$$+\int^{\infty} g(x)\,dx\Big[\sum_{j=1}^{n} 0.98^{j-1}0.02(jt+a+f(js-(0.98(j(s-1)+j-1))$$
$$+0.98^{n}(nt+k+f(u-(0.98(u-n)+n)))\Big]$$

3 模型求解及结果

我们对 s 从 1 至 100, u 从 100 至 600 用穷举法进行搜索, 比较 $F(s,u)$ 的值, 求得最优解为: $s=54$, $u=304$, 此时目标函数值为 9.37681, 若限定 u 为 s 的整数倍, 则最优解为: $s=51$, $u=306$, 此时目标函数值为 9.40044.

4 考虑其它故障的情况

若考虑其它故障, 我们将上述模型中的假设 1 改为: 其它故障与刀具故障的发生相互独立, 其它故障服从区间[0, 22800]上的均匀分布. 此时模型依然具有下列形式:

$$\min F(s,u)=\frac{E(F)}{E(N)}$$

其中, $E(F)$ 与 $E(N)$ 的表达式只需遍历其它故障的发生、刀具故障的发生以及第一次检查出不合格品这三个事件的所有情况即可推导出, 由于其形式相当复杂, 我们不在此列出.

类似于前面的模型, 我们可以求出在考虑其它故障的情况下, 最优解为: $s=40$ $u=314$, 此时目标函数值为 9.57354.

Mathematical Model of Automatic Managing of Lathe

YANG Zhen-hua, QIU Zhong-hua

(Nanjing University of Posts & Telecommunications, Nanjing 210003)

Abstract: In this paper, we establish the mathemaical model of problem A of 1999 Chinese Undergraduate Mathematical Contest in Modeling —— automatic managing of lathe. Then we give the solution of this model.

刀具问题的仿真及灵敏度分析

赵桂芹, 周 林

(东南大学, 南京 210096)

摘要: 本文通过计算机模拟仿真, 搜索到了 CMCM-99A 题中换刀间隔与检查间隔的近似最优解及单位正品最小费用, 并对 p_1(好刀生产正品的概率), p_2(坏刀生产正品的概率), k, f, d 进行了灵敏度分析, 得出 u (换刀间隔) 是最重要的优化参数的结论.

1　检查策略及其仿真

CMCM-99A 题中随机因素多, 难以准确把握, 因而仅从理论上求不出第一问, 第二问的最优解, 对众多的参数也无法证明哪个是更重要的, 这时仿真就显示出它的优越性 我们通过大量仿真(大多数仿真 1 亿次, 重要数据仿真 10 亿次), 先搜索出近似最优解的大致范围, 再在小范围内穷举, 找到了问题的近似最优解, 并进行策略对比和参数灵敏度分析, 故仿真方法在解决复杂随机问题中正越来越多地被采用

在问题 2 中, 定义 p_1 为好刀生产正品的概率, p_2 为坏刀生产正品的概率, 由于 $p_1=0.98$, $p_2=0.4$, 好刀可以生产废品, 坏刀也可以生产正品, 增加了问题难度, 因而检查会发生误判, 多检查可减少误判, 防止坏刀生产大片坏零件, 但增加了检查费用 根据减少检查费用与减少误判损失的侧重点不同, 提出了以下 7 个检查策略, 画出策略Ⅰ、Ⅳ的程序框图(见附录), 其余框图与之类似

记 n 为检查间隔, $s=1, 2, \cdots$

策略Ⅰ　查第 sn 个零件, 正品—继续生产;
　　　　废品—停止生产, 换刀

策略Ⅱ　查第 sn 个零件, 正品—生产;
　　　　废品—查第 $sn+1$ 个零件, 正品—生产;
　　　　　　废品—换刀

策略Ⅲ　查第 sn 个零件, 正品, 查第 $sn+1$ 个零件, 正品—生产;
　　　　　　废品—换刀;
　　　　废品—换刀

策略Ⅳ　查第 sn 个零件, 正品, 查第 $sn+1$ 个零件, 正品—生产;
　　　　　　废品, 查第 $sn+2$ 个零件, 正品—生产;
　　　　　　　　废品—换刀;
　　　　废品, 查第 $sn+1$ 个零件, 正品, 查第 $sn+2$ 个零件, 正品—生产;
　　　　　　　　废品—换刀;
　　　　　　废品—换刀

策略Ⅴ, Ⅵ, Ⅶ相应与策略Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, 只是将 $sn+1$, $sn+2$ 改为 $sn-1$, $sn-2$

2　仿真结果及数据分析

对问题 1, 因 $p_1=1$, $p_2=0$, 故只需使用第一种检查策略, 仿真数据如下:

表中 u: 换刀间隔, n: 检查间隔, 表内数据为单位正品平均费用

n \ u	353	354	355	356
17	4.634	4.645	4.638	4.645
18	4.633	4.640	4.634	4.635
19	4.636	4.628	4.636	4.639
20	4.629	4.639	4.639	4.637

从而得到近似最优解为 $(u, n)=(354, 19)$, 单位正品最小平均费用 $=4.628$ 元/个

对问题 2, 我们仿真后的最好结果如下(10 亿次)

收稿日期: 1999-11-20; 指导教师: 朱道元

2.1 数据分析

策略	u(个)	n(个)	最小费用(单位正品)
Ⅰ	270	45	9.459
Ⅱ	270	45	9.722
Ⅲ	295	117	9.346
Ⅳ	305	33	9.327
Ⅴ	270	45	9.752
Ⅵ	284	108	9.350
Ⅶ	318	29	9.342

(1) $u \leq 354$, $n \geq 19$, 这是可以理解的 因为刀具最好的情况为 $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, 在问题 1 下, $(u, n) = (354, 19)$ 为最优解, 现检查的判别作用降低, n 必不小于 19; 由于刀具判断发生困难, 为保证好刀概率仍较大, 不是通过检查方法而是通过刀具提前更换来实现

(2) 数据表明, 检查策略制约着最佳换刀间隔与最佳检查间隔

对策略Ⅰ, 检查费用小, 简单可行, 但易发生好刀误判, 坏刀漏网情况, 平均费用稍大

对策略Ⅱ与Ⅴ, 只是检查方式不同, 分别为向前查、向后查, 其共同特点是检查两次, 相信正品即反映好刀, 只有两次均为废品时才换刀, 侧重于防止好刀误换, 但由于 $p_2 = 0.4$, 因而坏刀最容易漏网, 造成大片坏零件, 平均费用最大 不同点是: 由于好刀产生废品的概率只有 2%, 若第一次检查为废品, 向后查是废品的概率要大, 易于查到坏刀; 而向前查, 若又是废品, 则可以早一点判断出刀的好坏, 少生产一个坏零件, 节省零件损失费用, 若是正品, 而其实刀已经坏了, 由于继续生产, 则产生出一批坏零件, 零件损失费用不低于策略Ⅱ的零件损失费用, 而最终孰优孰劣, 与废品损失及检查间隔有关

类似分析可用于策略Ⅲ与Ⅵ的关系, 不同之处是它们克服了策略Ⅱ与策略Ⅴ的缺点, 侧重于防止坏刀漏网, 应当优于策略Ⅱ与策略Ⅴ. 数据表明, 策略Ⅲ与Ⅵ的检查间隔大(117 个), 就是因为 100 之内坏刀可能性很小, 故不查, 且一旦查出就换刀, 以防坏刀漏网

至于策略Ⅳ与策略Ⅶ, 与上述分析类似, 但其综合了策略Ⅱ、Ⅲ与策略Ⅴ、Ⅵ的优点, 使误判概率达到最小, 而Ⅳ与Ⅶ数据也体现了这一点: 换刀间隔较大, 每次检查间隔较小, 检查次数多, 防止误判

(3) u 是最重要的优化参数 无论什么策略, 无论什么检查间隔, u 集中在 300 附近, 而 n 的波动范围较大, 有时两个策略的 n 相隔较远, 如策略Ⅵ与策略Ⅶ, 这一般是想象不到的, 其原因在于检查的双向影响: 多检查费用大, 但有利于减小误判(好刀误换或坏刀继续使用).

(4) 在大量的仿真数据中, 我们还发现, 在近似最优解的附近, 单位正品平均费用波动不超过 5%.

(5) 策略Ⅳ较优

综上所述, 仿真结果与直观认识基本一致 下列数据进一步证明了仿真结果的合理性

策略 / (u, n)	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ
(295, 117)	9.567	9.975	9.346	9.460	9.977	9.363	9.487
(305, 33)	9.729	10.298	9.927	9.327	10.289	10.050	9.416
(284, 108)	9.510	9.795	9.345	9.397	9.825	9.350	9.399
(318, 29)	9.669	10.098	10.076	9.370	10.156	10.127	9.342

由此可见, 对于不同的 (u, n), 某一特定策略并不总是优于其它策略, 而近似最优解 (u, n) 是与 p_1, p_2 等各个参数的值相对应的, 因而, 若改变各个参数的值, 则各个策略孰优孰劣, 就需要另一轮仿真来进行数据分析了.

3　灵敏度分析

为方便起见, 我们仅在策略Ⅶ下, 比较参数改变后 u, n 的变化情况

1. $p_1 = 0.99$ 其余参数值不变

n \ u	290	295	300	305	310
28	7.385	7.384	7.395	7.296	7.491
31	7.420	7.371	7.312	7.348	7.313
34	7.312	7.293	7.231	7.333	7.415
37	7.284	7.332	7.428	7.428	7.361

2. $p_2 = 0.3$, 其余参数值不变

n \ u	290	300	310	320
30	9.254	9.230	9.247	9.218
35	9.260	9.204	9.203	9.285
40	9.283	9.229	9.204	9.208
45	9.247	9.193	9.206	9.354

$p_1 = 0.99$ 时, 与问题 2 相比, 单价下降, u 减小, n 增大, 这是因为刀具生产零件的情况变好, 而 p_2 变小, 类似于 p_1 变大, 同时还可看到 p_1 对单位正品价格影响较大, 而 p_2 对单位正品价格影响较小.

n \ u	300	305	310	315	320
70	6.793	6.789	6.745	6.733	6.708
75	6.698	6.866	6.847	6.793	6.803
80	6.700	6.677	6.690	6.663	6.679
85	6.726	6.721	6.710	6.710	6.696

2. $f = 100$, 其余参数值不变

与问题 2 相比, n 增大, 这是因为 f 降低后, 坏零件损失费用减小, 因而其相对于整个检查费用变小, 从而可以加大检查间隔

3. $k = 800$, 其余参数值不变

n \ u	260	265	270	275	280
45	8.679	8.689	8.651	8.812	8.768
50	8.694	8.789	8.687	8.753	8.691
55	8.665	8.667	8.640	8.600	8.830
60	8.715	8.736	8.713	8.653	8.697

$d = 4000$, 其余参数值不变

n \ u	260	265	270	275	280
30	9.676	9.632	9.600	9.707	9.635
35	9.663	9.630	9.574	9.543	9.538
40	9.602	9.585	9.538	9.545	9.520
45	9.567	9.522	9.539	9.665	9.620

与问题 2 比较, u 减小, 这是因为 k 减小后, 预防性换刀次数增加可减少总费用, 而 d 增加后, 故障后换刀费用对整个检查费用的影响变大, 因而提前换刀才可以减小单位正品费用. 对 t 也可以做类似分析.

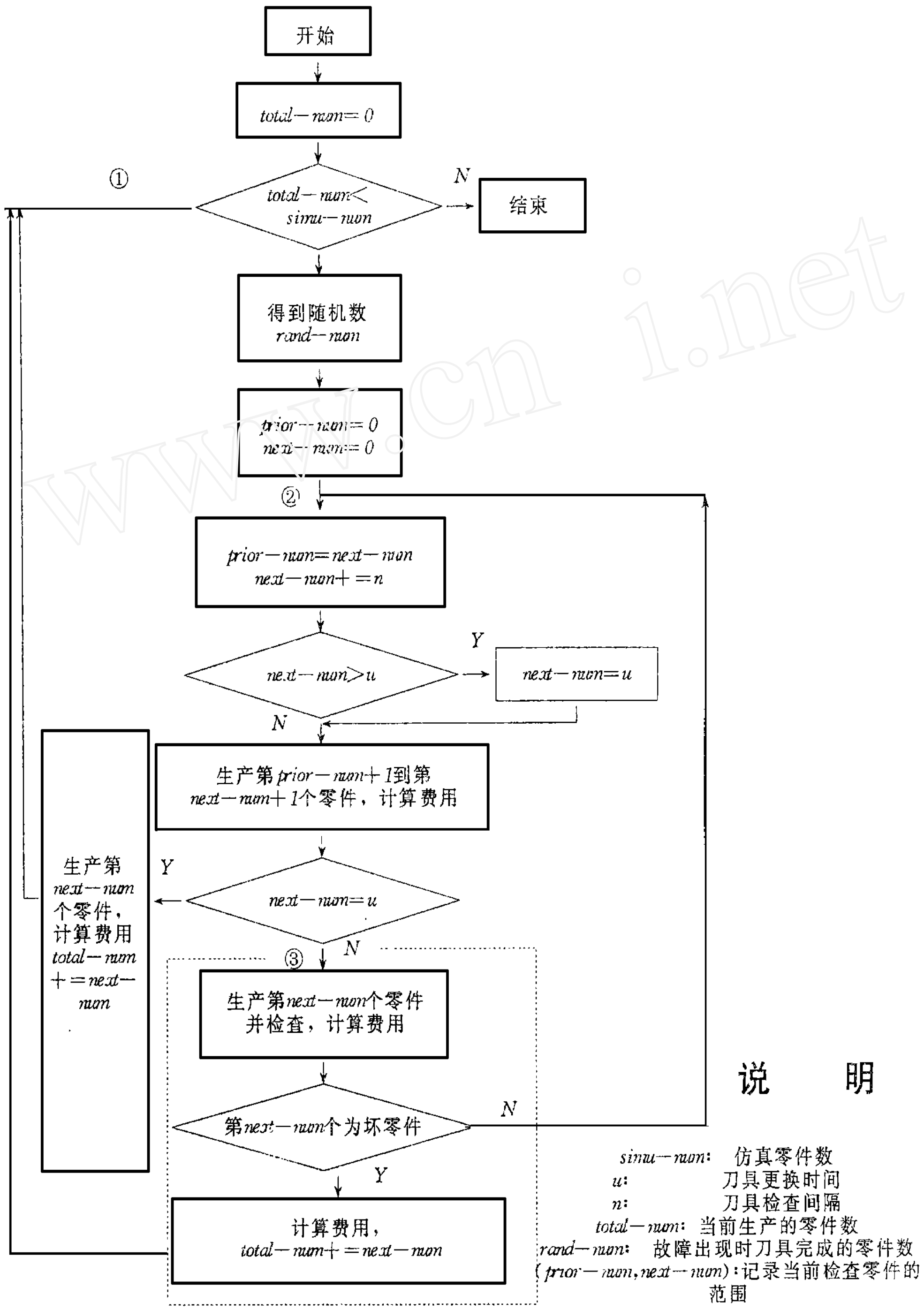
The Simulation and Sensitivity Analysis for Knife Problem

ZHAO Gui-qin,　ZHOU Lin

(Southeast University,　Nanjing　210096)

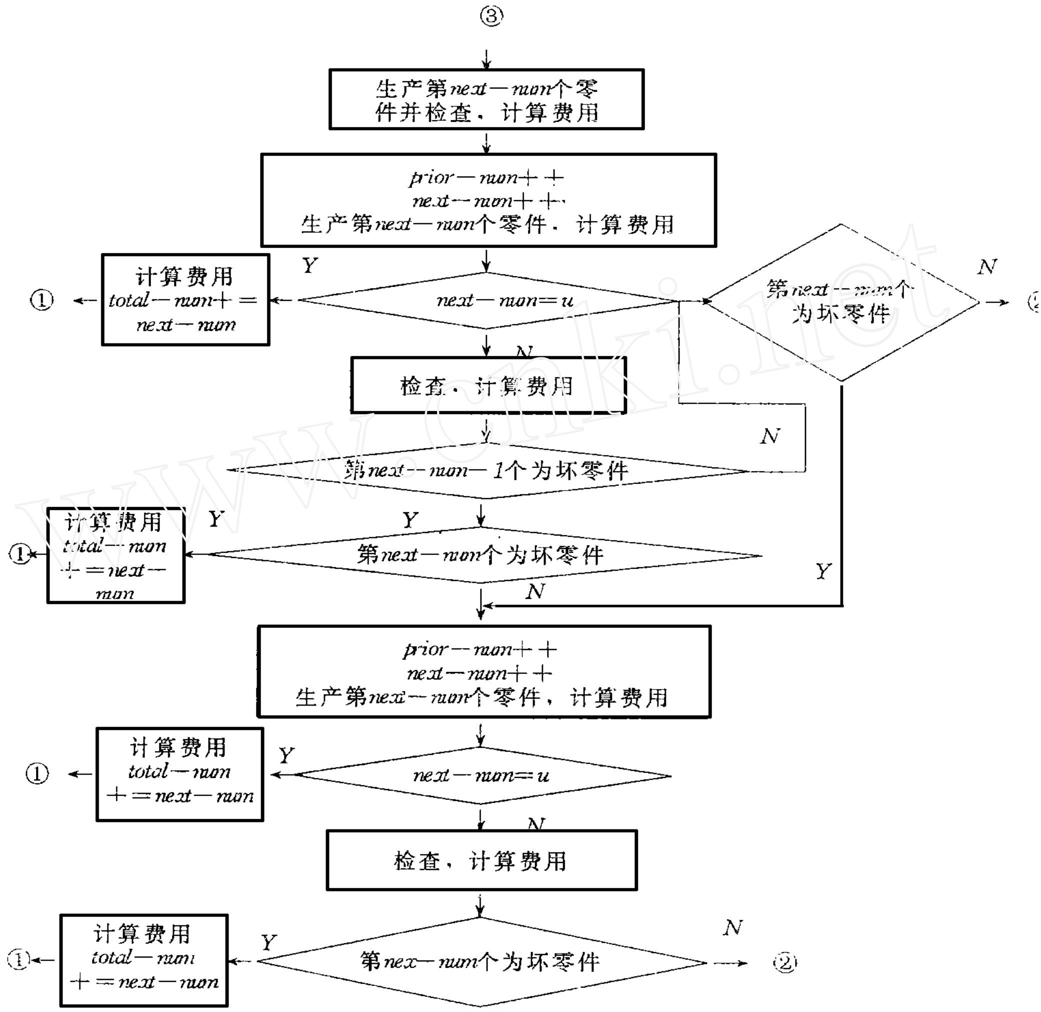
Abstract:　As to the problem A in CMCM - 99, this article firstly search out the approximate optimal solution to knife-replacement period, check period and the minimum cost for unit good-product through computer artificial simulation, and then have sensitivity analysis for p_1 (the probability of good-product produced by good knife), p_2 (the probability of good-product produced by bad knife), k, f, d, at last concludes that u (the knife-replacement period) is the most important optimizing parameter.

附录一


开始
total—num=0
①
total—num<
sinu—num
N
结束
得到随机数
rand—num
prior—num=0
next—num=0
②
prior—num=next—num
next—num+=n
Y
next—num>u
next—num=u
N
生产第prior—num+1到第
next—num+1个零件，计算费用
生产第
next—num
个零件，
计算费用
total—num
+=next—
num
Y
next—num=u
N
③
生产第next—num个零件
并检查，计算费用
第next—num个为坏零件
N
Y
计算费用，
total—num+=next—num
说 明
sinu—num: 仿真零件数
u: 刀具更换时间
n: 刀具检查间隔
total—num: 当前生产的零件数
rand—num: 故障出现时刀具完成的零件数
(prior—num,next—num):记录当前检查零件的范围

策略 I

附录二



策略 Ⅳ

说　　明

在生产零件时，必须考虑5%的非刀具故障. 具体方法为：生成一个均匀分布的RV，error—pos初始值为0，error—pos=error—pos+RV，若该零件为第error—pos个零件，则该零件必为坏零件，同时error—pos+=RV.