

文章编号: 1005-3085(2003)05-0081-07

# 彩票中的数学

李英雄, 郭松海, 康 慧

指导教师: 蔡吉花 陈兴元 母丽华

(黑龙江科技学院, 哈尔滨 150001)

**编者按:** 本文考虑了单注收益率、彩民心理因素、彩票设置公平度等因素, 尽管量化这些因素不一定恰如其分, 但以这些因素构造判别函数还是合理的, 文章据此判定现行方案的优劣, 规划出更优的方案。正如文章的讨论所述所得优化方案与销售额有关是一个大缺陷。数模竞赛多年来均提出要注意摘要的质量。今年的 B 题要求作者给报纸写一论文供彩民参考, 本文的短文是一篇不错的文章、写摘要和短文的能力是竞赛要求的, 对科技工作人员也是非常重要的, 但今年竞赛论文在这方面仍有很多问题, 许多短文并没有为彩民提供恰当的信息, 正确认识和分析彩票活动。

**摘 要:** 本模型讨论的是如何评判传统型彩票和乐透型彩票的一般评奖方案的合理性问题。本文首先根据彩票中奖规则, 利用古典概率求出了这两种类型彩票的各种奖项出现的可能性。把每注彩票中奖与否看成贝努利试验, 在假设每期彩票的销售量足够多的前提下, 由贝努利大数定律归结为正态分布, 从而求出了每注彩票的平均收益率。在此基础上, 结合公平尺度, 利用彩民的博彩心理因素构造了评判方案合理性的判别函数, 利用 MATLAB6.1 软件编程计算, 判别出题目所给方案的奖金设置的优劣, 并且利用这个判别函数, 我们建立了求解最优方案的非线性规划模型。通过求解所建立的模型, 找到在给定销售注数下最优方案及奖项和奖金额的设置。

**关键词:** 彩票; 二项分布; 期望收益率; 判别函数

分类号: AMS(2000) 90C05

中图分类号: O221.1

文献标识码: A

## 1 问题的重述(略)

## 2 模型的假设及符号说明

### 2.1 模型的假设

- 1) 每注彩票只兑付最高奖级奖金, 不可兼得;
- 2) 假设彩票的规则是以公平合理为原则;
- 3) 假设彩票的发行费用不计, 彩票总奖金比例一般为销售总金额的 50%;
- 4) 假设高项奖按事先设定的百分比分配, 且按当期各奖级实际中奖注数平均分配该奖级;
- 5) 奖金取决于当期彩票投注额的多少, 投注额越多, 奖金越高;
- 6) 假设彩民大都具有博彩心理。

### 2.2 符号说明

- 1)  $\eta_i$ : 表示  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 等奖是否被取走, 即  $\eta_i = 0$  或  $1$ ;
- 2)  $\xi_k$ : ( $k = 1, 2, \dots, 7$ ) 表示  $k$  等奖中奖注数;
- 3)  $X_i$ : ( $i = 1, 2, 3$ ) 表示  $i$  等奖的奖金额;
- 4)  $n$ : 表示当期已售出的彩票注数;
- 5)  $x_i$ : ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) 表示每注彩票第  $i$  项奖的奖金额;
- 6)  $\xi$ : 表示取走的奖金额  $\xi = \sum_{i=1}^3 \eta_i x_i + \sum_{k=4}^7 \xi_k x_k$ ;
- 7)  $\frac{E(\xi)}{n}$ : 表示一注中奖彩票被取走的奖金比率, 即单注彩票的平均收益率;
- 8)  $P_i$ : 表示第  $i$  等奖的中奖概率 ( $i = 1, 2, \dots, 7$ );
- 9)  $r_i$ : ( $i = 1, 2, 3$ ) 表示第  $i$  等奖的奖金分配的百分比;
- 10)  $w(t)$ : 表示博彩心理函数;
- 11)  $s$ : 表示低项奖奖额在总奖项中所占的比例;
- 12)  $f$ : 判别方案合理性的判别函数。

### 3 问题的分析

#### 3.1 求两种类型彩票每注中各奖项的概率

设彩票有 7 等奖, 对某一方案而言, 每注彩票中各等奖的概率是可求的, 分别用  $P_1, P_2, \dots, P_7$  来表示中一等到七等奖的概率。由古典概率问题求得传统型和乐透型概率如下(略)

#### 3.2 设当期销售 $n$ 注彩票, 研究每注彩票的收益

由于当期彩票的总奖金与售出彩票注数  $n$  有关,  $n$  注彩票中, 获得第  $i$  等奖的中奖注数  $\xi_i$  是随机变量, 且  $\xi_i$  服从二项分布  $b(n, P_i)$ , 即

$$P(\xi_i = k) = C_n^k P_i^k (1 - P_i)^{n-k}$$

由贝努利大数定律可知, 当  $n$  足够大时,  $\xi_i$  近似服从正态分布,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其期望与方差分别为

$$\begin{cases} \mu = E\xi_i = nP_i \\ \sigma^2 = D\xi_i = nP_i(1 - P_i) \end{cases}$$

记

$$Y = \xi_4 x_4 + \xi_5 x_5 + \xi_6 x_6 + \xi_7 x_7$$

由  $\xi_i$  的独立性

$$\begin{aligned} E(Y) &= x_4 E(\xi_4) + x_5 E(\xi_5) + x_6 E(\xi_6) + x_7 E(\xi_7) \\ &= nP_4 x_4 + nP_5 x_5 + nP_6 x_6 + nP_7 x_7 \end{aligned}$$

高项奖的第  $i$  等奖的奖金额  $X_i$ , 由题目中给出的计算方法得

$$X_i = r_i(n - \sum_{k=4}^7 \xi_k x_k), \quad i = 1, 2, 3$$

若  $\eta_i$  表示  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 等奖是否被取走, 则  $\eta_i$  服从两点分布。 $\eta_i = 0$  表示  $i$  等奖没被取走,  $\eta_i = 1$  表示  $i$  等奖被取走, 其分布率为

$$P(\eta_i = 0) = (1 - P_i)^n, \quad P(\eta_i = 1) = [1 - (1 - P_i)^n]$$

若  $\xi$  表示取走的奖金总额,  $\xi = \sum_{i=1}^3 X_i \eta_i + \sum_{k=4}^7 \xi_k x_k$  它是一个随机变量, 则  $\frac{\xi}{n}$  表示单注彩票的收益率。基于彩票的总奖金比例一般为销售总额的 50%, 单注彩票金额为 2 元, 首先分析  $\frac{\xi}{n}$  的数学期望  $E\left(\frac{\xi}{n}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{E(\xi)}{n} &= \frac{E\left(\sum_{i=1}^3 X_i \eta_i + \sum_{k=4}^7 \xi_k x_k\right)}{n} = \sum_{k=4}^7 P_k x_k + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 E\left[(n - \sum_{k=4}^7 \xi_k x_k) r_i \eta_i\right] \\ &= \sum_{k=4}^7 P_k x_k + \sum_{i=1}^3 r_i E(\eta_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 E\left[\sum_{k=4}^7 \xi_k \eta_i x_k r_i\right] \\ &= \sum_{k=4}^7 P_k x_k + \sum_{i=1}^3 [1 - (1 - P_i)^n] r_i - \sum_{i=1}^3 \sum_{k=4}^7 P_k [1 - (1 - P_i)^n] x_k r_i \quad (1) \end{aligned}$$

取  $n = 100$  万, 150 万, 200 万, 300 万, 利用公式(1)求出了题目表三中 29 种方案, 在不同  $n$  下每注彩票的平均收益率, 从运算结果看, 随着  $n$  的增大, 平均收益率趋于稳定值 1。

### 3.3 从公平因素出发进行分析

利用公平原则确定奖金在各个奖项中分配情况, 中奖的概率  $P_i$  与第  $i$  项奖单注中奖金额  $x_i$  具有相关性, 即中奖可能性越小, 奖金额越高, 例如, 在打麻将中, 和边与和夹的几率相差近 2 倍, 获得报酬也差 2 倍。再者中奖几率和成本有直接关系, 假设中一等奖的概率是 0.001, 中二等奖的概率是 0.01, 则一等奖平均抽 1000 注(需 2000 元)才能中一次, 而二等奖需要 100 注(需 200 元), 可见中奖收益和中奖概率应成反比, 最理想的情况为中奖概率和奖金额乘积等于常数。我们把总奖金额分成低项、高项两部分, 在每项内部考虑公平因素, 若考虑奖项为 1 到 7 等奖的方案

$$P_i x_i = c_1 (i = 1, 2, 3), \quad P_k x_k = c_2 (k = 4, 5, 6, 7), \quad c_1, c_2 \text{ 为常数}$$

我们称该公式为公平尺度。

若低项奖的百分比为  $s$ , 则高项奖的百分比为  $(1 - s)$ , 由低项奖内部公平尺度有以下公式

$$\{P_4 x_4 = P_5 x_5 = P_6 x_6 = P_7 x_7, nP_4 x_4 + nP_5 x_5 + nP_6 x_6 + nP_7 x_7 = sn \quad (2)$$

由高项奖内部公平尺度有以下公式

$$\begin{cases} x_i = \frac{r_i(1-s)n \cdot [1 - (1 - P_i)^n]}{nP_i} \\ P_1 x_1 = P_2 x_2 = P_3 x_3 \\ r_1 + r_2 + r_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i = \frac{r_i(1-s)[1-(1-P_i)^n]}{nP_i}, (i=1,2,3) \\ r_1(1-(1-P_1)^n) = r_2(1-(1-P_2)^n) = r_3(1-(1-P_3)^n) \\ r_1 + r_2 + r_3 = 1 \end{cases}$$

则  $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = (1-s) \sum_{i=1}^3 r_i[1-(1-P_i)^n]$  (当  $n$  是定值时,其值是常数)。

以  $d_1 = \prod_{i=1}^3 (P_ix_i)$  反映了高项奖的公平程度,此时当且仅当  $P_1x_1 = P_2x_2 = P_3x_3$  时  $d_1$

最大。同理  $d_2 = \prod_{k=4}^7 (P_kx_k)$  也反映了低项奖的公平程度。我们可取  $d = d_1d_2$  可作为衡量公平程度的数学表达式,但由于  $P_ix_i$  远小于 1,所以  $d$  很小,设  $\mu = \sqrt[7]{d} \times 7$ , 记为总公平因子。

### 3.4 博彩心理的因素分析

彩民的兴趣大小与单注收益率、公平度相关。对一个方案,彩民的看法主要是由收益决定的,我们用这个量的某个函数来衡量该方案的彩民的吸引力,而彩民的看法是一个心理因素,是一个很难准确衡量的量。根据心理学的知识,人的心理因素的变化可用博彩心理函数来近似刻画,博彩心理与单注的收益率有关,因此,取博彩心理函数为

$$w(t) = 1 - e^{-nt}$$

其中  $t = E\left(\frac{\xi}{n}\right)$ ,  $n$  表示销售注数。

## 4 模型的建立与求解

综合以上的分析,我们用影响方案合理性的三个因子:收益期望,公平因素,博彩因素,来构造给定方案合理性的评判函数,并且通过求解这个函数的值来判定各方案的优劣。

### 4.1 评价函数的构造(第一问的解答)

方案的吸引力函数  $f =$  博彩因子  $\times$  公平因子,即

$$\begin{cases} f = w(t) \times \mu = (1 - e^{-nt}) \times \mu \\ t = \sum_{k=4}^7 P_kx_k + \sum_{i=1}^3 r_i(1-(1-P_i)^n) - \sum_{k=4}^7 P_kx_k \sum_{i=1}^3 r_i(1-(1-P_i)^n) \\ \mu = \sqrt[7]{d} \times 7 \end{cases}$$

根据彩票目前每期开奖的有关资料,以及题目中对单注一等奖奖金的约束,取彩票销售注数  $n = 200$  万注进行计算。

以 29 个方案的有关数据代入判别函数  $f$  中,求出  $f$  的值,通过比较  $f$  值的大小,我们可以确定给定的各种方案的优劣。

由此得到对 29 个方案的排序为

9, 5, 11, 8, 7, 19, 20, 16, 24, 10, 6, 22, 18, 25, 12, 26, 13, 14, 23, 15, 17, 21, 29, 2, 27, 3, 28, 4, 1

### 4.2 第二问的模型及解答

由问题一的求解结果可以看出,传统型和无特别号(23 号)的方案已不可能列入最优方案中,因此,问题二中只需在乐透型彩票的两种方案( $M/N$  和  $M+1/N$ )进行讨论,我们需要

求出当  $M, N$  取何值, 取几个奖项, 高项奖的百分比  $r_i$  及低项奖的奖金额  $x_k$  为多少时方案最优。

最优方案的目标函数仍然为问题一的判别函数, 其中的变量  $M, N, r_i, x_k$ , 根据题目的表 3 给出的数据和问题一的讨论, 满足如下的条件

$$5 \leq M \leq 7, \quad 29 \leq N \leq 60, \quad 0.5 \leq r_i \leq 0.8 (i = 1, 2, 3)$$

$$x_k > x_{k+1} (k = 1, 2, \dots, 6), \quad 600000 \leq x_1 \leq 5000000$$

若销售  $n$  注彩票, 则  $i$  等奖被取走的概率为  $(1 - (1 - P_i)^n)$ , 平均有  $nP_i$  注彩票获  $i$  等奖。因此  $i$  等奖能取走的金额为

$$x_i = \frac{(n - \sum_{k=4}^7 \xi_k x_k)(1 - (1 - P_i)^n) r_i}{nP_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\text{由公平原则} \begin{cases} P_{i+1} x_{i+1} \approx P_i x_i, (i = 1, 2) \\ P_k x_k \approx P_{k+1} x_{k+1}, (k = 4, 5, 6) \end{cases}$$

因此  $\frac{x_{i+1}}{x_i} \approx \frac{P_i}{P_{i+1}}$ , 而  $N$  最大为 60, 因此  $\frac{1}{60} \leq \frac{P_i}{P_{i+1}} \leq 1$ , 可约束  $x_i \leq 60x_{i+1}$ 。

综合以上的分析可得到问题二的求解模型为

$$\begin{aligned} \max \quad & f = w(t) \times \mu = (1 - e^{-\mu}) \times \mu \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} t = \sum_{k=4}^7 P_k x_k + \sum_{i=1}^3 r_i (1 - (1 - P_i)^n) - \sum_{k=4}^7 P_k x_k \sum_{i=1}^3 r_i (1 - (1 - P_i)^n), \\ \mu = \sqrt[7]{d} \times 7, \\ 5 \leq M \leq 7, 29 \leq N \leq 60, \\ 0.5 \leq r_i \leq 0.8 (i = 1, 2, 3), \\ r_1 + r_2 + r_3 = 1, r_i > 0, \\ 60x_{k+1} > x_k, (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \\ 600000 \leq x_1 \leq 5000000, \\ x_i = \frac{(n - \sum_{k=4}^7 \xi_k x_k)(1 - (1 - P_i)^n) r_i}{nP_i}, \\ n = 200 \times 10^4 \end{cases} \end{aligned}$$

把乐透型的两种情况的概率  $P_i$  代入上式, 利用 MATLAB6.1 编程计算得到此非线性规划问题的最优解为

$$M = 7, \quad N = 33, \quad r_1 = 0.77, \quad r_2 = 0.11,$$

$$r_3 = 0.12, \quad x_4 = 240, x_5 = 20, x_6 = 8, x_7 = 0$$

上述结果是当期彩票的注数  $n = 200 \times 10^4$  时, 应选择方案。利用此模型, 我们求得了当期彩票的销售注数  $n = 100$  万, 150 万, 250 万, 300 万, 400 万, 500 万时, 应选择的最优方案

表 1

注数 $n$ \ 计算结果	最优方案	$f$ ( $10^{-5}$ )	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
100 万	6/32	6.321	0.80	0.11	0.09	140	30	8	2
150 万	7/31	6.809	0.78	0.12	0.10	210	18	5	0
250 万	6 + 1/32	5.934	0.77	0.10	0.13	204	19	2	0
300 万	6/36	7.069	0.72	0.12	0.16	121	35	6	0
350 万	7/33	6.964	0.74	0.15	0.11	190	25	5	0
400 万	7/35	5.875	0.75	0.17	0.08	205	16	2	0
500 万	7/36	4.896	0.80	0.10	0.10	143	28	1	0

## 5 模型优缺点的讨论

### 5.1 优点

本模型全面考虑了彩票的收益、公平度及博彩心理因素,建立了一个对彩票方案进行评价的模型。结合实例,用本模型可以寻找给定摸彩方法的最优方案,并能对给定方案进行评价。它利用评价函数,运用公平尺度,结合收益原则,建立了优化模型,这种方法是本模型最突出的特色。它使奖金的设置有章可循,在今后类似活动中有较科学的指导作用。

### 5.2 缺点

本模型是对固定的销售注数的基础上,分析了给定摸彩方法的评判规则,并求出了最优方案,但始终没有能够脱离销售注数考虑问题,而且我们没有解决设计不同的方案还会影响到销售注数。

## 6 给报纸写的一篇短文

### 把握机会 理智博彩

在高节奏的现代社会,人们的生活节拍加快,紧张的精神状态渴求得到放松。彩票悄然走进人们的生活,正在默默地发挥着心理按摩医生的作用。

彩票是建立在机会均等的基础上,公平竞争的娱乐性游戏。它把穷人和富翁的距离变得不再遥远。它将成为社会保障基金多元化来源的一种,可以集中利用社会的闲散资金,“取之于民,用之于民”,用大家乐于支出的钱,办大家希望办成的事。不过值得注意的是,当前人们对彩票业的认识和相关宣传中存在着诸多似是而非的误区。为了促进这项具有重大意义的事业发展,我们通过对“传统型”和“乐透型”两种彩票的各种奖项出现的可能性、奖项和奖金额的设置的数学分析,给广大彩民如下几点建议:

#### 一、购买彩票,奉献爱心

彩票是筹集资金的有效手段,在市场经济条件下,我国要大力发展教育、体育事业,搞好福利事业,完善社会保障体系,这些都需要大量资金,根据民政部门有关规定,彩票销售总额的30%要作为社会福利基金专项专用,福利基金的三分之二用于本地区的社会福利事业,三分之一上交中央或本地政府调剂使用。所以购买一注彩票,既为自己增加了一次发财的机会,也为社会奉献了一片爱心。

## 二、把握尺度,合理购彩

较高的预期收益总和较大的预期风险相联系。投资彩票游戏,并不是获取收益的正常途径。把彩票作为一种消遣,一种娱乐,把握尺度,合理购彩。忌当成职业,透支帐户博彩。彩民应谨慎理智购彩,每期适当投入几元,既能买个希望梦想回家,也能享受开奖时刻的心动,又不至于因盲目的投入引发“家庭经济危机”。

## 三、讲究投注的科学性,树立彩民良好形象

彩号的出现随意性强,本身具有不可预测,是一种科学刺激、往往能带给人惊喜的游戏。因此,彩票本身就是玩的心动与潇洒。做一个文明彩民,将科学购彩进行到底,把买彩当作一项娱乐,重在参与。至今为止,还没有发现哪一期特等奖的号码是人为地被预先“研究”出来的。事实上,买彩者“心想”未必一定“事成”。购买者一定要理智对待。

从我们对“传统型”和“乐透型”彩票中各种奖项出现的可能性、对彩民的吸引力等因素的综合分析中,可以看出,每注“乐透型”彩票比“传统型”彩票的平均收益率大,而且乐透型彩票的趣味性也很高,它正逐渐成为世界彩票业的主流。

周而复始的梦想与希望,带给人们的是一种轻松愉悦的心理体验过程,它能使人们在平时工作和生活中长期绷紧的神经得以放松,使人们在不知不觉中拥有一种快乐的心情。这就是彩票游戏的乐趣。

## 参考文献:

- [1] 高强.从经济学角度审视博彩现象[J].陕西经贸学院学报,2001;10
- [2] 吴珊珊.彩票的运行机理[J].渭南师范学院学报,2001;6
- [3] 何文章.数学建模与实验[M].哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2002;3
- [4] 何文章.大学数学实验[M].哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2000;8
- [5] 母丽华.数学实验[M].哈尔滨:黑龙江科学技术出版社,2002;8
- [6] 吕盛鸽.概率统计在彩票选号中的应用[J].统计与决策,2001;8
- [7] 许乘.概率论与数理统计[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2002;3

# Mathematics in Lottery

LI Ying-xiong, GUO Song-hai, KANG Hui

Advisors: CAI Ji-hua, CHEN Xing-yuan, MU Li-hua

(HeiLongJiang Institute of Science and Technology, 150001)

**Abstract:** This model discusses how to evaluate the rationality of the general prize-winning evaluation procedures on the traditional lottery and lotto.

First, according to the prize-winning rules, this paper found the probability of the various awards cases of two types by the use of the classical probability. Regarding each event of prize-winning as Benouli experiment, under the assumption of the sufficient sales volume in each issue, and then whether each lottery ticket wins the prize or not, according to the Large-Number Law, is attributed to the Normal Distribution, and find the rate of return of each lottery ticket. On the basis of those efforts, we construct the function to evaluate the rationality of those programs with fair measure by taking advantage of the gambling mentality. In succession, by the use of Matlab 6.1, we calculated the model of Nonlinear planning on these questions. By the solution of the model, we find the optimal program for the given lottery sales volume and the settings of award items and prize amount.

**Keywords:** lottery; Two-term; expected rate of return; judgement of function