第19卷 建模专辑 2002年02月
工程数学学报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol.19 Supp. Feb 2002

文章编号:1005-3085(2002)05-0121-07

基金存储方案

潘国祥， 刘智宾， 李 皓
指导老师： 王传卫等
(中国人民解放军徐州工程兵指挥学院，徐州 221004)

编者按:该文运用路径分析的方法，找到了本息增长最佳的存款投资组合对每年大致相同的奖金额等要求列出了优化线形规划模型.在不同宽松的尺度下，求出最优解，这非常符合问题中每年奖金额大致相同的要求.关于国库券发行期不定的问题，文章考虑了保守情况和最大风险情况的最优解.全文对 c 题中的一些关键点有合理的分析，模型清楚，使用的数学工具有特色.文字表达亦较清晰，虽然部分内容有些不紧凑，但仍是一篇很好的竞赛论文.

摘 要:本文给出并证明了五年内分配存款的最优方式，进而用数学归纳法导出并证明了 n 年内获得存款最大利率的通项公式，最后借助线性规划模型按最保守和最冒险两种情况求得具体的最优分配方案.本文的最大特点在于巧妙地对利息的累计进行对数处理，成功地运用了最短路的算法思想，从而使得三个问题依靠一个简单的线性规划模型在不同的约束条件下即可获解.同时本文把问题二的保守情况推广到一般算法，依靠程序求解，使此类问题寻优的可操作性大大增强

关键词:国库券 线性规划 最短路
分类号:AMS(2000) 91B28 中图分类号:O224 文献标识码:A

1 模型假设

1) n 年内存款和国库券的利率没有浮动.

2) 第一年第一天存款，每年获奖师生应得的奖金在当年最后一天提取到期存款后获得.

3) 国库券对校基金会来说，短期内不会出现买不到的情况，且金额完全满足校基金会的需要.

4) 每年国库券的发行，这一年中每个月发行的概率相等，若一年中发行两次或两次以上，则各次发行相互独立，且每次发行的国库券二、三、五年期的都有.

5) 为了简化模型，校基金会不能通过任何渠道，私下买卖国库券.

2 问题一

问题分析

一笔基金设为 1，若存活期一年最多得利息 0.00731441，存半年定期最多得利息 0.0165076，而存一年定期可得利息 0.018，显然在一年中，存一年定期最优.由假设 2 可知，存款的周期至少是一年，所以问题一不再考虑活期存款和半年定期存款.

基金 M 在 n 年中如何存储、分配获益最大，可以转化为货物在图中各点转移损失最小.首

先,需要构造图,由假设2可知,只需构造 $V_0, V_1, V_2, \cdots\cdots V_n$ 这 $n+1$ 个点,作有向边 $e_{ij}(i=0,1,2\cdots$ 且 $j=i+2,3,5$ 且 $j \leqslant n)$,其权值为 $W_{ij}=1+(j-i)P_{(j-i)}$、得图 G(图1).按题目要求,将 M 由 V_0 沿图中一路径转移到 $V_i(i=0,1,2\cdots n)$ 且最终到达 $V_i(i=0,1,2\cdots n)$ 的钱数不小于 m_i,并且使得整个过程中 M 增值最大.

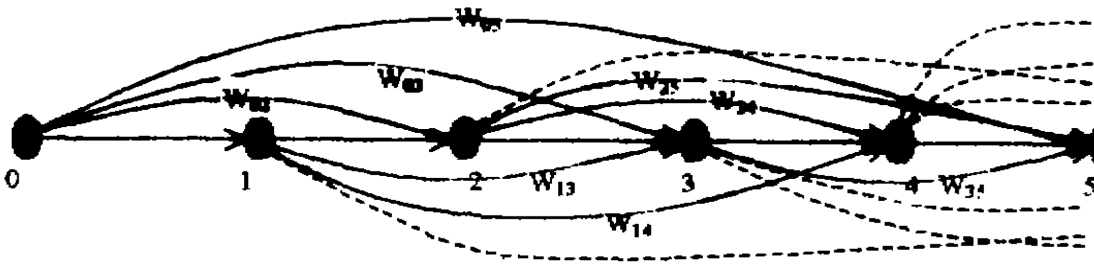

图1

由储蓄的特征可知,当资金 m 沿边 e_{ij} 由 V_i 转移到 V_j 时,m 将变为 $m' = m \cdot W_{ij}$,由此可见,M 在图中转移时与货物在图中转移有以下区别:

1) 货物转移多是有损失的,而本题则是增加的.

2) 货物转移时损失多为线性减少,该问题则是乘幂运算的问题.

为了使问题转化为货物运输损失最小的情况,可采用以下方法:

1) 以图 G 中边 e_{ij} 的 W_{ij} 权的自然对数 $W'_{ij}=\ln W_{ij}$ 为权值生成图 G',将乘积关系转化为线性相加;

2) 以图 G' 中边 e'_{ij} 的权 W'_{ij} 的相反数 $W''_{ij}=-W'_{ij}$ 为权值生成图,则由增加变为减少.

在图中货物 q 沿边 e''_{ij} 由 V''_i 到 V''_j 变为 $q'=q-W''_{ij}$,这样将 M 由 V_0 转移到 $V_i(i=1,2,3\cdots n)$ 获益最多,转化为将 $Q=lnM$ 由 V''_0 转移到 $V''_i(i=1,2,3\cdots n)$ 损失最少.因为题目要求将 M 由 V_0 沿图中一路径转移到 $V_i(i=0,1,2,3\cdots n)$ 且最终到达 V_i 的钱数不小于 $m_i(i=0,1,2,3\cdots n)$,所以最终转移到节点 $V''_i(i=0,1,2,3\cdots n)$ 的货物不得小于 $\ln m_i(i=0,1,2,3\cdots n)$,当然 $M \geqslant \sum_{i=1}^{n} e^{\ln m_i+\triangle m_i}$($\triangle m_i$ 为由 V''_0 到 V''_i 的损失).因此需首先找到由 V''_0 到 V''_i 的最短路,再将货物 $q_i(q_i=\ln m_i+\triangle m_i)$ 由 V''_0 经 V''_0 到 V''_i 的最短路转移到 V''_i.最后,先找到 $V''_i(i=0,1,2,3\cdots n)n$ 个点中对应最短路最短的点 V''_t,再将剩余的所有货物 $Q'=Q-\sum_{i=1}^{n} q_i$(即 $Q'=\ln M-\sum_{i=1}^{n}(\ln m_i+\triangle m_i)$ 由 V''_0 经 V''_0 到 V''_t 的最短路转移到 V''_t.最终可得 $V''_i(i=0,1,2,3\cdots n)n$ 个点分别转移到的货物量 $Q_i(i=0,1,2,3\cdots n)$.这样,在转移过程中损失必然是最少的,也就是说,按最初分配存到 $V_i(i=0,1,2,3\cdots n)$ 点基金为 $M_i=e^{Q_i}$,,将 M 分成 n 份,按货物的转移路线分别将 $M_i(i=0,1,2,3\cdots n)$ 转移至 $V_i(i=0,1,2,3\cdots n)$ 则获益最大.$M_i=e^{Q_i}=e^{\ln m_i+\triangle m_i}=m_i\cdot e^{W''_{0k}+\cdots+W''_{ik}}=m_i\cdot e^{-(\ln W_{0k}+\cdots+\ln W_{ik})}=m_i/(W_{0k}+\cdots+W_{ik})$

则第 i 年底得到的本息,采取不同的存储方案有不同的值,任取一种方案,有本息值 P_i

$$P_i=(1+0.018)^{k_1}\cdot(1+0.019442\times 2)^{k_2}\cdot(1+0.0216\times 3)^{k_3}\cdot(1+0.02304\times 5)^{k_5}$$

$$(k_i \in Z^+ \cup 0, k_1+2\cdot k_2+3\cdot k_3+5\cdot k_5=i)$$

合理地分配 k_i 值，使 P_i 取最大值. 对应各 P_i 最大值有一个最优的存储路线. 在每年的奖金额给定的情况下，按各最优存储方案，可确定到达 i 年的最省的原投资金额 $m_i(i = 1,2,3\cdots n-1)$，余下的钱全用于 n 年期的存储，这样即可获得 n 年的最大总奖金额. 以五年为例，构造图 2 如下：

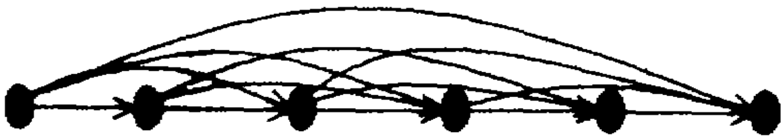

图 2

图 2 从左至右的圆圈记为 0,1,2,3,4,5. 所有路径的权值：

0 ~ 1：− 0.0178399　　1 ~ 2：− 0.0178399　　2 ~ 3：− 0.0178399

3 ~ 4：− 0.0178399　　4 ~ 5：− 0.0178399　　1 ~ 3：− 0.038143209

0 ~ 2：− 0.038143209　　0 ~ 3：− 0.06278699　　0 ~ 5：− 0.109033761

2 ~ 4：− 0.038143209　　3 ~ 5：− 0.038143209　　1 ~ 4：− 0.06278699

2 ~ 5：− 0.06278699

由最短路算法易得：1 年底的最短路为　初始 → 1 年底

2 年底的最短路为　初始 → 2 年底

3 年底的最短路为　初始 → 3 年底

4 年底的最短路为　初始 → 3 年底 → 4 年底

5 年底的最短路为　初始 → 5 年底

各结点的最大利率是(可用数学归纳法证明，证明略)：

$$l_{i\max} = \begin{cases} (1+0.018)\cdot(1+0.1152)^{[i/5]}-1 & i\%5=1 \\ (1+0.01944\times 2)\cdot(1+0.1152)^{[i/5]}-1 & i\%5=2 \\ (1+0.0216\times 3)\cdot(1+0.1152)^{[i/5]}-1 & i\%5=3 \\ (1+0.0829664)\cdot(1+0.1152)^{[i/5]}-1 & i\%5=4 \\ (1+0.1152)^{[i/5]} & i\%5=2 \end{cases}$$

把基金分成 $x_i(i = 0,1,2\cdots n)$，以取得最大奖金数为目标、转化为线性规划问题.

模型的建立和求解

模型一：求 $\max(m)$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot l_{i\max} = m \\ \sum_{i=1}^{n} m_i = m \\ x_i \cdot l_{i\max} = m_i & (i = 1,2\cdots n-1) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = M \\ d\cdot\frac{m}{n} \leqslant m_i \leqslant D\cdot\frac{m}{n} \\ x_i > 0 & (i = 1,2\cdots n) \end{cases}$$

$$m_i > 0 \qquad (i = 1,2\cdots n)$$

注:其中 M 为总基金数,m 为 n 年年底时的总奖金数,d 和 D 为每年奖金数所下降到的最低限度和所上升到的最大限度,以控制每年的奖金数大致相等

以 $M = 5000$ 万元,$n = 10$ 年为例,由于题设"每年奖金大致相等"是一个模糊的表述,所以这里只能列出不同尺度下的奖金及存款方案,用 Mathematica 可算得

$d = 100\%$,$D = 100\%$ 时

表1(单位:万元)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
107.875	105.707	103.134	101.31	98.4729	96.7317	94.7875	92.4801	90.845	4108.66
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
109.817	109.817	109.817	109.817	109.817	109.817	109.817	109.817	109.817	109.817
m	1098.17								

$d = 97\%$,$D = 103\%$ 时

表2(单位:万元)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
104.81	102.704	100.204	98.4318	95.675	99.7967	97.7909	95.4104	93.7234	4111.45
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
106.697	106.697	106.697	106.697	106.697	113.297	113.297	113.297	113.297	113.297
m	1099.97								

在各年奖金额放松尺度一定的情况下,有不同的方案.

3　问题二

问题分析

对于这个问题的解决,沿用问题一的解法思想,在初始状态下,仍然要留出一部分资金来购买第一年的国库券,以后到期的存款本息及国库券到期的本息用途根据到期当年国库券的发行情况而定.由银行存款政策可知,选择买国库券就必须到期才能提取,否则买国库券不如存活期优.

由于每年至少发行一次国库券,而每年国库券发行的日期又不确定,因此,这里有必要讨论最保险和风险最大的两种情况下,获得的最大奖金额及其方案.

1)　最保险的情况

这种情况就是每年的国库券发行时都赶不上购买,这是在购买国库券又不冒任何风险的情况下,求最优方案.这种情况下,每年国库券的发行期都在这一年前所有国库券在这一年到期之前.

对于区间 $(i, i+1)$ 而言,不失一般性,考虑单位1的资金,i 经过包含半年定期、半年活期和从 $(i, i+1)$ 到 $(i+k, i+1+k)$ 的存储到结点 $i+1+k$,这里之所以要经过半年定期和半年活期的存储是因为:$i \to (i+k_1, i+1+k_1) \to i+1+k_1+k_2+1$ 表示从 i 结点开始,经半年定期和半年活期的存储后,采用买 k_1 年期的国库券形式($k_1 < 2$ 时,k_1 为 k_1 年期的定期存款形式),在 $(i+k_1, i+1+k_1)$ 区间到期后,取出连本带息再买下一年度的 k_2 年期的国库券.

这里推出解决问题二的一般算法.其指导思想是动态规划全比较的方式找到存储 i 年期的最大本息,算法如下(证明略):

(1)　初始化 $a_0 = 0$,表示头结点的最大本息为0;初始化 $k = 0$,k 的自增表示年度区间

的递进；初始化 β_i 表示 i 年期国库券年利率；设定变量 α_k 表示单位基金到结点 k 的最大本息.

(2) 计算单位基金在不考虑购买国库券时、到结点 i 的最大本息 $L_{i\max}$.

(3) 计算由结点 0 开始采用包含 $(k,k+1)\xrightarrow{i}(k+i,k+i+1)$ 方式，即买 i 年期的国库券到结点 $k+i+1$ 的本息 $b_{k+i-1}=\alpha_k\cdot(1+i\cdot\beta_i)(i=2,3,5)$. 当 $k+1+i=n$ 时转入步骤 6.

(4) 搜索所有 b_{k+1} 并与 $L_{(k+1)\max}$ 比较，取最大值赋给 α_{k+1}，同时记录到结点 $k+1$ 的存储路径

(5) k ++ ，转入第 3 步，重复进行.

(6) 从 $j=k+1$ 开始到 $j=n$，搜索所有的 b_j 与 $L_{j\max}$ 比较，取出最大者赋给 α_j.

利用程序运算可得(源程序略)：

结点 1，最优线路是从 0 → 1，最大利率是：0.018

结点 2，最优线路是从 0 → 2，最大利率是：0.0388

结点 3，最优线路是从 0 →> 3，最大利率是：0.0648

结点 4，最优路径是从 0 → (0,1) → 4，最大利率是：0.10008047972224

结点 5，最优路径是从 0 → (1,2) → 5，最大利率是：0.11988192835724032

结点 6，最优路径是从 0 → (0,1) → 6，最大利率是：0.1712460799104

结点 7，最优路径是从 0 → (1,2) → 7，最大利率是：0.19232285093487872

结点 8，最优路径是从 0 → (2,3) → 8，最大利率是：0.216784127497316352

结点 9，最优路径是从 0 → (3,4) → 9，最大利率是：0.24714282588859392

结点 10，最优路径是从 0 → (0,1) → (3,4) → (4,5) → (9,10) → 10，最大利率是：

0.2884649494606258778360872 96

利用问题一中的模型，经过 *Mathematica* 计算得到：

$d=100\%$，$D=100\%$ 时

表 3(单位：万元)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
125.266	122.748	119.76	115.919	113.87	108.876	106.951	104.801	102.25	3979.56
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
127.521	127.521	127.521	127.521	127.521	127.521	127.521	127.521	127.521	127.521
m	1275.21								

$d=97\%$，$D=103\%$ 时

表 4(单位：万元)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
121.755	119.308	116.404	112.67	110.678	112.37	110.383	108.165	105.532	3982.73
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
123.947	123.947	123.947	123.947	123.947	131.613	131.613	131.613	131.613	131.613
m	1277.8								

2) 风险最大的情况

这种情况与最保险的情况相反，就是每年的国库券都能赶上购买，这是在购买国库券情况下，求最优方案. 这种情况下，每年国库券的发行期都在这一年前所拥有的国库券在这一年到

期之后。分析过程类似于最保险情况：

结点 1,最优线路是从 0 → 1,最大利率是:0.018

结点 2,最优线路是从 0 → 2,最大利率是:0.0388

结点 3,最优线路是从 0 → 3,最大利率是:0.0648

结点 4,最优路径是从 0 → (0,1) → 4,最大利率是:0.10008047972224

结点 5,最优路径是从 0 → (1,2) → 5,最大利率是:0.11988192835724032

结点 6,最优路径是从 0 → (0,1) → 6,最大利率是:0.1712460799104

结点 7,最优路径是从 0 → (3,4) → 7,最大利率是:0.19545574573l4158208

结点 8,最优路径是从 0 → (2,3) → 8,最大利率是:0.2309796299858304

结点 9,最优路径是从 0 → (3,4) → 9,最大利率是:0.27279311503863168

结点 10,最优路径是从 0 → (3,4) → (6,7) → (9,10) → 10,最大利率是:

0.2991036188632957246336

利用问题一中的模型,经过 Mathematica 计算得到：

$d = 100\%$, $D = 100\%$ 时

表 5(单位:万元)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
129.326	126.726	123.642	119.676	117.56	112.405	110.128	106.95	103.437	3950.15
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
131.654	131.654	131.654	131.654	131.654	131.654	131.654	131.654	131.654	131.654
m	1316.54								

$d = 97\%$, $D = 103\%$ 时

表 6(单位:万元)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
125.717	123.19	120.191	116.337	114.28	116.027	113.677	110.397	106.77	3953.42
m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
127.98	127.98	127.98	127.98	127.98	135.896	135.896	135.896	135.896	135.896
m	1319.38								

4 问题三

问题分析

由假设 2 可知,校庆这一年的奖金仍然在这一年年底发,而不关心这一年中校庆安排在什么时候,这样,问题三就迎刃而解了,其实质就是在前面的模型中加入问题三所要求的约束条件.

模型的建立与求解

模型三:求 $\max(m)$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot l_{i\max} = m$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M$$

$$s.t.\quad x_i \cdot l_{i\max} = m_i \qquad (i = 1,2\cdots n-1)$$

$$m_3 = (1+20\%)\cdot(\sum_{i=1}^{2} m_i + \sum_{i=4}^{n} m_i)/9$$

$$x_i > 0 \qquad (i = 1,2\cdots n)$$

$$m_i > 0 \qquad (i = 1,2\cdots n)$$

$$d \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i + \sum_{i=4}^{n} m_i}{n-1} \le m_i \le D \cdot \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i + \sum_{i=4}^{n} m_i}{n-1} \qquad (i = 1,2,4\cdots n)$$

具体计算和分析类似问题二.

模型补充

1) 为了简化模型,本文文首作了一个假设:不考虑国库券可以买卖的情况.我国在九十年代前,不允许私人国库券交易,现在放开后,国库券可以在证券交易所进行买卖,作为一种期货,其不确定因数太多,所以本文未考虑国库券可以交易的情况.
2) 文首有一假设:n 年内,各项利率没有浮动.事实上,当前我国经济发展很快,国家各项经济政策包括银行利率很难保证在 10 年内不变,但利率的浮动对校基金会开始决策来说是个不确定的因数,认为其没有浮动,也是出于简化模型的考虑.
3) 在解决第二个问题和第三个问题时,可运用决策树的算法,易算出最保守决策所得的最优值要高于风险决策最优值的期望值,从而建议采取保守决策,实际上,保守决策在实施过程中是可以进一步优化的.

参考文献:

[1] 姜启源.数学建模[M].北京:高等教育出版社.1993.8(2000 重印)
[2] 钱颂迪,薛华成.运筹学[M].北京:清华大学出版社,1990

A Plan for Depositing Fund

PAN Guo-xiang, LIU Zhi-bin, LI Hao

Directors: WANG Chuan-wei etc.

(Command Academy of Corps of Engineers, PLA. Xuzhou 221004 China)

Abstract: This article puts forward and proves the optimal solution to despoistting fund in five years on the basis of the thought of Degister algorithm , then deduces and proves the general expression of the maximal interest in n years through mathematical induction . finally solves the problem by the mode of linear programming according to the most risky and the most conservative condition and extends the latter one to a general algorithm.

Key words: linear programming; optimal solution