第 28 卷 第 1 期　数学的实践与认识　Vol. 28 No. 1
1998 年 1 月　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　Jan., 1998

"零件的参数设计"模型和评述

姜启源

(清华大学，北京 100084)

1997 年大学生数学建模竞赛题目 "零件的参数设计" 的素材，是美国明尼苏达大学运筹与管理科学系助理教授李文连提供的. 李在美国取得博士学位后，曾在福特汽车公司工作过一段时间，这个问题是他亲自遇到并研究过的，题目中的经验公式、参数标定值范围和容差等级都是真实的，在形成赛题过程中只对质量损失费用和零件成本等作了一些加工和简化.

零件的参数设计是机械工业设计工作中的重要步骤之一，确定零件参数的标定值和容差又是参数设计的基本内容. 在批量生产过程中，标志产品质量的指标 (在本题中表示为产品某参数偏离目标值的大小) 取决于零件参数的标定值和容差. 从经济角度考虑，标定值设计不合理或容差设计得太大，会使产品参数远离目标值，造成质量损失；而容差设计得太小，又会增加零件制造 (或订购) 成本. 综合考虑产品质量和零件成本，设计时必须作出某种折中.

工程上进行零件参数设计的一种现成方法，是近年来我国某些专家提倡和推广的、日本学者田口玄一提出的所谓 "三次设计"，简称田口方法. 这次有一些参赛队查到了相关资料 [1]，用该方法解决这个问题，本刊选登了几篇用得较好的论文，供大家参考，本文不再涉及田口方法. 但是要指出的是，田口方法存在一些缺点 (特别是用于本题). 首先，它是先对标定值后对容差分别选优，又没有迭代过程，所以一般说来得不到总体最优解. 其次，它采用正交试验设计方法，标定值和容差必须离散化，对于像本题标定值有连续变化范围的问题，这是不方便和不够精确的. 下面结合参赛队的一些作法给出这一问题的基本模型和解法.

一、关于质量损失函数

题目说："如果产品参数偏离预先设定的目标值，就会造成质量损失，偏离越大，损失越大". 这个损失是对整个社会而言的，意思是只要 $|y-y_0|$ 不等于零 (y 和 y_0 分别表示产品参数和它的目标值)，就有损失，于是质量损失函数 $L(y)$ 应该是 $(y-y_0)$ 的连续函数. 考虑到题目所给条件：y 偏离 $y_0\pm0.1$ 时损失 1000 元；偏离 ±0.3 时损失 9000 元，可以合理地假设质量损失函数为 $(y-y_0)$ 的二次函数

$$L(y)=k(y-y_0)^2,\qquad k=10^5 \tag{1}$$

不少参赛队将损失理解为仅对工厂而言，又注意到 "y 偏离 $y_0\pm0.1$ 时产品为次品，偏离 ±0.3 时产品为废品" 的叙述，认为这里的产品就是工厂出售的最终产品，于是正品没有损失；只要是次品，损失都一样；废品损失也一样. 所以设质量损失函数为

$$L(y)=\begin{cases}0, & |y-y_0|\le 0.1\\ 1000, & 0.1<|y-y_0|\le 0.3\\ 9000, & |y-y_0|>0.3\end{cases} \tag{2}$$

其实仅对工厂而言，如果认为这里的产品仅是最终产品的某一部件，y 对 y_0 的偏离会 "连续地" 影响最终产品的质量，损失函数用 (1) 式似乎更合理些.

在全国评阅中，这两种形式的损失函数都认为是合理的.

二、基本模型

显然这是一个优化问题，目标函数应为成批生产时 (平均每件) 产品的质量损失与零件成本之和，决策变量是零件参数的标定值和容差.

可以合理地假设零件参数为相互独立的随机变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，期望 (平均值) 和均方差分别记作 x_{i0} 和 σ_i,(绝对) 容差记为 $r_i=3\sigma_i$，相对容差记为 $t_i=r_i/x_{i0}(i=1,2,\cdots,n)$，再记 $x_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$，$t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$.

由于产品参数 y 是由零件参数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 决定的，记作 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 显然 y 也是随机变量，大量生产时 (平均每件) 产品的质量损失费用应该用损失函数 $L(y)$ 的期望来度量，它取决于零件参数标定值 x_0 和容差 t, 我们记为

$$Q(x_0,t)=E[L(y)] \tag{3}$$

零件成本只取决于容差，第 i 种零件的成本记作 $c_i(t_i)$; 则零件总成本为

$$C(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i(t_i) \tag{4}$$

于是该优化问题的目标函数可表示为

$$Z(x_0,t)=E[L(y)]+C(t) \tag{5}$$

下面分别就 (1) 和 (2) 式定义的损失函数 $L(y)$, 讨论目标函数 $Z(x_0,t)$ 的表达式.

对于 (1) 式我们有

$$Q(x_0,t)=10^5E(y-y_0)^2=10^5\left[(Ey-y_0)^2+\sigma_y^2\right] \tag{6}$$

其中 σ_y^2 是 y 的方差. 为了得到 Ey 和 σ_y^2 的简单表达式， 在 x_0 处对 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 作 Taylor 展开，并略去二阶及二阶以上诸项，有

$$y=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i-x_{i0}),\qquad d_i=\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_0} \tag{7}$$

于是

$$Ey=f(x_0),\qquad \sigma_y^2=\sum_{i=1}^{n}d_i^2\sigma_i^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}(d_ix_{i0}t_i)^2 \tag{8}$$

目标函数为

$$Z(x_0,t)=10^5\left[f(x_0)-y_0\right]^2+\frac{10^5}{9}\sum_{i=1}^{n}(d_ix_{i0}t_i)^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_i) \tag{9}$$

注意 在推导 (9) 式的过程中我们只用到随机变量 x_i 的期望和方差，与它的概率分布无关，这里的误差来源于 (7) 式中忽略的高阶项.

当损失函数取 (2) 式时，计算期望需要随机变量 y 的概率分布，于是必须知道 x_i 的概率分布. 可以合理地假定 x_i 服从正态分布 $N(x_{i0},\sigma_i)$, 则在 (7) 式近似下 y 也服从正态分布 $N(f(x_0),\sigma_y)$,σ_y 由 (8) 式确定. 若记概率

$$P_1=P(0.1<|y-y_0|\le 0.3),\qquad P_2=P(|y-y_0|>0.3) \tag{10}$$

则目标函数为

$$Z(x_0,t)=1000P_1+9000P_2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_i) \tag{11}$$

为了计算 P_1,P_2, 令

$$z_1=\left[y_0-0.3-f(x_0)\right]/\sigma_y,\qquad z_2=\left[y_0-0.1-f(x_0)\right]/\sigma_y,$$
$$z_3=\left[y_0+0.1-f(x_0)\right]/\sigma_y,\qquad z_4=\left[y0+0.3-f(x_0)\right]/\sigma_y \tag{12}$$

则

$$P_1=\Phi(z_4)-\Phi(z_3)+\Phi(z_2)-(z_1),\qquad P_2=1-\Phi(z_4)+\Phi(z_1) \tag{13}$$

其中

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\varphi(x)dx,\qquad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{14}$$

可以作近似计算或由标准正态分布表查出.

本题的基本模型为在条件

$$a_i\le x_{i0}\le b_i,\qquad t_i=0.01,0.05,0.1,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

下 (a_i,b_i 由题目数据给出) 求零件参数标定值 x_0 和容差 t，使 (9) 或 (11) 式表示的目标函数 $Z(x_0,t)$ 达到最小.

有一些参赛队认为，要使 $Z(x_0,t)$ 最小，首先必须选 x_0 满足

$$f(x_0)=y_0 \tag{16}$$

然后再确定容差. 这是不对的，因为这样固然可以使 (9) 式右端的第一项消失，但是第二项也与 x_0 有关，满足 (16) 式的 x_0 不一定能使两项之和最小.

还有的参赛队先选 x_0, 使之满足

$$|f(x_0)-y_0|<\varepsilon \tag{17}$$

譬如给定 $\varepsilon=0.01$, 然后再对于这样一些 x_0 确定容差，经过比较得到最终的解. 这样做虽然可以得到相当不错的数字结果，但从理论上说是有缺陷的，因为满足 (17) 式的 x_0 位于一个非常复杂的多维区域内，不可能对所有的 x_0 进行比较.

三、基本解法

注意到在基本模型 (9)(或 (11)) 和 (15) 式中，决策变量 x_0 是连续的，t 是离散的，而且 t 的取值仅 $2\times3\times3\times3\times2=108$ 种，可以先固定 t, 求解如下一系列子问题

$$\mathrm{Min}\,Z_1(x_0)=10^5\left[f(x_0)-y_0\right]^2+\frac{10^5}{9}\sum_{i=1}^{n}(d_ix_{i0}t_i)^2 \tag{18}$$

$$\mathrm{s.t.}\,a_i\le x_{i0}\le b_i,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{19}$$

得到最优解 x_0^**,t^0 和最优值 Z_1^*, 然后对 108 个 t 比较

$$Z(x_0^*,t)=Z_1^*+C(t) \tag{20}$$

得到全局最优解 x_0^* 和最优值 Z^*. 对于 (11) 式表示的目标函数，求解思路一样.

子问题 (18) 、(19) 是非线性规划模型，可以选用现成的软件包 (如 LINDO) 求解. 而 (7) 式中导数 d_i 应事先算出 (如用 Mathematica 软件).

可以设计某种减少子问题数目的程序，例如按照 $C(t)$ 的数值由小到大排序，依次计算. 每解出一个子问题，立即由 (20) 式算出当前的最优值 Z_c^*，对待求解的子问题，先判断 $C(t)>Z_c^*$ 是否成立，若成立，则该子问题不必再解.

也可以设计一种迭代程序，x_0 和 t 一个固定，另一个优选，反复进行直到它们不再变化为止 [2].

下面给出一组计算结果，供参考.

对于模型 (9),(15), 参数标定值为 x_0^{**}=(0.075,0.375,0.125,0.1185,1.1616,19.96,0.5625), 容差为 t^* =(0.05, 0.05,0.05,0.1,0.1,0.05,0.05), 即容差等级为 (B,B,B,C,C,B,B), (平均每件) 产品的总费用为 Z^*=748.7(元).

对于模型 (11) 、 (15), 在上面的 x_0^{**} 和 t^* 下也得到最小的总费用 421.2 元 (最优解可能不唯一).

四、关于随机模拟

有一些参赛队利用了随机模拟 (Monte Carlo 模拟) 方法, 基本步骤为, 设 x_i 服从正态分布 $N(x_{i0},\sigma_i)$, 对每一组选定的 x_0,t, 随机产生 N 个数据 (向量) $x^{(j)}$, 然后根据 (3) 式作模拟计算：y 以 $f(x^{(j)})$ 代替，对 (1) 式表示的 $L(y)$ 有

$$Q(x_0,t)=\frac{10^5}{N}\sum_{j=1}^{N}\left[f\left(x^{(j)}-y_0\right)\right] \tag{21}$$

最后，对不同的 x_0,t, 从 $Z=Q+C$ 中选优. 对 (2) 式表示的 $L(y)$ 可作类似的处理.

这种方法虽然不需要算出 f 的导数、y 的方差等，但是要想得到满意的结果，必须进行更大量的计算，不仅 N 要很大，而且 x_0 要在给定范围内离散地布点 (须相当稠密).

一般地说，仅当一个问题无法解析地求解时，才利用随机模拟，否则这个方法只是用作结果的检验. 所以本题还是应该用前面讨论的方法做，仅用随机模拟不能认为是好的答卷.

五、其　　它

在评阅中我们发现，除了上述的基本模型和基本解法外，还有一些值得提出的，如：

有的队 (如本刊选登的上海交通大学队) 作了 7 个参数标定值的变化对费用的敏感性分析，找出其中最敏感的如 x_1,x_2, 这不仅对问题的求解有用 (搜索时对敏感的参数步长缩小), 而且对实际应用有一定的指导意义；

有的队 (如本刊选登的四川联合大学队) 对 y 的分布作了统计检验，他们先用正态分布的 x_i 模拟产生 y_i, 作 y 的直方图，用 χ^2 拟合正态分布，然后再在线性近似下证明 y 确为正态分布，这种作法是符合认识规律的；

许多队在求解时都采用了多种方法，如本刊选登的西南石油学院队考虑到 x_0 连续取值而 t 离散取值，采用因素交替法、一维搜索法和穷举法，他们还研制了 Windows 环境下的参数优化设计软件，又如本刊选登的四川联合大学队为克服陷入局部极小的缺点，采用了模拟退火方法.

评阅中还发现有的队不够严肃认真，如他们给出的最低费用甚至小于 420 元 (对模型 (11) 、(15)), 但是用他们给出的最优解校核，根本得不到这个费用.

参 考 文 献

[1] 韩之俊、章渭基著，质量工程学，科学出版社，北京，1991 年.

[2] Chan, L. K. and Xiao, P. H., Combined Robust Design, Quality Engineering 8(1), 1995, 47–56.