第19卷 建模专辑
2002年02月
工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 19 Supp.
Feb. 2002

文章编号:1005-3085(2002)05-0054-05

血管三维重建的问题

汪国昭, 陈凌钧
(浙江大学数学系,杭州 310027)

摘 要:本文介绍了2001年全国大学生数学建模竞赛A题的背景和立意,对题目的条件作了必要的分析,并对各参赛组对该问题的思路和解法进行归纳总结。

关键词:数学建模;中轴线;三维重建
分类号:AMS(2000) 65D17 中图分类号:O424.1 文献标识码:A

1 A题的背景

今年全国大学生数学建模竞赛选用了我们提出的血管三维重建问题作为A题,它是将血管作为一类特殊的管道看待,或者说,将血管理解为一个半径为常数的滚动球随着其球心沿着一条称之为中轴线的曲线运动时所形成的包络。它要求参赛者根据给定的100张等间距的平行平面的血管横断面的图象数据,重建血管空间结构的数学模型,即确定滚动球半径 r 和中轴线 γ。

这问题的来源于序列图象的计算机三维重建[1-4]。序列图象的计算机三维重建是应用数学和计算机技术在医学与生物学领域的重要应用之一;是医学和生物学的重要研究方法,它帮助人们由表及里、由浅入深地认识生物体的内部性质与变化、理解其空间结构和形态。

我们知道,生物体的外部形态多种多样,但借助一定的辅助工具,人们凭肉眼一般都能观察清楚;而其内部的复杂结构,却不是一目了然,只有剖开来,才能看个究竟。剖的方法很多,其中一种是做成切片。所谓切片就是用一组等间距的平行平面将生物体中需要研究的部位切成薄薄的一片片,每一片就是生物体某一横断面的图象。按顺序排列起来就形成切片图象序列,或称序列图象。切片的制作过程实际上是一个分解的过程,即将一个空间中的生物体的有关部分,分解为一系列的平面图象。如临床中的病理切片,又如美国国家医学图书馆已将二名尸体分别切成二千和五千多片,制成一套标准的切片图象序列供研究之用。当然,这种切片的获取方法是破坏性的,不适用于对活体组织的研究;自二十世纪七十年代末陆续出现的X线CT、MRI、SPECT、PECT、超声断层等为现代医学无损检测提供了强有力的诊断手段,它们在切片图象获得后,不会造成生物体本质性破坏,已成为获取断层图象序列最重要的诊断手段。

切片图象序列把生物体内部的各种复杂结构和变化一层层地暴露出来了,人们通过依次对每张切片图象的观察、分析和比较,综合起来可以形成对生物体内部结构的立体认识。从几何角度看,这种综合就是由切片图象序列恢复生物体内部结构的几何形状,称此为序列图象的三维重建。这项工作,过去是在人脑中进行的,专业人员通过观察、凭经验在自己头脑里想像

出生物体的内部结构和几何形状。在今天当然把这项繁杂的工作交由计算机完成,实行序列图象的三维重建的计算机化、自动化。序列图象的计算机三维重建是切片制作的逆过程,很复杂,需要综合运用图象处理、图形学、计算机辅助几何设计等多学科的方法,是当前研究的前沿和热点课题之一;它建立了反映生物体内部结构的几何模型或数学模型,利用这种模型,人们可以进行各种分析、处理以及信息的传输等操作。

血管是血液流通的通路,其在生命活动中的重要性是众所周知,诊断师在临床中经常需要了解血管的分布、走向等重要信息。理想的血管可以看成是粗细均匀的管道,如何建立其数学模型是图象三维重建的重要一环。

2 A题的立意

A题的立意是前沿性、交叉性、对照性和通俗性。

前沿性 血管三维重建的问题是从序列图象的计算机三维重建这一研究前沿课题中选题。事实上,重建的问题不仅在图象研究中出现,也在CAD等其他领域内出现。例如在缺乏数学模型的条件下要由计算机控制复制叶片、零件、工艺品等时,首先要求为这类需要复制的曲面建立数学模型,其方法是从这类曲面上进行采样,获取位于曲面上大量点的位置信息,然后进行分片表示,这项工作称为曲面重建。由于其过程正好与从数学模型出发制造曲面的过程相反,故又称为逆向工程。曲面重建方法很多,其中一种重要方法是序列图象三维重建,它在一簇等间距的平行平面与曲面的横断线面上采样,然后运用织网、蒙皮等技术进行建模。曲面重建或逆向工程近几年来发展迅速,正出现蓬勃之势。血管的三维重建比一般的曲面的重建简单,但"一滴水见太阳",可以反映曲面重建基本的思想方法,可以使人们初步感觉到曲面重建研究的前沿气氛。

交叉性 完成A题需要综合运用多学科知识、进行学科交叉;要运用图象处理的方法获得数据,要运用图形学的算法确定内切球,进而重建血管的三维结构;要运用数学方法建模与检验。其中数学是多学科交叉中的核心,她为我们提供必要的理论基础。

数学是古老的学科,历史悠久;图象处理、图形学、计算机科学都是年青的学科,但发展很快,在高科技中发挥着巨大的作用。数学与它们以及其他学科的交叉结合,有力推动了许多新生长点的涌现,序列图象在计算机三维重建是这种生长点之一。这种交叉过程也推动了数学自身的发展,血管三维重建中许多概念与数学中的等距线、等距面、包络面和扫掠曲面等概念紧密相连。由于应用的需要,使得这些经典的数学概念常讲常新,并成为与当前计算机辅助设计与辅助制造中的研究热点[5-13]。

竞赛过程中,参赛者们也正是围绕着A题的建模工作,灵活地运用数学软件包和各种图形图象的软件包,运用学科交叉的方法完成本题材。很多巧妙地运用软件包的方法,是预先没有估计到的。

对照性 对照性指应该对照已知图象对所建模型进行检查。建立血管的数学模型,只完成了问题的一半,还应该设法说明所建模型的正确性。虽然题中并未提出检验的要求,但是要求所建立的数学模型是正确的这一条件应该是不言而喻的。特别是A题,各种计算都是近似的,建立的模型也是近似的。近似程度如何,累积误差对最终结果有何影响,在实际应用中都不能忽略,因此,有必要对照给定的血管数据验证所建模型的正确性,很多参赛者也正是这样做了。他们设计了很好的算法,或重新生成切片图象与给定的切片图象作比较,或用球沿中轴线滚动等方法来表明自己结果的合理性。

通俗性 序列图象的三维重建涉及面很广，其中的学术问题也很多。借用血管重建这一名词可以将许多概念简单化、形象化、通俗化，使人容易理解。

3 A题的条件

A题是用包络的方法把血管的数学模型归结为球半径 r 和中轴线 γ 两部分。也就是说，以中轴线 γ 上每一点为球心，以固定常数 r 为半径作球，产生一球面簇，血管即为该球面簇的包络。将100张血管横断面图象按给定的坐标位置放置在空间，可以发现这是一段粗细均匀的血管。事实上，在无分叉情况下，血管一般可看作粗细均匀的管道。用包络方法表示的曲面可以很复杂，但要表示粗细均匀血管则 r 与 γ 之间应满足一定的约束。

直观地说，粗细均匀就是过中轴 γ 上的任意点 P 处用垂直于 γ 在 P 点切线方向的刀片切血管得到的截面是以 P 为圆心以固定的常数 r 为半径的圆，称此为过 P 点的法截面圆。血管也可以理解为中轴线 γ 上各点法截面圆的集合，或称法截面圆沿中轴线 γ 扫掠而成[12]。血管粗细均匀的充要条件是各法截面圆之间不相交，这样可保证各法截面圆周上的点全落在包络面上。为此要求 γ 满足下列条件：

1） 中轴线 γ 上每一点处的曲率半径大于 r。

2） 中轴线最窄处的宽度 d 大于 $2r$。

3） 中轴线两端点处的法截面圆不相交。

以上条件分别对中轴线 γ 的局部的、整体的和两端的有关性质提出了要求。

中轴线 γ 上最窄处的宽度 d 可以这样决定：当 γ 上两点 p,q 的连线垂直于 γ 在这两点处的切线时，或仅垂直在其中一点处的切线而另一点为 γ 的端点时，称 p,q 为相关点对。γ 上可以没有相关点对，也可以不止一对相关点对。如果 γ 上无相关点对，则认为 d 为无穷大，否则取 d 为相关点对中的两点间距离的最小值。

A题的数据是满足上述条件的。

竞赛之后，有人指出用包络方法表示血管是有条件的，说到底就是保证血管粗细均匀是要有条件的。其实这些条件也是平面曲线等距线不自交的条件，即当 Y 是平面曲线时，以上条件是使在平面上与 γ 距离为 r 的等距线不自交。在CAM领域谈到等距线，总假设不自交[10]，参赛者对此可作出合理假设。

4 A题的建模方法思想

A题建模工作的关键在于发现：在一条粗细均匀血管的任何横断面的图象内，其包含的最大内切圆的圆心位于中轴线 γ 上，该圆的半径等于滚动球的半径 r。很多参赛者都在适当的条件下证明了这一几何事实，并以此作为算法设计和模型构造的理论基础。

下面我们对本次竞赛中A题各参赛者的建模方法作扼要的总结。

参赛者求滚动球半径 r 的方法归纳起来，主要有下列几种：

1） **平均法** 求出每张横断面图象内的最大内切圆半径，再取 r 为它们的算术平均值。

2） **抽样法** 由于已知滚动球半径是常数，许多参赛者取前几片横断面图象内的最大内切圆半径的平均值为 r 的值。

3） **极大似然法** 在求得每一片横断面图象内的最大内切圆半径后，进行统计，以出现频率最大的值为 r 的值。

中轴线的建模归结为求中轴线 γ 与各横断面的交点和曲线拟合、逼近。参赛者使用的方法归纳起来，主要在下列几种：

1） **枚举法** 求每张横断面的图象内的最大内切圆的圆心时，以位于图象内每一个象素为圆心作圆，遍历所有象素点后再作确定。此种方法，思想简单，程序简单，但计算量大。

2） **平行切线法** 横断面的图象边界上的两点的连线如果同时垂直边界在这两点处的切线，则这两点连线有可能是最大内切圆的直径。发现所有具有这样性质的点对，并检验之，以确定最大内切圆的圆心。

3） **外推法** 利用中轴线的连续性，采用插值外推方法，根据前几片已求得的最大内切圆心位置，推断出新的一片图象包含最大内切圆心的估计位置，然后经过几次迭代求得较正确的圆心位置。

4） **滚球法** 让球在血管内滚动，保证球与血管相内切，逐个横断面地定出球心的位置。有参赛者提到了这一想法。

5） **投影法** 将各横断面的图象叠加在 xy 平面上，形成血管在 xy 平面上的投影，其中心线是血管中轴线 γ 在 xy 平面上的投影。类似地将血管向 xz 平面(或 yz 平面）投影，也可以求得中轴线 γ 在 xz 平面(或 yz 平面）的投影。这样做的参赛者为数不少。

6） **变换法** 横断面图象包含的最大内切圆位置可以理解为图象与固定半径为 r 的圆的交的面积达到最大值时圆的位置，这可以通过几何方法实现，也可以将其理解为图象的与半径 r 的圆的卷积达到最大值时的情况，可以运用傅里埃变换及其逆变换计算卷积，特别可以运用快速傅里埃变换的方法。

7） **细化法** 有的参赛者将100张血管的横断面图象按其空间位置固定，将其理解为三维空间中的图象，然后利用图象的细化软件作处理，求得中轴线 γ。

其余方法就不再一一列举了。以上的方法各有千秋，各在特色，从各个方面反映了参赛者的创造，不少是出于预料之外的。在求得中轴线 γ 与各横断面的交点的近似位置后，很多参赛者采用多项式的参数曲线进行拟合逼近，也有的采用参数样条曲线进行拟合，这些方法都是可行的。

5 A题的检验

A题是应该检验的，不检验只能说完成问题的一半。一方面，无论以何种方式建模，其过程都是近似计算，几经近似，效果如何，检验很必要；另一方面各血管的横断面数据已知，按指定的空间位置放置，就能形成一段血管，完全可以作为检验的标准。

不论用何种方法建立模型，对照给定血管的横断面图象数据，通过检验，发现模型的误差，修正模型，可以提高模型的正确性。

从阅卷过程发现的检验的主要方法有：

1） **逐片比较** 运用求得的滚动球的半径 r 和中轴线 γ，用球心沿 γ 运动的方法产生一簇球面，其包络面生成一段新的血管。用原来100张的平面截新的血管，生成新的100张横断面图象，逐一比较新、旧100张横截面图象之间的差别。若差别小，则认为满意，否则要修正模型，这样做的参赛者不少，只不过因时间关系没有100张全部比较。

2） **法平面法** 设 P 为中轴线 γ 上任意点，过 P 点作 γ 的法平面与原血管相交，若该法平面与血管的交与半径为 r 的圆差别小，则认为是满意的，否则修正模型。

3） **滚动法** 让固定半径为 r 的球的球心沿着中轴线 γ 移动，取步长为 δ，每移动一步

长，检查球与血管是否相切，若球能从 γ 的一端移到另一端时，每一步都保持与血管相切，则是满意，否则要修正模型。

将检验作为建模的必要的一部分，通过检验，发现问题，修正模型的数据，可以使模型从粗糙到精致，克服建模过程中许多不确定因素。

6 感受

有幸参加了今年全国大学生数学建模竞赛的出题和阅卷，从中受到很大的教育，深深地被同学们活跃的思想、组委会的教授们高度认真负责的精神所感动，感触颇多。

首先感到数学竞赛是个大学校。把那么多的优秀学生都团结在一起，刻苦钻研，努力奋进，朝气蓬勃，为广大青年学生树立了榜样。这不仅有利提高广大青年学生数学修养、科学素质，更有利树立良好的学风，形成浓厚的学术气氛。

深感青年学生中蕴藏着巨大的聪明才智。阅卷中看到很多优秀的论文是在三天之内完成的，实属不易。很多想法，都是远远超出我们的预料。他们思想活跃，综合运用各科知识能力强，而且很多新思想与当前发展着的高新科技合拍。有如此优秀的学生，可以相信，我国未来的科学是充满希望的；深感竞赛组委会专家教授高度负责的精神。A题以现在的面目出现，是在几易其稿以后，组委会的专家教授对题目一字一字地研究，对数据分析不放过一个小数点，并亲自演算，工作精益求精，使我们受益非浅。

现在2001年全国大学生数学建模竞赛已经结束，总结之余，我们衷心期望今后在全国专家学者以及广大师生的共同关心努力下，我国大学生建模水平更上一层楼。

参考文献：

[1] 应荣超等. 人下颌下腺淋巴管、血管和腺导管的计算机三维重建技术[J]. 解剖学报, Vol.22, No.4(1991), 342-346

[2] 黄丽丽等. 放置宫内节育器后子宫内膜螺旋动脉的三维空间形态[J]. 中华妇产科杂志, Vol.31, No.9(1996), 523-525

[3] R. Ying. Computer 3-Dimensional reconstruction of intraglandular lymph vessels and ductal systems of the human submandibular gland[J]. Acta Anat, 144(1992), 175-177

[4] 陈浚钧, 骆岩林. 等径管道的三维重建[J] 高校应用数学学报, Vol 13, 增刊(1998), 86-90

[5] 吕 伟. 有理等距参数曲线及其应用[J]. 浙江大学学报(自然科学报), 增刊(1993), 29-37

[6] Wei Lu. Offset-rational parametric plane curves[J] Computer Aided Geometric Design, Vol 12, No 6(1995), 601-616

[7] Wei Lu, Pottmann H. Pipe surface with rational spine curve are rational[J]. Computer Aided Geometric Design, Vol.13, No.7(1996), 621-628

[8] Wei Lu. Rational parameterization of quadrics and their offsets[J]. Computing, Vol.57, No.2, (1996), 135-147

[9] Farouki R.T, Neff C.A Analytic properties of plane offset curves[J]. Computer Aided Geometric Design, Vol.7, No.1 (1990), 83-99

[10] Farouki R.T, Shah S. *Real-time CNC interpolators for pythagorean hodograph curve*[J]. CAGD, Vol.13, No 7(1996), 583-600

[11] Martin R.R, Stephenson P.C. Sweeping of three dimensional objects[J]. CAGD, Vol.7, No 4(1990), 223-234

[12] Elber G, Lee I.K, Kim M.S. Comparing offset curve approximation methods[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, Vol.17, No.3(1997), 62-71

The Problem of Reconstruction Blood Vessel

WANG Guo-Zhao, CHEN Ling-Jun

(Department of Mathematics of Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract In this article, the research background of the problem A in the *CUMCM 2001* as well as its intention and conditions are simply stated, some methods found in the answer paper to this problem are introduced.

Key word Mathematic model; Medial axis; 3D reconstruction