第24卷 增刊2
2007年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 24 Supp.2
Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0095-08

最佳公交路线选择模型

周金健，阎 栋，唐 瑞

指导教师：数模组

（武汉大学，武汉 430072）

编者按： 该论文针对乘客的不同需求，分别建立了不同优先次序的多目标优化模型，说明了不同模型适用的人群。论文给出了这些优化模型的计算方法，得到了较好的结果。论文还分析了算法的复杂性，考虑较为完整。此外，论文对第三问的处理是有价值的。

摘 要： 本文在北京奥运会的背景下讨论了最佳公交路线选择问题。首先利用分层次多目标规划方法，按照出行者的不同类型分别建立了以换乘次数，时间，费用为第一目标的三种路线选择模型。再根据模型的特点设计出相应的求解算法：使用 BFS 算法求解路线选择模型一；Dijkstra 算法分别求出模型二，模型三。在 Dijkstra 算法中，采用了堆的结构把线性数据组织为树形数据，使算法时间复杂度从 $O(n^2)$ 降至 $O(n*\log n)$。最后将所建立的模型与算法分别应用于三个问题的具体求解。

关键词： 分层多目标规划；公交路线选择；BFS 算法；Dijkstra 算法

分类号： AMS(2000) 90C08　　**中图分类号：** O221　　**文献标识码：** A

1 问题重述（略）

2 问题分析

为了方便模型建立和算法设计，首先应从实际交通网络中抽象出一个标准形式的交通网络图，然后基于此图建立最佳路线选择模型。鉴于出行者在选择路线时，所考虑的因素是多方面的，且其考虑因素的优先层次也会因人而异，故应分别进行讨论：对于大部分人而言，由于在奥运会期间，人口剧增，交通也会更加拥挤，因此他们会优先选择最方便的出行路线，即换乘次数最少的路线；对于赶时间的乘客，会偏重于时间花费少的路线；对于长期重复相同路线的乘客，则会优先考虑费用问题。由于公交查询系统应满足用户的各种不同需求，因此可根据出行者的不同类型分别建立以换乘次数，总耗时，费用作为第一目标的分层次多目标规划下的路线选择模型。再根据相应的模型的特点设计出求解算法，最后将上述两个一般模型与算法分别应用于问题一，问题二，问题三的具体求解。

3 模型假设

1) 除具有上下行不同路线的公交外，其他公交均为对开制；
2) 坐环行线经过终点站后要重新收费；
3) 同一地铁站对应的任意两个公汽站之间可以通过地铁站换乘且无需支付地铁费；
4) 两个地铁站间不通过公汽站换乘；
5) 公交系统畅通无阻，不考虑中途发生故障堵车等情况。

4 符号说明

v_i：站点编号 N_i：路径换乘次数 C_i：总费用为 C_i

T_i：总耗时为 T_i l_{ij}：第 i 类交通工具的第 j 条行驶线路

5 模型建立

5.1 标准形式的交通网络图

在一个交通网络中，主要由站点，线路，交通工具三要素组成。考虑到交通工具都是在特定的线路上运行的，故可把交通工具与线路归并成一个因素。而各类站点之间又是通过途经站点的交通工具来加以区别的，除此之外，它们之间是等价的。在站点转车的时候，会有转车时间，这个转车时间由两个交通工具的类型来决定，即站点具有变化的权值。同时线路也有权值，如线路上的行驶时间，收费等等。由此可得标准形式的交通网络图为

$$G=\{V,L,\omega(V),\psi(L)\},$$

其中

$$V=\{v_i \mid i=1,2,3,\cdots,n\}$$

为站点集合。

$$L=\{l_{ij} \mid i=1,2,3\cdots k,\ j=1,2,3\cdots n\}$$

为交通线路集合，l_{ij} 表示第 i 类交通工具的第 j 条行驶线路；$\omega(V)$ 表示站点权值集合，$\forall\, v_i\in V$ 存在三个权值，换乘权值 v_{ni} 耗费时间权值 v_{ti}，费用权值 v_{ci}；$\psi(L)$ 为线路权值集合。$\forall\, l_{ij}\in L$ 存在三个权值，换乘权值 l_{nij}，耗费时间权值 l_{tij}，费用权值 l_{cij}。

5.2 路线选择模型

出行者在选择交通路线时，面临的可行路线一般有多个，因此查询系统应根据用户的不同需求从中做出选择。鉴于用户在选择路线时，会综合考虑诸多因素，主要因素有换乘次数，总耗时，出行费用，为此建立多目标规划模型。

设给定起点 v_s 和讫点 v_e，可行的乘车路线集合为

$$A=\left\{A_i \mid A_i=v_s,l^{(i)}_{j_1k_1},v^{(i)}_{m_1},l^{(i)}_{j_2k_2},v^{(i)}_{m_2},\cdots,v_e\right\},$$

A_i 表示在起点 v_s 选择线路 $l^{(i)}_{j_1k_1}$ 到达 $v^{(i)}_{m_1}$，换乘 $l^{(i)}_{j_2k_2}$ 到达 $v^{(i)}_{m_2},\cdots$，最终到达 v_e 的乘车路线。记该路径换乘次数为 N_i，总耗时为 T_i，总费用为 C_i (N_i,T_i,C_i 可由 A_i 上站点，线路的相应权值之和得到)。则一般的多目标规划模型为

$$\min f(N_i,T_i,C_i) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{array}{l} N_i\ge 0,\\ T_i\ge 0, \qquad i=1,2,3,\cdots,n.\\ C_i\ge 0, \end{array}$$

考虑到用户在权衡这些因素时，优先层次会不一样，故本文根据不同出行者分别建立分层多目标规划模型[1]。

1) 模型一

研究表明公交网络的设计以减少平均换乘次数为重要原则[2]，且一般出行者也以换乘次数为优先考虑目标[3]，此外考虑到奥运会期间会有大量的外来人口来到北京看奥运，他们对于北京路线不熟悉，因而通常会更加偏重于选择最简便的路线，即换乘次数最少的路线。

综上可认为对主体人群而言，在满足换乘次数最少的前提下，总耗时与费用综合最少的路线为最佳路线。从而我们将换乘次数作为第一优先目标，时间与费用为第二优先目标建立分层多目标规划模型。

为了对时间与费用综合进行考虑，先对时间与费用作标准化处理，然后利用线性加权和法得到综合评价函数 $f(T_i,C_i)$ 如下

$$f(T_i,C_i)=\alpha\frac{T_i}{T_{\min}}+\beta\frac{C_i}{C_{\min}}, \tag{2}$$

其中 $\alpha+\beta=1$，且 $\alpha\geq 0$，$\beta\geq 0$；$T_{\min}$ 表示换乘次数最少的所有路线中总耗时的最小值；$C_{\min}$ 表示换乘次数最少的所有路线中所花费用的最小值；α，β 为权值系数，分别表示主体人群对总耗时与费用的重视程度。为了更客观科学地反映实际情况，其大小可通过对公众的问卷调查经统计方式进行确定。

综上分层多目标规划模型为

$$\min(P_{11}[N_i],P_{12}[f(T_i,C_i)]) \tag{3}$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} N_i\geq 0, \\ T_i\geq 0, & i=1,2,3,\cdots,n, \\ C_i\geq 0, \end{cases}$$

其中 P_{11}，P_{12} 为优先因子且 $P_{11}\gg P_{12}$，表示换乘次数 N_i，时间费用函数 $f(T_i,C_i)$ 分别属于第一，第二优先目标，且换乘次数对时间费用具有绝对优先权。

2) 模型二

对于赶时间的乘客，时间是他们最先考虑的因素，其次考虑换乘次数，最后考虑费用。鉴于此种情况下时间与换乘次数为主要决定因素，故可以忽略费用的影响，将三目标模型简化为以时间作为第一优先目标，换乘次数为第二优先目标的分层规划模型

$$\min(P_{21}[T_i],P_{22}[N_i]) \tag{4}$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} T_I\geq 0, & i=1,2,3,\cdots,n, \\ N_i\geq 0, \end{cases}$$

其中 P_{21}，P_{22} 为优先因子，且 $P_{21}\gg P_{22}$。

3) 模型三

对于需要长期重复相同路线的乘客，虽然仍会考虑换乘次数，但由于他们经常性地重复相同的路线，因此他们会优先选择更加经济的路线，然后再考虑换乘次数，最后才考虑时间。鉴于费用与换乘次数为主要决定因素，故在此情况下可以忽略时间的影响。为此建立以费用为第一优先目标，换乘次数为第二优先目标的分层多目标规划模型

$$\min(P_{31}[C_i],P_{32}[N_i]) \tag{5}$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} C_i\geq 0, & i=1,2,3,\cdots,n, \\ N_i\geq 0, \end{cases}$$

研究表明公交网络的设计以减少平均换乘次数为重要原则[2]，且一般出行者也以换乘次数为优先考虑目标[3]，此外考虑到奥运会期间会有大量的外来人口来到北京看奥运，他们对于北京路线不熟悉，因而通常会更加偏重于选择最简便的路线，即换乘次数最少的路线。

综上可认为对主体人群而言，在满足换乘次数最少的前提下，总耗时与费用综合最少的路线为最佳路线。从而我们将换乘次数作为第一优先目标，时间与费用为第二优先目标建立分层多目标规划模型。

为了对时间与费用综合进行考虑，先对时间与费用作标准化处理，然后利用线性加权和法得到综合评价函数 $f(T_i,C_i)$ 如下

$$f(T_i,C_i)=\alpha\frac{T_i}{T_{\min}}+\beta\frac{C_i}{C_{\min}}, \tag{2}$$

其中 $\alpha+\beta=1$，且 $\alpha\geq 0$，$\beta\geq 0$；$T_{\min}$ 表示换乘次数最少的所有路线中总耗时的最小值；$C_{\min}$ 表示换乘次数最少的所有路线中所花费用的最小值；α，β 为权值系数，分别表示主体人群对总耗时与费用的重视程度。为了更客观科学地反映实际情况，其大小可通过对公众的问卷调查经统计方式进行确定。

综上分层多目标规划模型为

$$\min(P_{11}[N_i],P_{12}[f(T_i,C_i)]) \tag{3}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{array}{l} N_i\geq 0,\\ T_i\geq 0,\qquad i=1,2,3,\cdots,n,\\ C_i\geq 0,\end{array}$$

其中 P_{11}，P_{12} 为优先因子且 $P_{11}\gg P_{12}$，表示换乘次数 N_i，时间费用函数 $f(T_i,C_i)$ 分别属于第一，第二优先目标，且换乘次数对时间费用具有绝对优先权。

2) 模型二

对于赶时间的乘客，时间是他们最先考虑的因素，其次考虑换乘次数，最后考虑费用。鉴于此种情况下时间与换乘次数为主要决定因素，故可以忽略费用的影响，将三目标模型简化为以时间作为第一优先目标，换乘次数为第二优先目标的分层规划模型

$$\min(P_{21}[T_i],P_{22}[N_i]) \tag{4}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{array}{l} T_I\geq 0,\qquad i=1,2,3,\cdots,n,\\ N_i\geq 0,\end{array}$$

其中 P_{21}，P_{22} 为优先因子，且 $P_{21}\gg P_{22}$。

3) 模型三

对于需要长期重复相同路线的乘客，虽然仍会考虑换乘次数，但由于他们经常性地重复相同的路线，因此他们会优先选择更加经济的路线，然后再考虑换乘次数，最后才考虑时间。鉴于费用与换乘次数为主要决定因素，故在此情况下可以忽略时间的影响。为此建立以费用为第一优先目标，换乘次数为第二优先目标的分层多目标规划模型

$$\min(P_{31}[C_i],P_{32}[N_i]) \tag{5}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{array}{l} C_i\geq 0,\qquad i=1,2,3,\cdots,n,\\ N_i\geq 0,\end{array}$$

其中 P_{31}、P_{32} 为优先因子，且 $P_{31} \gg P_{32}$。

以上建立的三种模型是针对用户不同的查询要求建立的，模型一适用于大部分人的查询要求，尤其适用于对北京路线不熟的外地和外国乘客，所以在设计自主查询系统时，可以考虑将模型一作为系统默认的查询模型。模型二适用于对时间要求很高的乘客，如赶时间的乘客。模型三适用于对北京路线非常熟悉，且需要经常性重复所查路径的乘客，例如：长期在北京工作、生活的居民。所以在设计自主查询系统时也应顾及到这两类人群，可以考虑将模型二，模型三作为系统备选的查询模型。

6 算法设计

6.1 将交通网络转化为相应的图论模型

将站点抽象为图中的节点，若一个站点可以直达另一个站点(有一条交通线路 l_{ij} 连接这两点)，则我们在图中连一条有向边表示这两站点时直达关系。

对于每条边设计两个权值，一个代表乘坐某线路所花费的时间，一个代表乘坐该线路所需要的费用。从而分别得到关于交通网络的时间图和费用图。

6.2 根据图论模型性质及特点确定相应算法

● 以上建立的图是与交通网络一一对应的拓扑图。

BFS 算法 (Broad First Search 广度优先搜索)是通过队列方式-FIFO (First in First out 先进先出)控制扩展节点进而在图中找出从起点到终点的经过最少边的路径。由于 BFS 的这个特性，因此可选择使用 BFS 来求解模型一。

● 由实际情况及我们的建图方法可知，所建立的图是一个边权全部为正的图。

Dijkstra 算法可以在没有负权边的图上求解从一点出发到任意点的最短路，与 Bellman-Ford (求解存在负权边单源点的最短路问题)及 Floyed (求解存在负权边所有节点对之间的最短路径)相比，Dijkstra 算法更适合于本文中的问题。且应用 Heap-堆的数据结构之后，Dijkstra 算法效率可以达到此问题的求解时间下界[4]，因此我们选用 Dijkstra 算法来求解模型二和模型三。

6.3 算法描述及算法复杂性讨论

◆ BFS 算法：

步骤1　读入交通网络信息，建立相对应的拓扑图。读入要进行求解的出发点和终点，将出发点加入队列。

步骤2　将队首元素出队 (x=Deque (queue))，检查 x 深度。若与目标节点的深度相同则转步骤4，否则转步骤3。

步骤3　依次检索由 x 为出发的可扩展节点 $Y = \{y$：可由 x 出发直达$\}$，若符合扩展条件则加入队列：Inque (queue，y)，同时存储其所有的前序节点 (++DAG[y].fa)→ $v = x$，若 y 为目标节点则记录 y 的深度作为目标节点的深度。

步骤4　从目标节点出发，回溯通过 DAG[] 结构所存储的全部前序节点，到达出发点后输出所经过的路径。即得到从起始点到达目标节点的所有换乘次数最小的路线。再根据第二优先层目标函数，求出所得到的各条路线的目标函数值，选取目标值最小的一条作为最佳路线。

现讨论 BFS 算法复杂度。分析可得 BFS 算法遍历图所有边一次的时间为其运行的主要耗费时间，因此若图中有 m 条边则算法的运行时间为 $O(m)$。由于题中图的边数约为60万，故在现有常规硬件条件下可在0.1秒内出解，而其所占空间约为50M，因此应用该算法的效果非常好。

◆ Dijkstra 算法：

步骤1 读入交通网络信息，建立相对应的时间图(费用图)。读入要求解的出发点和目的地，将出发点加入堆中。

步骤2 若堆为空，即 $heap_{size}=0$，则转步骤4，若不为空则取堆顶元素 $pop_{heap}(h)$ 到 x 中。堆大小减一，即 $heap_{size}$ 减一。

步骤3 依次检索由 x 出发的可扩展节点 $Y=\{y$: 可由 x 出发直接到达$\}$。若满足以下情况之一，则把 y 的值更新为新的值，并存储到 y 的父节点 father $[y]=x$;

1) 到 x 的值加上从 x 到 y 的边的权重小于 y 原有的值；

2) 到 x 的值加上从 x 到 y 的边的权重等于 y 原有的值，且到 x 节点的换乘次数加一小于 y 节点当前的换乘次数。

若 y 在堆中则调用 $modify_{heap}(h,y)$ 修改 y 节点的权值；若 y 不在堆中则将 y 节点加入堆 $push_{heap}(h,y)$，堆的大小增加一即 heap-size++。

步骤4 从目标节点出发，通过 father[] 结构存储的父结点回溯到达出发点后输出路径。

由于在算法执行过程中我们会在所有权值最小的结果中选择存储深度最小的节点，因此最后的结果是以时间(费用) 最少的情况下，满足换乘次数最少的方案。

现讨论 Dijkstra 算法的复杂度。步骤2要求找出在可扩展节点中权值最小的节点作为下一个扩展节点，如果线性存储则支持这个询问的时间耗费为 $O(n)$，我们在这里使用了堆的结构把线性数据组织为树形数据，使得查询操作的时间耗费与树的深度成正比，所以时间耗费降为 $O(\log n)$。算法求解出到所有节点的最短路径，共有 n 个节点，求出每个节点的耗费均为 $O(\log n)$，故算法总的时间耗费为 $O(n*\log n)$。

7 问题求解

7.1 问题一：仅考虑公汽线路

仅考虑公汽线路的交通网络为

$$G_1=\{V_1,L_1,\omega_1(V_1),\psi_1(L_1)\},$$

其中 V_1 为所有公汽站点

$$L_1=\{L001,L002,L003,\cdots L520\},$$

$\omega_1(V_1)$ 所有站点的各类权值：

费用权值：0;

时间权值：当在这个站点不换乘(即 l_{ij} 不改变)，权值为 0；当在这个站点换乘时，权值为5。

换乘权值：当在这个站点不换乘，换乘权值为0，当在这个站点换乘时，换乘权值为1。

$\psi_1(L_1)$ 线路的各类权值：

费用权值：单一票制的线路：1元；

分段计价的线路：0 ~ 20 站1元；21 ~ 40 站2元；40站以上3元。

时间权值：每段线路(相邻站点间部分)时间权值为3。

换乘权值：0

将问题一中的公汽网络用标准交通网络图形式表示后，便可运用模型一，模型二，模型三及相应算法编写程序进行求解。模型一中取 $\alpha=\beta=0.5$，求得结果见下表1。(限于篇幅具体路线略，表中“时间”不包括起始站点处的3分钟等车时间。)

表1: 问题一求解结果

起讫点	模型一(换乘)			模型二(时间)	模型三(费用)
	换乘次数	费用(元)	时间(分)	时间(分)	费用(元)
$S3359 \to S1828$	1	3	101	64	3
$S1557 \to S0481$	2	3	106	99	3
$S0971 \to S0485$	1	3	128	103	3
$S0008 \to S0073$	1	2	83	59	2
$S0148 \to S0485$	2	3	106	102	3
$S0087 \to S3676$	1	2	65	46	2

7.2 问题二：考虑公汽与地铁线路

虽然公汽站点与地铁站点是相互分隔的，但是地铁站点和与其相邻的公汽站点之间可以相互换乘，因而可考虑将地铁站点及其相邻公汽站点合并为一个站点，称之为等效站点。

等效站点处有五种换乘方式：公汽—公汽，公汽—地铁，地铁—公汽，地铁—地铁，公汽—地铁—公汽。各种换乘方式的所对应的站点时间权值都不相同。

当两个等效站点之间存在公共的公汽站点时称这种等效点间的关系为近相邻站点。相当于两个站点相隔很近，而且存在快捷线路，如 S0540—S0540 是两个等效站点 D17，D31 之间的快捷线路，其耗时，费用都为0。从快捷线路转公汽，地铁线路算一次换乘。

问题二的交通网络是在问题一的网络上增加了一种交通工具，并使得站点的换乘方式多样化。它同样可用标准交通网络图形式表示。运用相同方法求解，可得结果见下表2。

表2: 问题二求解结果

起讫点	模型一(换乘)			模型二(时间)	模型三(费用)
	换乘次数	费用(元)	时间(分)	时间(分)	费用(元)
$S3359 \to S1828$	1	3	101	64	3
$S1557 \to S0481$	2	3	106	99	3
$S0971 \to S0485$	1	3	128	95	3
$S0008 \to S0073$	1	2	83	53.5	2
$S0148 \to S0485$	2	3	106	86.5	3
$S0087 \to S3676$	0	1	50	36	1

7.3 问题三：考虑公汽，地铁和步行线路

由于步行与常规的交通工具如公汽，地铁在性质上有所差异，因而需要对它作出适当的处理，将它转化成与公汽，地铁等一致的一种交通工具。

对步行的处理：

(a) 任何两个站点间可以通过步行直达，而且直达路线很多，选择其中耗时最小的一条步行路线作为两站点间的直达线路。这条线路称为等效线路。由此可知，任何两站点之间都存在一条的等效线路，对于有 n 个站点的公汽—地铁交通网络，添加 n^2-n 条等效线路后，就形成了一个有 n 个站点的公汽—地铁—步行交通网络。乘客在选择步行时，只能走等效线路。即对于步行这种交通工具来说，所有的等效线路就是它的交通线路。

(b) 等效线路耗时较多，但费用为0，且任一等效线路转车次数都为0。但是步行会有隐性费用，例如步行会消耗大量体力，而乘车则不会。且步行要自己识路，容易走弯路，甚至会道路拥挤不便行走等等，这些都是换乘要面对的主要问题，即步行中含有隐性换乘次数。为此引入虚拟费用 C_V，虚拟换乘次数 N_V 来体现隐性费用，隐性换乘次数。易知 C_V，N_V 都与等效线路耗时 T_W 成正相关关系。令 $C_V = \phi_C(T_W)$，$N_V = \phi_N(T_W)$，则每条等效线路 B_i 都有三个权值 C_{Vi}，T_{Wi}，N_{Vi}。虚拟费用与一般费用等价，虚拟换乘次数与一般换乘次数也是等价的。

通过引入等效线路及其权值之后，就把步行转化成了一种新的交通工具，并可得到其交通线路。问题三的交通网络就是在问题二的网络中增加一种新的交通工具，它也符合标准交通网络图的的形式，故可用同样的方法进行求解。

8　模型改进

模型一中将换乘次数作为具有绝对优先权的目标来看待，这主要是考虑到奥运期间会有大量的外来人口来到北京，由于对北京路线陌生，他们会首要选择最简便的出行路线，即换乘次数最少。此外奥运会期间北京的人口会剧增，交通也会更加拥挤。在这种情况下，换乘越少，出行就越方便，因此大部分人也会倾向于选择换乘次数的出行路线。但是在非奥运会期间，乘客也许会为了快一点到达目的地或者省几块钱而选择多转一两次车。

为了使模型能够同样适用于非奥运会期间的情况，则需对模型一进行改进。

借鉴分层多目标规划中的分层评价法的思想[1]，在模型一的基础上作如下改进：

1) 对第一优先目标换乘次数给予一个宽容限 k。若由起点到终点的最小换乘次数为 $N_{\min}$，则将换乘次数 $N \in [N_{\min}, N_{\min}+k]$ 的所有路线作为第二优先目标的可行域。

2) 第二优先目标为综合考虑换乘次数 N，总耗时 T，费用 C 的目标函数。当路线的 $N_i > N_{\min}$ 时，则只有它在总耗时 T_i 及费用 C_i 上有明显优势的情况下才会选择它。为了量化换乘次数对时间费用优势程度的要求，引入附加耗时 T_{ai}，附加费用 C_{ai}。将此路线上 $N_i - N_{\min}$ 对路线选择的影响通过附加耗时，附加费用来体现。则

转化后的路线的总耗时：$T_i' = T_i + (N_i - N_{\min})T_{ai}$。

转化后的路线的总费用：$C_i' = C_i + (N_i - N_{\min})C_{ai}$。

将 T_i'，C_i' 代到模型一的 $f(T_i, C_i)$ 中得

$$g(T_i, C_i, N_i) = f(T_i', C_i') = \alpha\frac{T_i + (N_i - N_{\min})T_{ai}}{T_{\min}} + \beta\frac{C_i + (N_i - N_{\min})C_{ai}}{C_{\min}},$$

化简得

$$g(T_i, C_i, N_i) = \alpha\frac{T_i}{T_{\min}} + \beta\frac{C_i}{C_{\min}} + (N_i - N_{\min})\left(\alpha\frac{T_{ai}}{T_{\min}} + \beta\frac{C_{ai}}{C_{\min}}\right),$$

令 $\gamma_T = \frac{T_{ai}}{T_{\min}}$，$\gamma_C = \frac{C_{ai}}{C_{\min}}$，则有 N，T，C 的综合目标函数

$$g(T_i, C_i, N_i) = \alpha\frac{T_i}{T_{\min}} + \beta\frac{C_i}{C_{\min}} + (N_i - N_{\min})(\alpha\gamma_T + \beta\gamma_C),$$

其中 $\alpha + \beta = 1 \alpha \geq 0$，$\beta \geq 0$，$\alpha$，$\beta$ 体现乘客对总耗时，费用的重视程度。$\gamma_T \geq 0$，$\gamma_C \geq 0$，γ_T，γ_C 都体现乘客对于换乘的重视程度，γ_T，γ_C 越大，表示乘客对换乘越重视，当 γ_T，γ_C 足够大时，则相当于模型一中的对换乘次数绝对优先考虑。综上所述，可得改进后

的模型

$$
\min(g(T_i, C_i, N_i))
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} N_i \in [\min(N_i), \min(N_i) + k] \\ N_i \geq 0, & i = 1, 2, 3, \cdots, n. \\ T_i \geq 0, \\ C_i \geq 0. \end{cases}
$$

9 模型评价

本文在标准交通网络图上，综合考虑多方面的因素建立最佳路线选择模型，并设计出相应的求解算法。最后将建立的模型应用的具体问题的求解中去。因而模型具有如下优点：

1) 模型的通用性很强。模型是建立在一个抽象交通网络图上，因而适用于现实中的多种交通网络。

2) 模型考虑很全面。抽取了乘客在选择路线时主要考虑的三个因素，然后根据不同类型的乘客提供不同的路线选择模型。

3) 对于模型的求解，采用高效的算法和先进的数据结构，使得查询时间很短，实时性很强，能够随时根据最新数据快速给出查询结果。

参考文献：

[1] 湖北省大学生数学建模竞赛专家组. 数学建模[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2006

[2] 韩传峰，胡志伟. 城市公交网络性能评估的网络图方法[J]. 系统工程，2003, 21(3): 58-61

[3] 赵巧霞，马志强，张安. 以最小换乘次数和站数为目标的公交出行算法[J]. 计算机应用，2003, 24(12): 136-137

[4] Thomas H, Cormen, Charles E, Leiserson, Ronald L, Rivest, Clifford Stein. Introduction to Algorithms (Sencond Edition)[M]. American: The MIT Press, 2001

Optimization Models for the Bus Route Selection

ZHOU Jin-jian, YAN Dong, TANG Rui

Advisor: Instructor Group

(Wuhan University, Wuhan 430072)

Abstract: In this paper, under the background of Beijing Olympics, we propose a model to optimally choose the bus route. Firstly, we utilize the multi-objective optimization to establish three selecting-route models, respectively, by taking the times of transferring, the cost of time and the consumption of money as the most important factor, on account of different out-goers with varied purposes. Furthermore, on the basis of this model's characteristics, we carry out corresponding mathematical methods to solve the problems. More concretely, we adopt the BFS algorithm to deal with the first model and handle the second and the third model by the aid of Dijkstra algorithm. Particularly, by using the Dijkstra algorithm, we convert the linear structure data into tree structure data. Consequently, we reduce the time complexity from $O(n^2)$ to O(n*logn). Finally, we show the solutions of the three problems by using the developed models and algorithm.

Keywords: multi-objective optimization; bus route selection; BFS algorithm; Dijkstra algorithm