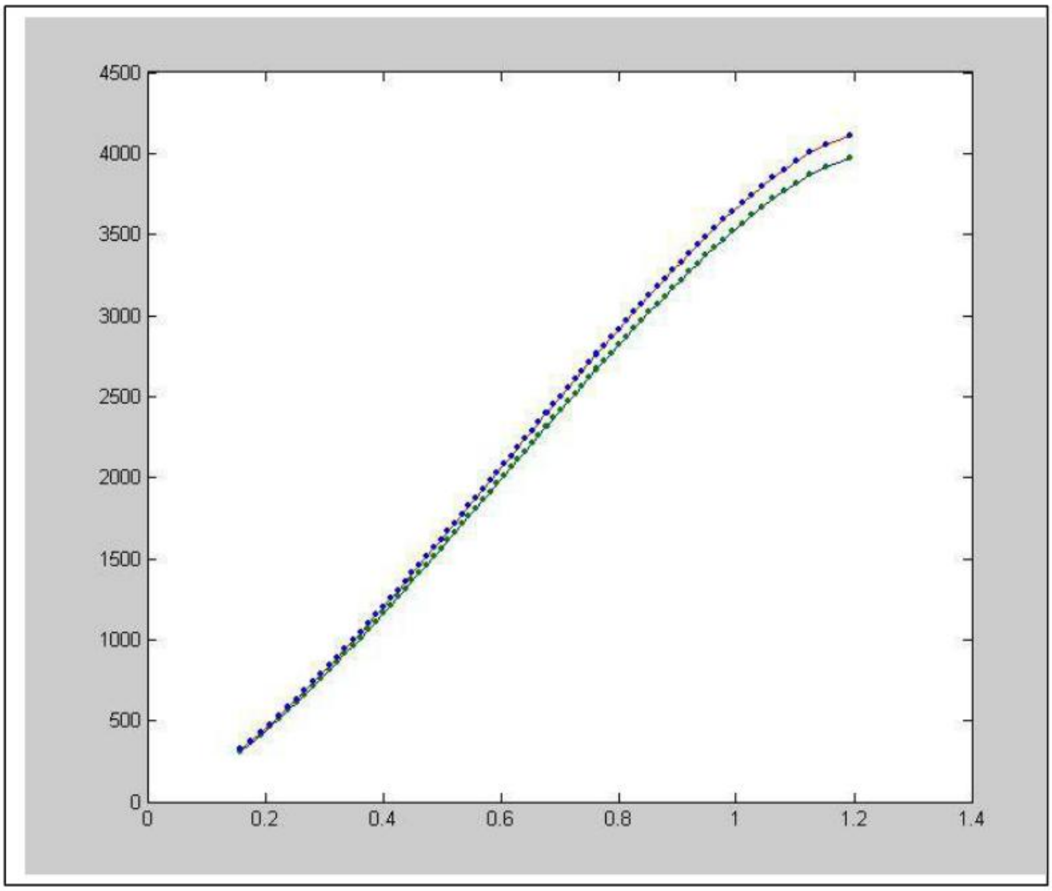


图 5-3

5.1.2 纵向变位α度模型求解

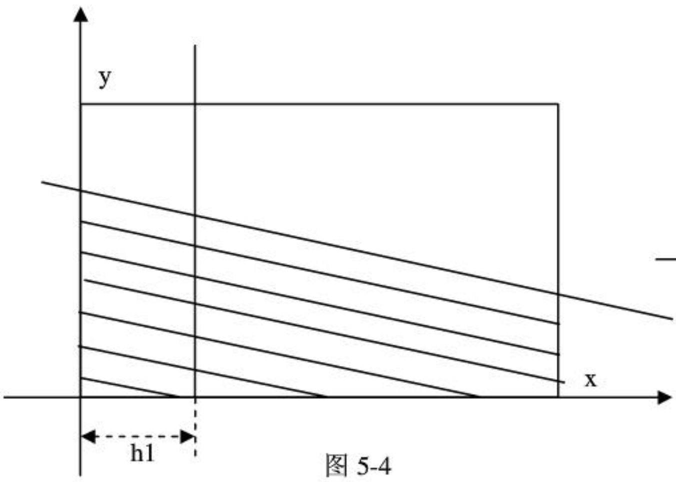


图 5-4

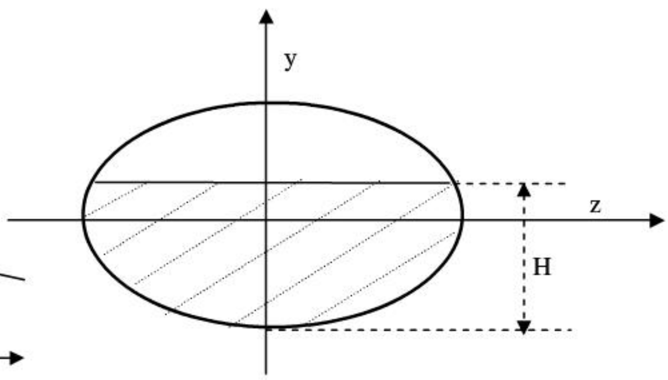


图 5-5

1 当$0 \le h \le h_2 \tan(\alpha)$时

先令 $H = h - (x - h_1)\tan\alpha$

$$V=\int_0^{h\cot\alpha+h_1}dx\int_0^H dy\int_{-a\sqrt{1-(\frac{y-b}{b})^2}}^{a\sqrt{1-(\frac{y-b}{b})^2}}dz$$

$$=\int_0^{h\cot\alpha+h_1}dx\int_0^H 2a\sqrt{1-(\frac{y-b}{b})^2}dy$$

$$=\frac{a}{b}\int_0^{h\cot\alpha+h_1}[(H-b)\sqrt{b^2-(H-b)^2}+b^2\arcsin\frac{H-b}{b}-b^2\arcsin(-1)]dx$$

$$=\frac{a}{b}\int_0^{h\cot\alpha+h_1}[(H-b)\sqrt{2Hb-H^2}+b^2\arcsin\frac{H-b}{b}+b^2*\frac{\pi}{2}]dx$$

$$=-\frac{a}{b}\cot\alpha\int_{h+h_1\tan\alpha}^{0}[(H-b)\sqrt{b^2-(H-b)^2}+b^2\arcsin\frac{H-b}{b}+\frac{\pi}{2}b^2]dH$$

令

$$F(H)=-\frac{a}{b}\cot\alpha\left(b^3(\frac{H-b}{b}\arcsin\frac{H-b}{b}+\sqrt{1-(\frac{H-b}{b})^2})-\frac{1}{3}[b^2-(H-b)^{3/2}]+\frac{\pi}{2}b^2H\right)$$

$$=F(0)-F(h+h_1\tan\alpha)$$

2 当 $h_2*\tan(\alpha)\le h\le 2b-h_1\tan(\alpha)$ 时

先令 $H=h-(x-h_1)\tan\alpha$

$$V=\int_0^{h_1+h_2}dx\int_0^H dy\int_{-a\sqrt{1-(\frac{y-b}{b})^2}}^{a\sqrt{1-(\frac{y-b}{b})^2}}dz$$

$$=\int_0^{h_1+h_2}dx\int_0^H 2a\sqrt{1-(\frac{y-b}{b})^2}dy$$

$$=\frac{a}{b}\int_0^{h_1+h_2}[(H-b)\sqrt{b^2-(H-b)^2}+b^2\arcsin\frac{H-b}{b}-b^2\arcsin(-1)]dx$$

$$=\frac{a}{b}\int_0^{h_1+h_2}[(H-b)\sqrt{2Hb-H^2}+b^2\arcsin\frac{H-b}{b}+b^2*\frac{\pi}{2}]dx$$

$$=-\frac{a}{b}\cot\alpha\int_{h+h_1\tan\alpha}^{h-h_2\tan\alpha}[(H-b)\sqrt{b^2-(H-b)^2}+b^2\arcsin\frac{H-b}{b}+\frac{\pi}{2}b^2]dH$$

令

$$F(H)=-\frac{a}{b}\cot\alpha\left(b^3(\frac{H-b}{b}\arcsin\frac{H-b}{b}+\sqrt{1-(\frac{H-b}{b})^2})-\frac{1}{3}[b^2-(H-b)^2]^{2/3}+\frac{\pi}{2}b^2H\right)$$

$$=F(h-h_2\tan\alpha)-F(h+h_1\tan\alpha)$$

3．当 $h\ge 2b-h_1\tan(\alpha)$ 时

先令 $H=h-(x-h_1)\tan\alpha$

$$V=\int_{h_1-(2b-h)\cot\alpha}^{h_1+h_2}dx\int_0^H dy\int_{-a\sqrt{1-(\frac{y-b}{b})^2}}^{a\sqrt{1-(\frac{y-b}{b})^2}}dz+\pi ab[h_1-(2b-h)\cot\alpha)]$$

$$=\int_{h_1-(2b-h)\cot\alpha}^{h_1+h_2}dx\int_0^H 2a\sqrt{1-(\frac{y-b}{b})^2}dh_1+\pi ab[h_1-(2b-h)\cot\alpha]$$

$$=\frac{a}{b}\int_{h_1-(2b-h)\cot\alpha}^{h_1+h_2}[(H-b)\sqrt{b^2-(H-b)^2}+b^2\arcsin\frac{H-b}{b}-b^2\arcsin(-1)]dx$$
$$+\pi ab[h_1-(2b-h)\cot\alpha]$$

$$=\frac{a}{b}\int_{h_1-(2b-h)\cot\alpha}^{h_1+h_2}[(H-b)\sqrt{2Hb-H^2}+b^2\arcsin h_1\frac{H-b}{b}+b^2*\frac{\pi}{2}]dx+\pi ab[h_1-(2b-h)\cot\alpha]$$

$$=-\frac{a}{b}\cot\alpha\int_{2b}^{h-h_2\tan\alpha}[(H-b)\sqrt{b^2-(H-b)^2}+b^2\arcsin\frac{H-b}{b}+\frac{\pi}{2}b^2]dH+\pi ab[h_1-(2b-h)\cot\alpha]$$

在 1 和 2 两种情况下，通过计算机仿真计算得出在纵向变位 $\alpha=4.1^{\circ}$ 时，模型拟合的曲线如下所示：（红色点为模型计算绘制的曲线，蓝色点为实际测量值得出的曲线）

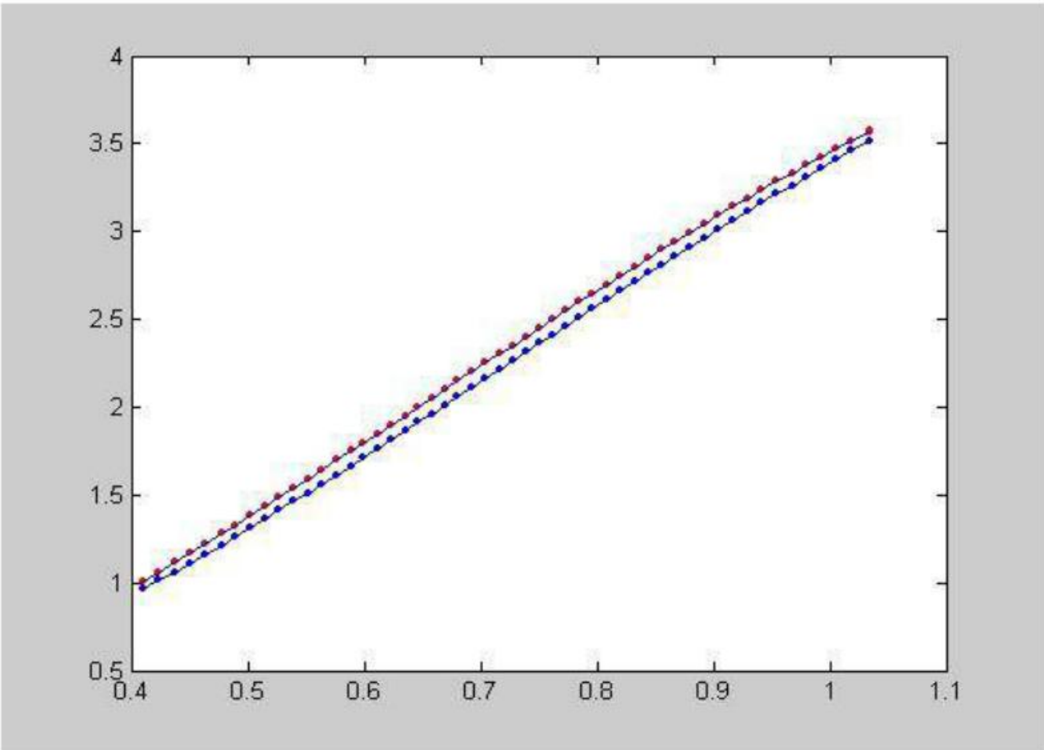


图 5-6

可同样仿真出在这种情况下，数学模型得出的值与实际测量得到值的误差曲线如下所示。

为了更好的检测所建的数学模型，可以在这种条件下，绘制$\alpha = 0^{o}$时的拟合曲线如下图所示，由下图可知它与在与在无变位模型曲线拟合的效果是非常相似的，这也可以进一步的证明所建的模型的准确性。

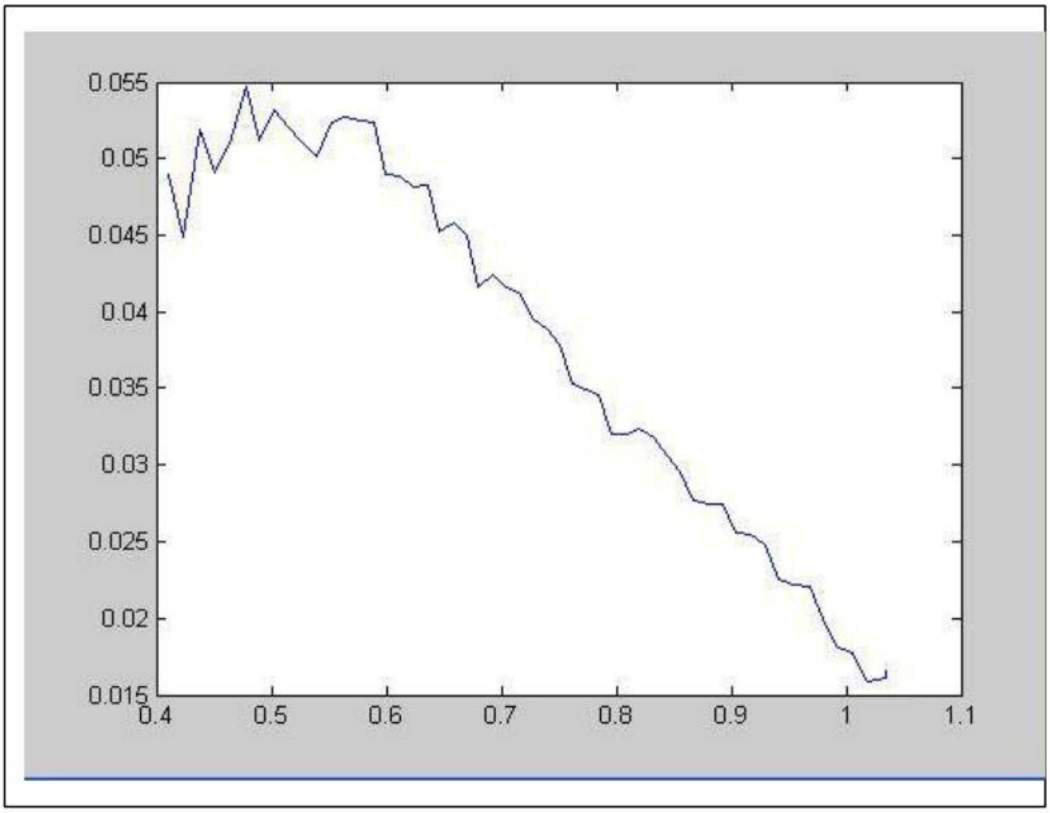


图 5-7

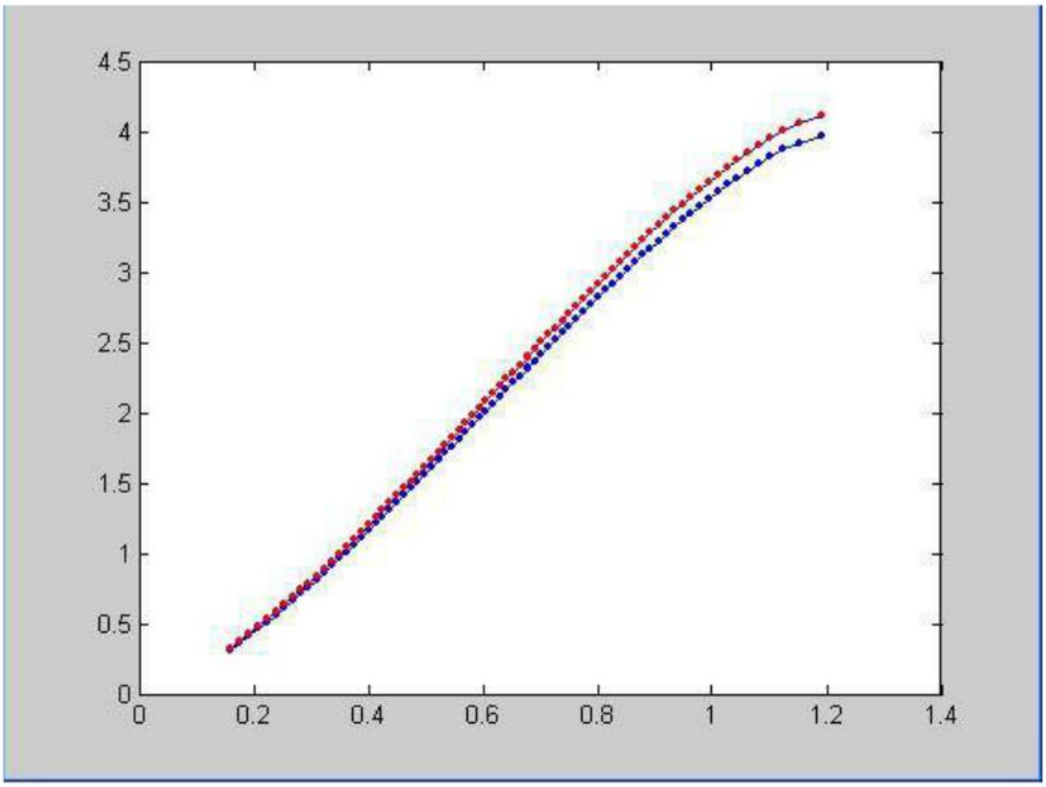


图 5-8

通过上面的仿真实验可知模型得到罐体变位后油位高度间隔每 1cm 的油位高度与储油量之间的关系，即罐容表的标定值如下所示：

表 1 图 1-4 中油罐变位后罐容表标定值表

油位高度/mm	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
储油量/L	1.7	3.5	6.3	10	14.8	20.7	27.9	36.3	46.1	57.4
油位高度/mm	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
储油量/L	70.1	84.4	100.3	117.7	136.9	157.8	180.3	204	228.9	254.9
油位高度/mm	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
储油量/L	281.9	309.8	338.5	368.1	398.5	429.7	461.5	494	527.1	560.9
油位高度/mm	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390
储油量/L	595.2	630.1	665.6	701.5	738	774.9	812.2	850	888.2	926.7
油位高度/mm	400	410	420	430	440	450	460	470	480	490

储油量/L	965.7	1005	1044.6	1084.5	1124.8	1165.3	1206.2	1247.2	1288.6	1330.1
油位高度/mm	500	510	520	530	540	550	560	570	580	590
储油量/L	1371.9	1413.9	1456	1498.4	1540.9	1583.5	1626.3	1669.2	1712.2	1755.3
油位高度/mm	600	610	620	630	640	650	660	670	680	690
储油量/L	1798.5	1841.8	1885.1	1928.5	1971.9	2015.4	2058.8	2102.3	2145.7	2189.1
油位高度/mm	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790
储油量/L	2232.5	2275.8	2319.1	2362.3	2405.4	2448.4	2491.3	2534	2576.6	2619.1
油位高度/mm	800	810	820	830	840	850	860	870	880	890
储油量/L	2661.4	2703.6	2745.5	2787.2	2828.7	2870	2911.1	2951.8	2992.3	3032.5
油位高度/mm	900	910	920	930	940	950	960	970	980	990
储油量/L	3072.4	3112	3151.2	3190.1	3228.6	3266.7	3304.4	3341.7	3378.5	3414.9
油位高度/mm	1000	1010	1020	1030	1040	1050				
储油量/L	3450.7	3486.1	3520.9	3555.1	3588.8	3621.8				

5.2 问题2 的求解

一　由题意可先分析罐内储油量和油位高度与变位参数纵向倾斜角度α的关系，如图5-9 所示，

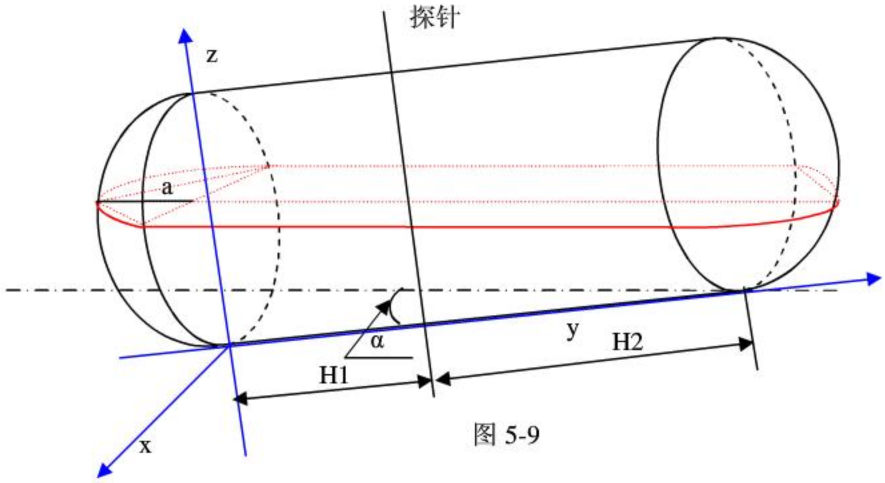


图 5-9

由题意可知分为四种情况分析：

(1) 当 $h \le H_2 \tan\alpha$ 时，油罐的储油量可分为 V_1 和 V_2 两种情况，图形如下图 5-4 所示：

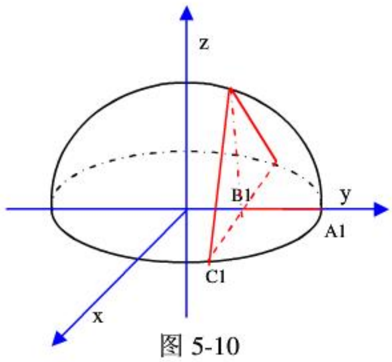


图 5-10

图中 $A_1B_1 = h_1 = h(H_1 + H_2)/H_2$

点的坐标分别为 $A_1(0,R,0), B_1(0,R-h,0), C_1(\sqrt{2Rh_1 - h_1^{\ 2}}, R-h_1, 0)$

V_1 是上图中截面的体积，其方程为： $\det\begin{pmatrix} x & y-R+h_1 & z \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$，

化简为 $(y - R + h_1)\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + z = 0$

则体积为：

$$V_1 = \iiint_v dV = \iint_D 2\sqrt{1 - \frac{y^2 + x^2}{R^2}}\, dxdy - \frac{1}{3} S_{底} \cdot \mathrm{h}_{高} \qquad \mathrm{D} = \{(\mathrm{x,y}) | \mathrm{y}_1(\mathrm{x}) \le \mathrm{y} \le \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \le \mathrm{x} \le R\text{-}\mathrm{h}_1\}$$

其中

$$y_1(x) = y_0 + (R - h - y^0)x / \sqrt{2Rh_1 - h_1^2}$$

$$S_{底}=2(R-\frac{H_1+H_2}{H_2}\cdot h-y_0)\cdot\sqrt{R^2-(R-\frac{H_1+H_2}{H_2}\cdot h)}^{2}$$

$$h_{高}=z_0$$

其中 (y_0,z_0)是$\begin{cases} z\sin\alpha+(-y+R-h_1)\cos\alpha=0 \\ z^2+y^2/R^2=1 \end{cases}$的解

另外V_0可根据问题 1 的求解模型，得出

$$V_0=V(h)=\int_0^{h\cot\alpha+H_1}dz\int_0^{h-(z-H_1)\tan\alpha}2R\sqrt{1-(\frac{x-R}{R})^2}dx$$

故

$$V(h)=\iint_D 2\sqrt{1-\frac{y^2+x^2}{R^2}}dydx-\tfrac{1}{3}z_0(R-\frac{H_1+H_2}{H_2}\cdot h-y_0)\cdot\sqrt{R^2-(R-\frac{H_1+H_2}{H_2}\cdot h)^2}$$
$$+\int_0^{h\cot\alpha+H_1}dz\int_0^{h-(z-H_1)\tan\alpha}2R\sqrt{1-(\frac{x-R}{R})^2}dx$$

其中 $D=\{(x,y)|y_1(x)\le y\le\sqrt{R^2-x^2},0\le x\le R-h_1\}$

⑵ 当$H_2\tan\alpha<h\le 2R-H_1\tan\alpha$时，图形如下图 5-5 所示，油罐的储油量可分为$V_1,V_2,V_0$，其中 V_1表示油面所截左端球冠体中油的体积，V_2表示油面所截右端球冠体中油的体积。

先考虑左端球冠体中油的体积V_1

如图

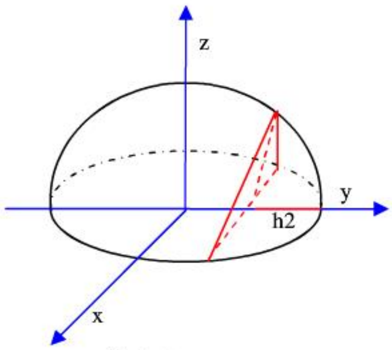


图 5-11

由上图知　$V_1=\frac{1}{2}V_{椭球体}-2V_0'$，$V_0'$表示截面右侧与椭球体所围图形的体积，

由图 5-9 可知:，$V_{椭球体}=\frac{4}{3}\pi R^2\cdot a$，　$h_2=\frac{H_1+H_2}{H_2}\cdot h$

图中的截面方程为：

$$\det\begin{pmatrix} x & y-R+h_2 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}=0$$

即：

$$z\sin\alpha+(-y-h_2+R)\cos\alpha=0$$

故

$$V_0{}'=\iint_{D_1}(y-h_2)\cot\alpha\,dxdy+\iint_{D_2}\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R^2}}dxdy$$

$$D_1:\{(x,y)\,|\,0\le x\le\sqrt{R^2-y^2},R-h_2\le y\le y_1\}$$

$$D_2:\{(x,y)\,|\,0\le x\le\sqrt{R^2-y^2},y_1\le y\le R\}$$

其中 y_1 是方程组

$$\begin{cases} z\sin\alpha+(-y-h_2+R)\cos\alpha=0 \\ z^2+y^2/R^2=1 \end{cases}$$

的解，

再考虑右端球冠体中油的体积V_2

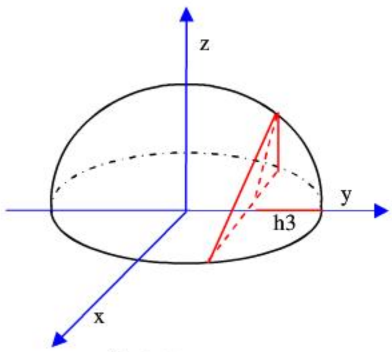


图 5-12

由图 5-9 知

$$h_3=\frac{H_2}{H_1+H_2}h$$

图 5-12 中截面表达式

$$\det\begin{pmatrix} x & y-(R-h_3) & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}=0$$

即 $$[-y+(R-h_3)]\cos\alpha+z\sin\alpha=0$$

V_2是截面右侧与椭球体所围图形的体积，

$$V_2 = 2\iint_{D_1'} (y-(R-h_3))\cot\alpha\, dxdy + 2\iint_{D_2'} \sqrt{1-(x^2+y^2)/R^2}\, dxdy$$

$$D_1' = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \sqrt{R^2-y^2}, R-h_3 \le y \le y_2\right\}$$

$$D_2' = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \sqrt{R^2-y^2}, y_2 \le y \le R\right\}$$

其中 (y_2, z_2)是方程组$\begin{cases}[-y+(R-h_3)]\cos\alpha + z\sin\alpha = 0 \\ z^2+y^2/R^2=1\end{cases}$的解

又$V_0 = \int_0^{H_1+H_2} dx \int_0^{h-(x-H_1)\tan\alpha} dy \int_{-R\sqrt{1-(\frac{y-R}{R})^2}}^{R\sqrt{1-(\frac{y-R}{R})^2}} dz$

故 V=$V_1+V_2+V_0$

$$V(h) = \tfrac{2}{3}\pi R^2 a - 2\left(\iint_{D_1} (y-h_2)\cot\alpha\, dxdy + \iint_{D_2} \sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R^2}}\, dxdy\right) + 2\iint_{D_1'} (y-(R-h_3))\cot\alpha\, dxdy$$

$$+2\iint_{D_2'} \sqrt{1-(x^2+y^2)/R^2}\, dxdy + \int_0^{H_1+H_2} dx \int_0^{h-(x-H_1)\tan\alpha} dy \int_{-R\sqrt{1-(\frac{y-R}{R})^2}}^{R\sqrt{1-(\frac{y-R}{R})^2}} dz$$

其中

$$D_1 : \{(x,y) \mid 0 \le x \le \sqrt{R^2-y^2}, R-h_2 \le y \le y_1\}$$
$$D_2 : \{(x,y) \mid 0 \le x \le \sqrt{R^2-y^2}, y_1 \le y \le R\}$$
$$D_1' : \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \sqrt{R^2-y^2}, R-h_3 \le y \le y_2\right\}$$
$$D_2' : \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \sqrt{R^2-y^2}, y_2 \le y \le R\right\}$$

(3) 当 $2R - H_1\tan\alpha < h < 2R$ 时，此时储油量 $V = V_{罐} - V_3$，

$V_{罐} = \pi R^2(H_1+H_2) + \frac{4}{3}\pi a R^2$，

V_3是情况（1）中油高为$2R-h$时的V_0，

即 $V(h) = \pi R^2(H_1+H_2) + \frac{4}{3}\pi a R^2 - V_0(2R-h)$

(4) 液面继续上升时，h 值不再改变，此时可认为桶内已装满油，即

$V = V_{罐} = \pi R^2(H_1+H_2) + \frac{4}{3}\pi a R^2$

二　接下来考虑油桶横向偏转倾斜β后罐内储油量与油位高度的关系

假设油桶横向偏转倾斜β前观测油位高度为h'，横向偏转倾斜后观测油位高度为h，由倾斜角β很小，且两端球冠体扁度较小，故横向偏转β所造成的误差很小，可近似认为液面的垂直高度不改变，

则　　$h' = (h-R)\cos\beta + R$，

罐内储油量 V 即为油桶横向偏转倾斜β前观测油位高度为 $(h-R)\cos\beta + R$ 时油的体积。

三　综合上述分析，罐内储油量 V 与油位高度 h 及变位参数（纵向倾斜角度α和横向偏转角度β ）之间关系式为

$$V = V(R + (h-R)\cos\beta)，$$

其中 V 表示分析一中液面与容积的模型。

四　　结合题意，带入所有已知数据，即

$H_1 = 2, H_2 = 6, R = 1.5, a = 1$，取附件二中一些数据，代入

$$V = V(R + (h-R)\cos\beta)，$$

V 取上述二中分析（2）的模型。

经过最小二乘拟合，得到α、β的估计值，α取$\alpha = 2.35^{\circ}$，$\beta = 4.57^{\circ}$取，此时与实际值拟合最相似。再根据$\alpha = 2.35^{\circ}$，$\beta = 4.57^{\circ}$用 MATLAB 仿真出模型曲线，与真实曲线的误差很小。

下表为用模型计算出的油罐变位后油位高度与油储量之间的关系。

表 2 图 1-2 中油罐变位后罐容表标定值表

油位高度/mm	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
油储量/l	441.2	271.4	262.3	309.8	461.8	653	876	1146.6	1369.2	1638.2
油位高度/mm	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
油储量/l	1922	2213.9	2301.9	2645.1	2890.2	3081.9	3677.4	3875.7	4258.6	4337.5
油位高度/mm	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900

油储量/l	4536.4	4678.7	4917.8	5362.5	5628.2	5856.8	6047.4	6341.8	6380.5	6333.9
油位高度/mm	3000									
油储量/l	6449.9									

六 模型的结果分析

1、模型一的结果分析

对于积分求得数学模型求的罐内储油量与油高度的关系，通过观察分析数学模型得出的值与实际测量得到值的误差曲线，无变位的情况下误差在 3.4%左右，在拟合效果上满足要求。在发生纵向偏转的情况下，起始误差较大，后降为 2%一下为了更好的检测所建的可以在这种条件下，绘制$\alpha=0$时的拟合曲线，可知它与在与在无变位模型曲线拟合的效果是非常相似的，这也可以进一步的证明所建的模型的准确性。

2、模型二的结果分析

误差可由多种因素形成，如测量油罐外径时，油罐桶壁厚度未考虑，直接当做内径考虑，且测量过程中温度变化会影响测量结果。由ＭＡＴＬＡＢ的数据拟合，得出$\alpha=2.35^{\circ}$，$\beta=4.57^{\circ}$，并通过实际数据的仿真，验证出误差在可控范围内，根据误差存在的客观性，确定模型在α,β 较小范围内是合理的。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系 ，《数学分析》，上海：高等教育出版社，2008.4

[2] 薛定宇、陈阳泉，《高等应用数学问题的 MATLAB 求解》（第二版），北京：清华大学出版社，2008.10

[3] 王金涛、刘子勇、张珑等，大型油罐容量计量中 3D 空间与比对试验分析[J]，2010(31):421-425

[4] 战景林、王春平、王喜忠，倾斜椭平顶卧式罐容积的计算[J]，中国计量，2006(4):73-74

[5] 林明富，卧式容器及球罐体积标定计算[J]，石油化工设备，2005(3):34-36

[6] 陈　伟，卧式金属罐容积检定装置的测量不确定度[J]，计量与测试技术，2006(12):61-63

附录：

1．1 存放 x 的测量值

```
function x=get_x()
x=[159.02
176.14
192.59
208.50
223.93
238.97
253.66
268.04
282.16
296.03
309.69
323.15
336.44
349.57
362.56
375.42
388.16
400.79
413.32
425.76
438.12
450.40
462.62
474.78
486.89
498.95
510.97
522.95
534.90
546.82
558.72
570.61
582.48
594.35
606.22
618.09
629.96
641.85
653.75
665.67
```

```
677.63
678.54
690.53
690.82
702.85
714.91
727.03
739.19
751.42
763.70
764.16
776.53
788.99
801.54
814.19
826.95
839.83
852.84
866.00
879.32
892.82
892.84
906.53
920.45
934.61
949.05
963.80
978.91
994.43
1010.43
1026.99
1044.25
1062.37
1081.59
1102.33
1125.32
1152.36
1193.49]';
```

1．2 存放 y 点的测量值

```
function y=get_y()
y=[
312
362
```

412
462
512
562
612
662
712
762
812
862
912
962
1012
1062
1112
1162
1212
1262
1312
1362
1412
1462
1512
1562
1612
1662
1712
1762
1812
1862
1912
1962
2012
2062
2112
2162
2212
2262
2312
2315.83
2365.83
2367.06
2417.06
2467.06

```
2517.06
2567.06
2617.06
2666.98
2668.83
2718.83
2768.83
2818.83
2868.83
2918.83
2968.83
3018.83
3068.83
3118.83
3168.83
3168.91
3218.91
3268.91
3318.91
3368.91
3418.91
3468.91
3518.91
3568.91
3618.91
3668.91
3718.91
3768.91
3818.91
3868.91
3918.91
3968.91]';
```

1.3 绘图5-3

```
x0=get_x;
y0=get_y;
x0=x0/1000;
a=0.89;
b=0.6;
y1=((a/b)*((x0-b).*sqrt(2*b*x0-x0.*x0)+b^2*asin((x0-b)/b)+1/2*pi*b^2))*2.45*1000;
plot(x0,y0,x0,y0,'.');
hold on
plot(x0,y1,'r',x0,y1,'.');
```

1.4 绘出计算得出数据与实际数据的拟合图，如图5-6

```
a=0.89;
b=0.60;
theta=(4.1/180)*pi;
x0=get_x2;
y0=get_y2;
x0=x0/1000;
y0=y0/1000;
syms x y z h;
z1=-a*sqrt(1-((z-b)/b)^2);
z2=a*sqrt(1-((z-b)/b)^2);
y1=int(int(int(1,y,z1,z2),z,0,h+(0.4-x)*tan(theta)),x,0,2.45);
h=x0;
y1=-267/51651525650828710000.*(-411080515727443026281968197598547425-207691874341
3931051412198531688038400.*h.^2+31026915774497912817919979022398259 20.*h).^(1/2)+1
3083/20000.*pi+89/38619367830047372976433151994237428253952855548887040000.*(-4110
8051572744302628196819759854742 5-20769187434139310514121985316880384 00.*h.^2+310
269157744979128179199790223982592 0.*h).^(3/2)-4809844402031689728/6456440706353588
75.*asin(5/3.*h-1076462383623532943/864691128455135232).*h+28741545642748329578 1/51
651525650828710000.*asin(5/3.*h-1076462383623532943/864691128455135232)+267/6456440
706353588750.*(-324518553658426726783156020576256 00.*h.^2+37081284105617688860023
357639229440.*h+108988659901552885043178380035012 7).^(1/2)-89/7542845279306127534 4
595999988744977058501670993920000.*(-324518553658426726783156020576256 00.*h.^2+37
08128410561768886002335763922944 0.*h+108988659901552885043178380035012 7).^(3/2)+4
809844402031689728/645644070635358875.*asin(5/3.*h-102921238491809033/108086391056
891904).*h-2747997067731301181 1/6456440706353588750.*asin(5/3.*h-102921238491809033/
108086391056891904);
plot(x0,y0,'.b');
hold on;
plot(x0,y0);
plot(x0,y1,'.r',x0,y1);
```

1．5 如图5-7

```
a=0.89;
b=0.60;
theta=(4.1/180)*pi;
x0=get_x2;
y0=get_y2;
x0=x0/1000;
y0=y0/1000;
syms x y z h;
z1=-a*sqrt(1-((z-b)/b)^2);
z2=a*sqrt(1-((z-b)/b)^2);
y1=int(int(int(1,y,z1,z2),z,0,h+(0.4-x)*tan(theta)),x,0,2.45);
```

```
>> h=x0;
y1=-267/516515256508287100000.*(-4110805157274430262819681975985474 25-207691874341
393105141219853168803840 0.*h.^2+310269157744979128179199790223982592 0.*h).^(1/2)+1
3083/20000.*pi+89/386193678300473729764331519942374282539528555488870400 00.*(-4110
805157274430262819681975985474 25-2076918743413931051412198531688038400.*h.^2+310
269157744979128179199790223982592 0.*h).^(3/2)-4809844402031689728/6456440706353588
75.*asin(5/3.*h-1076462383623532943/864691128455135232).*h+28741545642748329578 1/51
6515256508287100000.*asin(5/3.*h-1076462383623532943/864691128455135232)+267/6456440
706353588750.*(-3245185536584267267831560205762560 0.*h.^2+3708128410561768886002 3
357639229440.*h+1089886599015528850431783800350127).^(1/2)-89/754284527930612753 44
5959999887449770585016709939200 00.*(-3245185536584267267831560205762560 0.*h.^2+37
0812841056176888600233576392294 40.*h+1089886599015528850431783800350127).^(3/2)+4
809844402031689728/645644070635358875.*asin(5/3.*h-102921238491809033/108086391056
891904).*h-2747997067731301181 1/6456440706353588750.*asin(5/3.*h-102921238491809033/
108086391056891904);
y2=abs(y1-y0);
for i=1:length(y2)
y3(i)=y2(i)/y0(i);
end
>> plot(x0,y3);
```

1．6　当 a=0 时与真实值差异，如图 5-8

```
a=0.89;
b=0.60;
theta=0;
x0=get_x;
y0=get_y;
x0=x0/1000;
y0=y0/1000;
syms x y z h;
z1=-a*sqrt(1-((z-b)/b)^2);
z2=a*sqrt(1-((z-b)/b)^2);
y1=int(int(int(1,y,z1,z2),z,0,h+(0.4-x)*tan(theta)),x,0,2.45);
h=x0;
y1=4361/6000.*(-25.*h.^2+30.*h).^(1/2).*h-4361/10000.*(-25.*h.^2+30.*h).^(1/2)+13083/10000
.*asin(5/3.*h-1)+13083/20000.*pi;
y2=y(1)-y(0);
plot(x0,y2);
```

1．7 求解间隔 1cm 的的代码情况

```
theta=(4.1/180)*pi;
syms h;
syms x y z;
```

```
a=0.89;
b=0.6;
z1=-a*sqrt(1-((y-b)/b)^2);
z2=a*sqrt(1-((y-b)/b)^2);
h=0:0.01:0.14;
Y=-2747997067731301181 1/1291288141270717750 0.*pi+240492220101584486 4/64564407063
5358875.*pi.*h+267/6456440706353588750.*(-32451855365842672678315602057625600.*h.^2
+37081284105617688860023357639229440.*h+108988659901552885043178380035012 7).^(1/2
)-89/754284527930612753445959999887449770585016709939200 00.*(-324518553658426726 7
8315602057625600.*h.^2+37081284105617688860023357639229440.*h+10898865990155288 5
0431783800350127).^(3/2)+4809844402031689728/645644070635358875.*asin(5/3.*h-1029212
38491809033/108086391056891904).*h-27479970677313011811/6456440706353588750.*asin(
5/3.*h-102921238491809033/108086391056891904);
theta=0.4*tan((4.1/180)*pi);
h=0.15:0.01:1.05;
y=-267/5165152565082871000 0.*(-41108051572744302628196819759854742 5-2076918743413
931051412198531688038400.*h.^2+3102691577449791281791997902239825920.*h).^(1/2)+13
083/20000.*pi+89/3861936783004737297643315199423742825395285554888704000 0.*(-41108
0515727443026281968197598547425-2076918743413931051412198531688038400.*h.^2+3102
691577449791281791997902239825920.*h).^(3/2)-4809844402031689728/64564407063535887
5.*asin(5/3.*h-107646238362353294 3/864691128455135232).*h+28741545642748329578 1/516
51525650828710000.*asin(5/3.*h-1076462383623532943/864691128455135232)+267/64564407
06353588750.*(-32451855365842672678315602057625600.*h.^2+370812841056176888600233
57639229440.*h+108988659901552885043178380035012 7).^(1/2)-89/754284527930612753445
959999887449770585016709939200 00.*(-32451855365842672678315602057625600.*h.^2+370
81284105617688860023357639229440.*h+1089886599015528850431783800350127).^(3/2)+48
09844402031689728/645644070635358875.*asin(5/3.*h-102921238491809033/1080863910568
91904).*h-27479970677313011811/6456440706353588750.*asin(5/3.*h-102921238491809033/1
08086391056891904);
```