灾情巡视路线的设计

韦芳芳　杨兰兰　柏　瑞
指导教师：　杨廉峰
(东南大学，南京 210018)

编者按　本文不仅提出了若干种确定初始巡视路线的方法，而且对路线的调整给出了一些准则和启发式算法，简捷、有效地解决了各个问题. 行文简明、通畅.

摘　要　本文建模的主要思想是将巡视路线的设计分为两个部分：首先生成一个可行的巡视路线，然后利用启发式算法对巡视路线进行调整优先. 对可行路线的生成给出了三种方法， 1. 采用直观判断，较为简单.　2. 借鉴了求 Hamilton 圈的方法， 3. 基于最小生成树，求出的路线总路程较短，为 553.6 公理. 本文采用方法 3 得出的路线作为启发式算法的初始路线.

本文提出了一系列启发式算法并采用一定的调整规则对初始路线进行了调整，较好地解决了所提出的问题. 对于问题 1，给出了均衡度的概念来衡量各组路线的均衡性. 解为总路程 587.2 公理，均衡度 0.16；对于问题 2，采用点调整的规则求出用 4 组完成巡视所需的最短的时间 22.62 小时. 对于问题 3，采用一种最短路线调整法求出在最短的时间 6.43 小时内，用 22 组就可以完成巡视.

问题重述与模型假设 (略)

问题分析

问题要求对巡视的路线进行设计，同时必须考虑的因素包括总路程最短、组数的选择和各组巡视路线尽量均衡的条件下完成一次巡视需要的最短时间. 按如下几点进行分析：

1 、关于总路程和组数的关系，我们引入定理一：当有 i 个组同时进行巡视时，必然存在一总路程最短的路线，记这时的总路程为 d，则对于 j 组的巡视若 $i \geq j$，有 $d_j \geq d_j$. (附录一)

2 、为了对各组之间的均衡度进行量化，引入距离均衡度的概念. 距离均衡即要求各组巡视所经过的路程 a_i 尽量接近，由此定义均衡度来衡量这种接近程度，距离均衡度 $B = \frac{\max\{a_i\} - \max\{a_i\}}{a/n}$，在同等条件下， B 越大，各组越不均衡.

3 、由 1 可知，要求总路程最短，在极限情况下为只有一组进行巡视，由定理 1 此时巡视总路程最短，但由于只有一组同时巡视时消耗时间较多，只有在人员较缺乏的情况下，采用一组巡视. 在多组同时巡视时要求尽量均衡的情况下 (问题一)、本文定义只有满足均衡度 $B < 0.2$ 的路线为可行路线.

4 、当 $n = 1$ 时，该问题可以转化为 "货郎担" 问题，而 "货郎担" 问题为 NPC 问题，因此无法给出最优解，只能给出一种启发式算法，得到一个较优解.

本文建立的模型就是基于这种考虑首先给出一些初始路线，然后提出了一些启发式算法，按照一定的规则对初始路线进行优化.

模型准备

1.　问题 2 要求给出满足一定要求的最小分组数，因此必须知道总路程的一个下界. 根据定理

一，显然一组巡视时的最优路线是总路程的一个较好的下界．但由于一组巡视时的最优路线与"货郎担"问题是等价的，因而是不可解的．所以我们要用别的方法求出总路程的一个下界．

注意到巡视路线必须走遍所有的乡、村，因此总路程必然大于公路图的最小生成树的权和．因此，我们可以将该图的最小生成树的路程之和作为总路程的下界．本文用 Prim 算法求出了公路图的最小生成树，并求出最小生成树的总路程为 422.7 公里．

2 问题 3 要求给出完成巡视的最短时间，由于巡视人员足够多，显然这与距离 O 点（乡镇府）最远的乡、村有关．另外，在从一个村巡视完后到另一个村巡视时为了节约时间，要求按照最短路径行进．本文用 Floyed 算法求出了任意两点之间的最短路径，附录二（略）给出了所有点与 O 点之间的最短路径．

模型建立与求解

由问题分析可知，本文对该问题的求解分为两个步骤，即初始值的确定和利用启发式算法的求解．下面我们根据这种思路建立模型如下：

一、初始值的确定

对问题一，在极限情况下，由问题分析 3 可知，可以认为仅仅一组巡视，而另外两组不动，这时总路程最短，但这样均衡性极差．为转化问题，我们加入两个虚拟点代表县城，则求三组的问题可以转化为对 55 个点求一组的路线问题．对一组的路线的求解可化为"货郎担"问题，可通过经典的求"货郎担"问题的"近似"算法进行求解．但通过计算机的求解发现这三个县城点在整个路线中相邻很近，很难给出规则保证三个点在整个路线中的均衡性．因此考虑将该图分为三个区域，分别对每个区域进行求解，则问题的关键就转化为如何对图进行区域划分．

方法一：直接判断法

对给出的图可以直观地进行分块，手工给出其初始解．很显然，由于县城位置偏向一边，则若分为三组，县城远离的一边分为两块的可能性比临近县城的一边大得多．这样可以得到手工给出的分为三组巡视的路线 1 如下：

I: $O \to 1 \to B \to A \to 34 \to 35 \to 33 \to 31 \to 32 \to 30 \to Q \to 28 \to 27 \to 26 \to P \to 29 \to R \to O$;

II: $O \to M \to N \to 24 \to 23 \to 22 \to 17 \to 16 \to I \to 15 \to I \to 18 \to K \to 21 \to 20 \to 25 \to M \to O$;

III: $O \to 2 \to 5 \to 6 \to 7 \to L \to 19 \to J \to 11 \to G \to 13 \to 14 \to H \to 12 \to F \to 10 \to F \to E \to 8 \to 4 \to D \to 3 \to C \to O$.

各组所走的路程分别为（单位：公里）：　I: 168　II: 176.7　III: 237.5.

各组所走路程总和为（单位：公里）：582.2．可以求出其均衡度为 0.34.

方法二：逐步加入法

该方法的思想为：任取最外围一点，以逆时针为搜索方向，假定搜索尽量走方向变化最小的路线即先加入本区域最外围的点，然后在内部逐步加入新的点．

最后得到本区域的所有点．该方法首先必须确定巡视要分为几组，并且规定各组必须经过县城即 O 点，然后用上述方法确定各区域的范围．以这种方法可以进行调整得到一总路程较短的初始化路线 2 如下：

I: $O \to C \to B \to 34 \to 35 \to 32 \to 30 \to Q \to 29 \to R \to 31 \to 33 \to A \to 1 \to O$;

II: $O \to P \to 28 \to 27 \to 26 \to N \to 24 \to 23 \to 22 \to 17 \to 16 \to I \to 15 \to I \to 18 \to K \to 21 \to 20 \to M \to O$;

III: $O \to 2 \to 3 \to D \to 4 \to 8 \to E \to 9 \to F \to 10 \to F \to 12 \to H \to 14 \to 13 \to G \to 11 \to J \to 19 \to L \to 7 \to 6 \to 5 \to 2 \to O$.

各组所走的路程分别为（单位：公里）　I: 136.5　II: 191.1　III: 232.1.

各组所走路程总和为（单位：公里）559.7．可以求出其均衡度为：0.54.

方法三：基于最小生成树的深度优先搜索法

(1) 根据逐步加入法所得的结果 559.7、将它分为 d_1, d_2, d_3 满足 $d_1 < d_2 < d_3$，且 $d_1 + d_2 + d_3 = 559.7$，d_1, d_2, d_3 分别表示每组所走路程的上限，令 d_1, d_2, d_3 为初值，再设 S_1, S_2, S_3 为实际每组的路程.

(2) 选择最小生成树中任一点为起点，将该点与 O 点的最短路程赋值给 S_1 进行深度优先搜索，$S := S_1 +$ (树上连续搜索两点之间的最短距离)、若 $S_1 +$ (正在搜索点到 O 点的最短距离)$> d_1$，则停止搜索.

(3) 在以上所找点中找到一条与 O 相连且距离在 d_1 限制范围内的一条至少过顶点一次的回路.

(4) 找到这条回路中所包括点 (除 O 点外) 中最后搜索的点，将此点作为寻找回路 2 的起点.

(5) 将 d_1 改为 d_2 和 d_3 重复 (2) ~ (4).

(6) 找出 3 条回路后，如已比 559.7 小或 d_1, d_2, d_3 不满足限制条件则退出，否则以步长 5 改变 d_1, d_2, d_3 重复以上步骤.

根据这种方法可得到以下的路线 3:

I: $O \to P \to 28 \to 27 \to 26 \to N \to 24 \to 23 \to 21 \to K \to 22 \to 17 \to 16 \to I \to 15 \to I \to 18 \to J \to 19 \to L \to 20 \to 25 \to M \to O$;

II: $O \to 1 \to B \to A \to 34 \to 35 \to 33 \to 31 \to 32 \to 30 \to Q \to 29 \to R \to O$;

III: $O \to 2 \to 5 \to 6 \to 7 \to E \to 11 \to G \to 13 \to 14 \to H \to 12 \to F \to 10 \to F \to 9 \to E \to 8 \to 4 \to D \to 3 \to C \to O$'

各组所走的路程分别为 (单位：公里)： I: 212.2 II: 125.5 III: 215.9.

各组所走路程总和为 (单位：公里)：553.6. 可以求出其均衡度为： 0.49.

二、启发式算法

以上求出的初始路线都是没有考虑均衡情况下的解，均衡度不满足我们定义的要求，因而可以采用一些启发式算法对初始路线进行调整，从而减小均衡度即提高各组巡视路程的均衡程度以获得满足要求的较佳路线. 本文采用如下调整规则对初始路线进行调整:

规则一、边界调整法

边界调整主要目标就是在边界对各区域进行调整，以提高各组的均衡程度.

比较上述几种方法生成的初始路线，这里主要对方法三的初始路线进行调整.

假设三区域 I 、 II 和 III 各自路程满足 $a_1 < a_2 < a_3$，我们对调整规定如下准则:

(1) 为增强相邻区域的可调整性，规定首先对相邻边界点较多的两区域进行调整.

(2) 优先对 a_i 最小的区域 I 和 a_i 最大的区域 III 之间进行调整，若区域之间的相邻点相对较少，则通过第三个区域 II 进行 I 、 II 和 II 、 III 之间的调整进行.

(3) 规定调整结束的标志为满足均衡度要求，即

$$\max\{a_i\} - \min\{a_i\} < \frac{0.2 \times a}{n},$$

则距离均衡度 $B < 0.2$ 满足要求.

根据以上准则，其调整步骤如下:

(1) 计算当前方案的均衡度，如果满足准则 (3)、退出；否则，转 (2).

(2) 选择路程相差较大的两块区域，通过规则 (2) 进行调整，调整后转 (3).

(3) 若调整超过一定的次数，退出；否则，返回步骤 (1).

根据以上算法对方法三的初始路线 3 进行调整后得到的优化路线 4 如下:

I: $OC \to B \to 34 \to 35 \to 32 \to 30 \to Q \to 28 \to 27 \to 26 \to P \to 29 \to R \to 31 \to 33 \to A \to 1 \to O$;

II: $O \to M \to N \to 24 \to 23 \to 21 \to K \to 22 \to 17 \to 16 \to I \to 15 \to I \to 18 \to J \to 19 \to L \to 20 \to 25 \to M \to O$;

III: $O \to 2 \to 5 \to 6 \to 7 \to E \to 11 \to G \to 13 \to 14 \to H \to 12 \to F \to 10 \to F \to 9 \to E \to 8 \to 4 \to D \to 3 \to 2 \to O$.

各组所走的路程分别为 (单位：公里)： I: 179　II: 197.7　III: 210.5. 总和为： 587.2.

可以求出其均衡度为 0.16, 满足要求，则用本方法所调整的路线即为问题一的解.

规则二、转移点调整法

本方法主要用来对问题二进行求解. 首先我们证明分三组不可能在 24 小时内完成巡视 (略).

由于分三组不可能在 24 小时内完成巡视，接着我们试图寻找分四组完成巡视的路线. 为使总耗时最短，我们要尽量使各组停留时间均衡，各组行驶路程也尽量均衡，则采用同于问题一的解法，可以得到一个分为四组的路线 5 如下：

I: $O \to 1 \to B \to 34 \to 35 \to 32 \to 30 \to Q \to 28 \to Q \to 29 \to R \to 31 \to 33 \to A \to 1 \to O$;

II: $O \to P \to 26 \to 27 \to 24 \to N \to 23 \to 22 \to 17 \to 16 \to 17 \to K \to 21 \to 25 \to M \to O$;

III: $O \to 2 \to 5 \to 6 \to L \to 20 \to 19 \to J \to 18 \to I \to 15 \to 14 \to H \to 14 \to 13 \to J \to 19 \to L \to 6 \to 5 \to 2 \to O$;

IV: $O \to C \to 3 \to D \to 4 \to 8 \to E \to 9 \to F \to 10 \to F \to 12 \to G \to 11 \to E \to 7 \to D \to 3 \to 2 \to O$.

各组所走的路程分别为 (单位：公里)：　I: 142.5　II: 152.1　III: 194.6　IV: 189.2.

各组所需的时间分别为 (单位：小时)：　I: 21.07　II: 21.34　III: 22.56　IV: 23.40.

各组所走路程总和为 (单位：公里)：678.4　总共所需的时间为 (单位：小时)：23.40. 可以求出其均衡度为 0.3.

若要求完成巡视所需时间尽量短，则要对上面所求出的路线 5 进行调整. 分析路线 5 的数据可知，各组的时间相差很近. 所以不能较大幅度地对路线 5 进行调整，而采用转移点的规则，即通过 II 和 III 来降低初始路线中时间较长的组的时间、加长初始路线中时间较短的组的时间，每组的点数变化不超过 1. 假设四个区域 I 、 II 、 III 和 IV 满足 $T_4 > T_2(T_3) > T_1$, T_i 为调整后的时间，则一次调整的规则如下：

本次调整的状态变化为： I 中增加来自 II 、 III 或 IV 中的一点， IV 中减少一点至 I 、 II 或 III, II 和 III 中只增加或减少一点.

规定达到调整精度要求时 $\max\{T_i\} - \min\{T_i\} < 2$.

(1)　如满足 $T_1 < T_4$ 转 (2), 否则转 (3).

(2)　若满足 $T_{2(3)}$ 则转 (4), 否则转 (3).

(3)　返回本次调整前的状态，若调整次数大于规定次数或达到精度要求，退出，否则转 (1).

(4)　若调整次数大于规定次数或达到精度要求，退出，否则转 (1).

采用上述方法，对路线 5 进行调整 1 次就可以满足调整的要求，得到一优化路线 6 如下：

I: $O \to 1 \to B \to 34 \to 35 \to 32 \to 30 \to Q \to 28 \to 27 \to 28 \to Q \to 29 \to R \to 31 \to 33 \to A \to 1 \to O$;

II: $O \to P \to 26 \to N \to 24 \to 23 \to 22 \to 17 \to 16 \to 17 \to K \to 21 \to 20 \to 25 \to M \to O$;

III: $O \to 2 \to 5 \to 6 \to L \to 19 \to J \to 18 \to I \to 15 \to 14 \to H \to 14 \to 13 \to J \to 19 \to L \to 6 \to 5 \to 2 \to 3 \to 2 \to O$;

IV: $O \to C \to 3 \to D \to 4 \to 8 \to E \to 9 \to F \to 10 \to F \to 12 \to G \to 11 \to E \to 7 \to D \to 3 \to 2 \to O$.

各组所走的路程分别为 (单位：公里)：　I: 158.3　II: 143.6　III: 196.6　IV: 189.2.

各组所需的时间分别为 (单位：小时)：　I: 22.52　II: 21.10　III: 22.62　IV: 22.40.

各组所走路程总和为 (单位：公里) 687.7. 总共所需的时间为 (单位：小时) 22.62. 可以求出其均衡度为 0.31.

则问题二的解为：至少分四组在 24 小时内可以完成巡视．若要求路程较短，巡视路线为路线 5；若灾情较为严重，要求时间较短，则巡视路线为路线 6．

规则三、最短路调整法

该方法利用求出的最短路进行求解，较好地解决了问题三．根据附录二的到 O 点的各点的最短路，可以得出一个最短路的排序，设为 $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$，该方法的思想是首先确定最长的一个最短路 d_k 所需的时间即所求的最短时间，然后以此为上限，逐次考虑 $d_{k-1}, d_{k-2}, \cdots$．在每一最短路中尽量在时间限制范围内多巡视几点．由附录二可知最长的最短路路程为 77.5 公里，计算出最短时间为 6.43 小时，则具体求解方法如下：

方法一 按上述从大到小的顺序考虑每个尚未巡视过的节点，若当前考虑的点为 i，则当巡视完点 i 后，沿最短路径原路返回 O 点．若时间允许，则可顺便巡视该路径上的点．优先考虑巡视最短路径上的乡及最短路径上的距 O 点较远的点．在该路上可以在最短时间限制内尽量多巡视一些地方，则对于问题 3．在 6.43 小时之内，需要 24 组完成巡视，各组的巡视路线见附录三 (1)(略)．

方法一在处理离 O 点较近的点时，在上述规则下容易产生浪费，则考虑对方法一进行改进．

方法二 仍然按最短路的排序进行考虑，不断加入新的点．但巡视某一点 i 后，如果时间充裕，并不按 i 点到 O 点的最短路径返回，而是先到 j 点巡视，然后再返回 O 点．定义 $dis(i,j)$ 为 i 点和 j 点之间的距离，则对于下一节点 j 应满足：

(1) $dis(i,j)$ 应尽量小；　(2) $dis(O,j)$ 应尽量大；　(3) j 点尚未巡视过；　(4) j 点返回 O 点总共所花的时间 < 6.43 时．

为了满足条件 (1) 及 (2)，我们选择 $dis(O,j) - dis(i,j)$ 最大的点作为 j 点．

由此规则对问题 3 进行求解，可得到在 6.43 小时之内需要 22 组完成巡视．各组的巡视路线见附录三 (2)(略)．

对于问题 3，完成巡视的最短时间为 6.43 小时；在最短时间限制下，可以考虑以最少的巡视组数 (人员数) 来确定方案的优劣，因而我们给出问题 3 的解为在最短时间 6.43 小时内用 22 组巡视人员来完成巡视，其巡视路线见附录三 (2)(表)．

模型分析

在问题 4 中，我们定义每组的巡视时间 $t_i (i = 1, 2, 3)$，则表达式如下

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{d_1}{v} + x_1 \cdot T + y_1 \cdot t \\ t_2 = \dfrac{d_2}{v} + x_2 \cdot T + y_2 \cdot t \\ t_3 = \dfrac{d_3}{v} + x_3 \cdot T + y_3 \cdot t \end{cases}$$

其中 x_i, y_i 分别为第 i 组巡视的乡数和村数．$t_{\max} = \max[t_1, t_2, t_3]$ 即为整体所花的时间，$t_{\min} = \min[t_1, t_2, t_3]$．

为了满足尽块完成任务，则 $t_{c\max}$ 应尽量少，也即 t_1, t_2, t_3 应越均衡，这样总体耗时减少．

我们定义 $\alpha = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{\sum t_i / 3}$．$\alpha$ 称为相对时间均衡度，当我们取不同的 α 值，T, t, V 改变对最佳巡视路线的影响结果是不同的．以路线 4 为例分析如下，路线 4：

$$\begin{aligned} &d_1 = 179, &&x_1 = 6, &&y_1 = 11, \\ &d_2 = 197.7, &&x_2 = 6, &&y_2 = 11, \\ &d_3 = 210.5, &&x_3 = 5, &&y_3 = 13. \end{aligned}$$

当取 $T=2, t=1, V=35$ 时

$$\begin{cases} t_1 = 28.11, \\ t_2 = 28.64, \\ t_3 = 29.01, \end{cases} \qquad \alpha_1 = \frac{29.01 - 28.11}{\dfrac{29.01 + 28.64 + 28.11}{3}} = 0.03$$

假设参数 T, t, V 改变时，最佳巡视路线不变，考察 α 是否满足一定的均衡度，如果不满足均衡度，则假设不成立，最佳巡视路线需要改变.

当取 $T=0, t=0, V=35$ 时

$$\begin{cases} t_1 = 5.1, \\ d_2 = 5.65, \\ t_3 = 6.00, \end{cases} \qquad \alpha_1 = \frac{6.0 - 5.11}{\dfrac{6.0 + 5.1 + 5.65}{3}} = 0.16.$$

若取 $\alpha < 20\%$, 则以上两种 T, t 和 V 条件下，路线 4 都可以作为最佳路线；若取 $\alpha < 15\%$, 在参数为 $T=2, t=1, V=35$ 时的路线不能作为参数改变为 $T=0, t=0, V=35$ 时的最佳路线，所以 $T=0, t=0, V=35$ 条件下的最佳路线发生了改变.

从以上分析可得，T, t 和 V 的改变对最佳路线的影响不但与 T, t 和 V 改变方式有关，而与最佳路线均衡度的精度要求有关，所以我们不能笼统地认为 T, t 和 V 的改变对最佳路线有影响，但我们可以进行局部分析.

(1) 若要使 T_j, t_j, V_j 最佳路线在一定均衡度条件下是稳定的，即从 T_j, t_j, V_j 变到 T_k, t_k, V_k 后最佳路线不变，T_k, t_k, V_k 应满足何条件？则对于一条具体的对应 T_j, t_j, V_j 最佳路线，我们可确定 $x_i, y_i, d_i (i=1,2,3)$ 及均衡度，保持最佳路线不变，即 $x_i, y_i, d_i (i=1,2,3)$ 不变，对于 T_k, t_k, V_k，计算 α，则 $\alpha = f(T_k, t_k, V_k)$，若满足均衡度要求 α，即 $f(T_k, t_k, V_k) < \alpha$ 时则认为在参数变为 T_k, t_k, V_k 时，最佳线路不变.

(2) 若 $T=0, t=0$, 则从 (*) 可以很简单地得到 V 的任意变化都不改变最佳路线.

(3) 要求出 T, t, V 的任意变化对最佳巡视路线的影响，可以进行大量的 T, t, V 下的最佳路线的模拟，再通过分析得到对最佳路线的影响.

以分析即为对问题 4 的讨论.

模型评价及改进

本文所建模型的主要思想是将巡视路线的设计分为两个部分：首先生成一个可行的巡视路线，然后利用启发式算法对巡视路线进行优化. 在初始值的生成中本文给出了三种方法，方法一直观地进行了判断，较为简单；方法二借鉴了求 Hamilton 圈的方法；方法三则基于最小生成树，求出的路线总路程较短，方法较为有效，本文就采用该方法求得的路线作为后面启发式算法的初始路线.

基于生成的初始巡视路线，本文提出了一系列启发式算法并采用一定的调整规则对初始路线进行了调整，较好地解决了所提出的问题. 由于问题考虑的因素太多，因此针对不同的要求就要给出不同的调整规则，采用不同的启发式算法.

规则一、二和三就是分别针对问题 1 、 2 和 3 而提出的，在问题 1 、 2 和 3 中的组数、 T 、 t 、 V 等条件发生变化时，对问题仍然适用. 模型的分析则分析了 T, t 和 V 的变化对最佳路线的影响.

以上模型均建立在将区域分为几个区域的基础之上，而本文在模型建立中提出了一种添加虚拟点来将求多组路线问题转化为一组路线的问题的思想，如果能够找出一种准则，使三个代表县城点之间的距离尽量大，则在最好的情况下，将使两个县城点均分整个一条路线，从而求出最均衡的三条路线；并且在满足均衡度的条件下可以降低均衡来求出较短路程的路线. 这种改进将简化问题的求解，并可以得到较好的解.

附录一

定理一 当有 i 个组同时进行巡视时，必然存在一总路程最短的路线，记这时的总路程为 d，则对于 j 组的巡视若 $i \geq j$，有 $d_i \geq d_j$. 证明 (略).

附录二(略)

附录三

说明 巡视路线中经过乡 (镇) 时，时间增加 2 小时；经过村庄时，时间增加 1 小时. 由于行驶的速度为 35 公里 / 小时，则在经过乡 (镇) 巡视可以等效于在路程中增加 70 公里，同理经过村庄巡视则增加 35 公里. 下面的巡视路线中折算的路程即基于此思想.

(1) 在最短时间内用 24 组人员巡视的路线 (略).

(2) 在最短时间内用 22 组人员巡视的路线.

组号称	巡视点	巡视路线	路程 (公里)
1	H	$O \to H \to O$	225
2	14, 13	$O \to 14 \to 13 \to O$	215.4
3	15, 16	$O \to 15 \to 16 \to O$	220.8
4	12, 11	$O \to 12 \to 11 \to O$	207.8
51	0, 8	$O \to 10 \to 8 \to O$	217.8
6	G	$O \to G \to O$	195.4
7	I	$O \to I \to O$	192.2
8	F,9	$O \to F \to 9 \to O$	215.2
9	J,18	$O \to J \to 18 \to O$	220.4
10	17, 22, 23	$O \to 17 \to 22 \to 23 \to O$	214.2
11	19,L	$O \to 19 \to L \to O$	197.4
12	24,K	$O \to 24 \to K \to O$	215.1
13	E,7,6	$O \to E \to 7 \to 6 \to O$	223.4
14	21, 20, 25	$O \to 21 \to 20 \to 25 \to O$	190.8
14	35,34,A	$O \to 35 \to 34 \to A \to O$	212
16	30,Q,28	$O \to 30 \to Q \to 28 \to O$	213.9
17	4,D,5	$O \to 4 \to D \to 5 \to O$	216.4
18	N,26,27	$O \to N \to 26 \to 27 \to O$	217.8
19	32, 31, 33	$O \to 32 \to 31 \to 33 \to O$	174.3
20	P,29,R	$O \to P \to 29 \to R \to O$	221.1
21	2,3,M	$O \to 2 \to 3 \to M \to O$	198.3
22	1,B,C	$O \to 1 \to B \to C \to O$	209.4