

最佳灾情巡视路线的数学模型

杨庭栋 李晓涛 郑长江

指导教师: 赵 静

(解放军后勤工学院, 重庆 400016)

编者按 本文力求运用数学概念和方法来严格处理涉及的各种对象, 力求借助于几何直观和生活体验的启发作用, 为计算机搜索制定行之有效的操作规则; 在数值结果方面, 粗估与细节化相结合, 从而提供较为完备的数值描述. 本文第四部分定理证明中有误, 为版面计从删. 欲窥全豹, 试索原文.

摘 要 本文将求最佳巡视路线问题转化为图论中求最佳推销员回路的问题, 并用近似算法去寻求近似最优解. 对分组问题定义了均衡度用以衡量分组的均衡性. 对问题 1 和问题 2 先定出几个分组的准则进行初步分组, 并用近似算法求每一组的近似最佳推销员回路, 再根据均衡度进行微调, 得到较优的均衡分组和每组的近似最佳推销员回路, 对问题 1 得出总路程较短且各组尽可能均衡的路线, 各组的巡视路程分别为 216.4 公里, 191.1 公里, 192.3 公里, 总路程为 599.8 公里. 对问题 2, 证明了应至少分为 4 组, 并求出了分为 4 组时各组的较优巡视路线, 各组的巡视时间分别为 22.74 小时, 22.59 小时, 21.69 小时, 22.54 小时. 对问题 3, 求出完成巡视的最短时间为 6.43 小时, 并用较为合理的分组的准则, 分成 22 个组. 对问题 4, 研究了在不影响分组的均衡条件下, T, t, V 的允许变化范围, 并得出了这三个变量的关系式, 并由此对分三个组的情况进行了具体讨论.

一、问题重述 (略)

二、模型的假设与符号说明 (略)

三、模型的建立与分析

本问题要求在某县的乡 (镇)、村公路网中, 寻找从县政府所在地 (图中 O 点) 出发, 走遍各乡 (镇)、村, 又回到县政府所在地, 使总路程或时间最少. 将公路网图中, 每个乡 (镇) 或村看为图中的一个节点, 各乡 (镇)、村之间的公路看作图中对应节点间的边, 各条公路的长度 (或行驶时间) 看作对应边上的权, 所给公路网就转化为图论中的加权网络图, 问题就转化为一个图论问题, 即在给定的加权网络图中寻找从给定点 O 出发, 行遍所有顶点至少一次再回到 O 点, 使得总权 (路程或时间) 最小.

为了讨论方便, 先给出图论中相关的一些定义.

定义 1 经过图 G 的每个顶点正好一次的圈, 称为 G 的哈密尔顿圈, 简称 H 圈.

定义 2 在加权图 $G = (V, E)$ 中

- (1) 权最小的哈密尔顿圈称为最佳 H 圈;
- (2) 经过每个顶点至少一次且权最小的闭通路称为最佳推销员回路.

由定义 2 可知, 本问题是一个寻求最佳推销员回路的问题. 最佳推销员回路的问题可转化为最佳 H 圈的问题. 方法是由给定的图 $G = (V, E)$ 构造一个以 V 为顶点集的完备图 $G' = (V, E')$, E' 中每条边 (x, y) 的权等于顶点 x 与 y 在图 G 中最短路径的权, 即

$$\forall (x, y) \in E', \quad \omega(x, y) = \min d_G(x, y).$$

在图论中有以下定理:

定理 1 加权图 G 的最佳推销员回路的权和 G' 的最佳 H 圈的权相同.

定理 2 在加权完备图中求最佳 H 圈的问题是 NP —完全问题.

我们采用一种近似算法求出该问题的一个近似最优解, 来代替最优解, 算法如下:

算法一 求加权图 $G(V; E)$ 的最佳推销员回路的近似算法:

1. 用图论软件包求出 G 中任意两个顶点间的最短路, 构造出完备图 $G'(V, E')$,

$$\forall (x, y) \in E', \omega(x, y) = \min d_G(x, y),$$

2. 输入图 G' 的一个初始 H 圈;

3. 用对角线完全算法^[2]产生一个初始 H 圈;

4. 随机搜索出 G' 中若干个 H 圈, 例如 2000 个;

5. 对第 2、3、4 步所得的每个 H 圈, 用二边逐次修正法^[2]进行优化, 得到近似最佳 H 圈;

6. 在第 5 步求出的所有 H 圈中, 找出权最小的一个, 此即要找的最佳 H 圈的近似解.

此算法程序见附录 (略) (由于二边逐次修正法的结果与初始圈有关, 故本算法第 2、3、4 步分别用三种方法产生初始圈, 以保证能得到较优的计算结果).

问题一 若分为三组巡视, 设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线.

此问题是多个推销员的最佳推销员回路问题. 即在加权图 G 中求顶点集 V 的划分 V_1, V_2, \dots, V_n , 将 G 分成 n 个生成子图 $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_n]$ 使得

(1) 顶点 $O \in V_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$.

(2) $\bigcup_{i=1}^n V_i = V(G)$.

(3) $\frac{\max_{i,j} |\omega(C_i) - \omega(C_j)|}{\max_i \omega(C_i)} \leq \alpha$, 其中 C_i 为 V_i 的导出子图 $G[V_i]$ 中的最佳 H 圈, $\omega(C_i)$ 为 C_i 的权, $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

(4) $\sum_{i=1}^n \omega(C_i) = \min$

定义 3 称 $\alpha_0 = \frac{\max_{i,j} |\omega(C_i) - \omega(C_j)|}{\max_i \omega(C_i)}$ 为该分组的实际路程均衡度. α 为最大容许均衡度. 显然 $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, α_0 越小, 说明分组的均衡性越好. 取定一个 α 后, α_0 与 α 满足条件 (3) 的分组是一个均衡分组. 条件 (4) 表示总巡视路程最短.

此问题包含两方面: 第一, 对顶点分组; 第二, 在每组中求最佳推销员回路, 即为单个推销员的最佳推销员问题. 我们只能去寻求一种较合理的划分准则, 对图 1 进行初步划分后, 求出各部分的近似最佳推销员回路的权, 再进一步进行调整, 使得各部分满足均衡性条件 (3).

从 O 点出发去其它点, 要使路程较小应尽量走 O 点到该点的最短路. 故用图论软件包求出 O 点到其余顶点的最短路, 这些最短路构成一棵 O 为树根的树, 将从 O 点出发的树枝称为干枝, 见图 1. 从图中可以看出, 从 O 点出发到其它点共有 6 条干枝, 它们的名称分别为 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥.

根据实际工作的经验及上述分析, 在分组时应遵从以下准则:

准则一 尽量使同一干枝上及其分枝上的点分在同一组;

准则二 应将相邻的干枝上的点分在同一组;

准则三 尽量将长的干枝与短的干枝分在同一组.

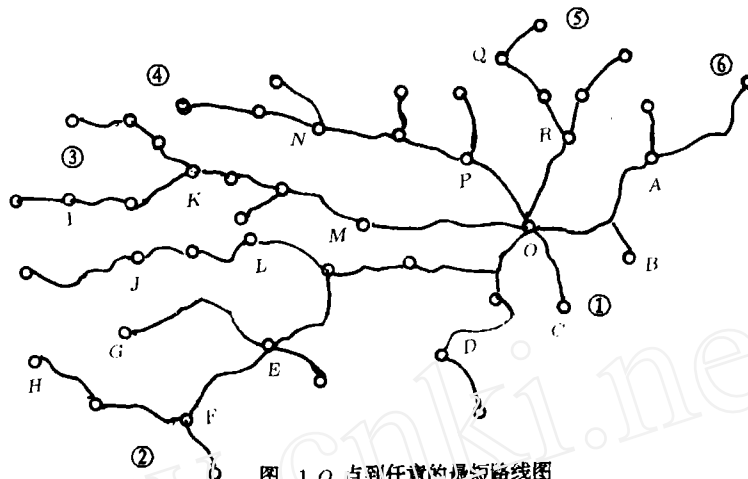
由上述分组准则, 们找到两种分组形式如下:

分组一: (⑥, ①), (②, ③), (⑤, ④);

分组二: (①, ②), (③, ④), (⑤, ⑥);

显然分组一的方法极不均衡, 故考虑分组二.

对分组二中每组顶点的生成子图, 用算法一求出近似最优解及相应的巡视路线. 使用算法一时, 在每个子图所构造的完备图中, 取一个尽量包含图 1 中树上的边的 H 圈作为其第 2 步输入的初始圈.



分组二的近似解见表 1.

图 1 O 点到任意的最短路线图

表 1 (单位: 公里)

小组名称	路 线	总路线长度	路线的总长度
I	$O-P-28-27-26-N-24-23-22-17-16-I-15$ $-I-18-K-21-20-25-M-O$	191.1	558.5
II	$O-2-5-6-L-19-J-11-G-13-14-H-12-F-10-F-9-E-7-E-8-4-D-3-C-O$	241.9	
III	$O-R-29-Q-30-32-31-33-35-34-A-B-1-O$	125.5	

因为该分组的均衡度

$$\alpha_0 = \frac{\omega(C'_1) - \omega(C'_2)}{\max_{i=1,2,3} \omega(C'_i)} = \frac{241.9 - 125.5}{241.9} = 54.2\%$$

所以此分法的均衡性很差.

为改善均衡性, 将第 II 组中的顶点 $C', 2, 3, D, 4$ 划归第 III 组, 重新分组后的近似最优解见表 2, 各组的近似最优巡视路线见图 2.

表 2 (单位: 公里)

编号	路 线	路线长度	路线总长度
I	$O-P-28-27-26-N-24-23-22-17-16-I$ $-15-I-18-K-21-20-25-M-O$	191.1	599.8
II	$O-2-5-6-7-E-8-E-9-F-10-F-12-H-14-13-G-11-J-19-L-6-5-2-O$	216.4	
III	$O-R-29-Q-30-32-31-33-35-34-A-1$ $-B-C-3-D-4-D-3-2-O$	192.3	

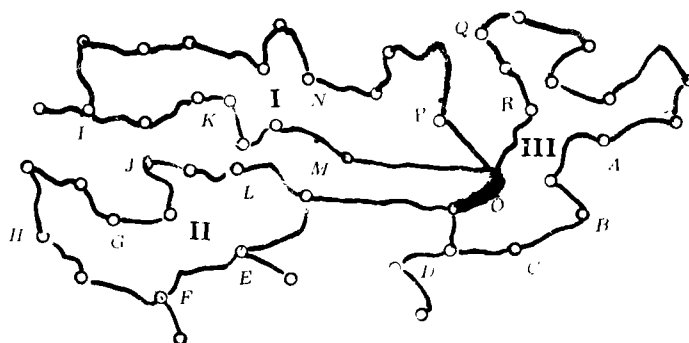


图 2 分为 3 组时的巡视路线图

注：图中粗线部分为 II 组与 III 组共同经过的路线

下面对此结果进行分析。因该分组的均衡度

$$\alpha_0 = \frac{\omega(C_3) - \omega(C_1)}{\max_{i=1,2,3} \omega(C_i)} = \frac{216.4 - 191.1}{216.4} = 11.69\%$$

所以这种分法的均衡性较好。若取最大容许的均衡度 $\alpha = 12\%$ ，则这是一个均衡分组。

用算法一算出整个网络图的近似最佳推销员巡回为 $O-C-3-2-5-D-4-8-E-9-F-10-F-12-H-12-G-11-J-19-L-7-6-M-N-25-20-21-K-18-J-13-14-15-I-16-17-22-23-24-27-26-P-28-Q-30-Q-29-R-31-33-31-32-35-34-A-B-O$

总路长为 588.6 公里。而表 2 中三组巡回的总路线长为 599.8 公里。可以认为这样设计的分组方法和巡回路线能使总路线近似最短。

问题二 当巡视人员在各乡(镇)、村的停留时间一定，汽车的行驶速度一定，要在 24 小时内完成巡视，至少要分几组及最佳的巡视路线。

由于 $T = 2$ 小时， $t = 1$ 小时， $V = 35$ 公里/小时，需访问的乡镇共有 17 个，村共有 35 个。计算出在乡(镇)及村的总停留时间为 $17 \times 2 + 35 = 69$ 小时，要在 24 小时内完成巡回，考虑行走时间，故至少要分 4 组。

由于该网络的乡(镇)、村分布较为均匀，故有可能找出停留时间尽量均衡的分组，当分 4 组时各组停留时间大约为 $\frac{69}{4} = 17.25$ 小时，则每组分配在路途上的时间大约为 $24 - 17.25 = 6.75$ 小时。而前面讨论过，分三组时有个总路程 599.8 公里的巡视路线，分 4 组时的总路程不会比 599.8 公里大太多，不妨以 599.8 公里来计算。路上时间约为 $\frac{599.8}{35} = 17$ 小时，若平均分配给 4 个组，每个组约需 $\frac{17}{4} = 4.25$ 小时 < 6.75 小时，故分成 4 组是可能办到的。

现在尝试将顶点分为 4 组。分组的原则：除遵从前面准则一、二、三外，还应遵从以下准则：

准则四 尽量使各组的停留时间相等。

用上述原则在图 1 上将图分为 4 组，同时计算各组的停留时间，然后用算法一算出各组的近似最佳推销员巡回，得出路线长度及行走时间，从而得出完成巡视的近似最佳时间。用算法一计算时，初始圈的输入与分三组时同样处理。

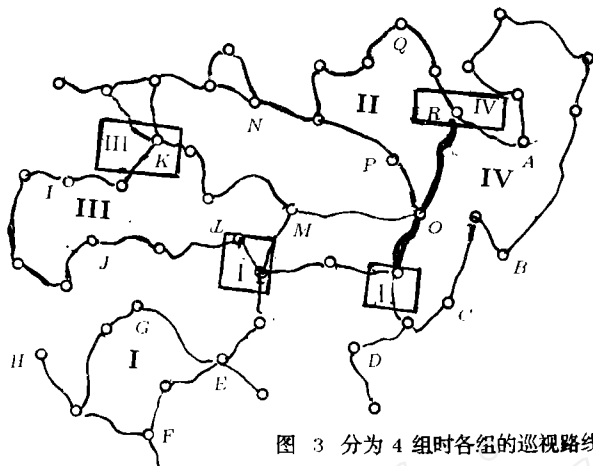


图 3 分为 4 组时各组的巡视路线图

注 1. 图中粗线表示其中两组都要经过的路段. 2. 方框中的点表示其中两组都经过的地方. 3. 方框中有两字符, 罗马字符表示要停留于此地的巡视组, 另一字符表示此地点的代号.

这 4 组的近似最优解见表 3, 各组的近似最优巡视路线见图 3.

表 3 (路程单位: 公里; 时间单位: 小时)

组名	路 线	路线 总长度	停留 时间	行走 时间	完成巡视 的总时间
I	O-2-5-6-7-E-8-E-11-G- 12-H-12-F-10-F-9-E-7-6-5-2-O	195.8	17	5.59	22.59
II	O-R-29-Q-30-Q-28-27-26-N- 24-23-22-17-16-17-K-22-23-N-26-P-O	199.2	16	5.69	21.69
III	O-M-25-20-21-K-18-I- 15-14-13-J-19-L-6-M-O	159.1	18	4.54	22.54
IV	O-R-A-33-31-32-35-34- B-1-C-D-4-D-3-2-O	166	18	4.74	22.74

表中符号说明: 黑体表示前面经过并停留过, 此次只经过不需停留; 上加横线的表示此点只经过不停留. 该分组实际均衡度

$$\alpha_0 = \frac{22.7 - 21.69}{22.74} = 4.62\%$$

可以看出, 表 3 分组的均衡度很好, 且完全满足 24 小时完成巡视的要求.

问题三 在 T, t, V 的假定下, 巡视人员足够多, 完成巡视的最短时间为多少, 并给出此条件下的最佳路线.

我们发现从 O 点巡视 H 点的最短时间是所有最短时间中最长的, 其距离为 77.5 公里, 算出时间为

$$t_H = \frac{77.5}{35} \times 2 + 2 = 6.43 \text{ 小时,}$$

因此, $T = 2$ 小时, $t = 1$ 小时, $V = 35$ 公里 / 小时, 若巡视人员足够多, 完成巡视的最短时间为 6.43 小时.

在最短时间的限定下, 完成巡视的最优路线应满足如下条件:

- (1) 每个组巡视的总时间不能超过最短时间 $t_H = 6.43$ 小时;
- (2) 所有的点都必须访问到, 不能漏点;
- (3) 所需巡视组数要尽量少.

在寻求最优路线时, 从距离 O 点较远的一些点 (如 12, 10, 15, 22 等点) 开始搜索比较容易, 因为到这些点的路线比较少.

具体方法如下:

第一步 依据图 1 算出从 O 点到每一个点的最短距离;

第二步 找出其中最大的一个, 算出从 O 点沿最短路巡视所需的时间 t_i , 并求 $\Delta t = t_H - t_i$.

第三步 若 $\Delta t < 1$, 则这一组只能访问这一点;

若 $\Delta t > 1$, 则在余下的点中找到距离 O 点最远的点, 根据条件看这一组能否巡视这一点.

第四步 若能巡视则算出 Δt , 转到第三步;

第五步 若不能, 则依次判断次远点、第三远点 ..., 满足总巡视时间不超过 t_H , 就让这组巡视这一点, 直到 $\Delta t < 1$, 然后再从第二步开始.

通过以上的方法, 最后我们找到的最优解是 22 个组. 如表 4.

表 4 (时间单位: 小时)

编号	巡视路径	停留地点	所需时间	时间差
1	$O-H-O$	H	6.43	0
2	$O-2-5-6-L-13-J-13-14-13-J-13-12-6-5-2-O$	13,14	6.15	0.28
3	$O-M-25-21-K-18-I-15-I-16-17-K-21-25-M-O$	15,16	6.31	0.12
4	$O-2-5-6-7-E-9-F-12-G-11-E-7-6-5-2-O$	12,11	5.94	0.49
5	$O-2-5-6-7-E-8-E-9-F-10-F-9-E-7-6-5-2-O$	8,10	6.22	0.21
6	$O-2-5-6-7-E-11-G-11-E-7-6-5-2-O$	G	5.58	0.85
7	$O-2-5-6-7-E-9-F-9-E-7-6-5-2-O$	9, F	6.14	0.29
8	$O-2-5-6-L-19-J-18-K-21-25-M-O$	$J,18$	6.29	0.14
9	$O-M-25-21-K-18-I-18-K-21-25-M-O$	I	5.49	0.94
10	$O-M-25-21-K-17-22-23-N-26-P-O$	17,22,23	6.12	0.31
11	$O-2-5-6-L-19-L-6-5-2-O$	$L,19$	5.64	0.79
12	$O-M-25-20-21-23-24-N-26-P-O$	20, 21, 24	6.10	0.33
13	$O-M-25-21-K-21-25-M-O$	25, K	5.50	0.93
14	$O-2-5-6-7-E-7-6-5-2-O$	6,7, E	6.38	0.05
15	$O-R-31-32-35-34-A-1-O$	31,32,35,34	6.32	0.11
16	$O-R-29-Q-30-Q-28-P-O$	$Q,30,28$	6.11	0.32
17	$O-P-26-27-26-N-26-P-O$	26,27, N	6.23	0.20
18	$O-2-3-D-4-D-3-2-O$	3, $D,4$	5.99	0.44
19	$O-1-A-33-31-R-29-R-O$	$A,33,29$	5.97	0.46
20	$O-2-5-M-O$	2,5, M	5.40	1.03
21	$O-1-B-C'-O$	1, B,C'	5.98	0.45
22	$O-P-O-R-O$	P,R	5.32	1.11

问题四 巡视组数已定, 要求尽快完成巡视, 讨论 T , I 和 V 的改变对最佳巡视路线的影响.

要尽快完成巡视, 就得要求每组完成巡视时间尽量均衡, 因为总的完成巡视时间按最长的完成巡视时间计算. 现在讨论在均衡度允许的范围内已分成 n 组后, 改变 T , t , V 对最佳巡视路线的影响. 显然在分组不变的情况下, 无论 T , t , V 如何改变, 对每组内的最佳巡视路线是没有影响的, 但可能

会影响各组间的均衡性. 因此该问题实际上是讨论 T, t, V 对分组的影响, 即在不破坏原来分组均衡的条件下, T, t, V 允许的最大变化范围.

在分 n 组的情况下, 设

S_i : 表示第 i 组的最佳推销员回路路线总长度;

X_i : 表示第 i 组所要停留的乡镇的数目;

Y_i : 表示第 i 组所要停留的村的数目;

$i = 1, 2, 3, \dots, n$.

显然, 当 $X_i = X_j, Y_i = Y_j, S_i = S_j; i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ 时, 即每组的乡(镇)数、村数、最佳巡回的长度均相等, 因而分组绝对均衡时, 即 $\alpha_0 = 0$, 无论 T, t, V 如何改变都不会改变原来分组的均衡.

(一) 不影响分组的均衡时, T, t, V 的最大允许变化范围的讨论:

对任意一个组 i , 其完成巡视的时间

$$T_i = X_i T + Y_i t + \frac{S_i}{V}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

设均衡分组的最大允许时间均衡度为 α , 即

$$\frac{|T_i - T_j|}{\max_{i=1,2,\dots,n} T_i} \leq \alpha, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

则有

$$|T_i - T_j| \leq \alpha \cdot \max_{i=1,2,\dots,n} T_i$$

记 $\varepsilon = \alpha \cdot \max_{i=1,2,\dots,n} T_i$, 则 ε 表示均衡分组所允许的最大时间误差, 称为最大允许时间误差. 则

$$\left| (X_i - X_j) \cdot T + (Y_i - Y_j) \cdot t + \frac{S_i - S_j}{V} \right| \leq \varepsilon \quad (1)$$

由式 (1) 我们得到

$$-\varepsilon \leq (X_i - X_j) \cdot T + (Y_i - Y_j) \cdot t + \frac{S_i - S_j}{V} \leq \varepsilon, \quad (2)$$

由式 (2) 可推出以下结果

1. 当 $X_i - X_j > 0$ 时, 要保持原均衡分组不变, T 必须满足的条件为

$$\begin{aligned} & \max_{X_i - X_j > 0} \left\{ \frac{-\varepsilon - (Y_i - Y_j) \cdot t - \frac{S_i - S_j}{V}}{X_i - X_j} \right\} \\ & \leq T \leq \min_{X_i - X_j > 0} \left\{ \frac{\varepsilon - (Y_i - Y_j) \cdot t - \frac{S_i - S_j}{V}}{X_i - X_j} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

2. 当 $Y_i - Y_j > 0$ 时, 要保持原均衡分组不变, t 必须满足的条件为

$$\begin{aligned} & \max_{Y_i - Y_j > 0} \left\{ \frac{-\varepsilon - (X_i - X_j) \cdot T - \frac{S_i - S_j}{V}}{Y_i - Y_j} \right\} \\ & \leq t \leq \min_{Y_i - Y_j > 0} \left\{ \frac{\varepsilon - (X_i - X_j) \cdot T - \frac{S_i - S_j}{V}}{Y_i - Y_j} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

3. 当 $S_i - S_j > 0$ 时, 由 (2) 式得

$$(X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t - \varepsilon \leq \frac{S_i - S_j}{V} \leq \varepsilon(X_i - X_j) \cdot T - (Y_i - Y_j) \cdot t$$

① 当 $0 \leq (X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t \leq \varepsilon$ 时, 有

$$V \geq \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{\varepsilon - (X_i - X_j) \cdot T - (Y_i - Y_j) \cdot t} \right\} \quad (5)$$

② 当 $(X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t > \varepsilon$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{\varepsilon - (X_i - X_j) \cdot T - (Y_i - Y_j) \cdot t} \right\} \\ & \leq V \leq \min_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{(X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t - \varepsilon} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

由 (3)~(6) 式, 当 T, t, V 三个变量中任意两个变量无论如何变化, 都可计算出为保持均衡分组不变, 三个变量所允许的最大变化范围.

(二) 分三组的实例讨论

现对分三组的情况进行讨论. 对问题一中所得的三个分组, 若考虑停留时间和行驶时间, 且取 $T = T_0 = 2$ 小时, $t = t_0 = 1$ 小时, $V = V_0 = 35$ 公里/小时, 结果如表 5.

表 5 (路程单位: 公里; 时间单位: 小时)

编号	X_i	Y_i	S_i	行驶时间	总时间
I	5	13	191.1	5.46	28.46
II	6	11	192.3	5.49	28.49
III	6	11	216.4	6.18	29.18

实际均衡度为 $\alpha_0 = \frac{29.18 - 28.46}{29.18} = 2.5\%$.

实际时间误差为 $\varepsilon_0 = 2.5\% \times 29.18 = 0.72$ 小时.

现分别规定均衡分组的最大允许均衡度 $\alpha = 2.5\%$ 和 $\alpha = 5\%$, 即最大容许的时间误差分别为 $\varepsilon = 0.72$ 小时和 $\varepsilon = 1.44$ 小时, 计算出 T, t, V 三个参量中固定任意两个时, 要不破坏原均衡分组, 另一个参量所容许的变化范围. 结果如下表:

表 6

	t, V 不变	T, V 不变	T, t 不变
$\alpha = 2.5\%$ $\varepsilon = 0.72$ 小时	$1.25 \leq T \leq 2$	$1 \leq t \leq 1.38$	$V \geq 35$
$\alpha = 5\%$ $\varepsilon = 1.44$ 小时	$0.51 \leq T \leq 2.74$	$0.63 \leq t \leq 1.75$	$V \geq 17.3$

表上表可以看出:

- (1) 当实际均衡度 $\alpha_0 = 2.5\%$ 刚好等于最大容许均衡度 $\alpha = 2.5\%$ 时, 要保持原均衡分组, 当 t, V 不变时, T 只能减小, 且下界为 1.25 小时; T 的上界为 $T_0 = 2$ 小时;
 T, V 不变时, t 只能增大, 且上界为 1.38 小时; t 的下界为 $t_0 = 1$;
 T, t 不变时, V 只能增大, 且无上界. V 的下界为 $V_0 = 35$.

(2) 当实际均衡度 $\alpha_0 = 2.5\%$ 小于最大容许均衡度 $\alpha = 5\%$ 时, 即 $\varepsilon_0 < \varepsilon$ 时要保持原均衡分组, 当

t, V 不变时, T 变化的下界为 0.51 小时, 上界为 2.74 小时;

T, V 不变时, t 变化的下界为 0.63 小时, 上界为 1.75 小时;

T, t 不变时, V 可以增大但无上界, 也可减小, 且下界为 17.3 公里 / 小时.

(三) 对实例结果的分析.

上述实例的均衡分组有一个特点: 各组的停留时间相等, 即取 $T = T_0 = 2$ 小时, $t = t_0 = 1$ 小时, $V = V_0 = 35$ 公里 / 小时, 在表 5 的分组中

$$(X_i - X_j) \cdot T_0 + (Y_i - Y_j) \cdot t_0 = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

定义 4 各组的停留时间相等的均衡分组称为停留时间相等的均衡分组. 由 (7) 式得

$$T_0 = -\frac{Y_i - Y_j}{X_i - X_j} \cdot t_0, \quad X_i - X_j \neq 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (8)$$

现讨论对停留时间相等的均衡分组, T, t, V 的变化规律.

对停留时间相等的均衡分组, 分组的实际时间误差:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \max_{i,j} \left\{ \left| (X_i - X_j) \cdot T_0 + (Y_i - Y_j) \cdot t_0 + \frac{S_i - S_j}{V_0} \right| \right\} \\ &= \max_{i,j} \left\{ \left| \frac{S_i - S_j}{V_0} \right| \right\} = \frac{S_{i'} - S_{j'}}{V_0} \end{aligned} \quad (9)$$

其中, i' 为使 S_i 最大的组的标号; j' 为使 S_j 最小的组的标号. (*)

当 T, t 不变时, 即 $T = T_0, t = t_0$ 时因 $(X_i - X_j) \cdot T_0 + (Y_i - Y_j) \cdot t_0 = 0 < \varepsilon$, 由式 (6) 知, 要保持平衡分组, V 的下界应为

$$\begin{aligned} V_{\min} &= \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{\varepsilon - (X_i - X_j) \cdot T_0 - (Y_i - Y_j) \cdot t_0} \right\} \\ &= \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{\varepsilon} \right\} \\ &= \frac{S_{i'} - S_{j'}}{\varepsilon} \quad i', j' \text{ 的含义同 } (*) \end{aligned}$$

① 取 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 时, 由 (9) 式得

$$V_{\max} = \frac{S_{i'} - S_{j'}}{\varepsilon} = V_0$$

② $\varepsilon > \varepsilon_0$ 时, 由 (9) 式得

$$V_{\min} = \frac{S_{i'} - S_{j'}}{\varepsilon} < V_0$$

故有以下定理

定理 当取 $V = V_0, T = T_0, t = t_0$ 时, 对图进行停留时间相等的均衡分组后, 设该分组的实际时间误差为 ε_0 .

(1) 若取最大允许时间误差 $\varepsilon = \varepsilon_0$, 当 T, t 不变时, 要使该均衡分组保持不变, V 的下界为 V_0 , 即 V 只能增加不能减少;

(2) 若取最大允许时间误差 $\varepsilon > \varepsilon_0$, 当 T, t 不变时, 要使该均衡分组保持不变, V 的变化范围的下界小于 V_0 .

四、模型的推广 (略)

五、优缺点分析

优点

1. 本文提出的分组准则简便易行, 可操作性强, 且可逐步调整使分组达到均衡.
2. 用均衡度的概念定量的刻画了分组的均衡性.
3. 在用近似算法求近似最佳推销员回路时, 采取了三种不同的方法产生初始圈, 使得算法比较完善, 得到了误差很小的近似最优解.
4. 从理论上定量地讨论了 V, T, t 的变化对均衡分组灵敏度的影响, 得到了很好的结果.

缺点 (略)

参 考 文 献

- [1] 舒贤林, 徐志才编著, 图论基础及应用.
- [2] 龚劬编, 图论与网络最优算法.
- [3] 费培之编著, 图和网络及其应用.