基于最小换乘次数的公交路线选择研究

摘要

本文建立逐层深入的三个模型并采用启发式算法，完成了北京公交线路自主查询系统的设计。分析乘客不愿换乘的心理特征，并考虑北京市交通网络具有“小世界”特性，我们采用基于最少换乘次数的广度优先启发式算法，迅速找到从起始站到终到站换乘次数最少的所有路线。

在启发式算法的基础上，本文一共建立三个模型。模型一是基于换乘次数最少的逐层分析模型，通过层次分析法确定权值，建立逐层优化模型，在换乘次数相同的路线中综合考虑出行耗时，出行费用等因素给出最佳路线；模型二从最短出行时间角度对最佳出行路线进行刻画，并引入换乘惩罚因子的概念将乘客的换乘因素转化为出行时间的约束。两个模型都可以解决问题一和问题二的最佳线路选择。在问题三中，我们建立了模型三：步行邻边化模型，将乘客步行的路径看成联结两个公交站点的边，故在步行范围内的两点可以认为是辆公交线路的交点，但要有一定的耗时。模型三的建立使特殊问题一般化，有很强的实际意义。

在文中求得的最佳路线中，问题一（1）（3）（4）（6）须换乘一次，（2）（5）换乘两次；问题二（1）（2）（3）（4）结果与问题一相同，（5）仍换乘两次，但选择增加，可以换乘地铁节约时间，（6）求出了直达路线。

关键词

最小换乘次数　　广度优先搜索　　逐层优化　　步行邻边化模型

目录

问题重述

我国人民翘首企盼的第 29 届奥运会明年 8 月将在北京举行，届时有大量观众到现场观看奥运比赛，其中大部分人将会乘坐公共交通工具（简称公交，包括公汽、地铁等）出行。这些年来，城市的公交系统有了很大发展，北京市的公交线路已达 800 条以上，使得公众的出行更加通畅、便利，但同时也面临多条线路的选择问题。针对市场需求，某公司准备研制开发一个解决公交线路选择问题的自主查询计算机系统。

为了设计这样一个系统，其核心是线路选择的模型与算法，应该从实际情况出发考虑，满足查询者的各种不同需求。请你们解决如下问题：

1、仅考虑公汽线路，给出任意两公汽站点之间线路选择问题的一般数学模型与算法。并根据附录数据，利用你们的模型与算法，求出以下 6 对起始站→终到站之间的最佳路线（要有清晰的评价说明）。

(1)、S3359→S1828　　(2)、S1557→S0481　　(3)、S0971→S0485

(4)、S0008→S0073　　(5)、S0148→S0485　　(6)、S0087→S3676

2、同时考虑公汽与地铁线路，解决以上问题。

3、假设又知道所有站点之间的步行时间，请你给出任意两站点之间线路选择问题的数学模型。

问题分析

一、背景分析

随着 2008 年北京奥运会的临近，北京市的公交系统在逐步完善，人们对北京公交的路线选择也越来越关心。为满足人们的需求，我们将设计一个公交线路选择的自主查询计算机系统。从传统的角度来看，人们总是喜欢选择从起点到终点的最短路径；然而研究表明，在大部分公交网络模型中，最短路径并不是决定公交线路选择的主要因素，最佳路线的选择受到很多其他因素的影响。例如，换乘次数、出行费用、出行耗时等等。本文所设计的系统就是要从实际情况出发，满足查询者的各种不同需求，从而给出出行的最佳线路。

二、公交乘客的心理分析

影响乘客通常受到以下几个因素的作用：

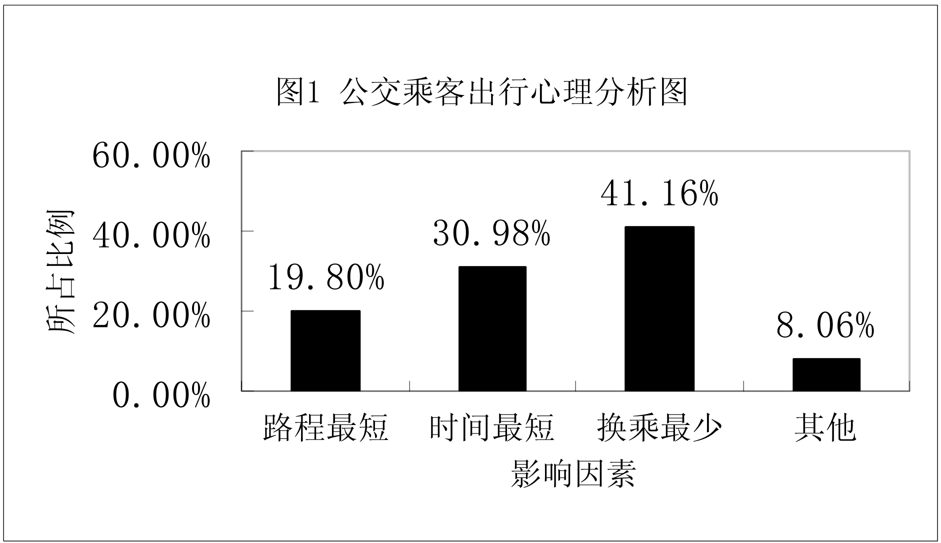
(1)换乘次数，是指乘客在完成一次出行过程中所换公交车的次数；

(2)出行耗时，指乘客在一次出行过程中所需的时间，它也包括车上和车外部分，车外耗时除了在车外距离部分所耗的时间外还包括在车站等车的时间；

(3)出行费用，指的是乘客在完成一次出行过程中所花的车费。

(4)出行不满意度，指乘客由于乘坐不同交通工具产生的不满意程度。

不同乘客对于各项因素的要求都是不同的，杨新苗等[1]1999 年在南京市的 8 个主要公交站点进行了公交出行心理问讯调查，调查表明公交乘客选择出行路线时，有 41.16% 的乘客在选择出行路径时首先考虑的是换乘最少（如图 1 所示），其比例远大于其他。此外，在鞍山、无锡进行的调查也得到类似的结果。考虑到北京的实际情况，比例会稍有变化，但换乘最小仍然是乘客关注的主要因素。



三、公交网络分析

公交网络是由车站和线路构成的，在本问题中，站点可以抽象为网络的节点，线路抽象为网络的边。要特别注意的是，在现实生活中，人们往往倾向于认为相距不远的两站也看成同一站，而不论这两站间是否有公交到达。关于这一点，本文将在解答问题三时给出详细论述。

综上分析，我们首先定义**基础最佳路线** $P_k(k=1,2...n)$ ：一次查询所得的换乘次数最少的路线（其中 n 为基础最佳路线的条数），基于此建立模型，从简单到复杂逐层深入研究。

模型假设

基本假设

1. 假设在乘客出行的时间内所有公交车都能正常运行；
2. 人们由于换乘方式不同产生的不满意度不同；
3. 相邻公汽站平均行驶时间(包括停站时间)相同，相邻地铁站平均行驶时间(包括停站时间)相同；
4. 所有交通工具换乘的平均耗时包括等车时间和步行时间；
5. 基本参数设定与附录一中相一致；
6. 假设乘客最多换乘两次，若两次仍未找到可到达目的地的公交线路，则显示没有查询结果；
7. 假设人步行不受公交线路限制。

假设说明

1、 现实中不同线路的公交车首末班车时间不同，但我们要给出的是通常情况下的最佳路线，故假设一是合理的。

2、 在实际生活中，若两个站点之间换乘两次时仍无公交可以到达，则公交已失去了“便利”的意义，推荐使用其它出行方式，故假设六是合理的。

符号约定

P_k： 一次查询的第 k 条基础最佳路线；

t_k： 选择路线 P_k 的出行耗时（单位：分钟）；

c_k： 选择路线 P_k 的出行费用（单位：元）；

S_k^i： P_k 第 i 次换乘时的不满意度，定义 $S_k^i=1$ 表示第 i 次地铁换乘地铁的不满意度为 1，$S_k^i=2$ 表示第 i 次公交换乘地铁或者地铁换乘公交是的不满意度为 2， $S_k^i=3$ 表示第 i 次公交换乘公交的不满意度为 3；

S_k： P_k 由于换乘产生的不满意度，显然 $S_k=\sum_{i=0}^{2} S_k^i$

w_1 ： 出行时间 t_k 的权重；

w_2 ： 出行费用 c_k 的权重；

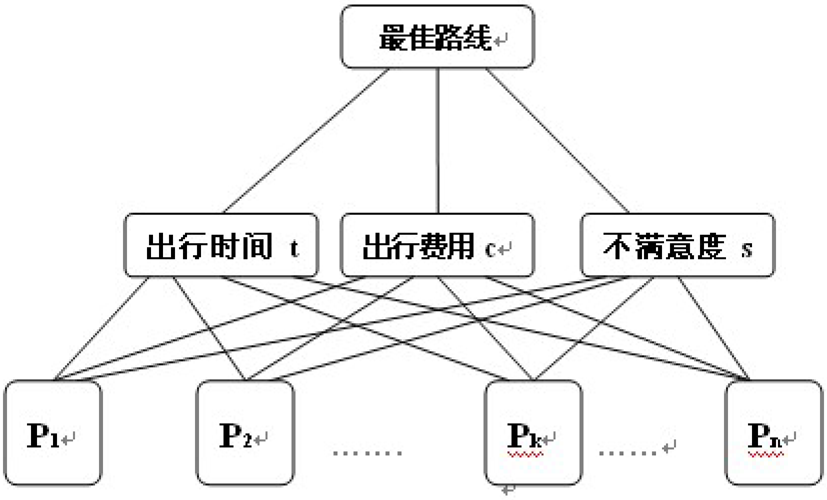
w_3 ： 换乘不满意度 S_k 的权重。

$\varphi(P_k)$： 线路 P_k 综合评价指标。

模型一的建立及求解

模型一：基于换乘次数最少的逐层分析模型

由上文论述，我们首先找到从任意站点 i 到站点 j ，基于换乘次数最少而找到的基础最佳路线 $P_k(k=1,2...n)$ ，其中 n 为基础最佳路线的条数。求得 P_k 后，每条基础最佳路线 $P_k(k=1,2...n)$ 都包含出行耗时、出行费用、舒适度三项指标。要找出最佳路线应在换乘次数最小的前提下综合考虑出行耗时、出行费用、舒适度等因素，利用层次分析法建立一个简单的层次分析模型，用 Matlab 得到各因素的权重向量 (w_1,w_2,w_3) 。层次结构如图二：



图二　层次结构图

模型建立

定义基础最佳路线的综合评价指标 $\varphi(P_k)$ 如下：

$$Min \qquad \varphi(P_k)=w_1t_k+w_2c_k+w_3s_k\,(k=1,2...n)..............................1\,)..$$

$$s.t. \qquad \sum_{i=1}^{3}w_i=1$$

分别求解基础最佳路线 $P_k\,(k=1,2...n)$ 的综合评价指标，取值最小的路线为最佳路线。

模型说明

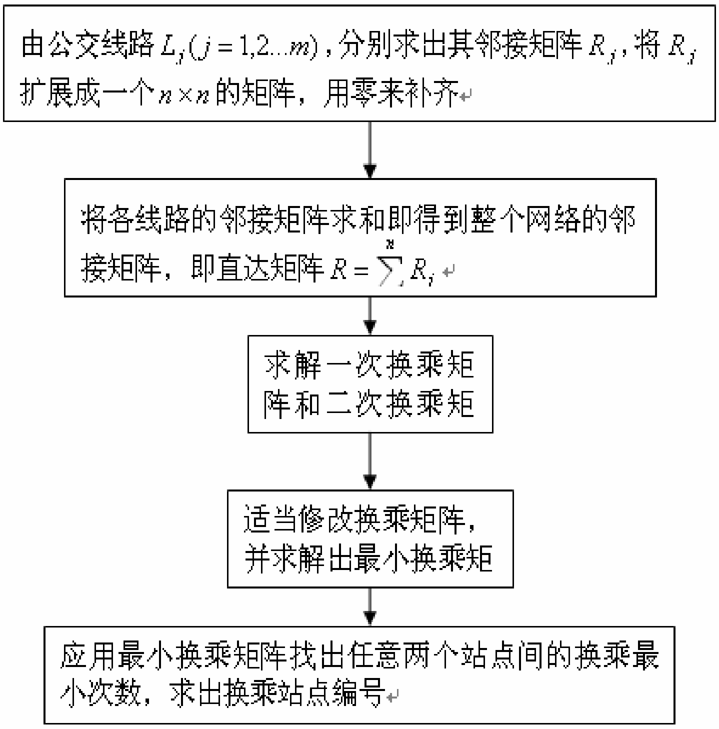
1. 综合评价指标值越小则说明所选最佳路线的出行时间、费用和不满意度也越小，也即说明线路越优
2. 对于基础最佳路线的三项评价指标：t_k,c_k,s_k 由于三个指标+
3. 的量纲不同，首先用级差规范化方法进行归一化处理，在不混淆的前提下仍用上述符号表示.
4. 出行耗时包括乘车时间和换乘时间；
5. 出行费用即从出发地到目的地的总乘车费用；
6. 不满意度 S_k 的定义见符号约定。由于地铁的平稳性较好，且速度快、空间较大，一般情况下认为乘坐地铁要比公汽舒适，故乘公交比地铁不满意度大。

基本算法

首先，我们求出基础最佳路线。根据乘客的心理分析，乘客在有直达车到达时首先选择直达车，其次在没有直达车时考虑一次换乘的路线，再次考虑两次换乘。

算法一：基于矩阵分析的公交网络最少换乘算法

算法一的流程图如下：



图三

说明：

（1）构造直达矩阵：$R=(r_{ij})_{n\times n}$。其中 $r_{ij}=\begin{cases}0 & \text{若从站点i到站点j没有公交路段}\\ \alpha_{ij}^k & \text{从站点i可由第k条线路到达站点j}\end{cases}$

k 位第 k 条公交线路， $r_{ij}\neq 0$ 则表明从站点 i 到站点 j 存在直达路线。

（2）一次换乘矩阵：$R^{(1)}=(r_{ij}^1)_{n\times n}$ $r_{ij}^{(1)}=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} r_{iu}\times r_{uj} & u\in S,且u\neq i,j\\ 0 & i=u或u=j\end{cases}$

（3）二次换乘矩阵：$R^{(2)}=(r_{ij}^2)_{n\times n}$ 可由一次换乘矩阵递推得到

（4）修正：

1) 对于一次换乘矩阵中存在 i,j,u 在同一公交线路 k 上的问题，可以看作从 i到j 可以通过线路 k 直接到达，此时将元素合并为 α_{ij}^k

2) 一次换乘矩阵去除直达矩阵项,赋值为零，二次换乘矩阵去除一次换乘项

（5）最少换乘矩阵的确定：定义最小换乘矩阵为 $R_{\min} = R + R^{(1)} + R^{(2)}$

则可以直接应用最小换乘矩阵找出任意两个站点间的换乘最小次数，求出换乘站点编号，直接得到基础最佳路线集。

算法二：最少换乘的广度优先算法

研究表明，北京市的公交网络具有“无标度”特性、“聚类性”及“小世界”特性[2]。所以可以不通过矩阵，直接用广度优先搜索查询最少换乘次数基础最优线路。算法描述如下：

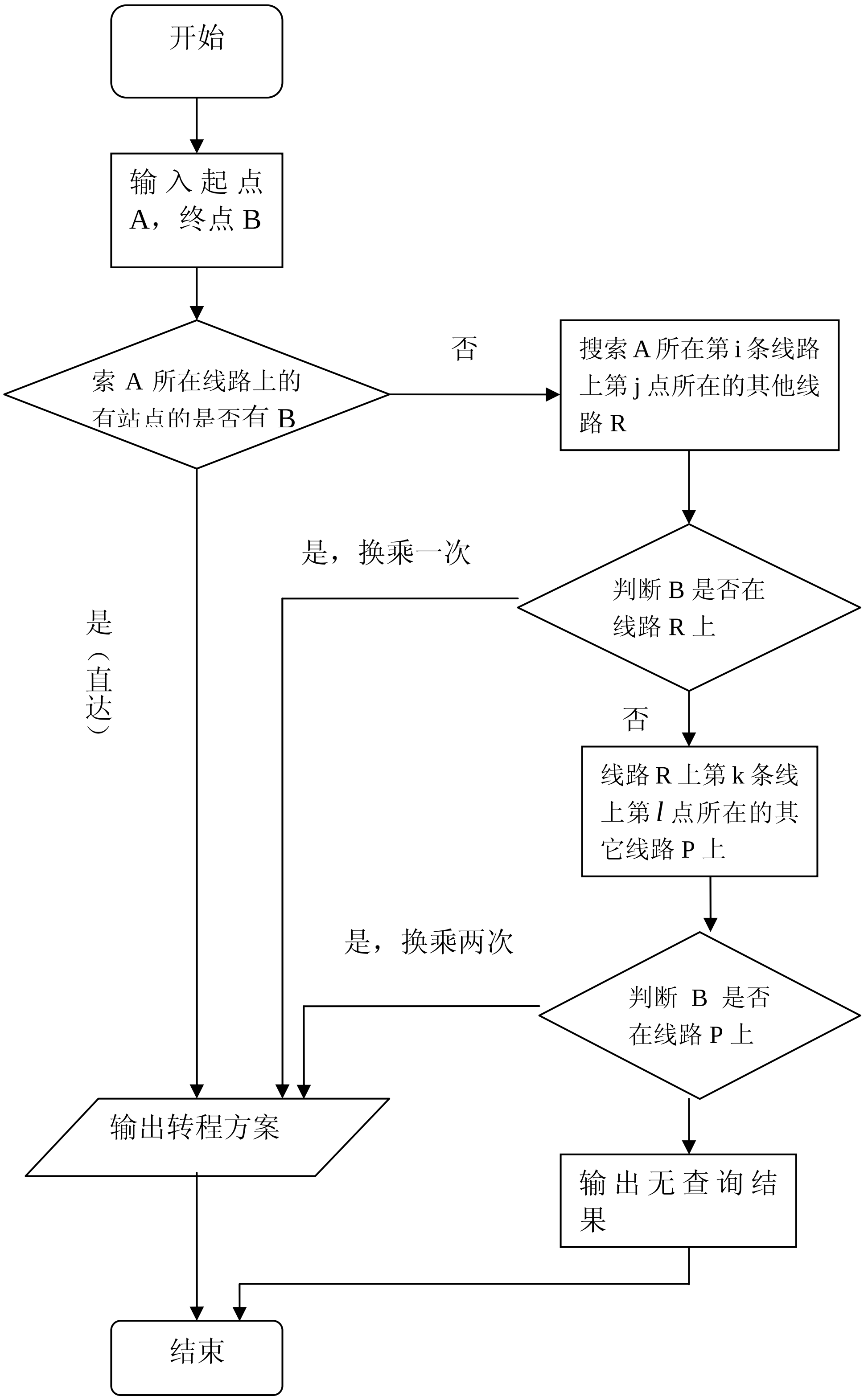
Step 1 输入起点 A，查找并记录 A 所在的所有路线 $L(i)$，记录 $L(i)$ 上的所有站点 $S_i(j)(i=1,2...n; j=1,2...m; m,n \in N)$。搜索 $S_i(j)$ 中是否存在站点 B，若存在表明从 A 到 B 可以直达，转 Step 4 ；否则转 Step 2 ；

Step 2 搜索并记录站点 $S_i(j)$ 所在的路线 $R(k)$，记录 $R(k)$ 上的所有站点 $S_k(l)$，搜索 $S_k(l)$ 中是否存在站点 B，若存在说明从 A 可以通过一次换乘到 B，转 Step 4 ；否则转 Step 3 ；

Step 3 搜索并记录站点 $S_k(l)$ 所在的线路 $P(t)$，记录 $P(t)$ 上的所有点 $S_t(u)$，搜索 $S_t(u)$ 中是否存在站点 B，若存在说明从 A 可通过两次换乘到达 B，转 Step 4 ；否则输出“没有查询结果”，结束；

Step 4 记录以上查询到的从站点 A 到站点 B 的所有路线（包括换乘站点），根据各路线所经站点和乘坐的各公汽计算该路线的耗时和费用，输出结果。

下面图四直观地表现了算法二


开始
输入起点A，终点B
索A所在线路上的有站点的是否有B
否
搜索A所在第i条线路上第j点所在的其他线路R
是（直达）
是，换乘一次
判断B是否在线路R上
否
线路R上第k条线上第l点所在的其它线路P上
是，换乘两次
判断 B 是否在线路P上
输出转程方案
输出无查询结果
结束

图四

算法二可用Matlab编程实现，对于处理大规模公交网络速度较快，而且程序易于实现。

根据以上建立基于换乘次数最少的逐层分析模型，首先从最简单的情况入手，逐步深入求解模型。

问题一的解答

在选择最佳线路时，仅考虑公汽线路是最基本的情况。以查询（1）S3359→S1828 为例，给出问题一的解答过程。

1、1、1　问题一的模型

根据模型假设，仅考虑公汽时不存不满意度差异，或者说不满意度是相同的。故只考虑最简单的极限模型，得到基础最佳路线后，只区分出行耗时和费用产生的差异，即只考虑耗时最小或费用最少给出最佳线路。令目标函数 1）中 $w_1=1, w_2=0, w_3=0$，或 $w_1=0, w_2=1, w_3=0$。得到目标函数 2）：

目标函数　$$\text{Min}\quad \varphi(P_k)=w_1t_k+w_2c_k \text{..............................} 2)$$

1、1、2　问题一的求解

用算法二求出的 S3359→S1828 最少换乘的路线列表如表一所示：

表一　问题一中 S3359→S1828 基础最佳路线

	起始站	线路 1	换乘站	线路 2	终到站	耗时	费用
1	S3359	L436 下	S1784	L167 下	S1828	101	3
2	S3359	L436 下	S1784	L217 下	S1828	101	3
3	S3359	L436 下	S1241	L167 下	S1828	107	3
4	S3359	L436 下	S1241	L217 下	S1828	107	3
5	S3359	L436 下	S3695	L217 下	S1828	113	3
6	S3359	L436 下	S2606	L217 下	S1828	125	3
7	S3359	L469 上	S2364	L217 下	S1828	137	3
8	S3359	L469 上	S0727	L217 下	S1828	137	3
9	S3359	L469 上	S0304	L217 下	S1828	137	3
10	S3359	L469 上	S3192	L217 下	S1828	137	3
11	S3359	L469 上	S0519	L167 下	S1828	140	4

注：上、下分别代表上行和下行，耗时单位为分钟，费用单位为元；表二、表三相同

表一得到$S3359 \to S1828$的基础最佳路线，显然满足问题一的目标函数式 2）的查询结果是表一中的路线 1 和路线 2，即（1）的最佳路线为路线 1 和路线 2 。

1、1、3　只乘公交的最佳路线选取准则

对于上述结果，选择路线 1、2 为最佳路线主要理由有三：

1）本算法基于换乘次数最少而求得，显然路线 1、2 是换乘次数最小的路线；

2）在表一的 11 种方案中，选择路线 1、2 的出行耗时最小；

3）在表一的 11 种方案中，选择路线 1、2 的出行费用最少。

以上三点也是对最佳路线 1、2 的**评价说明**。而且，路线 1、2 换乘站在同一站点，乘客换乘时有一定选择性，可缩短等待时间。

此外，作为自主查询计算机系统，仅仅给出两种最佳路线是远远不够的，乘客选择路线还有很多其他因素，如避开交通密集地区、选择早班车较早的路线等等。并且模型中的换乘耗时都是平均耗时，通常一条路线的车站越多、平均耗时越长则该路线的实际耗时波动越大。而耗时相同时，两条相差一元钱的路线在大众心理基本认为等同。所以我们在设计系统显示结果时，考虑在上面给出的最佳路线的基础上费用波动一元钱，或时间波动三分钟都认为是最佳线路。我们给出广义的最佳路线准则如下：

准则 1 —— 广义的最佳路线选取准则：只考虑换乘次数最小的公交路线，在从站点 A 到站点 B 的所有路线中，若最小费用为α（元），最短平均耗时为β（分钟），则满足以下任一条件的路线即称为从站点 A 到站点 B 间的广义最佳线路：

（1）　费用为α，平均耗时为β；

（2）　费用为α，平均耗时为$\beta+3$；

（3）　费用为$\alpha+1$，平均耗时为β。

作为公交“自主”查询系统，广义的最佳线路选取准则得到结果更合理、 更符合实际，乘客的选择余地也更大；所以我们设计的系统推荐两种最佳路线（一种费用最小的、一种时间最少的），同时显示所有的广义最佳线路（分别符合条件（2)、条件（3)），并给出每条路线的平均耗时和所需费用，供乘客根据实际情况自主选择。

基于以上论述，重新给出（1）的广义最佳路线，以及其它五组待查站点的计算结果，如表二、表三所示（其中，标有“★”者为推荐最佳路线，表二中由于（6）只有两条线路，故全部给出）：

表二　问题一中（1、3、4、6）的广义最佳线路及推荐最佳线路（★）

	序号	起始站	线路 1	换乘站	线路 2	终到站	费用	耗时
(1)S3359→S1828	★1	S3359	L436 下	S1784	L167 下	S1828	3	101
	★2	S3359	L436 下	S1784	L217 下	S1828	3	101
(3)S0971→S0485	★1	S0971	L013 下	S2184	L417 下	S0485	3	128
	★2	S0971	L013 下	S0992	L417 下	S0485	3	131
(4)S0008→S0073	★1	S0008	L159 下	S0400	L474 上	S0073	2	83
	★2	S0008	L159 下	S2633	L474 上	S0073	2	83
	★3	S0008	L159 下	S3053	L474 上	S0073	2	83
	★4	S0008	L159 下	S2683	L058 下	S0073	2	83
	★5	S0008	L159 下	S0291	L058 下	S0073	2	83
	★6	S0008	L159 下	S3614	L058 下	S0073	2	83
	★7	S0008	L159 下	S0491	L058 下	S0073	2	83
	★8	S0008	L355 下	S2263	L345 上	S0073	2	83
	★9	S0008	L355 下	S3917	L345 上	S0073	2	83
	★10	S0008	L355 下	S2303	L345 上	S0073	2	83
	★11	S0008	L463 下	S2083	L057 上	S0073	2	83
	12	S0008	L355 下	S2263	L057 上	S0073	2	86
	13	S0008	L355 下	S3917	L057 上	S0073	2	86
	14	S0008	L355 下	S2303	L057 上	S0073	2	86
	15	S0008	L355 下	S2302	L057 上	S0073	2	86
	16	S0008	L355 下	S3232	L057 上	S0073	2	86
	17	S0008	L159 下	S2559	L058 下	S0073	3	83
	18	S0008	L159 下	S2559	L464 上	S0073	3	83
	19	S0008	L159 下	S3315	L058 下	S0073	3	83
(6)S0087→S3676	★1	S0087	L454 上	S3496	L209 下	S3676	2	65
	2	S0087	L454 上	S1893	L209 下	S3676	2	71

表三　问题一中（2、5）的广义最佳线路及推荐最佳线路（★）

	序号	起始站	线路 1	换乘站 1	线路 2	换乘站 2	线路 3	终到站	费用	耗时
(2)S1557→S0481	★1	S1557	L084 下	S1919	L189 下	S3186	L460 下	S0481	3	106
	★2	S1557	L363 下	S1919	L189 下	S3186	L460 下	S0481	3	106
(5)S0148→S0485	★1	S0148	L308 上	S0036	L156 上	S2210	L417 下	S0485	3	106
	★2	S0148	L308 上	S0036	L156 上	S3332	L417 下	S0485	3	106
	★3	S0148	L308 上	S0036	L156 上	S3351	L417 下	S0485	3	106
	4	S0148	L308 上	S0036	L157 下	S2480	L417 下	S0485	3	109
	5	S0148	L308 上	S0036	L157 下	S2482	L417 下	S0485	3	109

问题 2 的解答

1、2、1　问题二的模型

问题二实质是在公汽线路的基础上加入地铁的线路，通过地铁站将一些站点连接，相当于原本没有交点的公交线路可能在地铁站相交，公交网络进一步扩大。与问题一类似，要求解最佳的公交路线首先要求解出最小换乘路线。

本问的解答过程就是模型一的完整诠释，模型简要重述如下：

定义基础最佳路线的综合评价指标 $\varphi(P_k)$：

$$\begin{cases} \varphi(P_k) = w_1 t_k + w_2 c_k + w_3 s_k \, (k = 1,2...n) ....1).. \\ \sum_{i=1}^{3} w_i = 1 \end{cases}$$

分别求解基础最佳路线 $P_k\,(k = 1,2...n)$ 的综合评价指标，取值最小的路线为最佳路线。

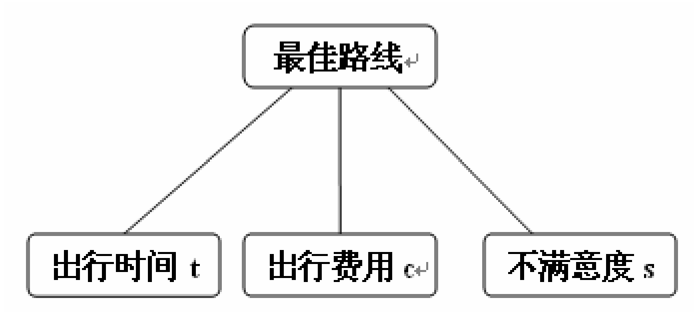
仍以（1）S3359→S1828 为例求解模型解答本问。

1.2.1.1　对于最少换乘线路的求解

先将地铁线路近似的看作公交线路，只是路段的权值不同。即每段平均行驶时间和费用的差别。分析地铁线路换公交的信息，可以将与地铁相连的公汽站点和地铁站点等效为一个站点，作为一个地铁站点来处理,以简化算法。在空间上把一些公汽站点的距离拉近。其中一些关于运用问题一中的最少换乘的广度优先算法来求解最小换乘路线。将新增的地铁站点及相关的边加入网络中后即可求解出新的公交网络的最小换乘路线。针对（1）S3359→S1828 求解时，得到的基础最佳路线与问题一相同，即为表一。

1.2.1.2　出行时间，出行费用，不满意度等因素权重的确定

在换乘次数最小的前提下综合考虑出行耗时、出行费用、舒适度等因素，利用层次分析法建立一个简单的层次分析模型得到各因素的权重向量 (w_1, w_2, w_3) ，层次结构图如图五所示：



图五

由上文中的公交乘客出行心理图（图一）分析可知，影响力大小排序如下：

出行时间 〉 出行费用 〉 不满意度

构造三个指标t,c,s的两两之间的权重成对比较矩阵为：$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

求出该成对比较矩阵的特征向量，得到判断矩阵的最大特征值是$\lambda_{\max}=3.0385$，

$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=\frac{3.0385-3}{3-1}=0.01925$最大特征值对应的特征向量为：（0.9161，0.3715，0.1506），做归一化处理后为（0.6370，0.2583，0.1047）

对结果进行一致性检验得：$CR=\frac{CI}{RI}=0.033<0.1$满足一致性要求，以该特征向量归一化后作为各指标的权重向量，即$\left(w_1,w_2,w_3\right)=(0.6370,0.2583,0.1047)$

对上述给出的基础最佳路线进一步优化求解得到最终的最佳路线。

1.2.1.3　最佳路线的求解

应用已经求解出的基础最佳路线即可以确定各基础最佳路线P_k对应的t_k,c_k,S_k等因素的大小。再应用已求解的权重向量w_1,w_2,w_3来求解各个线路的,线路P_k综合评价指标$\varphi(P_k)$，取值最小的路线为最佳路线。对于问题二的结果，同样给出广义最佳线路及推荐最佳线路。表四中仅列出广义最佳路线中各路线的$\varphi(P_k)$：

表四　问题二中 S3359→S1828 基础最佳路线及综合评价指标

	起始站	线路 1	换乘站	线路 2	终到站	耗时	费用	$\varphi(P_k)$
1	S3359	L436 下	S1784	L167 下	S1828	101	3	0.1047
2	S3359	L436 下	S1784	L217 下	S1828	101	3	0.1047
3	S3359	L436 下	S1241	L167 下	S1828	107	3	0.2027
4	S3359	L436 下	S1241	L217 下	S1828	107	3	0.2027
5	S3359	L436 下	S3695	L217 下	S1828	113	3	0.3007
6	S3359	L436 下	S2606	L217 下	S1828	125	3	0.4967
7	S3359	L469 上	S2364	L217 下	S1828	137	3	0.6927
8	S3359	L469 上	S0727	L217 下	S1828	137	3	0.6927
9	S3359	L469 上	S0304	L217 下	S1828	137	3	0.6927
10	S3359	L469 上	S3192	L217 下	S1828	137	3	0.6927
11	S3359	L469 上	S0519	L167 下	S1828	140	4	1

可见，路线 1、2 是最佳路线

1.2.1.4　最佳路线选择

和问题一类似，给出（1）~（6）的广义最佳路线和推荐最佳路线。因为问题二的结果（1）、（2）、（3）（4）与问题一相同（见表二、表三），所以仅在表五中给出（5）（6）的结果：

表五　问题二（5、6）的广义最佳线路及推荐最佳线路（★）

(5)		起始点	线路 1	换乘站 1	线路 2	换乘站 2	线路 3	终到站	花费	耗时
	★1	S0148	L024 下	D02	T1 上	D21	L051 上	S0485	5	87.5
	★2	S0148	L024 下	D02	T1 上	D21	L104 上	S0485	5	87.5
	★3	S0148	L024 下	D02	T1 上	D21	L395 下	S0485	5	87.5
	★4	S0148	L024 下	D02	T1 上	D21	L450 下	S0485	5	87.5
	★5	S0148	L024 下	D02	T1 上	D21	L469 下	S0485	5	87.5
	6	S0148	L308 上	D03	T1 上	D21	L051 上	S0485	5	88
	7	S0148	L308 上	D03	T1 上	D21	L104 上	S0485	5	88
	8	S0148	L308 上	D03	T1 上	D21	L395 下	S0485	5	88
	9	S0148	L308 上	D03	T1 上	D21	L450 下	S0485	5	88
	10	S0148	L308 上	D03	T1 上	D21	L469 下	S0485	5	88
	★11	S0148	L308 上	S0036	L156 上	S2210	L417 下	S0485	3	106
	★12	S0148	L308 上	S0036	L156 上	S3332	L417 下	S0485	3	106
	★13	S0148	L308 上	S0036	L156 上	S3351	L417 下	S0485	3	106
	14	S0148	L308 上	S0036	L157 下	S2480	L417 下	S0485	3	109
	15	S0148	L308 上	S0036	L157 下	S2482	L417 下	S0485	3	109
	序号	起始站		线路	终到站		花费		耗时	
(6)	★1	S0087（D27/S0088）		L231	S3676(S0427/D36）		1		34	
	2	S0087(D27)		T2 上	S3676（D36）		3		29	
	3	S0087（D27/S0088）		L381	S3676(S0427/D36）		1		43	

模型二的建立及求解

模型二　基于最短出行时间的最佳路线选择模型

由乘客出行心理变化图中可以看出，乘客出行最关注的两个因素是换乘次数和出行耗时。模型二是先不考虑出行费用的前提下，考虑出行的最佳路线。引入换乘惩罚因子的概念，将乘客的换乘因素转化为出行时间的约束。归结为在公交网络图 $G=(S,L,E,W_s,W_e)$ 中寻找一条路线 P 使得出行的时间最短。数学模型如下：

2、1　符号约定

t_w 为公汽换乘公汽平均耗时

$t_0(u,v)$ 为相邻站公汽行驶时间

$w(u,v)$ 为连接 u 、v 路段的权值，表示在该段的平均行驶时间

$R(u,v)$ 为连接 u 、v 的路段上的公交线集合，

$L(u)$ 为起点 A 到节点 u 的权值

S 为已标记节点的集合

$R_e(u)$ 为到达 u 点用的公交线路集合；

$$x_{u,v}=\begin{cases}1 & \text{最佳路线经过路段}u,v \\ 0 & \text{最佳路线不经过路段}u,v\end{cases}$$

λ：换乘惩罚因子

$$\eta=\begin{cases}1 & \text{在站点选择换乘} \\ 0 & \text{在站点不换乘}\end{cases}$$

2、2　模型建立

目标函数：$Min\quad \sum_{u,v}(t_0(u,v)+\eta\cdot\lambda\cdot t_w).x_{u,v}$

约束条件：$\lambda \geq 0$

$x_{u,v}\in\{0,1\}$

$\eta\in\{0,1\}$

对于换乘惩罚因子 λ 的说明：

换乘惩罚因子的引入是为了便于在路径选择算法中有效的识别换乘，将换乘所带来的时间损失和不方便程度体现在出行耗时上。通过求解最小的出行时间来达到抑制换乘的作用。具体值得确定可以根据换乘对人们造成的不方便程度和时间损失的程度来确定。损失程度越大，越不方便，则 λ 越大。

2、3　模型求解

2、3、1　具体算法如下：(应用改进的 dijkstra 算法进行求解)

$Step1$：对所有的节点 u，

$$IF \quad u \neq A, \quad THEN \quad L(u)=\infty; \quad ELSE \quad L(u)=0；\quad S=\phi；$$

$Step2$：从不属于集合 S 的点中选取 $L(u)$ 取最小时的一个 u 值，$S=S\cup\{u\}$；

$Step3$：对所有的节点 v，$v\notin S$，

令 $L(v)=Min[L(v),L(u)+w(u,v)]$，$\Pr e(v)=u$，

其中，$w(u,v)=t_0(u,v)+\eta\cdot\lambda\cdot t_w$，　$\Pr e(v)$ 为 v 点先驱，

$$IF \quad u=A, \quad THEN \quad R_e(v)=R(u,v),\eta=0；$$

$$ELSE \quad IF \quad R(u,v)\cap R_e(u)=\phi, \quad THEN \quad R_e(v)=R(u,v),\eta=1；$$

$$ELSE \quad R_e(v)=R(u,v)\cap R_e(u),\eta=0；$$

$Step4$：$IF \quad B\in S, \quad THEN \quad GOTO \quad Step5; \quad ELSE \quad GOTO \quad Step2$；

$Step5$：形成最优路径 $A(v_0)-v_1-v_2-\cdots-v_i-v_{i+1}-\cdots-v_n-B(v_{n+1})$，通过 $\Pr e(v)$ 与 $R_e(v)$ 从终点 B 反向递归查找全路径与节点，算法结束。

2、3、2　对于公交网络实际问题的求解

我们应用上述算法对本问题进行求解，由于本题中的网络过于复杂，用改进的 dijkstra 算法仍有很高的时间复杂度和空间复杂度。本问题的公交网络中给出的站点数为 3000 多个，则要建立一个 3000*3000 邻接矩阵，我们用 matlab 编写程序对问题进行了求解。

用模型二求的的结果与模型一相同，故结果在此不再赘述。

结果分析

问题二与问题一的结果相比，只有（5）、（6）不同。分析原因如下：

1、（5）（6）位于地铁沿线，当增加地铁这项交通工具时，首先会影响地铁沿线的站点的路线选择。

2、增加地铁者这种交通方式后，（6）找到了换乘次数更少的解，是因为地铁站点把两个不相交的公交站点联结起来；

3、增加地铁者这种交通方式后，（5）虽然没有找到换乘次数更少的解，但是找到了时间更少的地铁线路，

问题三的解答

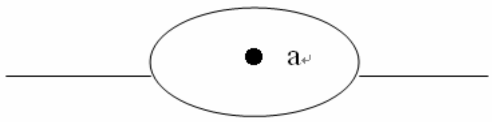
在解决问题一、问题二的过程中，我们基于换乘次数最小的逐步分析模型给出了指定起始点与终到点之间的最佳路线。从问题二与问题一的对比分析，可得到如下启发：

1、在两个问题的基础最佳路线中均出现上车后只乘坐一站就下车的换乘，这样情况下可以考虑乘客换乘之前的乘坐的一站采用步行，此时原来换乘一次的情况就变成了现在的从出发点步行到原来的换乘点，从换乘点直达目的地。减少了换乘次数；

2、增加一种交通工具可以使原来不联通的站点连通，从而扩展交通网络，找到更优的路线。例如前两个问题中的（5）、（6），增加地铁后，（5）找到了时间更短的路线，而（6）找到了直达路线。

3、人们路线选择时，有时考虑率绕开某些已发生交通拥堵的站点或线路。

然而在现实生活中，人们出行并不一定选择乘车，也可能行走。在前文问题分析中也提到，对于相距不远的两站，人们往往倾向于看成同一站。故我们考虑把以站台为圆心，以人们能接受的步行距离为半径所画的圆形区，抽象为一个节点，如图六



如图六

依据《城市道路交通规划设计规范》的规定，合理的公交网络布局应让乘客在步行 500 m 以内能到达合适的公交站点。所以，虽然人行走的时间和距离都有一定的忍受范围，但可能存在可接受范围内的满意站点，使得即使在有公交车时，人们也有可能选择步行。

查阅相关资料可知，人步行速度大约 4km/h，而公交运行速度大约 15km/h，约是人走路的四倍。本题目中，相邻公汽间的平均行驶时间为 3 分钟，可以大致估算出人在相邻站点间的平均步行时间为 $\frac{3\times 15}{4}=11.25$ 分钟，平均步行距离为 750 米。所以本题中，沿公交线路走一站认为是乘客可以接受的。

综合上述分析以及问题一、二给我们的三点启发，在解答问题三时，首先从较为简单的模型入手，只考虑启发一，以问题一中的（1）为例，用穷举找出基础最佳路线中所有只坐一站的换乘，并改为乘客步行，减小换乘次数优化结果；然后基于启发二，将乘客步行路径看成联结公交站点的边，再次用模型一及算法二求解。两种思路具体展开如下。

3、1　解法一：用步行代替一站换乘

用步行代替一站换乘基于模型一，假设乘客只沿着公交线路走。先求解任意两个站点间的最小换乘路线，搜索最小换乘次数路线中所有只坐一站的换乘的情况，将其用步行来代替，进一步减小了换乘次数。由于人是沿公交路线行走的，且由上文中启发一的分析，我们认为这种情况下人步行是以牺牲出行时间为代价减少了换乘次数和出行费用。我们将最小换乘次数分为三类：公交直达，一次换乘，二次换乘来分别讨论步行换乘模型的优化策略。

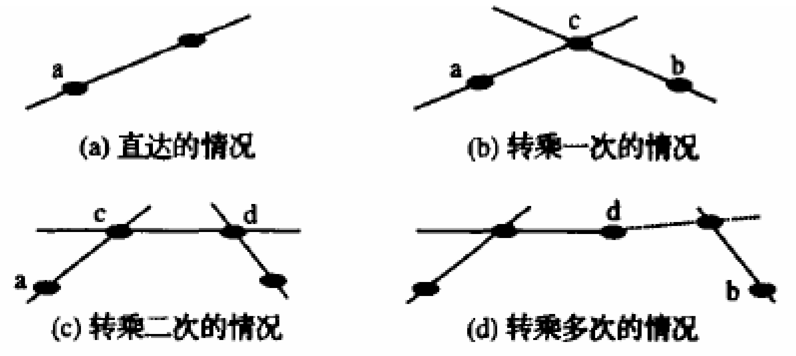
设出发地和目的地分别为站点 a，b，相邻两站之间的距离基本相等，设为l；任意两站地i, j之间的距离$|ij|$都能被l整除。

（1） 从 a 可以直达 b：如图七中（a）所示，若$|ab| = l$则建议直接从 a 点步行到 b 点，不需乘坐从公交

（2） 从站点 a 经站点 c 转乘一次到达 b：如图中（b）所示若$|ac| = l \ \ or \ \ |bc| = l$则路线可以根据实际状况将换乘一次优化为（ac 段步行，bc 直达）或（ac 直达，bc 段步行）

（3） 从站点 a 经站点 c，d 转乘两次到达 b：如图中（c）所示若$|ac| = l \ \ or \ \ |dc| = l \ \ or \ \ |db| = l$ 则路线可以根据实际交通繁忙状况或乘客自己的意愿将换乘两次优化为换乘一次的情况

（4） 对于换乘次数大于 2 的情况已经没有太大的实际意义了，在这里不予考虑



图七

下面以问题一中的（1）从站点 S3359 到站点 S1828 为例分析。

在问题一中求得（1）的所有一次换乘结果中，查寻是否存在只乘坐一站的情况，将只坐一站的上下车站点记录下来，则这两站点之间可以步行。

我们得到（1）存在两个只乘一站的换乘，分别是表一中所示的路线 1、2。路线 1、路线 2 都可以从 S3359 乘 L436 下行至 S1784，再走到 S1828。车费节省一元钱，但时间多用了三分钟。

对每一种存在换乘的路线，都可能存在只乘一站的换乘，所以在已知人在每两点之间的步行时间时，用步行代替一站换乘是很值得考虑的。

3、2　解法二：深入的 Dijkstra 法进行求解

类比模型二的模型建立及求解思路，考虑步行对路线选择的影响。以此建立适用更广的公交体系模型。走路同乘车一样，也是一种出行手段，只需在更新最短路径时，与乘车这种方式一起考虑，寻求最小权值即可。引入步行后，对模型二的细节产生了影响，换车时间不能一概讨论，而要分为走路与等车两段时间，公汽换乘公汽虽然两端时间可以合二为一，但步行转公汽却不用再考虑走路时间，只需考虑等车时间。同时走路的引入，也会对公车路线选择产生影响。具体的解决方法将在下面详细给出。

符号约定：

P 为所有公交站点的集合

D 为所有地铁站点的集合

t_{w1} 为公汽换乘公汽走路耗时

t_{w2} 为等公汽耗时

$t_0(u,v)$ 为相邻两站行驶时间，此处 u 、v 即可以是公交车站，也可以是地铁站，以下同。

$$t_0(u,v)=\begin{cases}3 & \text{相邻两站是公交}\\ 2.5 & \text{相邻两站是地铁}\end{cases}$$

$t_p(u,v)$ 为任意 u 、v 点之间的步行时间

$w_1(u,v)$ 为连接 u 、v 路段的权值，表示在该段的平均行驶时间

$w_2(u,v)$ 为连接 u 、v 路段的权值，表示在该段的平均走路时间

$R(u,v)$ 为连接 u 、v 的路段上的公交线路集合，

$L(v)$ 为起点 A 到节点 v 的权值

S 为已标记节点的集合

$R_e(v)$ 为到达 v 点用的公交线路集合；

$\mathrm{P}re(v)$ 为 v 点先驱

$$f(v)=\begin{cases}1 & \text{走路从}v\text{的先驱到}v\\ 0 & \text{乘坐公交从}v\text{的先驱到}v\end{cases}$$

$$x_{u,v}=\begin{cases}1 & \text{最佳路线经过路段}u,v\\ 0 & \text{最佳路线不经过路段}u,v\end{cases}$$

λ：换乘惩罚因子

$$\eta=\begin{cases}1 & \text{在站点选择换乘}\\ 0 & \text{在站点不换乘}\end{cases}$$

模型建立

目标函数： $Min \quad \sum_{u,v} Min(w_1(u,v), w_2(u,v)).x_{u,v}$

约束条件： $\lambda \geq 0$

$x_{u,v} \in \{0,1\}$

$\eta \in \{0,1\}$

模型求解

$Step1$：对所有的节点 u，

$IF \quad u \neq A, \quad THEN \quad L(u) = \infty; \quad ELSE \quad L(u) = 0$； $S = \phi$；

$Step2$：选取不在集合 S 中的，$L(u)$ 值最小的节点 u， $S = S \cup \{u\}$；

$Step3$：对所有的节点 v， $v \notin S$，

令 $L(v) = Min[L(v), L(u) + w_1(u,v), L(u) + w_2(u,v)]$， $\Pr e(v) = u$，

其中， $w_1(u,v) = t_0(u,v) + \lambda \cdot \{\eta \cdot t_{w1} + [f(u) \vee \eta] \cdot t_{w2}\}$，

$w_2(u,v) = t_p(u,v)$，

$IF \quad L(v) = L(u) + w(u,v), \quad THEN \quad f(v) = 0 \quad ELSE \quad f(v) = 1$；

$IF \quad f(v) = 1 \quad and \quad (u = A \quad or \quad f(u) = 0),$

$THEN \quad R_e(v) = R(u,v), \quad \eta = 0$ ；

$ELSE \quad IF \quad R(u,v) \cap R_e(u) = \phi, \quad THEN \quad R_e(v) = R(u,v), \quad \eta = 1$；

$ELSE \quad R_e(v) = R(u,v) \cap R_e(u), \quad \eta = 0$；

$Step4$： $IF \quad B \in S, \quad THEN \quad GOTO \quad Step5; \quad ELSE \quad GOTO \quad Step2$；

$Step5$：形成最优路径 $A(v_0) - v_1 - v_2 - \cdots - v_i - v_{i+1} - \cdots - v_n - B(v_{n+1})$，通过 $\Pr e(v)$ 与 $R_e(v)$ 从终点 B 反向递归查找全路径与节点，算法结束。

3、3　解法三：模型三　步行邻边化模型

以上分析了换乘时只步行一站的情况，可是在现实生活中，人们常常步行一站以上，而且仅假设乘客沿公交线路步行也是不合理的。所以我们考虑乘客在所能忍受的最长步行时间为 T 时，给出更优的公交路线，从而对更一般的情况进行分析。

模型三的建立及求解

假设人步行路线不受公交线路限制，但有最大承受时间，受到问题二的启发，从只有公交到增加地铁后，很多原本不相连的公交站点通过地铁站相连接，所以若已知所有站点之间的步行时间，可以认为在人们最大步行范围内，所有公交站点都可看作相邻接，但要以增大线路耗时为代价。我们将乘客步行的路径看成联结两个公交站点的边，故在步行范围内的两站点可以认为是辆公交线路的交点，但要有一定的耗时。基于换乘次数最少，但可以适当增大换乘次数的上限，仍然用算法二求解基本最佳路线，基于模型一选择广义最佳路线、推荐最佳路线，则模型三的建立使问题三变成了问题一和问题二更一般的情况，现实意义更强。

假设乘客所能忍受的最长步行时间为T，定义站点i与站点j之间的平均步行时间$t(i,j)$为两站点的邻接耗时。定义以乘客所在的起始点为圆心，以最长步行时间对应的距离为半径的圆称为起始点a的邻接圆域（如图八所示）。由假设知，邻接圆域内任一公交站点b都与a相邻接，且b与a的邻接耗时为$t(a,b)$。

在模型一的基础上进一步优化得到：

$$Min \qquad \varphi(P_k) = w_1 t_k^{'} + w_2 c_k + w_3 s_k (k = 1,2...n) .... \quad 3)..$$

$$s.t. \qquad \sum_{i=1}^{3} w_i = 1$$

$$t_k^{'} = t_k + \sum t_k(a,b) \quad ....4)$$

$$\sum t_k(a,b) \le T \quad ....5)$$

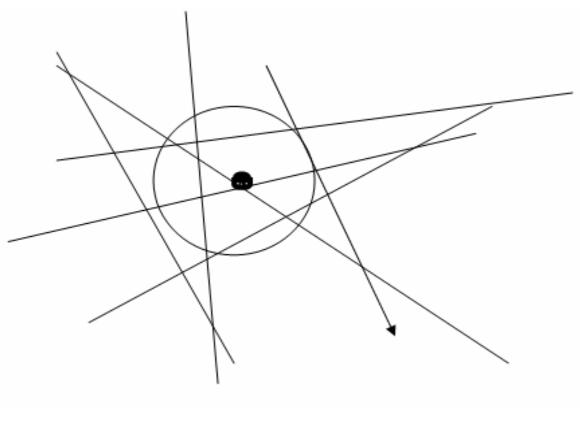
模型说明：

① 约束 4）表示考虑步行后的总耗时等于未考虑步行的耗时家邻接耗时的和；

② 约束 5）表示邻接耗时之和不超过乘客所能忍受的最长步行时间；

③ 其余符号与模型一中含义完全相同。

由此，利用算法二，便可求得已知步行时间时的最佳路径，即为问题三的解答。



图八

灵敏度分析

4、1　模型一的灵敏度分析

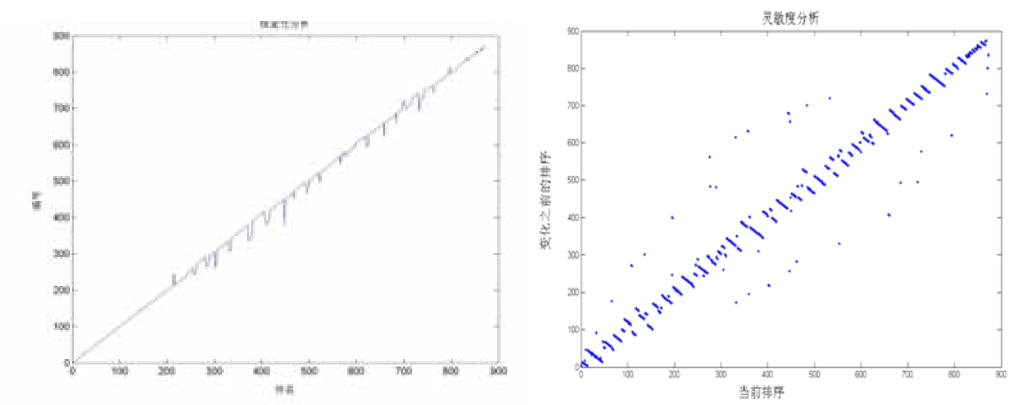
出行耗时、出行费用、换乘不满意度权重向量(w_1, w_2, w_3)对结果的影响：

选择的最佳线路是由综合评价指标$\varphi(P_k)$的大小决定的，取$\varphi(P_k)$的最小值时线路P_k为最优。所以在灵敏度分析的时候我们主要关注$\varphi(P_k)$大小排序的变化

文中给出的权重向量(w_1, w_2, w_3)是基于层次分析法的成对比较矩阵得到的，改变成对比较矩阵，分别求解出2组不同的权系数，计算综合评价指标$\varphi(P_k)$

（以考虑地铁线路的$S1557 \to S0481$为例)

① 系数$\{w_1,\quad w_2,\quad w_3\} = \{0.69552,\quad 0.22905,\quad 0.075429\}$，按照新生成$\varphi(P_k)$降序排序，观察新生成排名与原排名编号，横轴是当前的排名，纵轴为原来的排名：



图九

②系数$\{w_1,\quad w_2,\quad w_3\} = \{0.5714\ ,\ 0.2857\ ,\ 0.1429\}$

分析当点在直线$y = x$上时，生成排名与原排名相同。即说明权值的变化对于排名没有影响。

可以看出虽然在个别点出现排名顺序的波动，但大致排名并没有产生变动，尤其是在排名靠前线路，排名顺序完全没有改变，图一中排名顺序完全没有改变，图二中，虽有一定波动，但总体趋势保持不变。由此可见此模型和算法具有较好的稳定性。

4、2　算法分析

上面模型中用到的三种算法比较：

1、广度优先算法：此算法时间复杂度为$O(n \cdot m)^{K+1}$，其中n表示平均每个节点通过的线路数，m表示平均每条线路拥有的节点数，K表示允许接受最大换乘数。空间复杂度也较低，可以很良好的处理数据非常庞大的结构。但此种算法也存在一定局限性，由于人为设定最大换乘数，若出现超出最大换乘次数的线路，就只能输出："没有找到换乘次数不超过K次的公交线路"。而且由于节点数、线路数与时间复杂度的的限制，K值往往并不能取过大。对于此题，$K = 2or3$已经濒临极限了。所以此算法适用于比较繁华的区域，即交通线路多，覆盖广，不需要过多换乘的地区；或地处荒凉，线路稀少，即使增大K值，也不会迅速增大时间复杂度的地区。

2、换乘矩阵法：此算法时间复杂度为$O(N^3)$，其中N为总节点数。算法优势在于，通过迭代得到的换乘矩阵$R^{(K)}$，其中K表示允许接受的最大换乘次数，可以表示图中任意两点内换乘次数不大于K的所有路线。结果的数据处理将会十分简便，清晰。但此算法的局限在于，首先必须建立空间为N^2的直达矩阵$R^{(0)}$，并在随后迭代过程中，$R^{(K)}$的深度也会呈指数增长趋势，空间复杂度过于巨大！此类算法适用于节点数目不是过于庞大，线路不是过于复杂的情形。

3、改进的 Dijkstra 法：此种算法时间复杂度为$O(N^2)$，空间复杂度也为$O(N^2)$（需要建立N^2的邻接矩阵w）。Dijkstra 算法是一种从一点开始，逐渐延伸到全图的算法。可以通过权值，自由控制对于换乘的舒适度，选择路线不受最大换乘数的限制。同时可以求出从开始点出发，到达全图所有点的最优路径。但由于算法的限制，并不能求出所有的最优解，在选择延伸路径时会舍弃一些当前并非最优，但全局可能最优的路径。同算法 2 类似，由于复杂度的限制，此类算法也只适用于节点不是过于庞大的情形。

例如对于本题中总共有 3900 多个站点，520 条公交路线且还有单线、上下线以及环线之分，整个公交网络十分复杂。广度优先算法以其空间复杂度较低，可以很良好的处理数据非常庞大的结构的特点方便的求解出了公交网络中任意两点间的最佳路线。换乘矩阵法和改进的 Dijkstra 法都有较高的时间复杂度和空间复杂度。我们尝试着用他们对问题进行了求解，在较长的时间内均未得到较满意的解。本文也只是给出了换乘矩阵法和改进的 Dijkstra 法的模型和算法。但是对于一些较小的网络图他们都能给出较好的结果。

模型评价

对模型一，考虑到乘客出行在选择出行路线的时候最在意的因素是换乘次数。所以我们首先给出了求解任意两个站点间的换乘次数最小的路线的两种算法：换乘矩阵法和广度优先搜索。他们之间的评价和比较将在下文中给出。在最在最少换乘次数的路线的基础上时，考虑到其他因素对乘客心理的影响建立了简单的层次分析模型把定量和定性的分析结合起来，找到最佳路线，应用范围很广。

模型一在最佳路线的给出形式上，定义了广义最佳选取准则，给出了广义最佳线路和推荐最佳线路，给乘客的更大的选择余地，使给出的结果更合理、 更符合实际。模型的缺点是要在最小换乘线路未知时，模型一无法直接给出最佳路线。

模型二从最短出行时间角度对最佳出行路线进行刻画，引入换乘惩罚因子的概念将乘客的换乘因素转化为出行时间的约束。归结为在公交网络图中寻找一条路线使得出行的时间最短。通过时间的约束来抑制换乘次数，使换乘次数尽量小。但对于本题如此巨大的数据量，其运行速度十分缓慢，仍有待改进。并且通过模型二找到的最佳出行路线没有考虑出行费用的影响。

模型三将乘客的步行路径看成站点之间的边，抽象出了更普遍的模型，使公交线路的选择系统更符合实际情况。缺点在于没有考虑乘客增加步行时间是想要减少换乘次数的心理需求，如何将步行时间与换乘次数相结合，是个值得思考的问题。

模型扩展

扩展一：聚类性分析模型

由上文提到的启发三可知，考虑到人们在进行路线选择时，有时考虑率绕开某些已发生交通拥堵的站点或线路，而北京公交网络具有比较典型的聚类性，所以我们可以建模统计各公交站点的繁忙程度，对于经过交通枢纽的路线，给出如下建议：

1、交通高峰期避开交通枢纽线路，避免交通阻塞造成的时间浪费；

2、非交通高峰期推荐交通枢纽线路，可选车辆较多，便于出行。

扩展二：即时性分析模型

上文中给出了静态的查询系统，但在实际情况中考虑到不同的时段，交通流运行状况的变化，可以的建立动态的路况系统，随时得到路况反馈，根据不同时间的路况状况来选择最佳的出行路线。查询系统中加入得实时因素，更符合交通网络动态变化的特征，即能更好的满足乘客的要求，又能更好的利用城市交通中的资源。

参考文献

[1]　杨新苗,王炜,马文腾。基于 GIS 的公交乘客出行路径选择模型[J]. 东南大学学报, 2000, 30（6）: 87291.。

[2] 高自友, 吴建军,毛保华,黄海军。《交通运输网络复杂性及其研究》。刊名《交通运输系统工程与信息》2005.02。

[3] 姜启源,谢金星,叶俊。《数学模型（第三版)》。北京,高等教育出版社。2004 年 4 月。

[4] Duncan J Watts , Steven H Strogatz. Collective dynamics of small2world networks[J] . Nature , 1998 ,393 : 440 - 442.