

高等教育学费标准探讨

1. 摘要

本文基于对影响学费标准因素的分析，建立了一个多目标优化模型以确定标准学费。

为了兼顾教育的公平性和高效性，我们选取了（1）能够支付学费的人群所占比例（2）个人收益（3）社会收益这三个因素来衡量标准学费的合理性。

对于（1），考虑到中国居民家庭收入分布不均衡的特点，建立了基于 Γ 分布的家庭收入分布密度曲线；同时考虑到家庭教育支出的投资性，用恩格尔系数对该分布做了修正。

对于（2），基于经济学的内部收益率理论，求解了 IIR, 建立了个人教育支出和收益的关系。

对于（3），考察教育投入产出关系的特点，首先建立了生均教育费用和社会收益基于 Logistic 曲线的关系，又通过分析高校教育经费的来源，建立高校教育经费与学费间的函数关系，以此得到学费和社会收益的关系。

模型求解时，在保证三个因素影响均衡性的前提下，我们构造了效用函数将这三个因素统一到一个目标表达式中，进而将一个多目标优化问题转变成一个单目标优化问题。初步求解得到最优高效平均学费标准为 $x_0 = 1.14107$ （万元），这明显与现实不符；通过对三个因素的分析和中国国情的考虑，提出倾向于“大众教育模式”的改进模型，求得 $x_0 = 0.730396$ （万元）。

在基本模型的基础上，考虑到国家助学金和助学贷款政策，我们采用对贫困家庭收入补偿的方法对居民收入分布进行修改，采用效用函数对修改后的结果进行评价，发现国家资助能增加教育效益。

考虑到不同地区、不同专业的不同情况，我们通过搜集数据分别对不同地区、不同专业用建立的模型的求得最优收费标准。其中，不同专业的最优收费标准及实际收费如下表：

专业	平均学费(单位：元)	最优学费(单位：元)	专业	平均学费(单位：元)	最优学费(单位：元)
电信	4500	5083	经济学	4500	5083
管理学	4500	5007	历史学	3700	3240
医学	5000	3556	文学	3200	4943
理学	3700	4627	哲学	3200	5008

关键字：多目标 教育模式 内部收益率 效用函数

目录

1.	摘要	1
2.	问题提出	3
3.	模型假设	3
4.	问题分析	3
5.	模型准备	4
5.1.	居民收入分布.....	4
5.2.	个人收益.....	5
5.3.	学校收益.....	8
6.	模型建立与求解.....	9
7.	模型深入讨论	12
7.1.	助学金及助学贷款的考虑	12
7.2.	不同的地区所对应学费标准.....	13
7.3.	不同专业所对应的学费标准.....	13
8.	灵敏度分析.....	14
9.	模型评价	17
10.	给有关部门的建议	18
11.	参考文献	18
12.	附录	18

2. 问题提出

高等教育的培养质量是高等教育的一个核心指标，需要有相应的经费保障。教育经费一般由政府财政拨款、学校自筹、社会捐赠和学费收入等几部分组成。对适合接受高等教育的经济困难的学生，一般可通过贷款和学费减、免、补等方式获得资助，品学兼优者还能享受政府、学校、企业等给予的奖学金。

学费问题涉及到每一个大学生及其家庭，是一个敏感而又复杂的问题：过高的学费会使很多学生无力支付，过低的学费又使学校财力不足而无法保证质量。

我们的任务是，根据中国国情，收集诸如国家生均拨款、培养费用、家庭收入等相关数据，并据此通过数学建模的方法，就几类学校或专业的学费标准进行定量分析，得出明确、有说服力的结论；根据建模分析的结果，给有关部门写一份报告，提出具体建议。

3. 模型假设

- 1) 城镇每户平均 3 人，乡村每户平均 4 人。
- 2) 中国居民家庭收入分布在模型讨论涉及的年份中基本不变。
- 3) 城镇，乡村的恩格尔系数均为 0.5。
- 4) 在模型讨论涉及的年份中，个人内部收益率 IIR 是一个定值。
- 5) 学生 18 岁读大学，22 岁大学毕业，60 岁退休。

4. 问题分析

本问题的最终目的是为了建立一个衡量高校学费合理程度的标准，并且得到标准学费。将高校教育看成一种投资，投资主要来源于学费、学校自筹、社会捐赠和国家财政拨款，它能产生一定的个人收益和社会收益。对于教育分担的具体比例，定性地分析：学费过低，不能达到有效的分担和补偿高等教育的目的，教学质量将得不到保证；学费过高，超过多数居民的支付能力，会降低他们对高等教育投资的积极性，抑制高等教育需求。基于以上分析，我们得到制约学费的三个因素：（1）能够支付学费的人群所占比例，合理的高校学费应满足使得能支付得起的人群占总人数的绝大多数，体现了教育的公平性；（2）个人收益，根据投入产出原则，个人在投资教育时会考虑到这项投资的收益，合理的高校学费应使得个人收益尽量大；（3）社会收益，由于教育并非只是个人问题而关系到整个社会的发展和收益，合理的收费也应使得社会的收益尽量大。

围绕这三个因素，我们对相关数据进行收集和分析，以学费为自变量，试图寻找与建立上述三个指标与学费的关系，并以此建立多目标优化问题，进而得到学费标准。此外，考虑到国家助学金和助学贷款政策、以及不同地区和不同专业之间的差异，还要对学费标准进行讨论。

5. 模型准备

5.1. 居民收入分布

教育费用的承担一般是以家庭为单位的,要建立学费与能够支付学费的人群所占比例的关系,首要的任务是得到居民家庭收入分布。

以 2006 年为例进行计算,参考《2007 年中国统计年鉴》得到以下数据:

城镇	最低收入户(1)	低收入户(2)	中等偏下户(3)	中等户(4)	中等偏上户(5)	高收入户(6)	最高收入户(7)
人均可支配收入(a_{1i})	3568.73	5540.71	7554.16	10269.7	14049.17	19068.95	31967.34
家庭所占比例(b_{1i})	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
收入所占比例	2.88%	4.47%	12.19%	16.58%	22.68%	15.39%	25.80%

表格 1

观察以上表格数据,很容易发现:占总户数 20%的高收入户与最高收入户人群,占有 41.9%的收入;20%的最低收入户与低收入户仅占有 7.25%的收入。这说明我国家庭收入差距较大。

由此,城镇人均可支配收入, $s_1 = \sum_{i=1}^7 a_{1i} * b_{1i} = 12389.179$ (元)

乡村	低收入户(1)	中等偏下户(2)	中等户(3)	中等偏上户(4)	高收入户(5)
人均可支配收入(a_{2i})	1182.46	2222.03	3148.5	4446.59	8474.79
家庭所占比例	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
收入所占比例(b_{2i})	6.07%	11.41%	16.17%	22.83%	43.52%

表格 2

观察以上表格数据,同样可以发现,乡村收入差距也很大。

同理可得乡村人均可支配收入, $s_2 = 3894.874$ (元)

经过推导,中国家庭收入分布期望E与方差D可由以下公式表示:

$$E = 3s_1 * \frac{\frac{p_1}{3}}{\frac{p_1}{3} + \frac{p_2}{4}} + 4s_2 * \frac{\frac{p_2}{4}}{\frac{p_1}{3} + \frac{p_2}{4}}$$

$$D = (\sum_{i=1}^7 (3 * a_{1i} - E)^2 * \frac{p_1}{3} * b_{1i} + \sum_{i=1}^5 (4 * a_{2i} - E)^2 * \frac{p_2}{4} * b_{2i}) / (\frac{p_1}{3} + \frac{p_2}{4})$$

其中, p_1, p_2 分别为城镇人口与乡村人口数,根据假设 1,城镇每户平均 3 人,乡

村每户平均 4 人， $\frac{p_1}{3}$ ， $\frac{p_2}{4}$ 即城镇家庭户数与乡村家庭户数； a_{1i}, a_{2i} 分别为城镇，乡村对应收入等级的家庭人均可支配收入（对应关系见表一与表二）。

代入具体数据，得到：

$$E = 2.46966(\text{万元}) \quad D = 3.61523(\text{万元}^2)$$

基于上面中国收入差距的分析，并考虑到不断增长的基尼系数（04 年我国基尼系数 0.465 已超过联合国设定的 0.45 的警戒线），我们可以得出中国家庭收入分布具有以下特点：低收入人群多，高收入人群收入所占比例偏高。因此，我们假设中国家庭收入符合 Γ 分布。同时，由于高等教育经费的支出属于投资的一种，我们采用经过恩格尔系数修正后的家庭收入分布函数。

由假设 3，考虑恩格尔系数后：

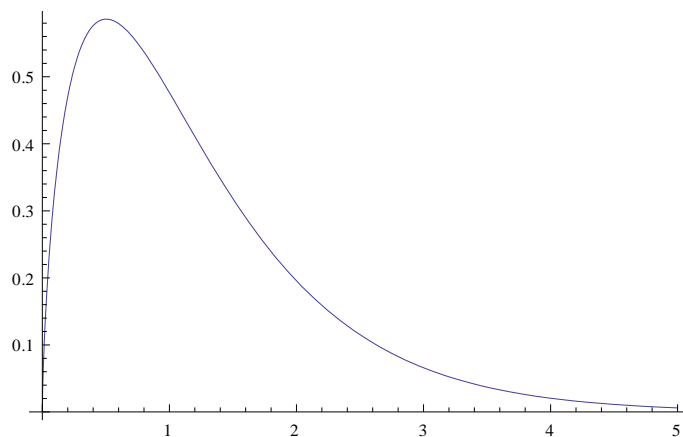
$$E' = \frac{1}{2}E, D' = \frac{1}{4}D$$

相应概率分布函数为：

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\gamma * x^{\gamma-1} * e^{-\lambda x}}{\Gamma(\gamma)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

其中， $\lambda = 1.366254$ ， $\gamma = 1.68709$

概率密度曲线如下：



图表 1

5.2. 个人收益

个人收益的计算采用教育经济学理论中的内部收益率法 (Internal Rate of Return)，简称 IRR。教育投资的内部收益率即考虑到货币时间价值的收益率，这里是指教育成本的现值和预期收益的现值相等的贴现率，是总收益等于总成本时的利率。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{Y_j}{(1+r)^{j-m}} - \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{X_j}{(1+r)^{j-m}} + \sum_{j=1}^m \frac{D_j}{(1+r)^j} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{X_j}{(1+r)^j} + \sum_{j=1}^m \frac{C_j}{(1+r)^j} \quad (*) \end{aligned}$$

Y_j 为大学毕业生年龄为 j 时的薪资收入； X_j 为高中毕业生年龄为 j 时的薪资收入；

D_j 为大学期间第 j 年的国家补贴； C_j 表示大学期间第 j 年的学费。

上式左端为接受大学教育 m 年工作年限为 n 年的人在大学毕业后比不接受大学教育的人所增加的收入，可以看作总收益。上式右端第一项为学生接受 m 年大学教育的实际成本支出，第二项为学生接受 m 年大学教育的机会成本支出。二者之和可以看作学生接受 m 年大学教育的总成本。总收益等于总支出时求得的 r 即为内部收益率 IRR。

根据假设 5，学生 18 岁读大学，22 岁大学毕业，60 岁退休，将收入共同贴现到大学毕业的那一年；大学毕业生年龄为 j 时的薪资收入 Y_j ，高中毕业生年龄为 j 时的薪资收入 X_j ，大学期间每 j 年的国家补贴 D_j ，大学期间每 j 年的学费 C_j 用大学生平均年薪收入 \bar{Y} ，高中生平均年薪收入 \bar{X} ，大学期间每年的国家补贴 \bar{D} ，大学期间每年的学费 \bar{C} 来核算。

Y_j ， X_j ， D_j ， C_j 分别带入大学生平均年薪收入 \bar{Y} ，高中生平均年薪收入 \bar{X} ，大学期间每年的国家补贴 \bar{D} ，大学期间每年的学费 \bar{C} ，(*) 可简化为：

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{39}}}{1 - \frac{1}{1+r}} \bar{Y} - \frac{1}{(1+r)^4} \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{39}}}{1 - \frac{1}{1+r}} \bar{X} + \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^4}}{1 - \frac{1}{1+r}} \bar{D} = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^4}}{1 - \frac{1}{1+r}} \bar{X} \\ & + \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^4}}{1 - \frac{1}{1+r}} \bar{C} \end{aligned}$$

令

$$\alpha = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{43}}}{1 - \frac{1}{(1+r)^{39}}}, \quad \beta = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^4}}{1 - \frac{1}{(1+r)^{39}}}, \quad \gamma = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{39}}}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

则有： $\gamma \bar{Y} - (\alpha - \beta) \gamma \bar{X} + \beta \gamma \bar{D} = \beta \gamma (\bar{X} + \bar{C})$ ，

消去 γ 并化简得： $\bar{Y} - \alpha \bar{X} + \beta (\bar{D} - \bar{C}) = 0$ (**)

可算出对应 r ，即为个人内部收益率 IIR，对应于 α_0 ， β_0 ， γ_0 。

根据假设 6，当个人内部收益率 IIR 确定的情况下，由 (**) 式，可得到大学生平均年薪 y 与大学期间每年的学费 x 的关系，即

$$y = \alpha_0 X + \beta_0 (x - D)$$

基于内部收益率中最后得到的(**)式，本文引入下列公式来分别计算读大学的净收益现值 NPV_b 与成本现值 NPV_c (r 取社会平均收益率 r^*):

$$NPV_b = \gamma \bar{Y} - (\alpha - \beta) \gamma \bar{X} + \beta \gamma \bar{D}$$

$$NPV_c = \beta \gamma (\bar{X} + \bar{C})$$

定义年均净收益 P_a 现值，即接受大学教育比不接受大学教育的人所增加的年均收入贴现值

$$P_a = \frac{1}{39} NPV_b = \frac{\gamma}{39} [\bar{Y} - (\alpha - \beta) \bar{X} + \beta \bar{D}]$$

当个人内部收益率 IIR 确定时，大学期间每年的学费 x 对应于一定的大学生平均年薪 y ，进而可以确定年均净利润 P_a 和大学期间每年的学费 x 的关系：

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{\gamma}{39} [y - (\alpha - \beta) \bar{X} + \beta \bar{D}] = \frac{\gamma}{39} [\alpha_0 X + \beta_0 (x - D) - (\alpha - \beta) \bar{X} + \beta \bar{D}] \\ &= \frac{\gamma}{39} [\beta_0 x - (\beta_0 - \beta) \bar{D} + (\alpha_0 - \alpha + \beta) \bar{X}] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1 - \frac{1}{(1 + IIR)^{43}}}{1 - \frac{1}{(1 + IIR)^{39}}} & \beta_0 &= \frac{1 - \frac{1}{(1 + IIR)^4}}{1 - \frac{1}{(1 + IIR)^{39}}} \\ \alpha &= \frac{1 - \frac{1}{(1 + r^*)^{43}}}{1 - \frac{1}{(1 + r^*)^{39}}} & \beta^* &= \frac{1 - \frac{1}{(1 + r^*)^4}}{1 - \frac{1}{(1 + r^*)^{39}}} & \gamma &= \frac{1 - \frac{1}{(1 + r^*)^{39}}}{1 - \frac{1}{1 + r^*}} \end{aligned}$$

我们将中华英才网上发布的《英才薪资调查报告》提供的数据 $\bar{Y}=45357$ (元)， $\bar{X}=24303$ (元)，代入 NPV_b ， NPV_c 的公式， \bar{C} 按平均每年 7000 元算，国家年均补助 \bar{D} 取 720 元， r^* 取 7%，用银行贷款率核算社会平均投资收益率。经计算分别得到： $NPV_b = 301439$ 元， $NPV_c = 113452$ 元。显然， $NPV_b > NPV_c$ ，即净收益的现值远远大于为之付出的成本的现值，因此，投资大学生教育是有利可图的。

根据(**)式，计算得到内部收益率 $IIR = 25.8\%$ ，其远远高于 7% 的社会平均投资收益率，这也意味着在等量的成本投入的前提下，对大学生教育进行投资能够带来比一般项目投资更多的收益。

将 $IIR = 25.8\%$ ， $r^* = 7\%$ 代入 P_a ，取 $\bar{D} = 720$ 元， $\bar{X} = 24303$ 元，可得

$$P_a = f_2(x) = 0.528x + 282.23$$

这一表达式的含义是，随着个人教育投入 x (即学费) 的增加，接受大学教育比不接受大学教育的人所增加的年均收入贴现值随之正比例变化，可以看出投入越多收益越多，符合经济学上投入产出原则。当 $x=0$ 时，大学生年均净收益贴现值为 282.23 元，表征了接受大学教育比不接受大学教育的人所增加的年均收入贴现值的一个底线。当然，在个人教育投入 x 变化时，个人内收益率 IIR 是会相应改变的，以至于 P_a 并不随 x 严格线性变化，但是根据假设 4，在模型考虑的范围内，我们认为上述关系是成立且有效的。

5.3. 学校收益

根据问题分析,考虑制约学费的第三个因素,即社会收益时,由于社会收益的复杂性和抽象性,很难用确定的量来表示。这里只取其中的一点进行考虑,即学校收益。学校收益与学校的教育经费投入有着某种必然的联系, 学校收益主要包括:

(1) 无形收益,即学校教学、科研水平的提高带来学校品牌升值收益,个人名誉的提高等;

(2) 有形收益,学校(包括院、系、部、处等)货币收入、实物收入的增加。

根据中国国情——高校的非盈利性,可以简单地认为学校收益主要决定于无形收益。对于学校教学、科研水平我们采用科技论文发表的篇数来衡量,即建立经费投入与科技论文发表篇数之间的函数:

$$p_s = f(w)$$

对 $f(w)$ 作定性的分析得:

- 1) $\lim_{w \rightarrow \infty} f(w) < \infty$,即随着经费的不断投入,科研论文的发表数不会增长至无穷;
- 2) $f'(w) \geq 0$,且 $f'(w)$ 随着 w 先增大后减小.很容易知道经费的投入对于科研论文的发表是正相关关系,但是当经费很少时几乎无法得出能够发表的论文,经费的增减对论文的发表影响很小;当经费处于科研经费紧张所在区间时,微小的经费的改变将对科研论文的产生产生很大的影响;同理,当经费处于过剩状态时,经费的变动对于论文的产生影响自然很小.

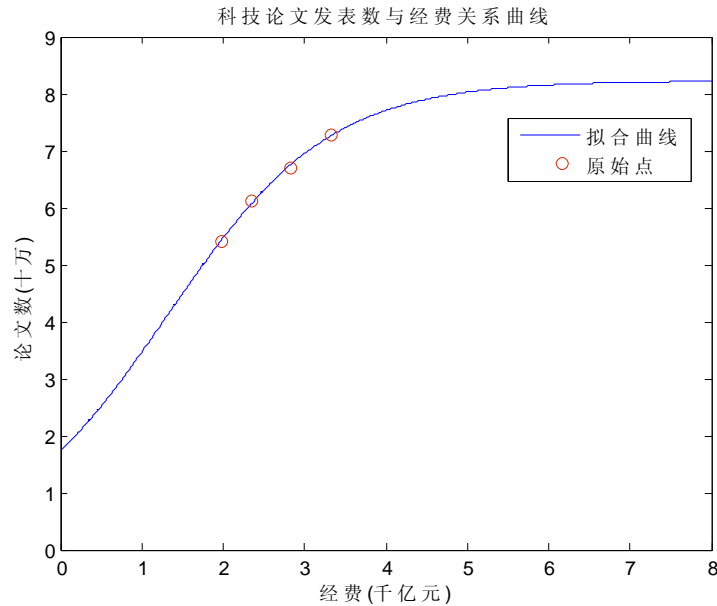
基于以上分析,我们找到Logistic 曲线符合上述性质,并采用 02 年-05 年的标准化后的数据对函数进行拟合。标准化的依据为:教育经费(千亿元)*1.25 达到较好的拟合效果。

现摘录 2002-2005 年的数据如下:

指标	2002	2003	2004	2005
教育经费(千亿元)	1.5832129	1.8736788	2.2576459	2.6578618.3
科技论文数(十万篇)	5.41390	6.12738	6.68520	7.28082

拟合得到以下函数表达式:

$$f(w) = \frac{8.22716}{1 + 3.73557e^{-1.00339w}}$$



观察原始点在拟合曲线上的位置可粗略判断我国教育经费的投入对于科技论文发表的影响正处于减速增长阶段，即继续增加经费，科研论文的数量将继续增加，但增速将减缓。

下面我们分析高校教育经费的来源，建立高校教育经费与学费间的函数关系。

高校教育经费的来源主要有四方面：即政府财政拨款，学校自筹，社会捐赠和学费收入。通过查阅资料，我们发现在现实情况下，学校自筹和社会捐赠所占学校教育经费的比例相对较小可以忽略，因此可以简要地认为培养一个大学学生的费用（ $z(t)$ ）仅由两部分组成，即学费和国家生均拨款。

设第 t 年 GDP 值为 $G(t)$ ，教育投入占 GDP 的比值为 $\rho(t)$ ；学生学费为 $x(t)$ ，高等教育学生人数为 $p(t)$ 。教育投入中高等教育所占比重为 $\sigma = \text{const}$ ，即认为教育投资的结构稳定，各级教育获得的教育经费比例不变。参考《中国统计年鉴》，得到 05, 04, 03 年 σ 值分别为：26.5%，26.5%，26%，印证了前面分析。所以，取 $\sigma = 0.26$ ，这样第 t 年生均教育费用可表示为：

$$z(t) = x(t) + \sigma * G(t) * \rho(t) / p(t)$$

国家对于教育的投入部分我们视为模型参数，则高等教育经费：

$$w = x * p + G * \rho * \sigma$$

因此，科研论文发表篇数与学费间的关系为：

$$p_s = f_3(x) = \frac{8.22716}{1 + 3.73557e^{-1.00339 * (p * x + G * \rho * \sigma)}}$$

6. 模型建立与求解

以学费 x (万元) 为决策变量建立如下多目标最优化模型，以充分体现教育的公平性和教育质量：

$$\begin{cases} \max \int_x^{\infty} f_1(x) dx & (1) \\ \max P_a(x) & (2) \\ \max P_s(x) & (3) \end{cases}$$

目标函数的含义说明：(1) 能够支付学费家庭比例最大化；

(2) 个人收益最大化；

(3) 社会收益最大化。

由于目前对于多目标最优化问题的直接求解尚存在困难，一般将其转化为单目标优化问题求解。考虑到能够支付学费的家庭比例，个人收益和社会受益这三个因素的均衡性，我们构造如下效用函数 $g(x)$ ：

$$g(x) = \int_x^{\infty} f_1(x) dx * f_2(x) * f_3(x)$$

效用函数最大化是上述三个因素综合最大化的体现，当效用函数 $g(x)$ 达到最大值时对应的学费为标准学费。于是，上述多目标最优化模型转化为以学费 x (万元) 为决策变量的单目标最优化模型：

$$\max g(x)$$

以 2005 年为例，查阅《中国统计年鉴》得到：

国内生产总值： $G=183867.9$ （亿元），高等学校在校生人数： $p = 1561.8$ （万人）

教育经费占 GDP 比值： $p = 3.73\%$ 。

因此，换算单位后得：

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^y * x^{r-1} * e^{-\lambda x}}{\Gamma(y)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

其中， $\lambda = 1.366254$ ， $y = 1.68709$ 。

$$f_2(x) = 0.528x + 282.23$$

$$f_3(x) = \frac{8.22716}{1 + 3.73557e^{-1.00339 * (1.5618 * x + 1.7832)}}$$

用 mathematica 编程计算得：

$$x_0 = 1.14107 \text{ (万元)}, g(x_0) = 2.05125$$

结果分析：很明显我们所得的学费标准与我国现在实际收取的学费差距较大，特别的是与居民家庭收入分布比较，有一半家庭无法支付如此高昂的学费。结果的合理性很值得怀疑，但是该值是由效用函数最大化得到的，其合理性由前面分析已经保证。这是一对矛盾。事实上，效用函数保证了教育效益最大化，但使相当一部分人无法支付学费。也就是说我们构造的效用函数保证了小部分人对教育效益大部分贡献的“精英教育模式”。下面对这点做进一步说明：

一般而言，对于乘积函数

$$f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x)$$

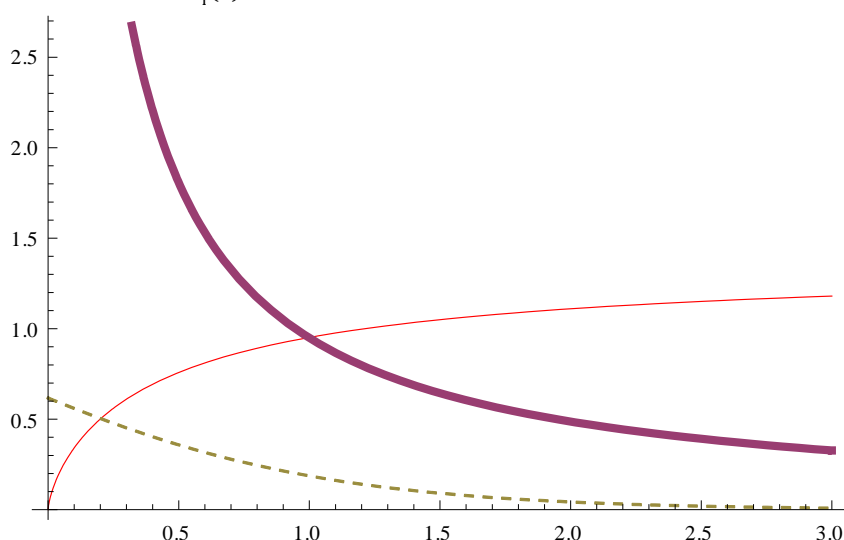
我们采用相对变化大小衡量 $f_i(x)$ 对 $f(x)$ 的影响大小，即当自变量 x 产生一个增量 Δx

时,函数值相应的产生一个增量 $\Delta f_i(x)$. 相对变化量为 $\frac{\Delta f_i(x)}{f_i(x)}$ 。它衡量了当 x 变化时 $f_i(x)$ 变化相对于原来的比率。
令 $\Delta x \rightarrow 0$, 则

$$\frac{\Delta f_i(x)}{f_i(x)} = \frac{df_i(x)}{f_i(x)} = \frac{f'_i(x)}{f_i(x)} dx$$

对目标函数进行分析: (1)式表明能够接受高等教育的人数比例越高越好, 即对“大众教育”的保证; (2)、(3)式表明对教育投入的收益越大越好, 不考虑是否只有少数人才能支付得起和随效益不断攀高的学费, 即对“精英教育”的保证。
我们用三个因素的相对变化率衡量其对效用函数的影响程度。

用 mathematica 绘出 $\frac{f'_i(x)}{f_i(x)}$ 如下:



其中,粗线与间断线为(2),(3)的相对变化曲线,细线为(1)的相对变化曲线。
观察曲线可知(2)的相对变化率在自变量(学费)较小时明显大于(1)的变化率。也就是(2)对效用函数的影响更大。那么有该效用函数求解的最优解将向“精英教育”方向倾斜。但从目前中国高等教育的发展模式来看,中国已经进入了大众教育的时代。为了使构造的效益函数与实际的教育发展模式相符,在原效益函数的基础上作如下修改:

$$g(x) = \left(\int_x^{\infty} f_1(x) dx \right)^{\alpha} * f_2(x) * f_3(x)$$

其中 $\alpha > 1$

经过这样的处理可以使效益函数更倾向于(1),从而趋于所谓的“大众模式”。
这里不妨取 $\alpha = 2$;得到的最优解为:

$$x_0 = 0.730396 \text{ (万元)}, g(x_0) = 1.40975$$

由改进的效用函数得到的学费值小于原始效用函数得到的学费值,证明了改进后的效用函数对“大众教育”的保证。 $x_0 = 0.730396$ (万元)与中国实际高等教育学费相

差不多，说明现行的中国高等教育收费大致上是合理的。

7. 模型深入讨论

7.1. 助学金及助学贷款的考虑

在上述模型中，未考虑助学金，助学贷款因素，而在实际情况中，国家助学金，助学贷款的发放缓解了很多收入较低家庭对于学费支付的压力。这里，我们将助学金，助学贷款视为部分家庭的家庭收入。

按国家标准：个人人均可支配收入低于 $C=1200$ （元）可视为贫困家庭。我们假定：获得助学金，助学贷款的贫困生均来自贫困家庭。用 N 代表总户数，则贫困家庭数

$$d = \int_{-\infty}^C f(x) dx * N$$

第 t 年国家助学金、助学贷款年投入额为 $a(t)$ ，注册贫困生为 $b(t)$ 。那么，得到的新的家庭收入分布概率密度函数为：

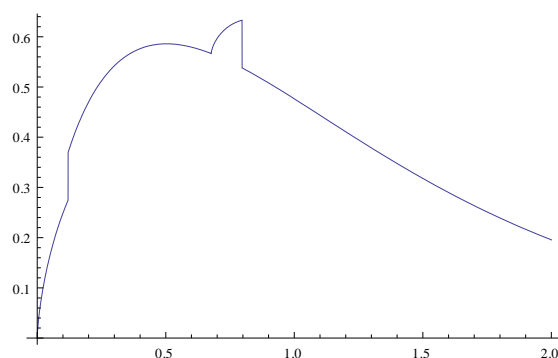
$$f'_1(x) = \left(1 - \frac{b(t)}{d}\right) f(x) * u(C - x) + \frac{b(t)}{d} f(x) * u\left(C + \frac{a(t)}{b(t)} - x\right) + f(x) * u(x - C)$$

其中， $u(x)$ 为阶跃函数。

以 05 年为例，代入 05 年相关数据：

$$b = 270 \text{ (万人)}, a = 182.75 \text{ (亿元)}$$

得到修正后的家庭收入分布概率密度曲线如下：



将修正过后的概率密度函数带入原有模型求解，得到考虑助学金和助学贷款以后的最优解：

$$x_0 = 0.679442 \text{ (万元)}, g(x_0) = 1.2196$$

与前面得到的未考虑助学金与助学贷款所得的最优解与目标函数值比较发现：一方面，考虑助学金和助学贷款后学生学费标准值降低了，也就意味着将有更多的家庭能

够支付得起高等教育学费。这与助学金和助学贷款原始初衷及效果是一致的。另一方面，目标函数值比前面未考虑助学金和助学贷款时低，也就意味着助学金和助学贷款政策牺牲了部分效益，换来了对于“大众教育”的保证。

7.2. 不同的地区所对应学费标准

经过仔细分析，我们认为不同地区主要通过影响学校收益和收入分布来影响模型的最优解，认为个人收益在不同地区的模型参数不变。而学校收益的参数通过各地区的高等教育经费确定，居民收入差异决定地区收入分布。

经过 `mathematica` 编程求解可得到如下表格

地区	学费（万元）
北京	1.60082
陕西	0.340591
贵州	0.283808
湖南	0.863215

这里，我们采用研究全国的模型直接套用到各个地区，未考虑到全国平均情况对各个地区学费标准制定的影响。相当于我们得到的结果为：如果我们将北京市作为一个国家考虑，那么综合其家庭居民收入，教育投入，其学费标准为表所示。表中单个结果虽然没有很强的实际意义，但它反映了中国高等教育学费标准的趋势。

7.3. 不同专业所对应的学费标准

考虑不同的专业的学费标准，分析居民收入、个人收益、学校收益三个参量的变化，各个专业的学生的家庭收入分布应该大致相同，不同专业的学校收益也大致均衡，因此，这里主要考虑专业不同对于个人收益的影响，进而对相应学费标准的影响。

根据 (**) 式的分析，衡量个人收益的量 P_a 是学费的一次函数，其参数与 IIR 直接相关， IIR 由 \mathbf{Y} , \mathbf{C} 决定。

定性来看：实际上 2002 年我国普通高校招生简章公布的学费标准已体现出了差别。从地区差异看，北京和上海高校学费最高，居中标准的地区较多，广西、新疆、内蒙古自治区等地学费较低，云南省高校学费最低。从学科差异看，理工类、外语类、艺术类学费较高，师范类和农林类学费较低。从专业差异看，计算机、信息和自动化、金融、经济、管理、法学等专业学费较高，而地质、矿产、农林、汉语、哲学、历史等专业学费较低。我们选取了十一大类学科，对不同专业做了 IIR , NPV_b , NPV_c ，以及最优学费的分析，结果列表如下：

专业	平均学费 (单位：元)	最优学费 (单位：元)	年平均收入 (单位：元)	IIR	NPV_b (单位：元)	NPV_c (单位：元)
电信	4500	5083	31212	0.57	279913	71772.3
管理学	4500	5007	30348	0.47	267650	71772.3
经济学	4500	5083	31260	0.57	280595	71772.3
历史学	3700	3240	22224	0.12	152342	68872.9

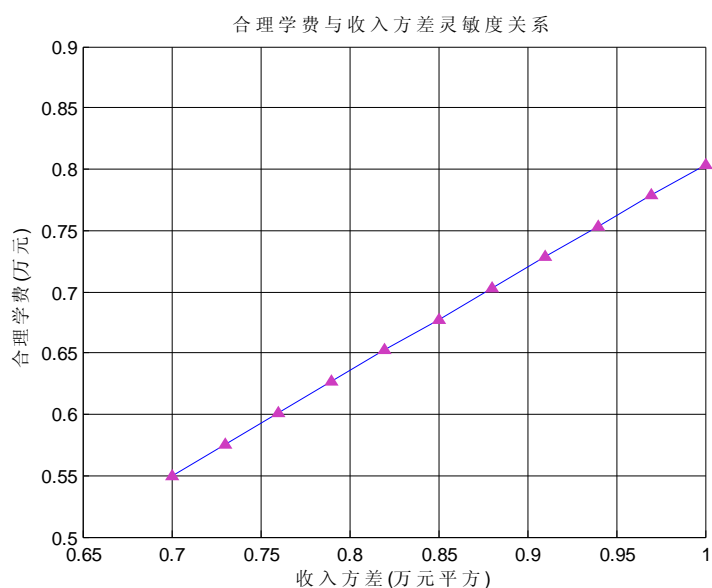
医学	5000	3556	23376	0.14	168693	73584.5
理学	3700	4627	27840	0.33	232053	68872.9
文学	3200	4943	29124	0.45	250277	67060.7
哲学	3200	5008	29424	0.48	254535	67060.7
教育学	4000	3404	22416	0.13	155067	69960.2
农学	3000	3848	23640	0.17	172440	66335.9
法学	4500	4614	27768	0.3	231031	71772.3
平均	4500	4426	28375	0.254	239646	71772.3

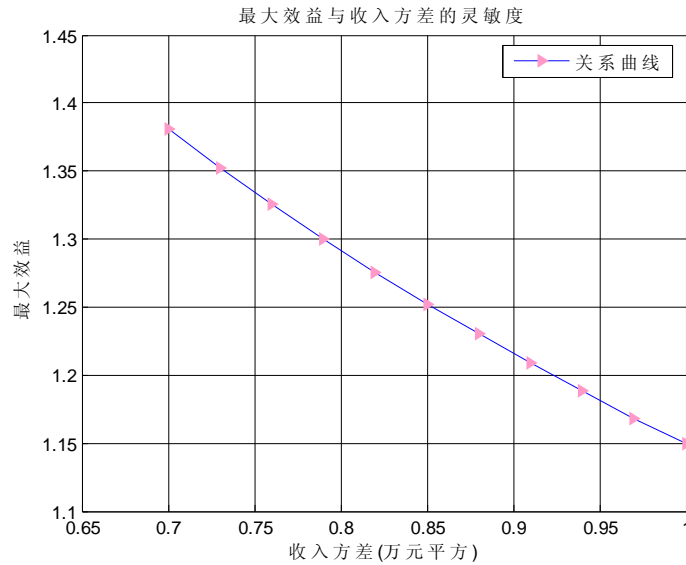
从结果我们可以看出，历史学、医学、教育学和平均值的实际学费都比通过我们的模型得到的最优学费要高，观察可以发现，这些专业的 IIR 都比较低；而虽然农学的 IIR 很低，但是最优学费依然比实际学费高，是因为农学的实际学费已经很低了。对于实际平均学费相同的专业，IIR 越高，最优学费越高。因为 IIR 体现了投资这种专业的收益率，收益率越大，当然投入就越多，这也与实际相符。

8. 灵敏度分析

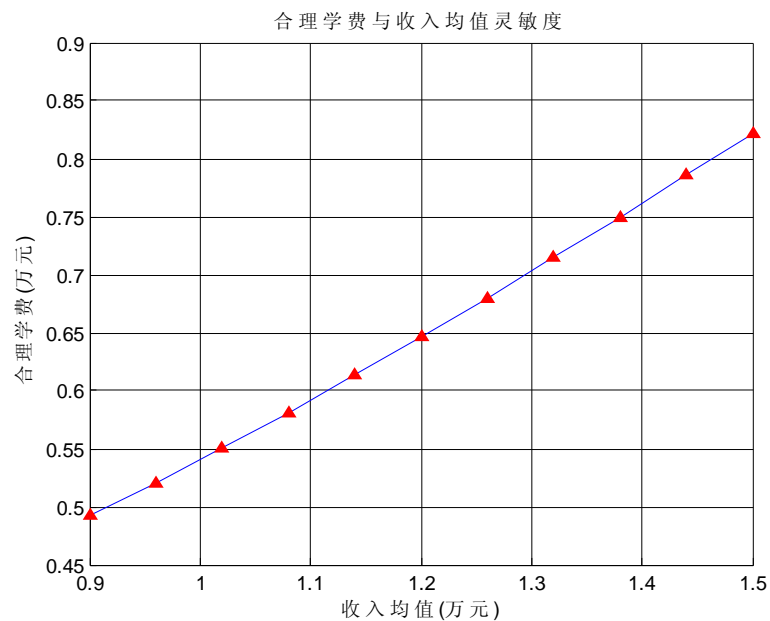
1. 居民收入均值、方差对最优解的影响。

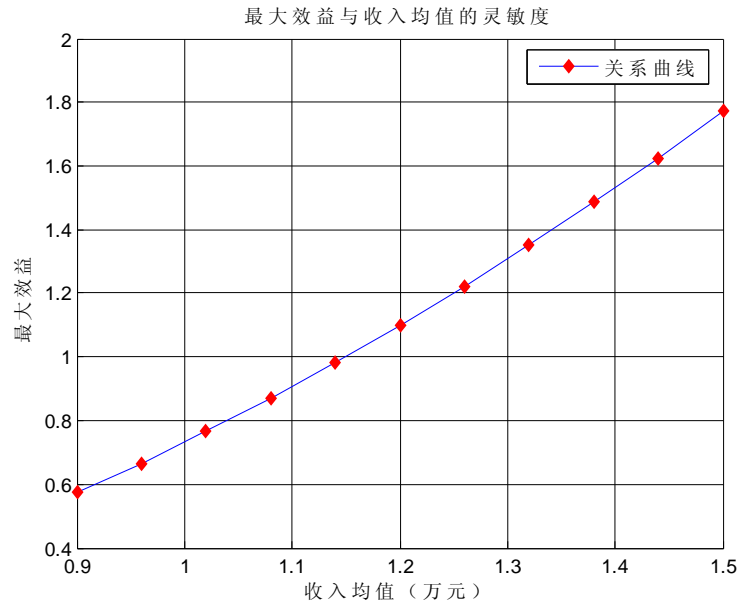
在其他参数不变的情况下，通过分别改变居民收入均值和居民收入方差并求得相应的最优解，两者关系用以下曲线反映：





由上图可以看出，当收入方差增大时，目标函数的最优解也会增加，其实际涵义是当居民收入分布不均程度加大，学费越高与此同时我们的最大效用函数值越小。这是因为当居民收入方差增大时，降低学费使能够惠及的人数增加，这一部分效益抵不上由此损失的教育投入产生的个人收益和学校收益，因此，最优学费增加的同时最大效益函数值在减小。其中左上图中关系近似为一线性关系，当居民收入方差值增加 0.05 个单位，相应会有 0.045 个单位的合理学费的增加。右图则反映了收入方差的增加导致效用函数的下降。也就是说，居民收入贫富差距拉大不利于教育的发展，这里既包括教育的公平性，又包括教育的有效性。



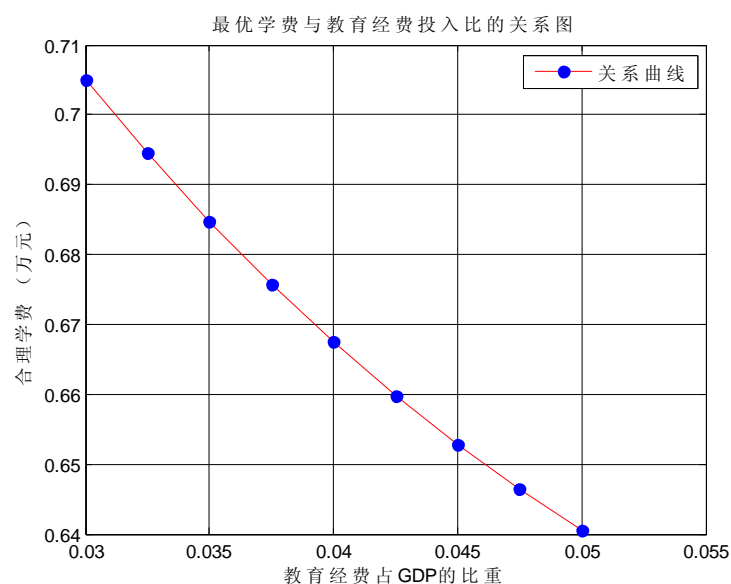
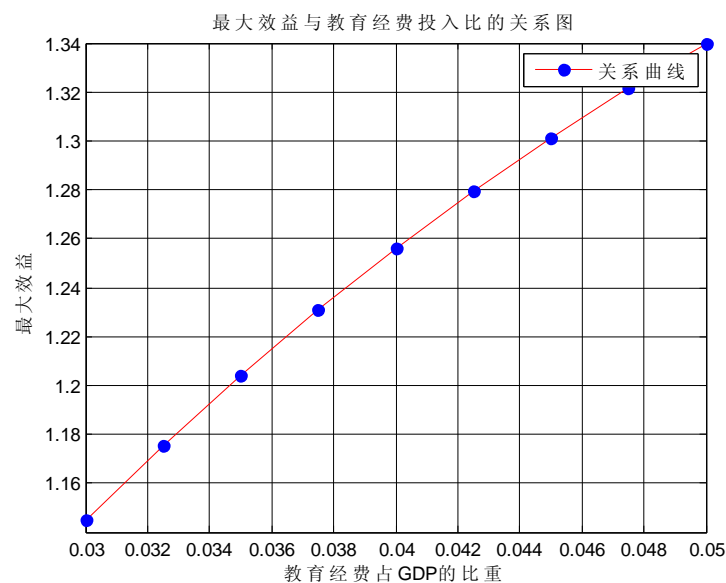


上面两个图反应了居民人均收入增加目标函数和最优解的变化情况。对第一个图，收入增加，最优学费增加，这与现实相符。不过，这里涉及一个增加幅度的问题，当人均收入增加 0.1 个单位时，最优收费增加了 0.05 个单位，这也就是说收费增长率不能抄过人均收入增长率的一半。对于第二个图，人均收入的增加使得效用函数的值增加。其现实意义是，当人均收入增加时，由于最优学费的增加赶不上人均收入的增加，所以受教育人数比例增加，

基于以上分析，为追求最大效益的提升，国家必须要采取某些措施努力使收入方差减小，而使收入均值增加；由于收入均值表征平均的居民生活水平，而收入方差则是贫富差距大小的度量，这些措施均可以定位在提高人民生活水平并缩小贫富差距的高度上。然而，我们发现，当采取这些措施后相应的合理学费的变化是复杂的，但由于保障了效益函数最大值的增加，则合理学费的变化必然在跟进社会的发展，以期达到最大效益的增加。

2.对教育经费组成比例的讨论

在其他模型参数不变的情况下可以做出最合理学费及最大效益值与 ρ 的灵敏度曲线，描点绘图后如下：



观察曲线可知：随着国家对教育投入占 GDP 的比例的增高，教育效益也随之增高，同时学费标准下降，也就意味着有更多的家庭能够支付的起高等教育学费。对教育经费的加大投入是一项有利措施。

同时，从现实情况看，我国目前 ρ 在 4%左右，而发达国家这一比重则达到 5%左右。因此国家可以考虑适当地提高教育经费的投入比 ρ 以使教育收益提高同时降低学费，向发达国家靠拢。

9. 模型评价

模型缺点：

模型中对于影响学费制定的某些因素的实现考虑的过于简单，比如用科技论文篇数来概括教育质量有失偏颇。

模型优点：

我们的模型给出了学费合理制定的定量分析模型，模型给出了合理学费制定的计算方法。模型考虑的因素比较全面，能够比较准确地反映学费标准制定过程中的各方面利益，也考虑到了教育公平和教育质量这一对深层次矛盾。在构造效用函数时不仅满足了多目标的基本均衡，而且从实际情况出发对效用函数进行修改，同样的修改可以用于不同的实际情况，模型有较好的可拓展性。

10. 给有关部门的建议

通过以上模型的建立求解和结果的分析，我们得到了一些有意义的结论，并向有关部门提出如下建议：

1. 完善国家财政资助体系，向贫困学生提供更多的助学金和助学贷款，以保证更多的人能够接受高等教育，保证教育的公平性。
2. 国家应该在一定范围内适当增加教育经费的投入比以使教育质量提高同时降低学费，这个比例可适当参考发达国家的教育投入比 5%。
3. 随着 GDP 的增加，学校可以适当提高学费以保证教育质量，进而保证社会效益和个人效益的增加；但是学费的增长率不能超过 GDP 增长率的一半。

11. 参考文献

- [1]姜启源，数学模型，北京：高等教育出版社，2007。
- [2] 中国统计年鉴。
- [3] [F 724] 彭少春等，浅谈研究生教育收益及对研究生教育收费产生的影响，山东师范大学学报第 21 卷第 3 期，2006 年 9 月。

12. 附录

地区	高等教育 经费(千元)	城镇收 入(万元)	乡村收 入(万元)	城镇比例	乡村比例	均值(万元)	方差(万元 平方)
北京	6404531	1.56378	0.71721	0.734972 9	0.265027 1	4.30337 6	0.55654848 4
陕西	4382968	0.74925	0.1867	0.3298	0.6702	1.34144 6	0.53893014 1
贵州	1784483	0.73226 4	0.17215 5	0.262899 3	0.737100 7	1.17468 8	0.49681180 4
湖南	5857194	0.86174 8	0.48897 1	0.354999 5	0.645000 5	2.22226	0.09669018 4