第 28 卷 第 1 期 数学的实践与认识 Vol. 28 No. 1
1998 年 1 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan., 1998

零件参数设计的数学模型

黄 杲 陈旭东 邵 伟
指导教师： 数模组
(浙江大学，杭州 310027)

编者按 本文先将粒子分离器参数 y 进行局部线性化处理，并将 $\frac{\Delta y}{\sigma_y}$ 化归为标准正态，其中 $\sigma_y^2=\sum_{i=1}^{7}(\frac{\partial y}{\partial x_i}\sigma_i)^2$，最后把总费用的目标函数归纳为一个标准正态的式子 (文中 (4) 式). 以上结果合理、简洁明确. 采用网格法及蒙特卡罗法分别计算，结果吻合、满意，得到的解较优，其中用蒙特卡罗法 (取二万个点) 计算，在维数不变的情况下，不失为一种速而有效的算法.

摘 要 本文建立了一个关于零件参数设计的数学模型. 本文首先利用概率的理论，假设各零件产品的参数服务从正态分布，推出粒子分离器某参数 (y) 偏差的分布函数，进而可得一批产品总费用的目标函数，运用龙贝格数值积分将其转化为计算机可求值的函数，然后运用网格搜索法和蒙特卡罗法求出目标函数的全局最优解.

本文将两种方法的结果精度、算法复杂度等进行比较，重点讨论了效果较好的蒙特卡罗法. 本文最后分析了模型误差，并对模型进行了评价和推广.

本模型最终得出产品总费用为 42.146 万元 / 千件，其设定的零件参数为 $X^T[0.075,0.375, 0.123,0.115, 1.273,12,0.771]^T$，其容差等级为 $G^T=[B,B,B,C,C,B,B]^T$.

一、问题的分析

要求解的问题是使总费用最低，而总费用包括各零件成本及次、废品损失费，综合考虑两种因素，问题可归纳为总费用的非线性优化问题.

由于待优化的目标函数复杂，无法利用其解析性质求最优解，故可考虑用直接全局搜索法或随机试验点法.

从生产实际考虑，本问题对解的精确度要求很高，但是对求解算法的实时性无明确要求. 我们认为，只要求解时间不是太长，都是可接受的.

二、模型的假设及说明

1. 假设各零件参数服从参数 μ_i,σ_i^2 为的正态分布，且不同零件的参数相互独立.

2. 假设各零件容差的等级与其标定值的比为定值，分别为： A 级 ±1%, B 级 ±5%, C 级 ±10%.

说明 根据概率论知识和工程实际生产的一些测量数据可知，成批生产的零件的参数服从能数为 μ_i,σ_i 的正态分布，其中 μ_i 为各零件参数的期望值 (标定值), σ_i 为均方差 (即容差的 1/3), 可推知各零件的偏差 Δx_i 服从参数为 $0,\sigma_i$ 的正态分布.

三、文中用到符号及说明

y:	产品某参数	x_i:	各零件参数
y_0:	y 的目标值($y_0 = 1.5$)	μ_i:	各零件参数的标定值
y_x:	各零件标定值确定的零件参数	C_i:	各零件成本
		Δy:	产品的参数的偏差
g_i:	各零件容差等级比	xi :	各零件参数偏差
x^T:	x_i 标定值向量$(i=1,2,\cdots,7)$	p_i :	各零件参数均方差
$x^{(7)}$:	x^T 的取值空间	p_1:	次品概率
G^T:	等级取值向量	p_2:	废品概率
σ_y:	产品参数的均方差		

四、模型的建立和求解

本模型的建立基于概率论与误差的有关理论.

各零件偏差 Δx_i 相对于其标定值较小，根据公式 (1), y 在 y_x 附近可以表示为：

$$y \approx y_x + \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot dx_i \tag{2}$$

由于 Δx_i 较小，则可得 $dx_i \approx \Delta x_i$, 由于 $\Delta y = y - y_x$, 则

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \tag{3}$$

在此，我们不加证明的引入：

引理 1　x_i 服从参数为 μ_i, σ_i 的正态分布，且彼此相互独立，α_i 为不全为零的常数，若 $X = \sum_{i=1}^{7} x_i$, 则

$$X \sim \left(\sum_{i=1}^{7} \alpha_i^* \mu_i, \sum_{i=1}^{7} \alpha_i^{2*} \sigma_i^2 \right)$$

根据公式 (3) $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ 对应一组 x_i 为一定值，而与 Δx_i 无关，则由引理 1 可得

$$\Delta y \sim N(0, \sigma_y^2), \qquad \left(\sigma_y^2 \triangleq \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \sigma_i \right)^2 \right)$$

(以上结论也可由方差合成定理推得，见文献 [2] p93).

由概率论知识可得 $\frac{\Delta y}{\sigma_y} \sim N(0,1)$

目标函数的建立

产品总费用 = 零件总成本 + 次品的损失费 + 废品损失费

即 $W = \sum_{i=1}^{7} C_i + 1000 \times p_1 + 9000 \times p_2$ 可得

$$\begin{aligned} W = \sum_{i=1}^{7} C_i + 9000 + 1000 \times \left[\Phi\left(\frac{1.4 - y_x}{\sigma_y} \right) - \Phi\left(\frac{1.6 - y_x}{\sigma_y} \right) \right] \\ - 8000 \times \left[\Phi\left(\frac{1.8 - y_x}{\sigma_y} \right) - \Phi\left(\frac{1.2 - y_x}{\sigma_y} \right) \right] \end{aligned} \tag{4}$$

目标函数为

$$\min \quad W, \qquad \text{s.t} \quad X^T \in X^{(7)}$$

(一) 对于原设计数据的求解

1. 在 Mathematics 2.1 下运行，代入数据 $X^T=[0.1,0.3,0.1,0.1,1.5,16.0.75]$, $G=[B,C,C,C,C,C,B]$ 可得结果如下：

$y=1.72559$, $p_1=0.6240$, $p_2=0.2505$, $W=307.85$ 万元.

从结果可以看出，$p_1+p_2=0.8745$, 即产品大部分为次废品，这是 y_x 偏离 y_0 过大的结果，此时产品总费用主要由次废品损失费决定，由此可知，在进行参数设计时，应尽量先使 y_x 靠近 y_0, 同时降低均方差. 这也是本模型降低算法复杂度的一个方向.

(二) 对目标函数 $\min W$ 的求解及参数的重新设计

1. 将目标函数转化为计算机可求解模型

由于原目标函数中的积分部分中被积函数为正态分布函数，且其积分限为含有 7 维变量的复杂函数，无法直接求解，所以需将其转化为计算机可求解模型，我们考虑用二种方法进行转化.

对于标准正态分布函数可采用最小二乘拟合法逼近，将其转化为多项式表达，但从其结果来看，误差较大，故不可取. 所以我们采用精度较高的龙贝格数值积分法来转化目标函数 [4]. 此方法为本模型高精度求解的出发点.

2. 用直接搜索法求最优解 (网格法)

原目标函数为 7 维多峰函数，无法用解析法精确求解，故考虑用直接搜索法. 常用的算法对于一般的多峰函数极值问题只能求出局部最优解，而网格法为求解多峰函数全局最优解的一种较适宜的方法，所以我们首先考虑用网格法求解最优目标.

我们对于每一个 x_i 在其取值范围内均取 6 个步长，分为 6^7 个网格，结合可能的容差等级组合，在 Pentium 120 计算机上运行，搜索约二十分钟后，得到一个最优解，结果是 $X^T=[0.075, 0.345, 0.115, 0.115, 1.275, 12, 0.7875]^T$, $G^T=[B,B,B,C,C,B,B]^T$, $Y_X=1.497145$, $\sigma_Y=0.069220$, $w=42.49146$ 万元. 从结果可以看出，在一定精度内已求得一个较好的最优解，我们可以通过降低算法复杂度，使模型得到更好的应用.

但是根据网格法基本原理，其循环次数由步长所决定，而步长又由模型精度所决定，故在一定精度要求下，其算法复杂度不能大幅度降低. 我们可考虑采用蒙特卡罗法进行求解.

3. 蒙特卡罗法

蒙特卡罗法，也就是随机实验点法. 它的基本思想是：在函数的可行域内随机地选取实验点，由于随机取得的点在区域中分配比较均匀，所以对函数的大致形态能较好地体现 [3].

模型中的随机点是用以下方法产生的.

设 $m=2^{16}$, $r_0=5$, 由迭代式可得 (0, 1) 间的 p_i

$$\begin{cases} r_i = \operatorname{mod}(2053 r_{i-1} + 13849; m), & i = 1, 2, \cdots \\ p_i = r_i/m & p_i\text{为第}i\text{个随机数} \end{cases}$$

设 q_i 为 a 到 b 间的随机数，则 $q_i=a+(b-a)p_i$. 我们编制了蒙特卡罗算法的程序 (略). 程序的运行时间为 2 分钟，最终的计算结果为 $X^T=[0.0778,0.374,0.0979,0.1067,1.200,12,526,0.636]^T$, $G^T=[B,B,B,C,C,B,B]^T$; $y_x=1.499136\sigma_y=0.069125$; $W=42.3174$ 万元. 为了降低蒙特卡罗法网格法的复杂度，采用了一些优化的方法：

(1) 程序的优化

必要的判断语句应尽量提早进行，以减小循次数或计算量. (如：y_x 应尽量靠近 y_0, 因此可将偏离 y_0 过大的 y_x 判断排除，以减少计算次数).

(2) 数据排除技巧

从粗略的直接搜索法结果可以看出，不同容差等级组合对应的局部最优角相差较大，而 G_1^T 和 G_2^T 因为总成本过大，是不可能取到的.

4. 为进一步比较内最优解的大小，可分别对优化目标在 G_1^T 和 G_2^T 内的最优解附近作探测性移动 (类似于直接搜索方法中的 Hooke=Jeeves 方法 [3]), 进行高精度计算，分别得到 $W_1'=43.14865$, $W_2'=42.68475$, 因此，能够求得具有一定精度的最优解 42.14865 万元. 此时所对应的零件参数为

$$X^T=[0.075,0.345,0.123,0.115,1.273,12,0.771]^T,$$
$$G^T=[B,B,B,C,C,B,B]^T,$$

$$y_x=1.49683,\qquad \sigma_y=0.068777,\qquad W=42.1463\ 万元.$$

五、模型的检验及误差分析

(一) 模型的检验

由于我们没有一个确定的标准对本模型的解进行判断检验，只能采取不同的方法，对结果进行比较.

检验模型

在对题目中给定数据的计算结果分析时，我们曾说过，在设计参数时，应尽量使 y_X 靠过 y_0，由此可建立如下模型．在同一容差等级组合下，令 $y_x=y_0$ 将 x_5 视为

$$174.42\times\left(\frac{x_1}{y_x}\right)\times(x_3/(x_2-x_1))^{0.85}$$
$$\times\left(\left(1-2.62\times\left(1-0.36\times\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{-0.56}\right)^{1/16}\right)\Big/(x_1\times x_7)^{0.5}\right)$$

函数，由概率论知识，当 $y_x=y_0$ 时，若 σ_y，次废品概率越小，总费用越低，因此，可将目标函数变为 $\min\ \sigma_y$ s.t $y_x=1.5$，运行最后结果为 $X^T=[0.075,0.375,0.075,0.12,0.934,12.8,0.5625]^T$；$y_x=1.5000$；$\sigma_y=0.068901$；$W=42.1949$ 万元．比较原模型和检验模型的结果可知，产品的最低总费用应在 42.1～42.2 万元之间，而且对应最低总费用的零件参数值较合理，这说明原模型的算法是可靠的.

另外，网格法和蒙特卡罗方法所求得的最优解也相互吻合，这也说明此结果是值得信赖的.

对于目标函数本身而言，它虽然不是一个初等函数，却是对于七个自变量的连续函数，由连续函数的介值定理，在全局最优解附近存在一个区域，其内任何一点的值均小于其它較点的值，即使这块区域只有整个容许区域的万分之一，在蒙特卡罗方法取二万个点的情况下，落入该区域的概率仍接近 60%(点与点之间相互独立)，在多次运用蒙特卡罗求解的情况下，一般是能够求出全局最优解的，当然，我们并不排除得到的只是局部最优解而非全局最优解的可能性.

(二) 误差分析

1. 建模误差

根据实际情况分析，可知公式 (2) 的推导带有一定误差，它实际上舍弃了 Talyor 展开时的七个变量的一阶无穷小量，其依据是 $\frac{\Delta x_i}{x_i}\le 0.1$，虽然较小，但仍代有一定误差.

2. 计算机截断误差

计算机在进行求解时位长有限，有一部分数值会被舍弃，但对本模型基本上可乎略.

3. 受网格法的步长限制不能搜索到准确数值，该误差可能较大，但通过模型求解部分的探测性移动方法可使该误差减小；

同时，龙贝格数值积分也会有误差，程序中的积分精度为 10^{-5}.

六、模型的评价 (略)

参 考 文 献

[1] 范大茵、陈永华，概率论与数理统计，浙江大学出版社，杭州，1996.
[2] 肖明耀，误差理论与应用，计量出版社，北京，1985.
[3] 席少霖、赵凤治，最优化计算方法，上海科学技术出版社，上海，1983.
[4] 徐士良，C 常用算法程序集 (第二版)，清化大学出版社，北京，1996.