第24卷 增刊2
2007年12月
工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 24 Supp.2
Dec. 2007

文章编号:1005-3085(2007)08-0151-09

体能测试时间安排

徐贵阳， 张 磊， 任海威
指导教师： 指导教师组
(空军雷达学院，武汉 430019)

编者按： 该参赛论文首先将时间段数最少问题转化为装箱问题。分析讨论了以班为单位独立测试和前后两个班混合衔接测试两种情况，采用近似算法给出了近似解并证明其为最优解。其次，明确了学生等待时间的含义，给出了等待时间的表达式，并给出了一个可节省学生等待时间的测试方案。该参赛论文建模思路非常清晰，分析细微严密，写作条理清楚，对专科学生来说，能用装箱问题来处理是难得的。可能是时间上的原因，该参赛论文未能将问题讨论完全，比如在班衔接的情况下学生等待时间的讨论不完全，同时未计算给出等待时间。

摘 要： 本文首先分析了一定数目的学生完成测试的最少用时问题。针对同一班级学生和不同班级学生两种情况，分别给出了完成测试的最少用时的表达式以及相应的测试方法。在此结果下，完成所有班级测试的最少时间段问题，就转化为一个装箱问题(“班级隔离”情况)，或者存在体积“变形”类似装箱问题(“班级交错”情况)。进而，使用 FFD 算法和改进的 FFD 算法分别求出此二问题的近似解，然后通过最优性分析，证明得到的即是最优解。针对学生的等待时间，我们分析给出了20人一组测试方法，该方法可以大大减少学生的等待时间。最终，使用该方法给出了56个班级在3个上午完成测试的时间安排和相应的测试指南。

关键词： 装箱问题；FFD 算法；*NP* 难题

分类号： AMS(2000) 90b22 **中图分类号：** O223 **文献标识码：** A

1 模型假设

1) 一个班级的学生同时来到测试场所，做完所有测试项目的学生随即离开测试场所(同进随出)；

2) 一个班级同学在安排测试时间到场即可，不要求提前到场；

3) 在所有的测试时间段内，学生的测试过程都是顺利进行的，不会出现任何故障(工作人员不准时上班、仪器的维护与修理、一个学生对同一个项目测试多次等)；

4) 学号相连只是对每个班级内部而言，两个不同班级的学生之间不存在学号相连的情况；

5) 一个学生群体的测试时间是指从有一个学生开始测试到所有学生完成测试之间的时间。

2 符号说明

m_i：班级 i 的人数

i：表示第 i 个班级

j：表示第 j 个时间段

s_j：时间段 j 的测试时间

t_w：每个学生的等待时间

T_w：每个班级的总等待时间

$T_{台阶闲置}$：台阶未工作的时间

$T_{体能测试}$：体能测试所需要的时间

$T_{台阶测试}$：台阶测试最少所需要的时间

$T_{台阶录入}$：台阶录入所需要的时间(定值5″)

t_p：学生从进场到离场之间的时间

t_i：班级 i 独立进行体能测试所需要的最少时间

t: 完成所有测试所需要的天数　　t'_p: 学生进行五个项目测试与仪器的接触时间

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{班级 } i \text{ 不在时间段 } j \text{ 测试}\\ 1, & \text{班级 } i \text{ 在时间段 } j \text{ 测试}\end{cases}$$

3 问题分析

1. 最少时间段问题

求测试完各个班级所用最少时间段问题，其核心是探讨学号连续或分段连续的一定数目的学生完成测试的最短用时问题。在探讨清楚这一最短用时问题后，那么最少时间段问题也就转化为一个装箱问题或类似装箱问题，用规划软件或装箱问题的算法，即可求解出结果。

2. 等待时间问题

节省等待时间是在测试所需时间段最少的条件下进行的，所以，应当使用最少时间段问题求解出的结论，在时间段最少的条件下，去探讨班级之间及班级内部的测试方案，来使学生的等待时间最少。从等待时间的定义出发，应当去探讨如何使学生尽快做完所有测试的方法。

3. 最少测试用时问题

通过分析发现，学号连续或分段连续的一定数目的学生测试的用时，主要取决于台阶试验的测试用时。通过对台阶测试及其它四项测试的分析，可以给出最少测试用时的函数表达式。

4 模型的建立与求解

4.1 最少测试用时问题

要探讨各班完成测试所需要最少时间段，需要首先探讨学号连续或分段连续的一定数目的学生完成测试的最短用时问题。

最少测试时间，就是测试完一定人数的学生所需要的最短时间。针对不同的情况，最少测试时间函数也是不同的。下面分别对两种情况进行分析和求解。

1) 学号连续的 n 个学生的最少测试时间

结论一 n 个连续学号学生的最少测试时间(单位：秒)

$$T_{\text{体能测试}}=\left\lceil\frac{n}{10}\right\rceil\times 210+5.$$

分析

1) n 个连续学号的学生要完成台阶测试最少所需时间(单位：秒)为

$$T_{\text{台阶测试}}=\left\lceil\frac{n}{10}\right\rceil\times 210+5.$$

证明略

2) 学号连续的10个人可以在210秒内完成其他四个项目测试。其具体安排如表1：

3) 由1)、2)两步可以知道，台阶测试以10人为单位，测试时间至少为210秒，而10人完成其它四个项目的测试不超过210秒。所以，n 个连续学号学生的体能测试时间就是其台阶测试时间，即 $T_{\text{体能测试}}=T_{\text{台阶测试}}$。因此，结论一是成立的。

2) 学号分段连续的 n 个学生的最少测试时间

分 k 个段连续，就是把 k 个班级融和到一起。假设这 k 个班级的人数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_k$，则 $n=m_1+m_2+\cdots+m_k$。

表1：10个人在210秒内完成前四个项目测试的具体安排

身高体重		2		3																										
		4		5		6																								
		7			8		9		10			1																		
跳远		1				2				3				4				5		6		7		8		9		10		
肺活量		6				7				8				9				10			1		2		3		4		5	
握力		8						1			2			3																
		9			10				4			5			6			7												
时间轴(秒)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210
——框内数字表示学号　黑框表示录入时间																														

结论二　分 k 段连续的 n 个学生的最少测试时间为(单位：秒)

$$T_{体能测试}=\left(\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rceil-\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{m_i}{10}\right\rfloor\right)\times215+\left(\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{m_i}{10}\right\rfloor\right)\times210+k\times5-\left(\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rceil-\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rfloor\right)\times5,$$

其中 $\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rceil$ 表示对 n 个学生所分的组数；$\lfloor\frac{m_i}{10}\rfloor$ 表示班级 i 的学生能分配为10个学生一组的组数；$\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rceil-\sum_{i=1}^{k}\lfloor\frac{m_i}{10}\rfloor$ 表示 n 个学生中出现交错分组的组数；但可能出现由最后班级不足10人所组成的尾巴组情况，尾巴组出的次数可表示为 $\left(\left\lceil\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rceil-\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{10}\right\rfloor\right)$。

4.2　最少时间段问题

对于求一定数目班级的最少测试时间段的问题，分下面两种情况进行考虑：

"班级隔离"：一个班级的所有同学都完成测试后，才展开下一个班级的测试；

"班级交错"：允许不同班级的学员组合交错测试。

下面，分别在这两种假设下给出计算最少时间段的模型。

4.2.1　"班级隔离"模型的分析与建立

经简单分析，即可知所需时间段不会超过9个。

以时间段数为目标函数，考虑上下午时间段长度约束和同一班级必须在一个时间段内测完的约束，即得下面优化模型。

模型一

$$\min\sum_{j=1}^{9}\operatorname{sign}\sum_{i=1}^{56}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{56}x_{ij}\cdot t_i\le T_j,\quad j=1,2,\cdots,9,\\ \sum\limits_{j}^{9}x_{ij}=1,\\ x_{ij}=\begin{cases}1,\\0,\end{cases}\qquad i,j,k\subset \mathrm{N}^{+},\ i\le56,\ j\le9,\ k\le5,\end{cases}$$

分析该模型，将上午时段和下午时段分别看作两个大小不同的箱子，将班级 i 的最少测试时间 t_i 视为该物体的体积，那么上面的问题就可视为一个装箱问题。而我们知道，装箱问题

是一个 NP 难题，不存在多项式精确的算法，只能寻找近似算法。FFD 算法是装箱问题性能比较好的算法。所以，我们尝试采用 FFD 算法[1]来解决我们的问题。

算法：

第一步：将班级所需要的时间 t_i 按从大到小排序；编号为：$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n$；

第二步：将时间段编号，顺序排好：B_1、B_2、B_3、$\cdots$ (其中，B_t 表示第 t 天的上午段)；

第三步：将 u_1 装入剩余空间不小于 u_1 的标号最小的箱子；

…

第 $(i+2)$ 步：将 u_i 装入剩余空间不小于 u_i 的标号最小的箱子；

…

第 $(n+2)$ 步：将 u_n 装入剩余空间不小于 u_n 的标号最小的箱子。

该算法的时间复杂度 $O(n^2)$，其中排序的时间复杂度 $O(n\cdot\ln n)$。

算法求解：

把 FFD 算法用 C 语言编程实现，得到所需要的时间段数为 $M=4$，也就是在4个上午时间段内完成所有学生的测试。由此算法只能求出每个时间段内所测试的班级号，而不能得出在某个时间段内这些班级测试的先后顺序。

模型一改进：

考虑到实际测试中一般上下午连续进行，体现为上午时间段个数与下午时间段个数最多相差一，据此在模型一中加入时间段连续约束

$$-1 \leq \sum_{k=1}^{5}\operatorname{sign}\sum_{i=1}^{56}x_{i(2k-1)} - \sum_{k=1}^{4}\operatorname{sign}\sum_{i=1}^{56}x_{i(2k)} \leq 1, \qquad k=1,2,3,4,$$

得到的模型记为模型一′。

再用 FFD 算法对模型一′求解。此时只需将模型一算法中第二步改为：“将时间段编号，顺序排好：B_1、B_2、$B_3\cdots\cdots$(其中，B_{2t-1} 表示第 $(2t-1)$ 天的上午段，B_{2t} 表示第 $(2t)$ 天的下午段)”。同样用模型一′可以求得所需要的时间段数为 $M=4$，也就是在连续两天的4个时间段内完成所有学生的测试。

表2：四个段分别分配的班级号

	测试的班级号	所需总时间
第一天上午	1 2 3 4 6 7 8 13 14 15 16 31 33 54	14910(秒)
第一天下午	10 37 41 44 45 46 47 48 49 50 51	11340(秒)
第二天上午	5 11 12 19 20 21 22 26 29 30 32 34 38 39 40 42 43 53	14700(秒)
第二天下午	9 17 18 23 24 25 27 28 35 36 52 55 56	6510(秒)

最优性分析：

FFD 算法是一个近似算法，但通过下面分析可知，求得了最优解。

1) 估算出所需的时间段数 $M=4$

假设所有班级都是连续测试的，根据结论一算出每个班级的最少测试时间，得到56个班级都测完所需要的总时间为：47460/3600 = 13.1833 (小时)。而由题目的条件知，上午和下午的测试时间分别为 4.6667、3.250 (小时)。从这些数据中，我们可以大致的计算出所需的天数 $t=13.1833/(4.6667+3.250)\approx 2$。进一步考虑到，在两天内的3个时间段的测试时间

为 $t_1 = 4.6667 \times 2 + 3.250 = 12.5834 < 13.1833$，不能满足上述段数最少的要求。所以，要使所有班级都测试完至少需要4个时间段。

2) 上面体能测试的 FFD 算法已求解得出所需要的时间段数为 $M = 4$

由上述1)、2) 分析知，时间段数 $M = 4$ 即为最优解。

4.2.2 "班级交错"模型的分析与建立

我们发现模型一存在下述情况：当班级人数 N 不是10的整数倍时，将可能会导致最后的一个批次测试的人数少于10人，却用了测试10人所需的时间。这不利于测试仪器发挥其最大效率。因此测试时允许班级间进行衔接测试，从节省测试时间的角度来说，应当更为合理。

由结论二可以给出允许"班级交错"时 k 个班级完成测试的最少时间 $T_{体能测试}$。

与模型一相同，我们以测试时间段最少为目标，考虑上下午时间段长度约束和同一班级必须在一个时间段内测完的约束，可以得到如下模型。

模型二：

$$\min \sum_{j=1}^{9} \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{56} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} s_j \le T_j, & j = 1, 2, \cdots, 9, \\ \sum_{j}^{9} x_{ij} = 1, & \\ x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases} & i, j, k \subset \mathrm{N}^+,\ i \le 56,\ j \le 9,\ k \le 5. \end{cases}$$

该问题可以看成是一个存在"变形"的装箱问题，其中"变形"意味着装入箱子的物品体积随装入箱子的不同而不同，这一体积可以通过 $T_{体能测试}$ 的表达式计算出来。因此，我们仍然可以采用 FFD 算法的思想解决这类问题，只需将 FFD 算法第 $(i+2)$ 步改为：若 u_i 装入能容纳其变形体积后标号最小的箱子中，其中变形体积由 $T_{体能测试}$ 的计算公式得来。该算法复杂度与 FFD 比较接近，即 $O(n^2)$。

把改进的 FFD 算法用 C 语言编程实现，得到此时所需要的时间段数 $M = 3$，也就是可以在三个上午时间段内完成所有学生的测试，具体分配如下表。由于 FFD 算法是一个近似算法，即是启发式算法，可以迅速得到满意解，但不一定是最优解。所以我们同样对算法结果进行了最优分析(方法与模型一中相同)。分析得出此时3个时间段就是最优解。

表3: 3个时间段班级的分配情况

	测试的班级号
第一天上午	1 5 8 16 17 23 24 26 27 30 34 38 39 40 41 43 44 46 51 56
第二天上午	2 3 4 7 12 13 14 15 18 25 28 29 31 42 45 49 53 55
第三天上午	6 9 10 11 19 20 21 22 32 33 35 36 37 47 48 50 52 54

4.3 学生等待时间问题

现在在整个测试时间段数 $M = 3$ 的条件下，考虑使得全体学生等待时间最少的安排方法。在班级间可衔接的情况下，由同进随出的假设知，学生的等待时间 $t_w = t_e - t_o - t_p'$ (其中，t_e 表示该学生的离场时间，t_o 表示该学生的进场时间，t_p' 表示学生与仪器接触的时间)。因为同一个班级的进场时间 t_o 相同，且每个学生与仪器接触的时间 t_p' 相同，则同一班级学生

的等待时间完全由其离场时间 t_e 决定。所以要使等待时间最少只需使学生尽早做完五项测试离场即可。

第 i 班学生总的等待时间为：$T_w(i)=\sum t_w$。

所有班级学生总的等待时间为：$\sum\limits_{i=1}^{56} T_w(i)$。

那么我们求最少等待时间的问题就可以表示成下面的规划形式：

目标函数：所有班级学生总的等待时间最小：$\min \sum\limits_{i=1}^{56} T_w(i)$。

约束条件：测试所需要的段数为3个上午：$M=3$。

由于模型中的目标函数相当复杂，无法直接用程序求解。因此我们设计了求模型近似解的算法。

算法设计思路：

我们注意到测试中有下面的情况：

对于20名学号连续的学生，下面的排序方法可以保证在425秒之后，20个人可以全部离场，显然这是对20人的最优安排方案。

表4: 425秒内20个人的最优分配方案

身高体重	17	18								
	19	20	6							
	7	8	9	10	16					
跳远	16	17	18	19	20	6	7	8	9	10
肺活量	6	7	8	9	10	16	17	18	19	20
握力	8	16	17	18						
	9	10	19	20	6	7				
台试测试	1~5									
	11~15									

时间(秒): 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 105 115 125 135 145 155 165 175 185 195 205 215

身高体重	2	3								
	4	5	11							
	12	13	14	15	1					
跳远	1	2	3	4	5	11	12	13	14	15
肺活量	11	12	13	14	15	1	2	3	4	5
握力	13	1	2	3						
	14	15	4	5	11	12				
台试测试	6~10									
	16~20									

时间(秒): 225 235 245 255 265 275 285 295 305 315 325 335 345 355 365 375 385 395 405 415 425

基于此，我们可以考虑在测量中采用20人一组的方式进行，每20人都采用如上表的测试方法来测试。我们把 k 个班级衔接后看作一个总人数为 $\sum\limits_{i=1}^{k} N_i$ 且学号有 $(k-1)$ 次间断的整体。相应可以得到 k 个班级在这种20人一组测试方式最少测试所用时间的计算公式

$$t'=\left(\left\lceil\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}N_i}{20}\right\rceil-\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{N_i}{20}\right\rfloor\right)\times 430+\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{N_i}{20}\right\rfloor\times 425+5\times k-\left(\left\lceil\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i}{20}\right\rceil-\left\lfloor\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}m_i}{20}\right\rfloor\right)\times 5,$$

用20人一组的测试方法对由求最少时间段所给出的分组方案进行测试，可能会出现在规定时间段内无法完成测试时间任务的情况，为此我们考虑将测试任务在各时间段的总时间尽量平均分配，以便各段匀出“空闲”，而后再进行20人一组的测试分配。

得到节省学生等待时间的测试时间安排方案的步骤：

第一步：用相应的FFD算法求出完成测试所需的最少时间段数，得到最少时间段数是3个上午时间段。

第二步：求取一组满足最少3个时间段条件下的各时间段内班级分布情况。

我们考虑到之后在处理等待时间最少的问题时，对班级间顺序及衔接调整处理时将会使 $T_{\min}$ 值有所扩大，所以现在添加使三个 $T_{\min}$ 间的方差最小这个约束条件来尽量保证三者拥有等量的“空闲”时间，然后再用lingo进行求解[2]。得到班级的初步分配情况。

第三步：按如下原则进行排序，使得总的等待时间尽可能小(记20人为一个批次)。

原则一：人数为 N 的班级在衔接后最好不要出现在 $\lceil \frac{N}{10} \rceil + 1$ 个批次内。

原则二：同一个批次内最好不要出现三个班或更多班同时在场的情况。即一个批次内不能出现两次以上的衔接情况。

原则三：为了满足以上两原则，允许批次内出现不足20人的情况。

原则四：允许对表(五)中的班级在时段之间进行微量调整。

原则五：调整后必须满足各段的总测试时间不大于时间段的时长(15000秒)。

考虑尽量节省学生的等待时间，采用20人一组的处理测试方法及步骤，最终得到56个班级的测试时间安排表如表5。

表5: 56个班级的测试时间

第一天上午		第二天上午		第三天上午	
班号	到达时间	班号	到达时间	班号	到达时间
17	8:00	8	8:00	35	8:00
27	8:07	42	8:07	36	8:07
16	8:14	31	8:21	9	8:14
26	8:28	53	8:35	11	8:21
39	8:42	7	8:49	47	8:28
46	8:49	55	8:56	52	8:49
1	9:11	18	9:11	48	8:49
40	9:25	25	9:25	20	9:11
56	9:39	2	9:32	37	9:18
51	9:39	29	9:46	6	9:39
5	10:00	45	10:00	32	9:53
30	10:07	12	10:14	33	10:07
41	10:22	13	10:29	50	10:22
38	10:36	28	10:43	54	10:43
43	10:50	3	10:57	49	11:04

表5: 56个班级的测试时间的表续

第一天上午		第二天上午		第三天上午	
班号	到达时间	班号	到达时间	班号	到达时间
44	10:57	4	11:11	21	11:25
23	11:18	14	11:33	22	11:40
24	11:26	15	11:47	10	11:54
34	11:40				
19	11:54				
14915秒		14915秒		14905秒	

测试方法指南：

基本方法为20人一组的测试方法，即按照表5所示班级顺序，依次取20人参加测试。同时请注意表6中的班级不和前一个班级组合测试，也就是说前一个班级的最后一组人数如果不足20人，也作为一组进行测试。

表6: 不和前一个班组合测试的班

班级	2	3	5	6	10	13	14	19	21	22	23	33	34	41	43	45	54
前一组空缺人数	1	11	1	1	2	5	12	1	1	2	3	3	7	1	1	3	4

4.4 测试安排计划的说明

从表5中，我们可以看出：第一，56个班级测试所用时间段为3个上午。而由模型2的求解结果，我们知道这56个班级完成测试最少需要3个上午的时间段，所以表4的分配方案满足时间段最少的条件；第二，从表5中最后一行数据可以看到，每个时间段的测试时间都小于4小时10分，所以时间段的约束满足；第三，从表5很容易看出，同一班级的学生可以在同一时间段内完成测试；第四，从与表5对应的测试方法指南中，我们可以看到，充分利用了20人一组的测试法。而有前面的分析可以知道，20人一组的方法大大的减少了学生的等待时间。综上所述，我们给出的模型都满足题目要求。

5　对体能测试的建议

引进仪器的数量分析：

引进原则：使各项目的平均个人测试时间差别最小(即方差最小)。

原则的分析：采用边际分析的方法。引进仪器的目的是为了增加单位时间所有测试项目完成人数，而制约该人数的瓶颈因素是测试最慢的项目。当前测试最慢的项目是台阶测试，因此要引进仪器，必然首先引进台阶测试仪器，直到台阶测试不是最慢的项目。而肺活量和握力又成为新的瓶颈项目。依此思路，进行下去即可得到引进原则：使各项目的平均个人测试时间相等。在此原则下，学校应按照身高与体重：立定跳远：肺活量：握力：台阶=10：20：20：15：42 的比例引进最好。

测量场所人员容量的分析：

根据模型"同进随出"的假设，在任何的一个时刻，这个测试场所中的班级数都不会超过2。再根据题目给出的班级人数知，人数最多的两个班级的人数之和也不超过测试场所的容量150人，也就是说，测试场所容量不会起到限制作用。所以，容量对我们建立的模型没有影

响。另一方面讲，学校想通过改变测试场所容量来减少时间段数和节省学生的等待时间是不可行的。

班级学生分组测试：

20人一组的测试方法可以大大减少学生的等待时间，但是如果仅仅是在测试场上对学生进行分组，那么仍然要求一个班级的所有学生都需要到达，可能存在很多同学等待其他同学的问题。从节省学生的等待时间考虑，可以将学生按照学号顺序，20人一组提前分组，同一组的学生一起到达测试场地，不同组学生按照大概6分钟一组的时间，顺次到达。

参考文献：

[1] 张立昂. 现代数学手册·计算机数学卷·组合优化的近似算法[M]. 北京：清华大学出版社，2002, 3

[2] 谢金星，薛毅. 优化建模与lingo/lindo软件[M]. 北京：清华大学出版社，2005, 7

The Arrangement of Physical Fitness Testing Time

XU Gui-yang, ZHANG Lei, REN Hai-wei

Advisor: Instructor Group

(Air Force Radar Academy, Wuhan 430019)

Abstract: In this paper, the minimal testing time for a fixed number of students is analyzed at first. Aimed at students from the same class and different classes, mathematical expressions for the testing time are presented respectively. Consequently, the least time section problem becomes a bin packing problem ("classes isolated") or a bin packing problem with "volume deformation" ("classes linked"). The FFD algorithm and the improved FFD algorithm are adopted and approximation solutions to the problems are obtained respectively. Through optimal analysis, we give the optimal solutions. To reduce the students' waiting time, we present a testing method that twenty students as a group would be tested in one time. Finally, a testing schedule of the 56 classes and the corresponding testing guide are given.

Keywords: bin packing problem; FFD algorithm; NP-hard problem