第 31 卷第 1 期
2001 年 1 月
数学的实践与认识
MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY
Vol. 31 No. 1
Jan. 2001

Mathematical Model for Flying Across the North Pole

ZHONG Shao-jun, LUO Feng-yin, WANG Guo-gang

(Huanggang Teachers′College, Huanggang 438000)

Abstract: By carefully analysing we give a definite answer to the question posed in Yang Zi Night News that the time for flying from Beijing to Detroit will be four hours shorter if the plane can fly across the North Pole. A reasonably mathematical madel is framed in both cases that the earth is a sphere or an ellipsoid. We also give an algorithm for finding the shortest distance between two points in a surface (especially in an ellipsoid). Two approximate algorithms, constriction ratio method and imitating search method, are added.

“飞越北极”的数学模型

仲银花, 李利军, 张 琴
指导老师: 数模教练组

(连云港化工高等专科学校, 连云港 222001)

编者按: 本文对视地球为椭球的情况采用了测量学中的贝塞尔方法和用积分计算弧长的方法,针对地球扁率很小的特点对积分求弧长给出了一个方便的近似公式,使计算大为简化,这是本文的一个特点. 在处理实际问题时,在满足一定精度的前提下,合理地作简化近似可以用较少的计算达到预期的目的. 本文的另一个特点是对大地纬度和归化纬度的关系交待很清楚,反映了同学查阅背景材料是出色的.

摘要: 本文将“飞行时间节约 4 小时”的问题,在飞行速度恒定的条件下,转化为计算飞机航程的问题. 根据题目的要求建立两个模型. 在球体模型Ⅰ中,利用几何知识推出飞机航程和经纬度之间的直接关系,进而算得飞行节约的时间为 4.0504 小时. 在旋转椭球体模型Ⅱ中,解法Ⅰ利用测量学中的贝赛尔方法,给出了飞机航程的近似计算公式,算得飞行节约的时间为 4.041 小时. 解法Ⅱ则构造了一个简单的弧长作为两地间的近似航程,利用积分给出了弧长的精确计算公式和近似计算公式,算得飞行节约的时间分别为 4.0535 小时和 4.0531 小时. 这些结果解释了原题中“节约 4 小时”的估计.

1 问题的提出(略)

2 模型的假设

1. 不考虑地球的自转
2. 飞机每经相邻两地的航程,均以曲面上两点间最短距离进行计算
3. 飞机飞行中途不需降落加油,同时忽略升降时间

4. 开辟新航线后, 飞机由北京经过北极上空直飞底特律

3 数据的说明

在以下计算中, 北京的坐标用 $A_0(40°, 116°)$, 底特律的坐标用 $A_{11}(43°, 83°)$, 飞机原航线途中站点经纬度用表 1 的数据

4 模型的建立与求解

模型Ⅰ: 地球是半径为 6371 千米的球体 (略)

模型Ⅱ: 地球是一旋转椭球体, 赤道半径为 6378 千米, 子午线短半轴为 6357 千米

几个基本概念:

(1) 大地经度: 如图 1, P 点的子午面 NPS 与 NGS 起始子午面所构成的二面角 L.

(2) 大地纬度: 如图 1, P 点的法线 P_n 与赤道面的夹角 B.

(3) 归化纬度: 如图 2, 把点 P 上的 y 线向上延伸, 与以 a 为半径的大圆弧 AN 相交于 P', 则 OP 与 X 轴夹角叫归化纬度

(4) 大地线: 椭球面上两点间的最短曲线

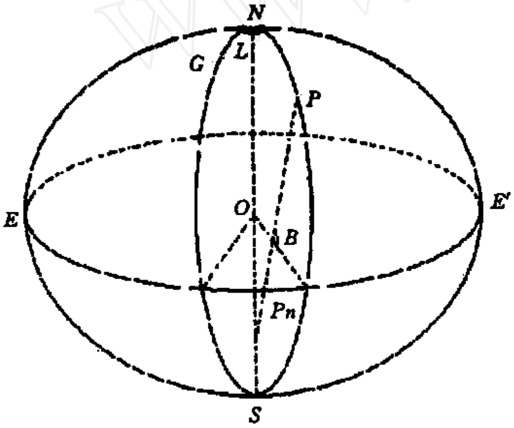

图 1

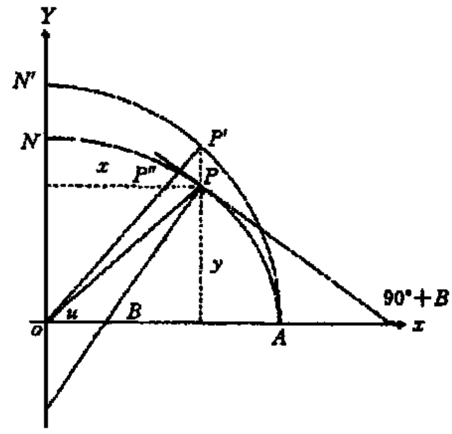

图 2

解法Ⅰ:

在控制测量学中, 常使用归化纬度计算两已知点之间的大地线长度

(1) 归化纬度与大地纬度的转化

如图 2, P 点所在子午椭圆的方程式为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 由上式求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \tag{1}$$

曲线在点 P 处的一阶导数就是该处切线的斜率, 即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(90° + B) = -\cot B \tag{2}$$

由(1)、(2)两式得: $\frac{y}{x}=\frac{b^2}{a^2}\tan B$, 由椭圆的几何作图原理知, 图 2 中, $OP' = a$, $OP'' = b$. 于是

$$\begin{cases} x = OP'\cos u = a\cos u \\ y = OP''\sin u = b\sin u \end{cases}.$$

代入 $\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2}\tan B$ 得: $\tan u = \frac{ay}{bx} = \frac{b}{a}\tan B$. 所以归化纬度与大地纬度的关系为

$$\tan u = \frac{b}{a}\tan B \tag{3}$$

(2) 计算公式的导出

长距离大地主题解算的贝赛尔方法中, 椭球面上两点 $P_1(L_1, u_1)$ 与 $P_2(L_2, u_2)$ 间的大地线 S 与其辅助球面上大圆弧 σ 的微分关系式为 $dS = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 u}\,d\sigma$

由于地球的扁率 $\alpha = \frac{a-b}{a} \approx 0.003$, 则计算中略去 α^2 项, 于是

$$dS = a\sqrt{1 - 2\alpha\cos^2 u}\,d\sigma = a(1 - \alpha + \alpha\sin^2 u)\,d\sigma \tag{4}$$

球面直角极三角形的球面三角公式为 $\sin u = \sin u_n \cos\sigma$, 将其代入(4)得:

$$dS = a\left(1 - \alpha + \alpha\sin^2 u_n \frac{1 + \cos 2\sigma}{2}\right)d\sigma \tag{5}$$

对(5)式两端积分得:

$$S = a\triangle\sigma\left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{2}\sin^2 u_n\right) + \frac{1}{4}a\alpha\sin^2 u_n(\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1) \tag{6}$$

由于 u_n, σ_1, σ_2 未知, 将此用 u_1, u_2 和 $\triangle\sigma$ 表示, 其中 $\triangle\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$. 由球面三角公式有

$$\begin{cases} \sin u_1 = \sin u_n \cos\sigma_1 \\ \sin u_2 = \sin u_n \cos\sigma_2 \end{cases} \tag{7}$$

令 $U = (\sin u_1 + \sin u_2)^2$, $V = (\sin u_1 - \sin u_2)^2$, 可得

$$\sin^2 u_n = \frac{U}{2(1 + \cos\triangle\sigma)} + \frac{V}{2(1 - \cos\triangle\sigma)} \tag{8}$$

$$\sin^2 u_n(\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1) = \sin\triangle\sigma\left[\frac{U}{1 + \cos\triangle\sigma} - \frac{V}{1 - \cos\triangle\sigma}\right] \tag{9}$$

$\triangle\sigma$ 是辅助球面上两点的大圆弧长, 有如下近似公式:

$$\cos\triangle\sigma = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos(L_1 - L_2).$$

根据对 $\triangle\sigma$ 的近似处理, (6)式可简化为如下近似公式:

$$S = a\triangle\sigma - \frac{a\alpha}{2}\triangle\sigma\sin^2 u_n + \frac{a\alpha}{4}\sin^2 u_n(\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1)$$

将(8)(9)代入上式得:

$$S = a\triangle\sigma - \frac{1}{4}a\alpha\left[\frac{\triangle\sigma - \sin\triangle\sigma}{1 + \cos\triangle\sigma}U + \frac{\triangle\sigma + \sin\triangle\sigma}{1 - \cos\triangle\sigma}V\right] \tag{10}$$

若令 $H = \frac{a\alpha}{4} = \frac{a-b}{4}$, $M = \frac{\triangle\sigma - \sin\triangle\sigma}{1 + \cos\triangle\sigma}$, $N = \frac{\triangle\sigma + \sin\triangle\sigma}{1 - \cos\triangle\sigma}$, 则

$$S = a\triangle\sigma - H(MU - NV) \tag{11}$$

对于飞机航线相邻两站点 $A_i(B_i, L_i)$, $A_{i+1}(B_{i+1}, L_{i+1})$ 之间的航程有如下近似计算公式:

$$S_i = -a\sigma - H(MU + NV),$$
$$\cos\sigma = \sin u_i \sin u_{i+1} + \cos u_i \cos u_{i+1} \cos(L_{i+1} - \cos L_i),$$
$$U = (\sin u_i + \sin u_{i+1})^2,\ V = (\sin u_i - \sin u_{i+1})^2,$$

$$H = \frac{a-b}{4},\ M = \frac{\sigma - \sin\sigma}{1+\cos\sigma},\ N = \frac{\sigma - \sin\sigma}{1+\cos\sigma} \tag{12}$$

其中 u_i, u_{i+1} 可由(3)式计算得出, 且飞机在地球上空 10 千米的椭球面上运动, $a = 6388$ 千米, $b = 6367$ 千米 计算得, 飞机原来的总航程 $S = 14605.36$(千米).

飞机由北京直飞底特律的新航程 $S' = 10645.562$(千米)

飞机飞行节约的时间

$$\triangle t = \frac{S - S'}{V} = \frac{14605.36 - 10645.36}{980} = 4.041(\text{小时}) \tag{13}$$

(13)式的结果解释了"北京至底特律可节约 4 小时"的估计.

解法Ⅱ:

在控制测量学中有较多的计算大地线长度的方法, 对于那些方法, 已推导得比较严密, 尽管精度较高, 但计算方法过于繁琐 现在, 我们运用数学的方法, 将大地坐标转化为空间直角坐标后, 用微分法求弧长的方法来近似计算旋转椭球面上两点间最短的距离

首先引进椭球面上点的空间直角坐标: 以椭球体中心 O 为原点, 起始子午面与赤道交线为 X 轴, 在赤道面上与 X 轴正交的方向为 Y 轴, 椭球体的旋转轴为 Z 轴, 构成空间直角坐标系, 则 (x, y, z) 为点的空间直角坐标

根据大地坐标及空间直角坐标的定义, 可以得

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2\tan^2 B}}\cos L \\ y = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2\tan^2 B}}\sin L \\ z = \dfrac{b^2\tan B}{\sqrt{a^2 + b^2\tan^2 B}} \end{cases} \tag{14}$$

设飞机航线上相邻两站点为 $A_i(B_i, L_i)$, $A_{i+1}(B_{i+1}, L_{i+1})$, 显然其处于同一椭球体表面 利用(14)式计算出空间坐标 我们用过点 A_i, A_{i+1} 和原点的平面截椭球表面所得弧长 A_iA_{i+1} 近似作为 A_i, A_{i+1} 两地间航程 S_i 方便起见, 令 $D = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2\tan^2 b}}$, 易得平面 OA_iA_{i+1} 的方程为

$$n_1x + n_2y - n_3z = 0 \tag{15}$$

$$\begin{cases} n_1 = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2(\sin L_i\tan B_{i+1} - \sin L_{i+1}\tan B_i), \\ n_2 = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2(\cos L_{i+1}\tan B_i - \cos L_i\tan B_{i+1}), \\ n_3 = -\sin(L_i - L_{i+1}). \end{cases}$$

将(14)式代入(15)式得:

$$n_1a^2\cos L + n_2a^2\sin L = n_3b^2\tan B$$

故

$$\tan B = \frac{n_1a^2}{n_3b^2}\cos L + \frac{n_2a^2}{n_3b^2}\sin L = \frac{a^2}{b^2}n\sin(L + \varphi_0) \tag{16}$$

其中 $n = \dfrac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}{|n_3|}$, $\varphi_0 = \arctan\dfrac{n_1}{n_2}$. 将(16)式代回(14)式得:

$$\begin{cases} x = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2n^2\sin^2(L+\varphi_0)+b^2}}\cos L \\ y = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2n^2\sin^2(L+\varphi_0)+b^2}}\sin L \\ z = \dfrac{abn\sin(L+\varphi_0)}{\sqrt{a^2n^2\sin^2(L+\varphi_0)+b^2}} \end{cases} \tag{17}$$

于是,

$$\begin{aligned} F(L) &= x'^2(L) + y'^2(L) + z'^2(L) \\ &= a^2\frac{\left(\dfrac{a^2}{b^2}n^2+1\right)^2\sin^2(L+\varphi_0)+(n^2+1)\cos^2(L+\varphi_0)}{\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 n^2\sin^2(L+\varphi_0)+1\right]^3} \end{aligned} \tag{18}$$

所以椭球面上两点A_i, A_{i+1}的弧长

$$A_iA_{i+1} = \left|\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{F(L)}\,\mathrm{d}L\right| \tag{19}$$

(19)式可作为航程S_i的近似公式,但由于计算较繁,先对它作出简化处理

因a与b的值差很小,我们以$\frac{a^2}{b^2}n^2+1$替换(18)式中出现的n^2+1,(18)式化为近似式

$$F(L) = \frac{a^2\left(\dfrac{a^2}{b^2}n^2+1\right)}{\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 n^2\sin^2(L+\varphi_0)+1\right]^2} \tag{20}$$

将(20)代入(19)易得航程S_i的一个近似计算公式:

$$S_i = a\left|\arctan\left[\frac{b}{\sqrt{a^2n^2+b^2}}\cot(L_{i+1}+\varphi_0)\right] - \arctan\left[\frac{b}{\sqrt{a^2n^2+b^2}}\cot(L_i+\varphi_0)\right]\right| \tag{21}$$

$n_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2(\sin L_i\tan B_{i+1} - \sin L_{i+1}\tan B_i)$, $n_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2(\cos L_{i+1}\tan B_i - \cos L_i\tan B_{i+1})$,

$n_3 = -\sin(L_1 - L_2)$, $n = \frac{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}{|n_3|}$, $\varphi_0 = \arctan\frac{n_1}{n_2}$

由以上一组公式,用计算机编程可直接代入大地坐标得到

飞机原来的总航程$S = 14610.89$(千米)

飞机从北京直飞底特律的新航程$S' = 10638.79$(千米)

所以飞行节约的时间

$$\triangle t = \frac{S - S'}{V} = \frac{14610.89 - 10638.79}{980} = 4.0531\text{(小时)} \tag{22}$$

在上面的计算中,我们对积分式作了近似处理　如不作近似,根据(18)和(19)并用 Mattheматica 4.0 软件直接算得结果为:原航程$S = 14604.448$(千米),新航程$S' = 10631.986$(千米).　于是飞行节约的时间

$$\triangle t = \frac{S - S'}{V} = \frac{14604.448 - 10631.986}{980} = 4.0535\text{(小时)} \tag{23}$$

式(22)和(23)的两个结果只相差0.0004小时,即相当于1.44秒,其误差完全可以忽略　这说明了我们上面所作的近似计算是合理的,同时,这一结果解释了原题中“节约4小时”的估计

5　模型的评价(略)

参考文献:

[1] 姜启源. 数学模型(第二版). 北京: 高等教育出版社, 1993.
[2] 同济大学数学教研室. 高等数学(第四版). 北京: 高等教育出版社, 1996.
[3] 武汉测绘学院控制测量教研室等. 控制测量学(下册). 北京: 测绘出版社, 1995.
[4] 孔祥元, 梅是义. 控制测量学. 北京: 测绘出版社, 1995.
[5] 杨　珏, 梅是义. 控制测量学. 北京: 测绘出版社, 1995.

The mathematical Models of Flying over the North Pole

ZHONG Yin-hua, LI Li-jun, ZHANG Qin

(Lianyungang College of Chemical Technology, Lianyungang 222001)

Abstract: This paper intends to explain the problem of saving flight time by four hours, which is converted into the problem of the flight distance in a constant flying speed. Under these conditions, two mathematical models are established. (1) In the spherical model, the direct relation between the flight distance and the latitude and longitude are clarified by applying the knowledge of geometry. For the model of revolving ellipsoid, the Bessel Theory is applied to work out the approximate formula, by which the flight time is calculated for saving 4.041 hours. (2) A simple curve is constructed, which is adopted as the approximate flight distance. By the application of integration, 2 formulae, approximate and accurate, are established so the flight time save 4.0535 and 4.0531 hours, respectively. The calculation results explain the problem of flight time.

飞　越　北　极

何永强,　陆新根,　沈重欢
指导老师:　数模组

(浙江万里学院, 宁波　315101)

编者按: 若将地球视作旋转椭球, 飞机的航线应为长、短半轴分别为6388和6367千米的椭圆旋转而得的旋转椭球面上过给定两点的短程线即测地线. 本文应用微分几何知识, 给出了测地线满足的微分方程, 并借助数学软件求得多数航线段的长度. 该方法有一定的特点, 是可取的. 我们选取了论文的这一部分内容, 予以发表. 若使计算更加精确, 应将地理纬度转化为归化纬度(详见本期《飞越北极的数学计算模型》一文).

摘要: 本文对“飞机从北京出发, 飞越北极直达底特律的所需时间, 可比原航线节省多少时间”的问题进行讨论, 并将航线选择归结为寻求曲面上的最短弧.

应用“曲面上最短弧为测地线”的事实进行了讨论. 模型(一)假设地球是球体, 我们可通过单位向量的