

最小费用切割策略

崔 龙 龚玉萍 汪 霖

指导教师：王开华

(南京通信工程学院, 南京 210016)

编者按 本文在目标函数表达式、优化准则、启发式算法等方面都有清晰的叙述和讨论.

摘要 本文对于寻求费用最小的切割方式这一有限状态的离散问题, 建立了优化模型, 通过对该模型的讨论与求解, 解决了问题一至五.

首先, 对于问题一, 运用给出的平行相邻等效定理, 求得了需考虑的不同切割方式的总数为 426.

其次, 本文建立了寻求费用最小切割方式的优化模型, 在该模型的求解中:

(1) 用穷举法得到了所有费用最小的切割方式;

(2) 给出并证明了平行切割厚度优先定理, 缩小了搜索范围;

(3) 引入并改进了人工智能领域的算法, 求得全部费用最小的切割方式, 对三种不同的启发函数进行了讨论、比较.

然后, 对 $e=0$ 的情况下给出了等效厚度优先切割准则, 同时文中还讨论该准则在 $e \neq 0$ 时的适用性.

此外, 对原问题三所提出的准则从两个方面进行了评价, 并给出了问题五所要求的费用最小的所有切割方式.

最后, 通过变换, 将结论的应用范围推广到一般平行六面体的切割问题.

一、建模准备

基本假设

(H1) 每切割一刀后, 将待加工的部分留在工作台上, 各个面的位置关系保持不变, 而将被切割下的部分取走, 不予考虑.

(H2) 加工费用为切割费用和调整刀具的费用之和, 其它的费用 (如刀具磨损费等), 本文不作讨论.

(H3) 刀具在水平切割与垂直切割之间进行转换时, 刀具的调整不需要额外费用; 但当先后两次垂直切割的平面不平行时, 不管它们之间是否穿插水平切割, 调整刀具均需要额外费用. 以下讨论的调整刀具特指垂直方向间的调整.

题意澄清

(1) “与水平工作台接触的长方体底面是事先指定的”, 其含义是事先固定长方体在水平工作台上的放置方式, 相应地确定了水平切割面和垂直切割面.

(2) 建立如图一的直角坐标系来明确待切长方体和成品长方体各个面的空间位置关系.

图中 $O'(0,0,0)$, $L'(a_1, b_1, c_1)$ 为待加工长方体的体对角线的两顶点坐标;

$O(a_3, b_3, c_3)$, $L(a_2, b_2, c_2)$ 为成品长方体的体对角线的两顶点坐标.

为了表述方便, 我们将待加工的长方体和成品长方体各个面进行编号, 其对应关系如下: $1(1')$, $2(2')$, $3(3')$, $4(4')$, $5(5')$, $6(6')$ 分别表示待加工的长方体和成品长方体的右侧面、背面、上底面、左侧面、正面、下底面.

符号说明

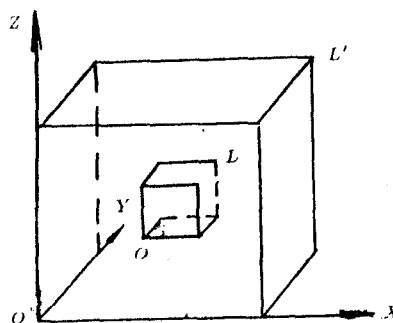


图 1 待切割长方体和成品长方体位置图

1. β : 表示切割方式, $\beta=(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$, (其中 i_k 表示第 k 次切割的面的编号), 它反映了切割的先后顺序.
2. A : 所有的 β 组成的集合. $|A|$ 表示 A 中元素的个数. 在本文中 $|A|=P_6^6$;
3. $P(\beta)$: 切割方式为 β 时的切割费用, $T(\beta)$: 切割方式为 β 时的刀具调整的次数, $C(\beta)$: 切割方式为 β 时的加工费用, $C(\beta)=P(\beta)+T(\beta) \cdot e$;
4. d_j : 成品长方体 j 面的等效厚度,

$$d_j = \begin{cases} t_j, & \text{第 } j \text{ 为水平面;} \\ r \cdot t_j, & \text{第 } j \text{ 为垂直面;} \end{cases}$$

其中 t_j 表示成品长方体第 j 面到待切割长方体第 j' 面的距离;

二、问题一的解答

问题一要求计算需考虑的不同切割方式 (即各面的加工次序) 的总数. 我们关注的重点是费用. 在所有的切割方式中, 有些切割方式, 例如切割方式 (4,1,5,2,5,3) 和切割方式 (1,4,6,2,5,3), 对任意尺寸和位置的待加工长方体和成品长方体, 其加工费用都相等. 那么我们只要考虑其中的一种切割方式就行了. 这样, 我们需要考虑的不同切割方式的总数就是所有加工费用可能不同的切割方式的总数, 记为 N . 则考虑这 N 种切割方式的加工费用后, 一定不会漏掉任何一种加工费用不同的切割方式.

记 $I=\{C(\beta) | \beta \in A\}$, 则 $I=\max |I|$.

定理 1 (平行相邻等价定理):

在 $\alpha=(i_1, \dots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_6)$, $\beta=(i_1, \dots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_6)$ 中, 若 $|i_k - i_{k+1}|=3$, 则 $C(\alpha)=C(\beta)$. 证明略.

记: $P=\{\beta | \beta \text{ 中 } 4 \text{ 与 } 1 \text{ 相邻且 } 4 \text{ 在 } 1 \text{ 前面}\}$; $Q=\{\beta | \beta \text{ 中 } 5 \text{ 与 } 2 \text{ 相邻且 } 5 \text{ 在 } 2 \text{ 前面}\}$; $R=\{\beta | \beta \text{ 中 } 6 \text{ 与 } 3 \text{ 相邻且 } 6 \text{ 在 } 3 \text{ 前面}\}$.

则 $|P|=|Q|=|R|=P_6^5$; $|P \cap Q|=|Q \cap R|=|P \cap R|=P_4^4$; $|P \cap Q \cap R|=P_3^3$; 则

$$\begin{aligned} N &\leq |A| - |\overline{P \cup Q \cup R}| \\ &= P_6^6 - |P| - |Q| - |R| + |P \cap Q| + |Q \cap R| + |P \cap R| - |P \cap Q \cap R| = 426 \end{aligned}$$

这样得到了 N 的上界为 426.

在给定的一组初值的情况下, 求出了 426 种各不相同的加工费用值. 说明至少要考虑 426 种切割方式, 即 N 的下界也为 426, 即 $N \geq 426$. 所以 $N=426$.

三、模型建立与求解

模型的建立

我们的问题是在 A 中选取合适的 β , 使 $C(\beta)$ 最小目标函数为:

$$\begin{aligned} \min \quad & C(\beta) = \sum_{m=1}^6 r(i_m) S_m(i_1, i_2, \dots, i_m) + T(\beta) \cdot e \\ \text{s.t.} \quad & i_m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, m=1, 2, \dots, 6 \quad i_m \text{ 两两互不相等,} \\ & r(i_m) = r, \quad i_m = 3, 6; \quad r(i_m) = 1, \quad i_m \text{ 为其它.} \end{aligned}$$

其中 $S_m(i_1, i_2, \dots, i_m)$ 为在前 $m-1$ 次切割顺序为 $(i_1, i_2, \dots, i_{m-1})$ 时第 m 次切割待加工长方体第 i_m 面所形成的截断面的面积.

为了求解模型, 我们先引入代价树 T 来描述切割的过程 (略).

注 s_0 为结点：表示初始状态，即待加工的长方体； $s_{ij}(1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq P_5^i)$ 为结点：表示中间状态，即已切割掉一些面的待加工长方体； i 为代价树的层数； j 为同一层中结点的序号； $s_{0,k}(1 \leq k \leq P_0^6)$ 为叶结点，它表示已经切割成成品长方体。

从结点 $s_{i,j}(1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq P_6^i)$ 转移到结点 $s_{(i+1),k}(1 \leq k \leq P_6^{i+1})$ 的边赋上一定的权值 $d(s_{i,j}, s_{(i+1),k})$ ，表示这一转移所付出的代价，即从状态 $s_{i,j}$ 到 $s_{(i+1),k}$ 切割一次所需的费用。如果前后切割需要刀具调整，则它还包括调整刀具的费用。

从根结点 s_0 到每一个第 6 级叶结点 $s_{0,k}(1 \leq k \leq P_0^6)$ 的路对应了一个切割方式，那么从 s_0 到 $s_{0,k}$ 的代价值之和即为该切割方式的加工费用，原问题即转化为求此代价树的最小代价路径。

求此最小代价路径有如下的几个方向：

(1) 穷举出所有路径的代价；(2) 寻求一些必要条件来减少搜索的路径；(3) 引入并改进启发式搜索法—— A^* 算法；

一、穷举法及其改进

欲寻求有限代价树的最小代价路径，采用穷举法一定能够找到最优解。显然，如果不附加任何约束条件，一般的穷举法需遍历所有的路径，即搜索 $P_0^6=720$ 条路径。其效率是比较低的，为此我们对穷举法进行改进如下：

1. 平行相邻切割改进法

由定理 1，对于一种切割方式，如果其中有相邻的两次切割面平行，交换这两次切割次序，则加工费用一定相等。由前面的求解可知只需搜索 426 条路径。

2. 平行厚度优先改进法

引理！如果 $t_4 > t_1$ ，则切割方式 $\alpha=(4, i_2, \dots, i_{n-1}, 1, i_{n+1}, \dots, i_6)$ ，所需的加工费用不大于 $\beta=(1, i_2, i_{n-1}, 4, i_{n+1}, \dots, i_6)$ 所需的加工费用，即 $C(\alpha) \leq C(\beta)$ 。

定理 2 (平行切割厚度优先定理) 如果 $t_j > t_k$ ，且 $|j-k|=3$ ，则切割方式 $\alpha=(i_1, \dots, i_{n-1}, j, i_{n+1}, \dots, i_{m-1}, k, i_{m+1}, \dots, i_6)(1 \leq n < m \leq 6)$ 所需的加工费用不大于 $\beta=(i_1, \dots, i_{n-1}, k, i_{n+1}, \dots, i_{m-1}, j, i_{m+1}, \dots, i_6)$ 所需的加工费用，即 $C(\alpha) \leq C(\beta)$ 。

证明 不妨设 $j=4, k=1$ 。

可以分以下两种情况讨论：

1. $n=1$ 时，即 β 中 k 是第 1 次切割， α 中 j 是第 1 次切割。则根据引理， $C(\alpha) \leq C(\beta)$ 。

2. $n>1$ 时，显然，两种情况下 i_1, \dots, i_{n-1} 加工费用是相同的，设加工费用为 C_1 。

设初始状态时长方体为 λ 经过 i_1, \dots, i_{n-1} 切割后成为长方体 λ' 考虑对长方体 λ' 的两种切割顺序：

$$k, i_{n+1}, \dots, i_{m-1}, j, i_{m+1}, \dots, i_6; \quad j, i_{n+1}, \dots, i_{m-1}, k, i_{m+1}, \dots, i_6$$

将两种切割方法补充 $n-1$ 次虚切割 $i_1^*, \dots, i_{n-1}^*(i_1^*=i_1, \dots, i_{n-1}^*=i_{n-1})$ ，虚切割 i_j^* 与 $i_j(j=1, \dots, n-1)$ 切割的位置相同，但切割下去的体积为 0，代价也为 0，则补充后的切割方法也是一个完整的切割方式。根据引理可得： $C(\alpha) \leq C(\beta)$ 。

同理可得： $j=5, k=2$ 或 $j=6, k=3$ 时同样有 $C(\alpha) \leq C(\beta)$ 。证毕

根据上面的定理，就可以将搜索的路径减少到 $P_0^6/(P_2^2 \cdot P_2^2 \cdot P_2^2)$ ，大大缩小了搜索空间。

(二)、启发式搜索策略

为了提高搜索效率，我们引入启发式搜索法。启发式搜索法在人工智能领域中的应用已经形成了一套成熟的理论，其中有著名的 A^* 算法。它具有较强的启发能力，可以大大地提高搜索效率^[1]。

1. A^* 算法的引入

如图二所示^[1]，为起始结点 s_0 到目标结点 s_g 的一条可行路径，为该路径上的某一结点。

A^* 算法定义估计函数： $f(n)=g(n)+h(n)$ ，

其中 $f(n)$ 为起始结点 s_0 经过 n 结点到达目标结点 s_g 的最小代价路径代价的估计值； $g(n)$ 是从起始结点 s_0 到结点 n 的实际代价； $h(n)$ 是从结点 n 到目标结点 s_g 的最小代价路径的估计值，它体现了搜索的启发信息，称启发式函数， A^* 算法的核心是要寻求合适的 $h(n)$ 以提高搜索效率。



图 2 A^* 算法的估计函数定义示意图

类似地我们定义在图五的代价树中的加工费用估计函数:

$$f(S_{i,j}) = g(S_{i,j}) + h(S_{i,j})$$

其中 $f(S_{i,j})$ 为根结点 S_0 经过结点 $S_{i,j}$ 到达叶结点 $S_{e,k}$ 的最小费用路径的费用估计值, $g(n)$ 是从根结点 S_0 经过结点 $S_{i,j}$ 的实际费用, $h(S_{i,j})$ 是从结点 $S_{i,j}$ 到达叶结点 $S_{e,k}$ 的最小费用路径的估计费用, 它同样体现了搜索的启发信息, 也称启发式函数. 记 $h^*(S_{i,j})$ 为从结点 $S_{i,j}$ 到达叶结点 $S_{e,k}$ 的最小费用.

当 $h(S_{i,j})$ 满足许可性条件时 [1], A^* 算法一定能搜索到从结点 S_0 到达叶结点 $S_{e,k}$ 的最小费用

2. 启发式函数 $h(S_{i,j})$ 的选择

下面我们具体构造出三种 $h(S_{i,j})$ 的表达式:

(1) $h_1(S_{i,j}) \equiv 0$, 这种特殊的情况完全缺乏有关的启发信息, 算法退化为宽度优先搜索法.

(2) $h_2(S_{i,j}) = \sigma_2 - \sigma_1$; 式中 σ_2 表示第 i 次切割将在待加工长方体上形成的截断面的面积, σ_1 表示成品长方体与该截断面重叠部分的面积.

(3) $h_3(S_{i,j}) = \sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_3$; 式中 σ_3 为第 i 次切割前成品长方体尚未被切割到的各个面 (共 $7-i$ 个) 面积之和.

此时有 $h_1(S_{i,j}) \leq h_2(S_{i,j}) \leq h_3(S_{i,j}) \leq h^*(S_{i,j})$.

针对原问题我们应用 A^* 算法, 引入 OPEN 表及 CLOSE 表编程计算, (其具体的步骤附录略). 当搜索结束后 CLOSE 表结点数目就是算法执行过程中搜索过的结点数目, 是算法效率的体现.

我们将三种不同的启发式函数 $h(S_{i,j})$ 代入 A^* 算法, 并将 $h_1(S_{i,j}), h_2(S_{i,j}), h_3(S_{i,j})$ 时的 A^* 算法分别记 A_1^*, A_2^*, A_3^* , 计算终止后 CLOSE 表中结点数列于表一:

表 1 三种搜索算法结束时 CLOSE 表结点数目表

$h(S_{i,j})$	A^*	CLOSE 表的结点数
$h_1(S_{i,j})$	A_1^*	119
$h_2(S_{i,j})$	A_2^*	19
$h_3(S_{i,j})$	A_3^*	15

由表可见上述三种启发式函数 $h(S_{i,j})$ 越来越趋近于 $h^*(S_{i,j})$, 也即含有的启发信息依次增加, 从而使得搜索结束后 CLOSE 表结点数目依次减少, 搜索的效率越来越高, 此结果与算法的性质十分吻合.

由此我们建议采用启发式函数 $h_3(S_{i,j}) = \sigma_3 + \sigma_1$, 这样可使得搜索的效率大大提高.

(三) 改进型 A^* 算法

1. 改进方案

A^* 算法的效率虽然很高, 但它还存在以下两点明显的不足之处:

(1) 搜索的空间还可以进一步的压缩; (2) A^* 算法只能得到一个最优解, 不能得到全部的最优解.

我们对 A^* 算法进行改进如下: 首先, 将平行切割厚度优先原则应用于 A^* 算法; 其次, 在判断算法结束时, 并不是找到 OPEN 表中第一个最优解 (对应的最优值为 $f^*(S_{i,j})$) 就结束搜索, 而是继续对那些 $f(S_{i,j})$ 值与 $f^*(S_{i,j})$ 相同的结点, 再进行扩展、判断, 直到达到最低层, 这样就搜索到了全部的最优路径.

改进后的 A^* 算法称为改进型 A^* 算法.

2. 改进型 A^* 算法的检验

固定点 (a_1, b_1, c_1) , 变动点 (a_2, b_2, c_2) , (a_3, b_3, c_3) 中的一个, 且仅沿三维坐标轴的一个变动, 分别用改进型 A_1^*, A_2^*, A_3^* 算法计算, 从而可以评价和检验算法的效率、稳定性, 并讨论当成品长方体的边长变化 (即成品长方体越来越接近于待加工的长方体时) 对 A_1^*, A_2^*, A_3^* 的效率的影响. 初始条件分别取:

(1) $r=1, e=0, (a_1, b_1, c_1) = (10, 14.5, 19), (a_3, b_3, c_3) = (2, 7, 9)$

(2) $r=1, e=0, (a_1, b_1, c_1) = (10, 14.5, 19), (a_2, b_2, c_2) = (7, 10, 15)$

具体表格、数据及分析结论略。

四、厚者优先准则

一、准则的提出

对于本文中有限状态的搜索问题, 其最优的切割方式一定存在 (用穷举法即可找到). 不妨设加工费用最小的切割方式为: $\alpha^* = (i_1^*, i_2^*, i_3^*, i_4^*, i_5^*, i_6^*)$, 由贝尔曼最优化原理, α^* 具有: 在原长方体第 $k (1 \leq k \leq 5)$ 次切割第 i_k^* 面后, $(i_{k+1}^*, i_{k+2}^*, \dots, i_6^*)$ 是切割剩余长方体的最优方式. 基于此性质, 从最后一刀向前逆推; 并结合平行切割厚者优先定理可得到 $r=1, e=0$ 如下简明的优化准 (具体讨论略):

等效厚度厚者优先准则 (以下简称厚者优先准则):

每次选择一个等效厚度最大的待切割面进行切割. 当几个面的等效厚度相同时, 可在其中任选一个面进行切割.

二、厚者优先准则的应用

为了检验此准则的实用性, 我们给出一组初值, 用改进型 A^* 算法求出最小费用 c^* , 用该准则计算出的加工费用为 c , 定义偏离度 $\xi = \frac{c-c^*}{c^*} (\xi \geq 0)$, ξ 反映了该准则的优化效果. ξ 越小则说明准则的优化效果越佳.

具体方案为

I. $e=0, r=1.5$. 固定待加工长方体的大小, 在其内部, 任取两点作为成品长方体的两对角顶点, 这样取 1000 组初始数据, 分别用厚者优先准则和 A^* 算法计算加工费用 c 和 c^* , 切割方式 α 与 α^* , 并比较 α 与 α^* 的异同.

II. e 分别为 1, 2, 3, 5, 8, 10, 15, 按方案 I 的方法模拟, 计算用厚度优先准则所花的加工费用 c 与最优解对应的加工费用 c^* 的相对偏差 $\xi = \frac{c-c^*}{c^*}$ 的平均值 $\bar{\xi}$, 我们模拟得到表二.

表 2 模拟结果表

e	0	1	2	3	5	8	10	15
平均相对偏差 $\bar{\xi}(\%)$	0	0.05	0.2	1.05	2.30	5.32	6.81	11.29

由以上结果我们得出厚者优先准则具有两个明显的特点:

1. 该准则简明易行, 计算量只需经过简单的乘法计算和六个数的大小比较, 就可以迅速确定一个最优的切割方式.
2. 该准则对 $e=0$ 的情况得到加工费用最小的切割方式; 对 $e \neq 0$ 的情况, 虽然不一定总能得到加工费用最小的切割方式, 但用该准则得到的加工费用与最小加工费用的绝对偏差 $c-c^*$ 不会超过 $2e$, 因此在没有计算机用穷举法和算法进行计算时, 该准则仍不失为一种好的准则.

五、问题三的解答

问题三所给准则是: 每次选择一个加工费用最少的待切割面进行切割. 对于该准则, 我们从两个方面来进行评价.

I. 用特例说明: 按照该准则进行切割加工, 没有使加工费用最少.

例 $e=0, r=1$, 相应的数据如图 3 所示 (阴影实体为成品长方体), 即只需进行两次相互垂直的切割即可切出成品长方体.

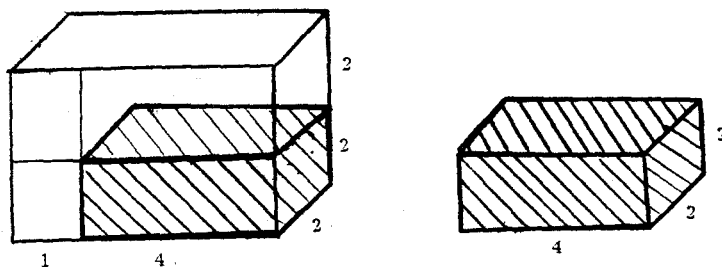


图 3 特例的示意图

按原题目问题 (3) 所给准则切割, 应先垂直切割, 其加工费用 (单位: 元) 为: $[(2+2) \times 2 + 4 \times 2] \times 1 = 16$. 如不按该准则, 即交换这两次切割的次序, 先水平切割, 其加工费用为: $[(4+1) \times 2 + 2 \times 2] \times 1 = 14 < 16$. 此例中按原题目问题 (3) 所给准则进行切割, 不能使加工费用最小.

II. 用模拟结果来评价该准则:

在图一的坐标系中, 令 $(a_1, b_1, c_1) = (10, 14.5, 19)$, $(a_2, b_2, c_2) = (9, 9, 13)$, $(a_3, b_3, c_3) = (6, 7, 9)$. 首先我们利用改进型 A^* 算法得到最小加工费用 C^* ; 然后再利用问题 (三) 所给准则进行切割的加工费用与利用改进型 A^* 算法所得的最小加工费用进行比较. 在此我们采用偏离度 $\xi = \frac{C - C^*}{C^*}$, 来衡量该准则合理的程度.

具体的模拟方案是 (1) 取定 $e=0, r=1$, 固定 a_1, b_1, c_1 中的两个, 让另一个按一定的比率增加; (2) 取定 $r=1.5$, 让 e 以步长 1 从 2 增加到 15 时, 固定 a_1, b_1, c_1 中的两个, 让另一个变动; 通过比较模拟结果可得: 不同的 a_1, b_1, c_1 很多种情况中除个别情况外, 偏离度 ξ 都是较大, 说明该准则对于普通的情形是不合理的.

六、问题五的解答

一、问题的解答

综合以上的讨论, 当 $e=0$ 时要得到最优的切割方式, 我们可以采用穷举法、改进型的穷举法、 A^* 算法、改进型 A^* 算法以及厚者优先准则均得到相同的结果. 当时 $e \neq 0$ 等效厚者优先准则所得的结果与最优解很相近, 而 A^* 算法、改进型 A^* 算法均能得到最优的切割方式.

对于题中的 a, b, c 三组数据, 我们用上述所有的方法均可得到如下的最优解. 结果如下:

情况 a 最优的切割方式为 (6, 5, 3, 4, 2, 1) 及 (6, 5, 4, 3, 2, 1) 加工费用为 374 元.

情况 b 最优的切割方式为 (5, 4, 6, 2, 3, 1) 及 (5, 6, 4, 2, 3, 1) 加工费用为 437.5 元.

情况 c 最优的切割方式为 (5, 4, 2, 6, 1, 3) 加工费用为 540.5 元.

(注: 1 为右侧面、2 为背面、3 为上底面、4 为左侧面、5 为正面、6 为下底面)

情况 d 解答见表三

表 3 $r=1.5, 2 \leq e \leq 15$ 时的解答

e 元	加工费用 C (元)	刀具调整次数	最优的切割方式 α^*
$[0, 2.5)$	$437.5 + 3e$	3	(5, 4, 6, 2, 3, 1) (5, 6, 4, 3, 2, 1)
2.5	445	3	(5, 6, 4, 2, 3, 1) (5, 6, 4, 2, 3, 1)
		1	(5, 6, 2, 4, 3, 1)
$[2.5, 15]$	$442.5 + e$	1	(5, 6, 2, 4, 3, 1)

二、结果分析及讨论

1. $e=0$ 时 r 对切割方式的影响

r 的物理意义为水平切割单位面积费用与垂直切割单位面积的费用之比, r 的取值对切割方式是有一定影响的. $e=0$ 时, 根据厚者优先准则, r 增大, 即使实际厚度较小, 也有可能使得等效厚度为最大, 应予以先行切割, 这样有利于减少加工费用. 由结果中 r 从 1 变到 1.5 再变到 8 时加工费用最小切割方式的变化可以看出, 随着 r 的增大, 6 和 3 的位置是逐次靠后的. 特别是当 $r \rightarrow \infty$, 显然第 3, 6 面应为最后两刀切割; $r \rightarrow 0$, 第 3, 6 面应首先切割.

2. e 对切割方式的影响

图和表中的数据实际上反映了调整刀具对切割方式、加工费用的影响, 调整刀具的次数只可能为 1 次、2 次或 3 次. 当 $e=0$ 时, 调整刀具的次数不会影响最优的切割顺序, 当 e 充分大时, 显然应该让调整的次数尽量少, 最好为 1 次. 在本例中, 由于原始数据的巧合, 调整的次数由 3 次直接跳变为 1 次更为一般的情况 $C \sim e$ 是的曲线分成三段.

七、模型的推广 (略)

参 考 文 献

- [1] 何华灿等编著, 人工智能导论, 西北工业大学出版社, 西安 1988.
- [2] 邵嘉裕著, 组合数学, 同济大学出版社, 上海 1991.
- [3] 李建德等编著, 动态规划及其应用, 国防工业出版社, 1994.
- [4] Mathematica 手册, 沈凤贤等编译, 海洋出版社, 北京, 1992.