

# 数码相机相对位置定位方法

## 1. 摘要

本文给出了空间中两部固定照相机相对位置的标定方法,将照相机成像过程近似为针孔成像过程,使得成像过程中光学中心—像点—物点三点共线,实现了成像的非线性到线性的简化。

文中将标定两部相机相对位置的方法分成三个步骤:

第一步,将针孔成像抽象为点投影式映射的过程,根据射影几何中“点线结合的不变性”,具体通过射影前后任意两圆的公切线与圆的切点的唯一性,并且运用“标靶像坐标得切点切线算法”对所给像图片进行操作,求得切点的坐标,每对切点连线的交点即为圆心的像。求得的结果如下表:

点	A	B	C	D	E
坐标	(-194,-193,1577)	(-97,-186,1577)	(119,-169,1577)	(67,113,1577)	(-226,114,1577)

(单位: 像素)

第二步,依靠成像过程光学中心—像点—物点三点共线的性质,用已知的像点坐标去标定对应的标靶圆心的坐标,再利用标靶上各点的几何关系,对待定系数进行求解,从而得到标靶圆心坐标;

第三步,在已知标靶圆心在两个相机坐标系中的坐标的前提下,利用这些坐标求出坐标系变换矩阵。再利用求出的变换矩阵求出一部相机在另一相机坐标系中的坐标,这样就可以求出两个相机的相对位置。

此外,根据投影过程中“共线不变性”和“交比不变性”对模型中的第一个步骤的结果进行评价,并对这两种方法的准确性和稳定性进行讨论,其中设计了恰当的算法对方法二进行了全面的评定,得出方法一具有局限性而方法二具有良好得准确性和稳定的结果。

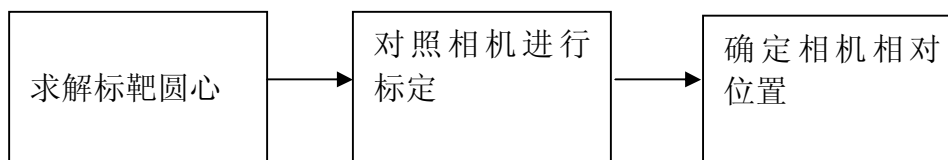
在模型扩展中,我们建立了考虑畸变的非线性模型。分析了理想像点坐标和实际有畸变的像点坐标之间的函数关系,从而提出了将非线性模型问题转换到线性模型下解决的方案。

关键词: 照相机定位 针孔模型 射影变换 交比 坐标变换

## 目录

数码相机相对位置定位方法 .....	1
1. 摘要 .....	1
2. 问题重述.....	3
3. 问题分析.....	3
4. 模型假设.....	3
5. 符号说明.....	4
6. 模型建立与求解 .....	4
1) 模型准备: .....	4
2) 模型建立 .....	4
3) 对问题一的解答: .....	6
a) 问题分析: .....	6
b) 算法: 标靶像坐标的切线切点算法.....	6
c) 改进算法: 基于罚函数思想的切点切线算法 .....	7
d) 算法分析: .....	7
4) 对问题二的回答: .....	7
5) 求解标靶圆心在照相机坐标系下的坐标 .....	8
a) 问题分析:.....	8
b) 求解方法: .....	8
6) 利用空间坐标变换法确定两部照相机的相对位置: .....	10
a) 问题分析: .....	11
b) 求解过程: .....	11
7. 模型分析及检验 .....	12
1) 对问题三的回答: .....	12
a) 方法一: 利用共线不变性对结果的检验 .....	12
b) 方法二: 基于射影变换交比不变性的检验方法.....	13
2) 模型分析 .....	16
8. 模型拓展.....	16
9. 参考文献.....	17
10. 附录 .....	18

## 2. 问题重述



题目要求根据标靶的像和标靶进行对系统的标顶，最终找到两台照相机的相对位置。

问题一和问题二是求出像点的像坐标，问题三要求对问题一和问题二所用的方法进行分析。

问题四要求出两台相机的相对位置，需根据问题一提出的算法和问题二求得的数据来计算。

## 3. 问题分析

照相机成像是运用透镜成像原理，将所成实像投影到平面上，由于透镜所成像与原物体的外观会产生非线性的扭曲，不能很好的再现原物体本身外观上的某些特征，即会有一定程度的失真。本题的最终目标是利用标靶确定两部固定照相机的空间相对位置，在已知标靶在两部相机中的像的情况下，若考虑成像的失真程度，则会使问题复杂而难以求解，因为难以将图像进行复原处理，所以在处理问题的时候，忽略失真会使问题变得易于求解。照相机成像过程是一个从 3 维空间到 2 维空间的退化的射影变换过程，求解过程中需要以标靶为中间载体，利用空间中坐标系的坐标变换，将两部相机坐标转换到同一坐标系下。根据题中所给问题，我们将其归纳为以下几个方面：

1. 求出标靶圆心的像在像平面坐标系下的坐标，再转换为照相机坐标系下的坐标；
2. 利用像坐标求出标靶圆心在照相机坐标系下的坐标，作为标定点；
3. 利用标定点求出两个相机坐标系的旋转平移矩阵；
4. 利用旋转平移矩阵确定一部相机在另一个相机坐标系下的坐标，即实现了相对定位。

与此同时，在求解像点在相机坐标系下的坐标时，所使用的模型以及算法有精度高低之分，我们需要设计一些方法对所用模型与算法的精度进行检验，从而对模型进行有依据的评价，在此过程中，也能对所选方法的优劣有所反映。

## 4. 模型假设

- 1) 不考虑光线经过透镜时的畸变，假设光线是以直线传播的方式到达光学中心；
- 2) 取两固定相机之一的相机坐标系为世界坐标系；
- 3) 固定两相机像素单位长度相同；

## 5. 符号说明

$O$ :	照相机坐标系的原点
$O'$ :	像坐标系的原点
$P$ :	物点
$P_u$ :	没有透镜畸变情况下像点
$P_{oz}$ :	$P$ 点在相机坐标系 $Z$ 轴上的投影
$(X, Y, Z)$ :	$P$ 在相机坐标系内的坐标
$(X_u, Y_u, Z_u)$ :	$P_u$ 在像平面内的坐标
$(X_d, Y_d, Z_d)$ :	$P_d$ 在像平面内的坐标
$(0,0,Z)$ :	$P_{oz}$ 在相机坐标系的坐标
$R$ :	旋转矩阵
$T$ :	平移矩阵
$f$ :	光学中心到像平面的距离
$(X_f, Y_f)$ :	像点以像素为单位下在像平面坐标系的坐标
$P_d$	有透镜畸变情况下像点

## 6. 模型建立与求解

### 1) 模型准备:

定理一:  $S_n, S'_n$  是两个由点组成的射影空间,  $T$  是由  $S_n$  到  $S'_n$  的映射,  $T$  为  $n$  维射影变换当且仅当:

- (1) 共线的四点交比保持不变;
- (2) 点和直线结合关系保持不变。例如: 共线的三点变换后共线的性质仍然保持 (即直线投影过去以后仍然是直线)。

定理二: 平面内半径相等的两个圆, 有且仅有两条外公切线, 且这两条切线相互平行;

定理三: 平面内任意一个圆存在两条相互平行的切线, 且这两个切点的连线通过该圆的圆心。

### 2) 模型建立

由模型假设, 利用经典针孔模型可以将照相机的照相的过程简化为点投影式成像, 成像时, 透镜的光学中心, 物点以及像点在一条直线上, 这是针孔模型最显著的特征。此处需要说明的是: 照相机成像是利用凸透镜成倒立缩小的实像, 并且像与物分别位于透镜的两侧, 但在针孔模型的前提下, 可将实像关于光心做

中心对称变换，从而使像与物都位于光心的同侧且像为正立的。

原理见下图（坐标系建立说明：首先以  $O$  为原点建立相机的坐标系，同时以相机坐标系的  $(0,0,f)$  为像坐标系的原点，记为  $O'$ ，同时使像坐标的  $X$  轴和  $Y$  轴分别平行与相机坐标系中的  $X$  轴与  $Y$  轴）。

由于考虑的是针孔成像，所以光线是以直线方式到达光学中心，所以我们可以知道， $P$  点， $P_u$  点和  $O$  点三点是共线的。由相似的知识知，

$$\begin{cases} \frac{f}{Z} = \frac{X_u}{X} \\ \frac{f}{Z} = \frac{Y_u}{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{Z \times X_u}{f} \\ Y = \frac{Z \times Y_u}{f} \end{cases}$$

所以  $P$  点在相机坐标系的坐标可以只有一个自由度，在这里我们将  $P$  的  $Z$  轴分量设为自由度，所以  $P$  点的在相机坐标系下的坐标为  $(\frac{Z \times X_u}{f}, \frac{Z \times Y_u}{f}, Z)$ 。

题目最终的目标是要确定两台相机的相对位置。现在我们有两台照相机，相机 1 和相机 2，分别利用上述的方法建立其来两个不同的坐标系，记为坐标系 1 和坐标系 2。为了确定两台照相机的相对位置，只要知道一台相机在另一个相机坐标系内的坐标即可。这里我们求相机 2 在坐标系 1 内的坐标。

当两台照相机对同一个物体  $P$  照相时，假设  $P$  在坐标系 1 内的坐标为  $(X_1, Y_1, Z_1)$ ，在坐标系 2 内的坐标为  $(X_2, Y_2, Z_2)$ 。假设这里坐标转换的转移矩阵和偏移矩阵分别为  $R$  和  $T$ 。

则有

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = R * \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} + T$$

其中  $R$  为  $3*3$  的旋转变换矩阵，且  $R$  为一正交矩阵， $T$  为  $3*1$  的平移变换矩阵。只要求出矩阵  $R$  和  $T$ ，则就可以求出两台相机的相对位置。

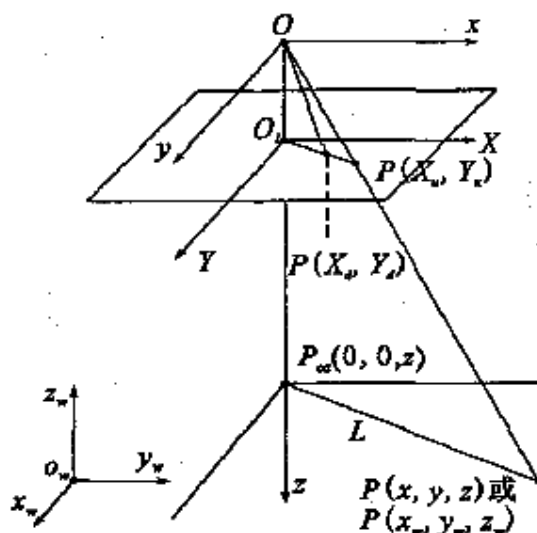


图1 针孔成像模型原理图

3) 对问题一的解答:

a) 问题分析:

根据定理一, 二, 三, 我们通过找出图像中各曲线的公切线和切点来确定各圆圆心的像坐标, 因为标靶中任意两个圆的公切线与圆的切点经过点投影式映射后仍为该曲线的切线与切点。因此, 在像平面中, 我们只需找到一个圆的像与另外两个像的外公切线, 就能找到与该像相切的两对切点, 两对切点连线的交点即为该圆圆心的像, 以图像中心为原点建立坐标系, 并利用平面解析几何的方法来确定其坐标。

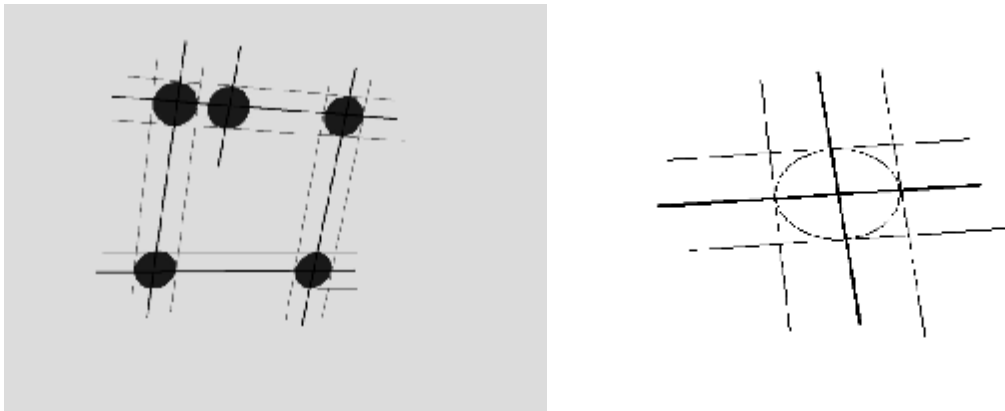


图2 求解标靶像圆心坐标原理图

b) 算法: 标靶像坐标的切线切点算法

用 C++语言将像的图像读入计算机, 并对图像转换为 bmp 单色位图, 运用 matlab 将图像读入计算机中转换为一个大小为 1024\*768 的 01 矩阵, 且黑色区域的值为 0, 白色区域的值为 1 (可主观变更其取值), 方便计算机求解。具体算法如下:

- Step1: 将原题中的图 3 (标靶中的像)读入一个矩阵中, 每一个像素点对应一个矩阵元素, 其中 1 代表黑色, 0 代表白色。找到所有图形的边界点, 并且记录下来。
- Step2: 选取两个圆, 记为圆 1 和圆 2。
- Step3: 分别从圆 1 和圆 2 的边界中选取一个点, 记两个点的连线为直线 L, 如果 L 是外公切线, 则记录下 L 与圆 1 的切点。
- Step4: 如果找到两条圆 1 的两个切点, 则到 step 5, 否则返回 step 3。
- Step5: 连接圆 1 的两个切点, 记录下这个直线。如果已经为所有的圆找到两条过圆心的直线则到 step 6, 否则返回 step 2。
- Step6: 对所有的圆, 找到他们两条过圆心的直线的交点即为圆心。

由于图是有像素点来描述的，所以在读入矩阵后，图形都是离散模型，因此在 step 3 中寻找到的外公切线并不只有两条，这就需要有一个方法对求出来的切线进行排除，找到两条最符合的。所以我们又对算法进行了一个改进。我们主要对 step 1 和 step 3 有所修改，提出了基于罚函数思想的算法：

#### c) 改进算法：基于罚函数思想的切点切线算法

Step1：将原题中的图 3 (标靶中的像)读入一个矩阵中，每一个像素点对应一个矩阵元素，其中 5 代表黑色，6 代表白色。找到所有图形的边界点，并且其值记为 0。

Step2：选取两个圆，记为圆 1 和圆 2。

Step3：分别从圆 1 和圆 2 的边界中选取一个点，记两个点的连线为直线  $L_i(i=1,2,3,4,5\dots)$ ，在一定范围内，遍历所有直线上的点，将所有点的值相加，记为  $s_i$ 。

Step4：如果所有的点都遍历完，则到 step 5，否则返回 step 3。

Step5：选取  $s_i(i=1,2,3,4,5\dots)$ 最小的两条直线，就是两条外公切线，并且找到与圆 1 的交点，就是要求的切点。

Step6：连接圆 1 的两个切点，记录下这个直线。如果已经为所有的圆找到两条过圆心的直线则到 step 7，否则返回 step 2。

Step7：对所有的圆，找到他们两条过圆心的直线的交点即为圆心。

#### d) 算法分析：

基础算法和改进算法的时间复杂度都是  $O(n^2)$ ，其中  $n$  是边界点的个数。基础算法比较粗糙，因为读入矩阵的图像都是离散的，我们得到的外公切线条数并不是理想的只有 2 条，基础算法并不能对所有的外公切线进行取舍。改进的算法克服了这个不足，借用了运筹学的罚函数的思想，将边界上的点记为 0，白色记为 6，黑色记为 5，算法寻找直线上所有点的和最小的直线记为切线，这样就可以求出所需要的外公切线。

#### 4) 对问题二的回答：

利用上述算法，借助计算机我们得到了以下结果：

在照相机坐标系下其坐标为（单位：像素）：

点	A	B	C	D	E
像坐标	(-194,-193,1577)	(-97,-186,1577)	(119,-169,1577)	(67,113,1577)	(-226,114,1577)

表1 .相机坐标下标靶圆心的像坐标

运用下面的公式计算出以 mm 为单位时， $P_{Ui}$  的坐标  $(X_{Ui}, Y_{Ui}, Z_{Ui})$ 。

$$\begin{cases} X_{fi} = N \times X_{Ui} \\ Y_{fi} = N \times Y_{Ui} \\ Z_{fi} = N \times Z_{Ui} \end{cases}$$

说明：N 为图像上单位距离上的像素点的个数，这里取 3.78 pixels/mm。  
这样我们得到的 $P_{Ui}$ 的坐标如下表：

点	坐标
$P_{U1}$	(-51.3 , -51.1 , 417.2)
$P_{U2}$	(-25.7 , -49.2 , 417.2)
$P_{U3}$	(31.5 , -44.7 , 417.2)
$P_{U4}$	(17.7 , 29.9 , 417.2)
$P_{U5}$	(-59.8 , 31.2 , 417.2)

表2 国际单位标靶圆心的像坐标

说明：在这里点 A,B,C,D,E 分别与 1,2,3,4,5 相对应。

#### 5) 求解标靶圆心在照相机坐标系下的坐标

##### a) 问题分析:

假设物点 $P_i$  ( $i=1..m$ ) 在照相机坐标系里的坐标为 $(X_i, Y_i, Z_i)$ ，物点 $P_i$ 在的像点 $P_{Ui}$ 在像平面坐标设为 $(X_{Ui}, Y_{Ui}, Z_{Ui})$ ，在针孔模型的基础上，P 点， $P_u$ 点和 O 点三点是共线的。由图中相似关系知，

$$\begin{cases} \frac{f}{Z_i} = \frac{X_{Ui}}{X} \\ \frac{f}{Z_i} = \frac{Y_{Ui}}{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{Z_i \times X_{Ui}}{f} \\ Y = \frac{Z_i \times Y_{Ui}}{f} \end{cases}$$

在像点坐标已知得情况下， $P_i$ 点在相机坐标系的坐标可以只有一个自由度，在这

里我们将 $P_i$ 的 Z 轴分量设为自由度，所以 $P_i$ 点的在相机坐标系下的坐标为

$(\frac{Z_i \times X_{Ui}}{f}, \frac{Z_i \times Y_{Ui}}{f}, Z_i)$ 。若有多个物点以及各个物点对应得像点坐标，我们就可以利用物点之间的关系得出各个物点的坐标。

##### b) 求解方法:



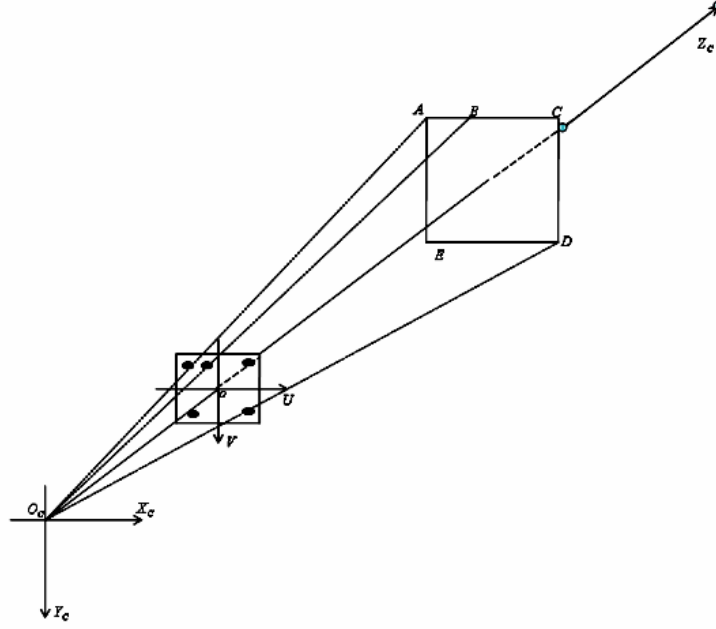


图3

如下图所示，我们可以利用的已知条件就是四边形 ACDE 是一个正方形，正方形边长是 100mm 并且还知道 B 点的位置。我们可以建立下面五个方程。

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED} \\ |\overrightarrow{AC}| = 100 \\ |\overrightarrow{CD}| = 100 \\ \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{ED} \\ \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \times \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

转换为坐标表示即：

$$\left\{ \begin{array}{l} X_3 - X_1 = X_4 - X_5 \\ Y_3 - Y_1 = Y_4 - Y_5 \\ Z_3 - Z_1 = Z_4 - Z_5 \\ (X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2 + (Z_3 - Z_1)^2 = 100^2 \\ (X_4 - X_3)^2 + (Y_4 - Y_3)^2 + (Z_4 - Z_3)^2 = 100^2 \\ (X_5 - X_1) \times (X_4 - X_5) + (Y_5 - Y_1) \times (Y_4 - Y_5) + (Z_5 - Z_1) \times (Z_4 - Z_5) = 0 \\ X_2 - X_1 = (X_3 - X_1) / 3 \\ Y_2 - Y_1 = (Y_3 - Y_1) / 3 \\ Z_2 - Z_1 = (Z_3 - Z_1) / 3 \end{array} \right.$$

其中  $X_i = \frac{Z_i \times X_{ui}}{f}$  ,  $Y_i = \frac{Z_i \times Y_{ui}}{f}$  (i=1,2,3,4,5)

经过简单分析可以知道一共有五个未知量： $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$ 。但是我们知道一共有 9 个方程，我们采用最小二乘法求解这个超定方程组，得到了五个点在照相机坐标系内的坐标。

点	坐标
A	(-54.9893 , -54.7059 , 447.001)
B	(-28.3099 , -54.2849 , 460.255)
C	(36.7309 , -52.1641 , 486.762)
D	(22.2766 , 37.5709 , 524.33)
E	(-69.4437 , 35.0291 , 484.569)

表3

(注：单位为毫米)

由于此处所解的方程为一超定方程，只能利用最小二乘法求其近似解，因此我们对求出得解进行了误差分析，结果如下表：

检验项	利用表 3 的数据的计算值	相对误差
$ \vec{ED} $	100-1.65 (毫米)	1.65%
$\vec{AC}$ 与 $\vec{CD}$ 夹角	$\frac{\pi}{2} - 0.041$ (弧度)	2.6%
$\vec{AE}$ 与 $\vec{ED}$ 夹角	$\frac{\pi}{2} - 0.041$ (弧度)	2.6%
$\vec{BC}$ 与 $\vec{AB}$ 夹角	0.05 (弧度)	5%

表4

上面四组数据是我们挑选的几组验证只，通过相对误差的计算，我们发现四组数据误差都在 5% 以内，所以我们认为我们得到的数据准确度还是比较高。

6) 利用空间坐标变换法确定两部照相机的相对位置：

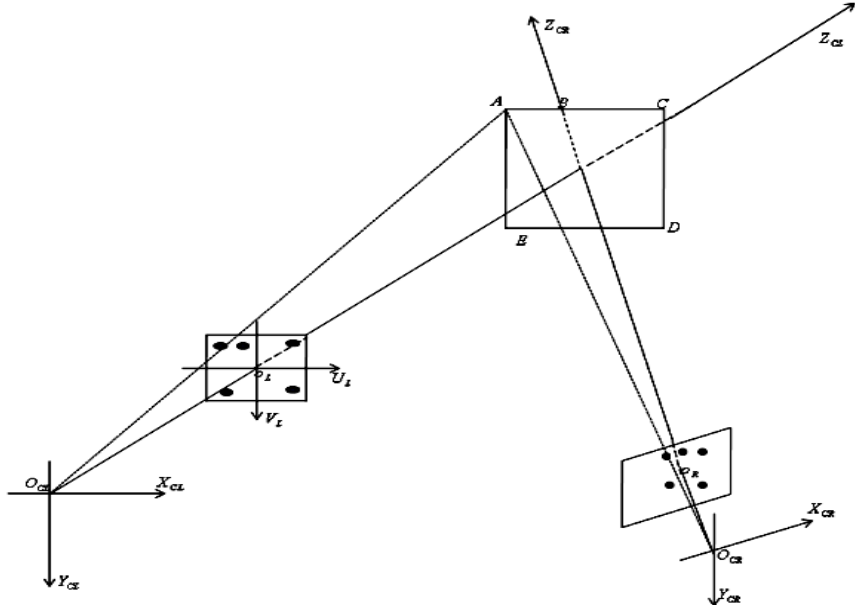


图4

a) 问题分析:

图像来确定标靶上一些特殊点在照相机坐标系下的坐标。基于此，当用两部固定的相机分别拍摄标靶得到两张不同的照片，我们可以利用照片确定标靶上各个圆圆心分别在两部相机坐标系下的坐标，分别记为：

$A_1 (x_1, y_1, z_1)$  和  $A_2 (x_2, y_2, z_2)$ ，根据坐标系变换的关系式有：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = R * \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + T$$

其中  $R$  为  $3*3$  的旋转变换矩阵， $T$  为  $3*1$  的平移变换矩阵；

运用最小二乘法求出近似解求出矩阵  $R$  和  $T$ 。

则相机 2 在坐标系 2 的坐标设为  $(X_0, Y_0, Z_0)$ ，则相机 2 在坐标系 1 内的坐标设为  $(X'_0, Y'_0, Z'_0)$ 。则有

$$\begin{bmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \\ Z'_0 \end{bmatrix} = R * \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + T$$

根据前面的模型建立知，坐标系原点一般设在照相机光学中心上，所以  $(X_0, Y_0, Z_0) = (0, 0, 0)$ 。因此  $(X'_0, Y'_0, Z'_0) = T$ 。所以照相机 2 在坐标系 1 中的坐标为  $T$ 。所以任取一个世界坐标系以两台照相机为端点的向量都为  $T$ 。

b) 求解过程:

将旋转和平移矩阵写成各元素的形式：

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

可得到线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = r_{11} * x_2 + r_{12} * y_2 + r_{13} * z_2 + T_1 \\ x_2 = r_{21} * x_2 + r_{22} * y_2 + r_{23} * z_2 + T_2 \\ x_3 = r_{31} * x_2 + r_{32} * y_2 + r_{33} * z_2 + T_3 \end{cases}$$

同时旋转矩阵  $R$  为一正交矩阵，则有  $R * R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ；因此可以得到以

下方程：

$$\begin{cases} r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1 \\ r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 = 1 \\ r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 1 \\ r_{11} \times r_{21} + r_{12} \times r_{22} + r_{13} \times r_{23} = 0 \\ r_{11} \times r_{31} + r_{12} \times r_{32} + r_{13} \times r_{33} = 0 \\ r_{21} \times r_{31} + r_{22} \times r_{32} + r_{23} \times r_{33} = 0 \end{cases}$$

注： $r_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是矩阵  $R$  第  $i$  行和第  $j$  列的数

于正交旋转变换矩阵  $R$ ，其中的元素的自由度式  $3$ ，即有三个未知参数，因此要确定两个坐标系的正交变换的控制参数，总共需要确定六个待定系数，所以只需要两个标定点的坐标即可求出矩阵  $R$  和  $T$ 。

但是题中所给的标定点的数目多余  $2$ ，则此方程组即变为一超定方程组此时可运用最小二乘法求出近似解。

## 7. 模型分析及检验

1) 对问题三的回答：

本问题为点投影式映射问题，一些平面几何中能表征原标靶的特性并不适用于像，因此我们用以下方法对所求得的结果进行检验：

a) 方法一：利用共线不变性对结果的检验

在三维空间内，对于任意的三点  $P_1, P_2, P_3$ ，我们将该三点的共线程度用向量  $\overrightarrow{P_1P_2}$  和  $\overrightarrow{P_1P_3}$  夹角的正弦值来表征，记为共线度  $L$ 。

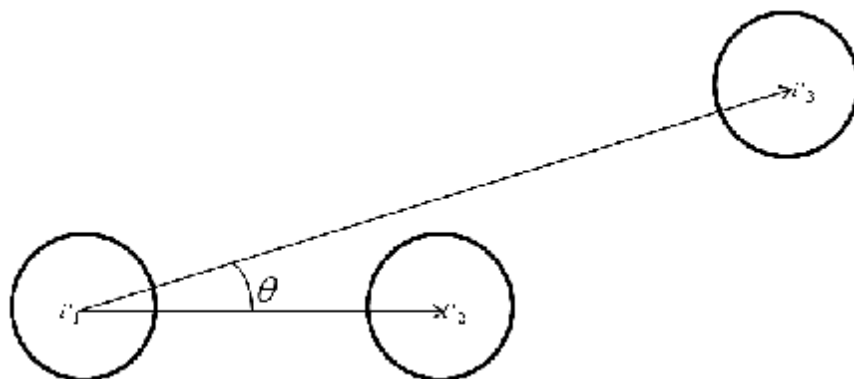


图5 共线不变性检验原理

注：共线度取值在 0 到 1 之间，并且其值越接近 0 说明线性度越好，反之则越差。  
其表达式为：

$$L = \sqrt{1 - \left( \frac{\overrightarrow{P_1P_2} * \overrightarrow{P_1P_3}}{\| \overrightarrow{P_1P_2} \| * \| \overrightarrow{P_1P_3} \|} \right)^2}$$

由定理一可以知道，共线的三点在经过点投影式映射后所得的像点仍是共线的。依据此原理，我们对所求得圆心像坐标进行共线度检验，从而对该模型准确程度进行评价。

将求得的 A, B, C 三个圆圆心坐标数据带入上式，计算得出  $L=0.0065$ ，该值非常接近 0，这表明 A, B, C 三个圆圆心的像的共线度较好，基本符合射影几何中共线不变性的原则。

但此方法只使用了三个标定点，使用的算例少，偶然误差大，稳定性不高，所以我们引入方法二。

## b) 方法二：基于射影变换交比不变性的检验方法

### i. 方法说明：

定义：共线四点 A,B,C,D 的交比为  $J(A,B;C,D) = \frac{AC}{BC} / \frac{AD}{BD}$

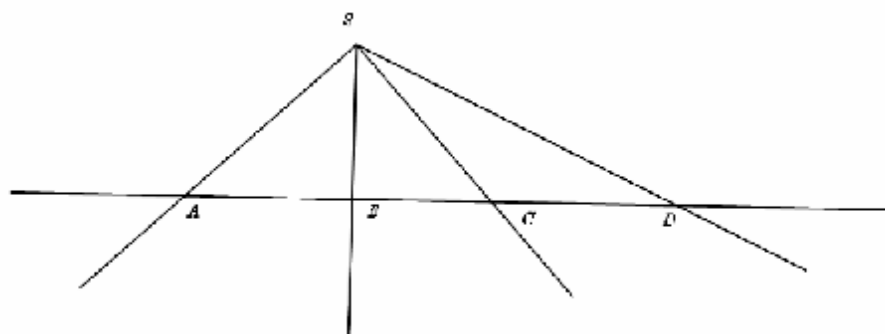


图6 交比

上文提出了一种由基于切点切线结合关系保持不变的标靶像圆心坐标算法。在定理一中，射影变换具有共线四点交比保持不变的性质，提出了一种运用交比不变性的检验模型。

此处我们定义交比偏离度 $\eta_J$ 的概念，其定义式为：

$$\text{交比偏离度} = \frac{|\text{标靶共线四点交比} - \text{映射像共线四点交比}|}{\text{标靶共线四点交比}} * 100\%$$

$$\text{即 } \eta_J = \frac{J(AB, CD) - J(A'B', C'D')}{J(AB, CD)} * 100\%$$

标定映射像交比相对于原像交比的相对偏离值越小，其像坐标算法精度高。

ii. 算法描述：

STEP 1: 在平面中构造共线的四点。

STEP 2: 在各自坐标系下，运用解析几何，求得交比各个参量的值；

STEP 3: 计算交比 $J(AB, CD)$ 和 $J(A'B', C'D')$ 的值；

STEP 4: 计算交比偏离度 $\eta_J$ 的值；

iii. 计算过程：

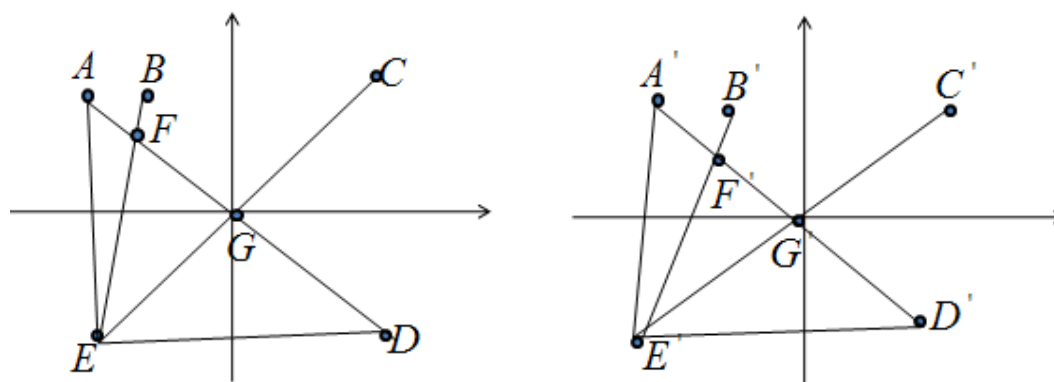


图7 构造共线四点示意图

在标靶图中，连接 EA，EB，EC，ED，AD；AD 交 EB 于 F，交 EC 于 G；同理，在像坐标中重复上述操作，构造如图 7 所示。

运用 mathematica 进行计算，解得

$J(AF, GD)$	$J(A'F', G'D')$	$\eta_J$
1.42857	1.41127	1.21%

表5

通过计算可知，点线结合不变性求标靶向圆心坐标的方法求得的像和原像间相对误差为 1.21%。

iv. 方法精度和稳定性讨论：

仅有一组数据我们无法估计此方法的精度和稳定性，因此我们在标靶及其像

中重新构造四个共线点，计算多组交比偏离比。

另一种共线点取法：

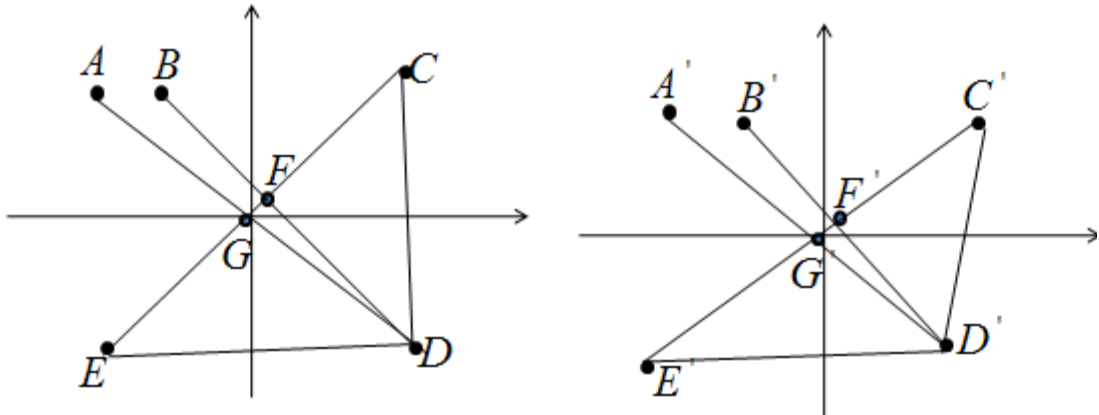


图8 构造共线四点示意图

运用 mathematica 进行计算，解得

$J(CF, GE)$	$J(C'F', G'E')$	$\eta_J$
3.33334	3.29667	1.14%

表6

由于特征点只有五个，取共线四点只有以上两种方法，但由问题一，可以求得五个特征圆的切点，利用这些切点，可以构造足够多组数据对方法的精度进行检验。

但在构造共线点时，并不能涵盖所有求得五个像圆心坐标，最多只能保证涵盖四个圆心坐标，共线四点得取法：

- 1.从五个圆心中任选出四个圆心；
- 2.选择一个切点，使其能构造涵盖四个圆心的共点四线；
- 3.计算像平面和物平面中各共线四点得交比；
- 4 计算交比偏离度 $\eta_J$ 。

运用 mathematica 进行多组数据的计算，解得的交比偏离度如下图：

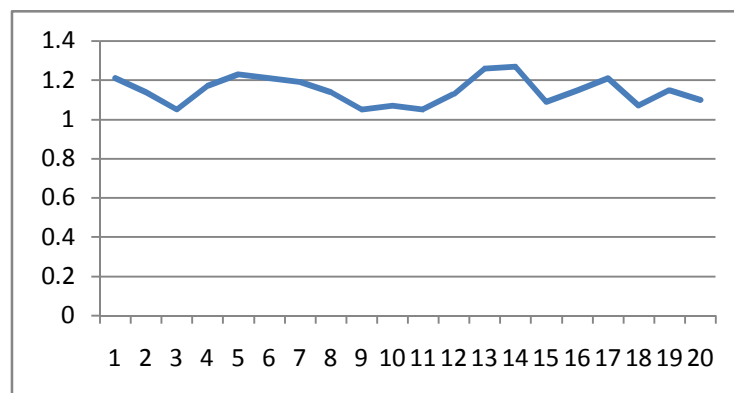


图9 交比偏离比

由图 9 数据，交比偏离度在 1.15%左右波动，通过计算求得其期望为  $E(\eta_j)=1.14\%$ ，且波动幅度不大，计算其方差为  $D(\eta_j)=0.095$ 。

数据显示，运用交比偏离度验证像坐标的模型的方法具有精度高，可检验数据数量多，波动性小的优点；但此方法数据计算量较大。

检验算法时间复杂度为  $O(n)$ ， $n$  为图像点数。该算法时间复杂度主要取决于在构造共线点所耗费的时间，而选定点后各种数值计算量相对于求共线点可以忽略不计。在构造共线点时，需要遍历 01 矩阵选出五个点(切点和圆心)

图像中已知点多，可构造多种四点共线的直线，且运用解析几何的方法，将图像转化为数字计算，相对误差的期望较小，算法的精度较高，而且方差很小，波动幅度不大，稳定性较高。

## 2) 模型分析

在模型一中，我们建立了一个根据小孔成像原理，不考虑透镜畸变的线性模型，这个模型的优点是模型比较简单，易于计算出物点的坐标。通过模型 1，我们计算出了物点在第一个照相机坐标系下的坐标，但是这个模型的精确度比较低，因为实际光线通过镜头是会发生偏移的，所以我们提出了一个改进模型，考虑了畸变的因素，这个模型优点是精确度有所提高，但是它对数据的要求比较高，我们没有足够的数据来求解出物点坐标。

## 8. 模型拓展

所谓照相机的非线性模型，是指成像过程不服从小孔成像模型。线性模型为小孔成像模型，不能准确地描述成像几何关系，在远离图像中心处会有较大的畸变，使得所量测得像点坐标产生误差。摄像机的非线性模型可使用

$$\begin{cases} X_u = X_d + \delta_x(X_d, Y_d) \\ Y_u = Y_d + \delta_y(X_d, Y_d) \end{cases}$$

其中  $(X_u, Y_u)$  是线性模型下图像点的理想坐标。 $(X_d, Y_d)$  是实际投影点的图像坐标。 $\delta_x, \delta_y$  是非线性畸变值，它与图像点在图像中的位置有关，可以用下述公式来表示：

$$\begin{cases} \delta_x(x, y) = k_1 x(x^2 + y^2) + (p_1(3x^2 + y^2) + 2p_2 xy) + s_1(x^2 + y^2) \\ \delta_y(x, y) = k_2 y(x^2 + y^2) + (p_2(3x^2 + y^2) + 2p_1 xy) + s_2(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$\delta_x, \delta_y$  的第一项称为径向畸变，第二项称为离心畸变，第三项称为薄棱镜畸变。

式中  $k_1, k_2, p_1, p_2, s_1, s_2$  称为摄像机的非线性畸变参数。在这些参数已知的情况下，可以通过以上表达式根据理想针孔模型所求得的解的坐标来得到考虑畸变的实际像点的坐标，之后利用坐标系正交变换的方法就可以确定两部照相机之间的相对位置

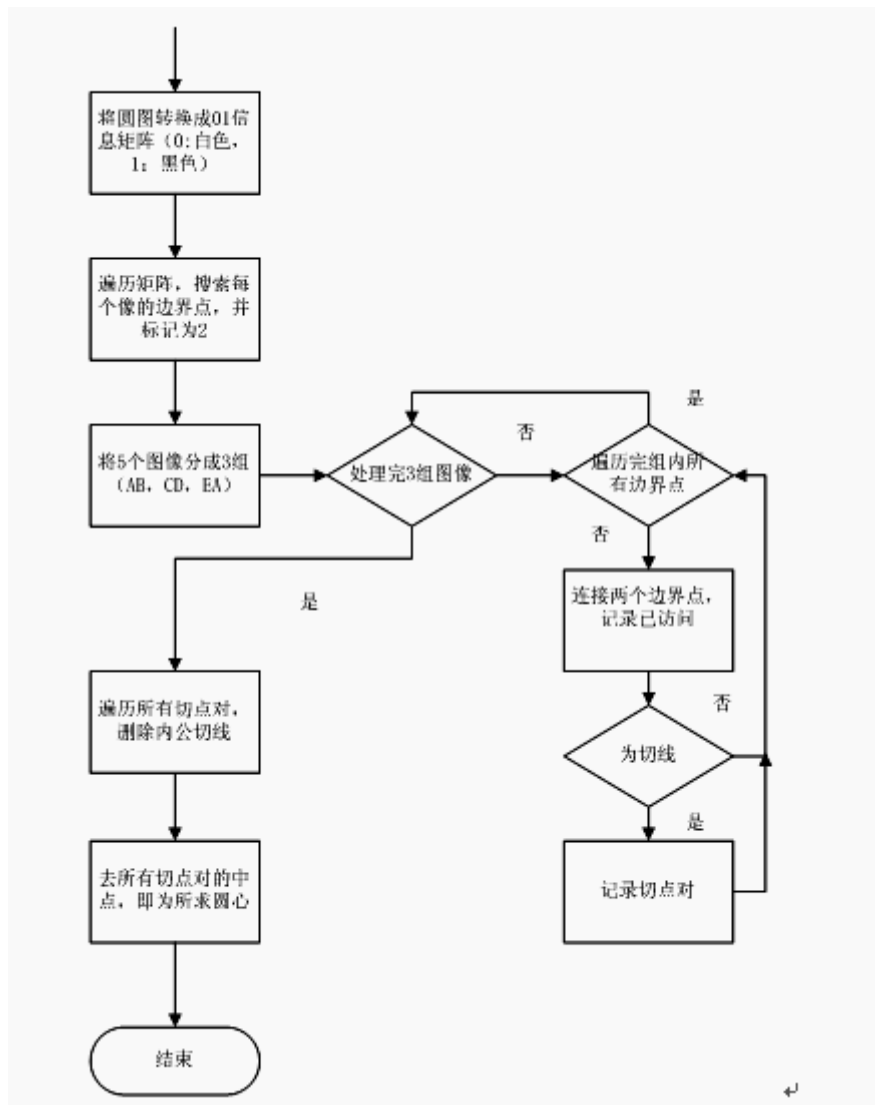


## 9. 参考文献

- [1] 姜启源, 谢金星, 《数学模型 (第三版) 》, 北京, 高等教育出版社, 2005
- [2] 郭启军, 钱新恩, 《线性模型下的摄像机标定》, 湖北汽车工业学院学报, 22 卷第一期, P45, 2008
- [3] 张效栋, 孙长库, 《基于单一平面标靶的非共面点阵列建立方法》, 科学技术与工程, 8 卷第八期, P1985, 2008
- [4] 吴毅红, 视觉基础介绍, [www.nlpr.ia.ac.cn/English/rv/download.htm](http://www.nlpr.ia.ac.cn/English/rv/download.htm), 2008 年 9 月 20 日
- [5] 宋卫东, 《解析几何》, 北京, 高等教育出版社, 2003

## 10. 附录

问题一基本算法流程图：



问题一“标靶像坐标切线切点算法”求出的切点坐标：

点	A	B	C	D	E
第一对切点	(-181,-235) (-198,-155)	(-84,-228) (-102,-149)	(133,-209) (114,-135)	(77,86) (61,154)	(-221,83) (-223,153)
第二对切点	(-222,-168) (-156,-220)	(-127,-200) (-56,-171)	(105,-199) (141,-139)	(39,138) (96,93)	(-262,102) (-191,123)

单位：像素