

文章编号: 1005-3085(2003)07-0108-07

抢渡长江的数学模型

陈 丽, 潘海莉, 郭 凌

指导老师: 陈 涛

(南昌大学, 南昌 330047)

编者按: 该文较完整地回答了题目的各项提问, 并对长江水速的分布状况作了一些讨论。考虑数学建模与实际应用间的关系。虽然在模型四中分离变量并积分时丢失了因子, 导致模型解的错误, 但解题过程基本上是正确的。该文全文叙述清晰, 并联系建模与渡江实践写了一篇不错的短文, 参加渡江竞赛的健儿一定会从中得到收益。

摘 要: 本文就竞渡策略问题建立了竞渡路线优化模型。首先, 就题中前二问所提出的问题给出了较精确的答案。然后分析了 1934 年和 2002 年能到达终点的人数的百分比差别之大的原因, 并给出了能够成功到达终点的选手的条件。在对随后问题的分析过程中, 我们提出了依据水速的变化来改变竞渡者速度方向的思路, 并建立了模型二、模型三。模型四提出了一种比较理想化的竞渡策略, 即依据水速的变化随时变换人的速度方向, 并根据所得的结果给出了一个较合理的水速分布函数, 再根据实际情况得出一个更为合理的分布函数, 建立了改进后的模型五。利用 LINGO 和 Mathematica 数学软件编程算出了问题的最优解。最后将本文所建立的模型做了一些推广, 它们可以应用到航空, 航天和航海等领域。

关键词: 抢渡长江; 最优路线

分类号: AMS(2000) 49N99

中图分类号: O224

文献标识码: A

1 符号说明

\vec{i}, \vec{j} : 分别是水速和垂直水速方向的单位向量; v_r : 游泳者的游泳速度;
 v_s : 水流速度; v_h : 合速度(游泳者受水速影响的最终游泳速度);
 o, o' : 起点(武昌汉阳门码头)和终点(汉阳南岸咀);
 α_i : 第 i 区域内游泳者游泳方向和水流方向(正岸边方向)夹角($i = 1, 2, 3$);
 β : 合速度方向和水流方向夹角; t_i : 第 i 区域渡河所用时间($i = 1, 2, 3$);
 T : 游泳者渡河总时间; x_i : 第 i 区域游泳者前进的水平距离($i = 1, 2, 3$);
 y_i : 第 i 区域游泳者垂直前进的距离; L : 为起点到终点的水平距离。
 x : 游泳者离起点的水平距离; y : 游泳者离起点的垂直距离。

2 模型的建立

建立数学模型, 为了简化模型假设在竞渡区域两岸为平行直线, 它们之间的垂直距离为

1160 米,从武昌汉阳门的正对岸到汉阳南岸咀的距离为 1000 米,如图 1 所示。

定理一:当游泳者和水流的方向和速度大小始终不变时,游泳者最终必须延 OO' 方向前进。即当 \vec{v}_r 和 \vec{v}_s 不变,则 \vec{v}_h 固定且方向始终沿方 OO' 向。

(一)、解答问题一:

$$\text{由定理一建立模型一:} \begin{cases} \frac{1160}{v_r \sin \alpha} = T \\ \frac{1000}{1.89 + v_r \cos \alpha} = T \end{cases} \quad (1)$$

$$T = 848 \text{ 秒} \quad \text{得:} \begin{cases} v_r = 1.54 \text{ 米/秒} \\ \alpha = 117.46^\circ \end{cases}; \quad v_r = 1.5 \text{ 米/秒, 得:} \begin{cases} \alpha = 121.86^\circ \\ T = 910.51 \text{ 秒} \end{cases}$$

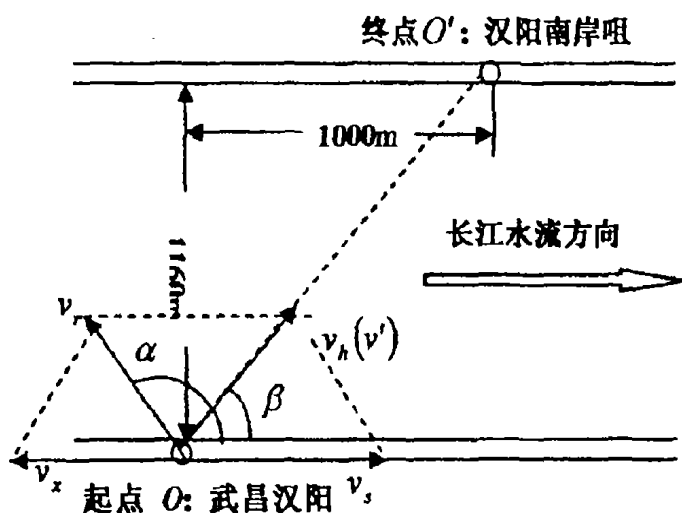


图 1

得冠军的速度为 1.54 米/秒,和正河岸的夹角为 117.46° ;一个速度保持在 1.5 米/秒的人应选择的游泳方向为和正河岸成 121.86° ,总时间为 15 分 10 秒。

(二)、解答问题二

若游泳者以和岸边垂直的方向游,则: $\alpha = 90^\circ$:

$$\frac{1160}{v_r} = \frac{1000}{1.89} \quad (2)$$

$$\text{解得} \quad v = 2.19 \text{ 米/秒}$$

要到达对岸,速度必须为 2.19 米/秒,而①中为 1.5 米/秒,所以

以不能到达终点。

1)、在水流速度均不变的情况下,分析 L 对速度的影响:

由方程组②可知要使游泳者到达对岸必须满足条件(在水流速度均不变时):

$$\frac{1160}{v_r \sin \alpha} = \frac{L}{1.89 + v_r \cos \alpha} \quad (3)$$

L 为起点到终点的水平距离。

由 Mathematica 4.0 可得不同 L 值时的 v_r 的最小值。

$$\text{Min} v_r = v_s \times \sin \alpha = 1.89 \times \frac{1160}{\sqrt{1160^2 + L^2}} \quad (\text{计算见附录 1, 略})$$

当 $L = 1000$ 米, $\text{Min} v_r = 1.43$ 米/秒;当 $L = \sqrt{5000^2 - 1600^2} = 4863.58$ 米, $\text{Min} v_r = 0.44$ 米/秒。要达到对岸,不同的 L 所要求的最小速度不同。游泳者无法达到 1.43 米/秒所以如何改变方向都不可能到达对岸。

2)、在水流速度不变、人的速度一定的情况下,得出 L 对游泳角度的要求:

同时在游泳者游泳速度保持不变 $v_r = 1.5$ 米/秒时, L 不同角度不同。当 $L = 1000$ 米时, $\alpha = 117.49^\circ$;当 $L = 4863.58$ 时, $\alpha = 30.41^\circ$ 。

3)、总结:

在这两次比赛中,到岸比例如此悬殊的最关键原因是起点到终点的水平距离有很大的

差距,1000米远远小于4863.58米导致对游泳者的游泳速度和游泳方向,选择几乎都快达到极限。除此之外,2002年4月下旬,长江流域连日阴雨,“五一”那天,武汉水域水位21.50米比往年高,水温16.8℃也比往年低,最大流速达到2.06米/秒,难度加大导致很多运动员败北。

(三)、解答问题三

由于流速沿岸边分三段分布,且题目中假设人的速度大小不变,我们可以假定在每一段人的速度为一个不同的方向,它们的方向与岸的夹角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,人游过三段的时间分别为 t_1, t_2, t_3 ,总时间为 $T = t_1 + t_2 + t_3$,其中 T 是一个关于 α_i 的函数。由此,我们可以求出总时间最小时各个 α 的值。

$$\text{建立模型二: 目标函数: } T_{\min} = \sum_{i=1}^3 t_i; \text{ 约束条件: } \begin{cases} v_r \times \sin \alpha_i \times t_i = y_i \\ (v_r \times \cos \alpha_i + v_s) \times t_i = x_i, (\frac{\pi}{2} \leq \alpha_i \leq \pi) \\ \sum_{i=1}^3 x_i = 1000 \end{cases}$$

根据第三问所给条件,用LINGO软件可以算出(程序见附录2,略):

$$T_{\min} = 904.0228s, \alpha_1 = 126.11^\circ, \alpha_2 = 118.09^\circ, \alpha_3 = 126.11^\circ.$$

$$\text{由以上数据得 } y \text{ 关于 } x \text{ 的函数: } y = \begin{cases} 2.3x, 0 \leq x \leq 86.81 \\ 0.94x + 118.4, 86.81 < x < 895.32 \\ 2.3x - 1099.23, 895.32 < x < 1000 \end{cases}$$

用Mathematica 4.0(程序见附录3,略)
画出 y 关于 x 的图形为(见图2):

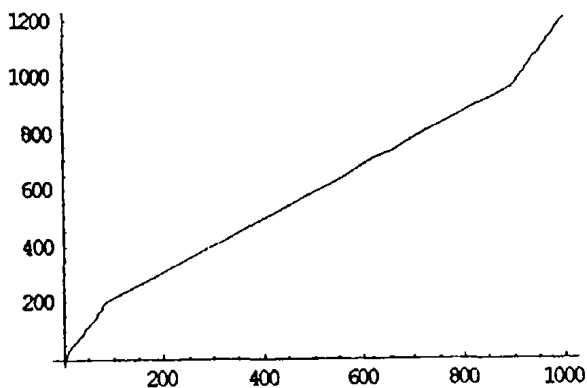


图2 (此图像所示的线路即为此模型的最优路线)

(四)、解答问题四

由问题四所给条件,假设游泳者的速度大小全程不变。游泳者成功抵达终点的方法有两个,一是游泳者在三个区域分别选择特定的前进方向,最终到达终点。二是游泳者在前进过程中不断的改变方向,使前行的方向与 OO' 的方向一致。由此建立以下两个模型:

1)、游泳者在三个区域里分别选择特定的方向前进

建立模型三: 目标函数为: $T_{\min} = \sum_{i=1}^3 t_i$

$$\text{约束条件为: } \begin{cases} v_r \sin \alpha_i = \frac{dy}{dt} \\ v_r \cos \alpha_i + v_s = \frac{dx}{dt}, \text{ 其中 } (\frac{\pi}{2} \leq \alpha_i \leq \pi), v_r = 1.5 \text{ 米/秒。} \\ \sum_{i=1}^3 x_i = 1000 \end{cases}$$

由第四问所给条件可得:(LINGO程序见附录4,略)

$$T_{\min} = 892.4776 \text{ 秒}, \alpha_1 = 127.26^\circ, \alpha_2 = 114.59^\circ, \alpha_3 = 127.26^\circ. \text{ 由以上数据得:}$$

$$x \text{ 关于 } y \text{ 的函数: } x = \begin{cases} 4.77 \times 10^{-3} \times y^2 - 0.7606y, & 0 \leq y \leq 200 \\ 1.214y - 203.9509, & 200 < y < 960 \\ 10.3161y - 4.77 \times 10^{-3} \times y^2 - 4541.8352, & 960 \leq y \leq 1160 \end{cases}$$

根据上面这个分段函数,可以得到函数 y 与 x 的函数图像,即游泳者前进路线。用 Mathematica 4.0(程序见附录 5,略)画出图像为(见图 3):

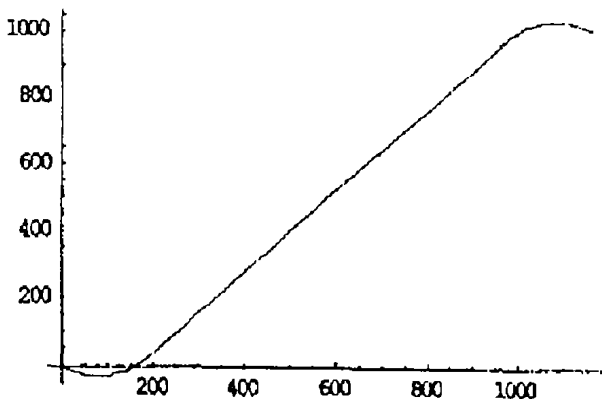


图 3 (其中横坐标为 y , 纵坐标为 x , 这个路线就是模型的最优路线)

2)、游泳者不断改变速度的方向前行
对于模型三,我们只考虑了每一段的速度为一个特定方向情况,沿着一条曲线向终点游去。下面我们对它做一些改进,即人的速度方向是时刻变化的,结果选手沿着一条从起点到终点的直线前进,以最短的时间到达。

根据题意,流速沿离岸距离连续分布,若人的速度大小保持不变,则人的速度方向要依水的流速的变化而变化,选手才能最快到达终点,要一方面分速度 V_x 平衡水速,另一方面用 v' 全力以赴向终点方向前进(另外, v' 可理解为人的速度与水的速度的合速度,即 \vec{v}_h),如此则没走弯路。因此建立数学模型四:

$$\vec{v}_h = \vec{v}_r + \vec{v}_s;$$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_h - \vec{v}_s = v_h \times \cos\beta \times \vec{i} + \vec{v}_h \times \sin\beta \times \vec{j} - v_s \times \vec{j}$$

因为 $v_r^2 = (v_h \times \cos\beta - v_s)^2 + (v_h \times \sin\beta)^2$

解得
$$v_h = \frac{2\cos\beta \times v_s \pm \sqrt{4\cos^2\beta \times v_s^2 - 4(v_s^2 - v_r^2)}}{2}$$

v_h 只能取根 $v_h = \cos\beta \times v_s + \sqrt{\cos^2\beta \times v_s^2 - (v_s^2 - v_r^2)}$ (证明略)。又因为

$$v_h \times \sin\beta = \frac{dy}{dt}$$

分离变量并积分:

$$\int_0^y \frac{dy}{\cos\beta \times v_s + \sqrt{v_r^2 - \sin^2\beta \times v_s^2}} = \int_0^{t_i} dt, (i=1,2,3)$$

$$T = \sum_{i=1}^3 t_i; \vec{v}_r = v_h \times \sin\beta \times \vec{j} + (v_h \times \cos\beta - v_s) \times \vec{i}$$

可得方程组:
$$\begin{cases} \int_0^{200} \frac{dy}{\cos\beta \times v_s + \sqrt{v_r^2 - \sin^2\beta \times v_s^2}} = \int_0^{t_1} dt \\ \int_{200}^{960} \frac{dy}{\cos\beta \times v_s + \sqrt{v_r^2 - \sin^2\beta \times v_s^2}} = \int_{t_1}^{t_2} dt \\ \int_{960}^{1160} \frac{dy}{\cos\beta \times v_s + \sqrt{v_r^2 - \sin^2\beta \times v_s^2}} = \int_{t_2}^{t_3} dt \end{cases}$$

一般人的速度在 $0.906\text{m/s} \sim 1.538\text{m/s}$, 由 Mathematica 4.0 算得结果:即使当 $v_r = 1.538$ 时,积分也无解(分析过程见附录 6,略),即最快速度的游泳者都不能到达终点,所以题中所

给的流速分布函数不合理。

我们可以假定水流速度分布函数为:

$$v(y) = \begin{cases} \frac{k}{200}y, & 0 \leq y \leq 200 \\ k, & 200 < y < 960 \\ \frac{k}{200}(1160 - y), & 960 \leq y \leq 1160 \end{cases}$$

当 $v_r = 1.538 \text{ m/s}$ 时, $k \leq 2$ 时, 积分式才有解, $v_r = 1.301 \text{ m/s}$ 时(此为 2001 年比赛中最晚到达终点的选手速度), $k \leq 1.63$, 积分式才有解(计算过程见附录 6, 略)。因此我们认为一般人能到达终点的水流速度分布函数中 $k = 1.8$ 时比较合理:

若 $v_r = 1.5 \text{ m/s}$ 且全程保持不变, 可以得到 $T = 885.747 \text{ s}$ 。

$$\begin{cases} \vec{v}_r = v_h \times \sin\beta \times \vec{j} + (v_h \times \cos\beta - \frac{1.8y}{200}) \times \vec{i}, & (0 \leq y \leq 200) \\ \vec{v}_r = v_h \times \sin\beta \times \vec{j} + (v_h \times \cos\beta - 1.8) \times \vec{i}, & (200 \leq y \leq 960) \\ \vec{v}_r = v_h \times \sin\beta \times \vec{j} + (v_h \times \cos\beta - \frac{1.8 \times (1160 - y)}{200}) \times \vec{i}, & (960 \leq y \leq 1160) \\ v_h = \cos\beta \times v_s + \sqrt{\cos^2\beta \times v_s^2 - (v_s^2 - v_r^2)} \end{cases}$$

其中 $\sin\beta = \frac{1160}{\sqrt{1160^2 + 1000^2}} = 0.7574$, $\cos\beta = \frac{1000}{\sqrt{1160^2 + 1000^2}} = 0.6529$;

分析: 得知, 实际的水流速度关于 y 的函数分布并不是呈三段线性分布, 而是呈近似抛物线分布, 由此可得, 改进的模型五。

3)、假设水速关于 y 呈抛物线分布, 在江中央, 即 $y = 580 \text{ m}$ 处, 水速最大, 为抛物线的顶点, 我们可以认为最大速度 v_m 为题中所给的江中央的速度 2.28 m/s 。

可设: $v(y) = v_m - a \times (y - 580)^2$, (a 为一待定的常数),

在起点水速为 0, 即 $v(y) = 2.28 - a \times (0 - 580)^2 = 0$

可得 $a = \frac{2.28}{580^2}$; $v(y) = 2.28 - \frac{2.28}{580^2} \times (y - 580)^2$ 与上述模型同理将 $v(y)$ 代入前面所得到的积分式为:

$$\int_0^{1160} \frac{dy}{\cos\beta \times v_s + \sqrt{v_r^2 - \sin^2\beta \times v_s^2}} = \int_0^T dt$$

(其中 $\sin\beta = \frac{1160}{\sqrt{1160^2 + 1000^2}} = 0.7574$, $\cos\beta = \frac{1000}{\sqrt{1160^2 + 1000^2}} = 0.6529$)

可得在新的连续分布下水速中, 游泳者按模型四的竞渡策略到达终点的总时间, 以及游泳者的速度随 y 变化的规律。

下面是给参加渡江竞赛的选手的短文:

抢渡长江策略

——智慧赢得胜利

2002 年 5 月 1 日, 万人瞩目的中国武汉国际抢渡长江挑战赛第 32 届横渡长江活动在武汉长江水域举行。届时来自美国、德国、韩国、马来西亚等 10 个国家和地区以及北京、河南、湖北等 9 个省市的 183 名游泳好手参加了这次抢渡, 而本次女子冠军, 男子冠军却分别

是 17 岁的美国学生埃瑞克·罗斯和中国高中生宋济,而平时他们的静水速度并不是很快,宋济的静水速度只有 1.364 米/秒,在静水比赛中只有第 18 名,然而他们何以成为幸运儿呢?胜利女神向来青睐有准备的智慧者。赛后他们均表示是智慧和拼搏帮助他们登上领奖台。

游泳比赛不靠速度拿冠军,而智慧排在首位,为何?

为此我们建立了一系列数学模型详尽的说明了问题并提出了最优方案,将数学很好地运用到实际问题中,并根据不同的实际情况提出了不同的抢渡策略,理论分析如下:

以不变应万变的方法始终保证游泳者的合速度指向终点:

情景一:如果竞渡水域中每点的水流速度和方向均不变时,则参赛者只需使得本人速度和水流速度的合速度朝着起点到终点的方向前进。所以在游泳前我们只需要测出水流速度大小和方向,游泳者必须保证能够在除去逆水速度后还能刚好朝终点前进,这样就能够顺利到达终点,游泳者速度越快所用时间越短。

情景二:竞渡水域分为水流速度固定的几个区域,在每一个区域内水流速度一定,确定游泳者的游泳方向和大小不变,则可以用微分、积分方法以及 LINGO 求出最优解。如题中条件三求出在三个区域的游泳角度 $\alpha_1 = 126.11^\circ$ 、 $\alpha_2 = 118.09^\circ$ 、 $\alpha_3 = 126.11^\circ$,游泳者只需按此方向前进就能最快到达终点。当水流比较小($v_{s1} = 1.47 \text{ m/s}$)游泳者用 3/5 的速度来克制水速,当水流变大($v_{s2} = 2.11 \text{ m/s}$),过多克制水速会消耗很大能量所以计算可用 1/3 的速度来克制逆水。

情景三:竞渡水域分为水流速度不一定固定的几个区域。在此情况下,用向量分析法,每处水流速度固定,并且人的速度确定,同理保证每一点的合速度指向终点。这个是模型四的结论。但在不断变化的水流中很难保证游泳者能一直沿着这一方向前进除非游泳者身上带有类似指南针的仪器。即在不断变化的水中,这样做脱离实际,由此我们建立了另一模型—模型五。

实际运用:由以上模型分析,在一般水域中这套理论都有可行之处,现实生活的竞技比赛多为情景二和情景三,本文分别虚拟了两种长江水流形势情景并给出了最优方案,同时还根据 2002 年 5 月 1 日的武汉长江实际水势给出了参加竞渡的最佳方案。

虚拟情景一:假设当水流速度沿岸边距离为连续分布,分三个区域,第一、三区域为线性分布越到江心水速越大,第二区域水速不变。此时保证游泳者的合速度不变朝向终点,在第一、三区域他必须随着水速的增大而不断调大游泳方向,从而保证克制水流的影响,在第二区域中可以算得一个固定的游泳角度。

虚拟情景二:假设水流成抛物线形状,即整个过程中越到江心水速越大,到两岸的水速渐减,游泳者游泳角度随水速的增加而加大即水速越大所需要克服的速度越大。

实际情景:正如 2002 年渡江男子冠军宋济在《知识助我登上领奖台》中所描述,当时的长江竞技区可分为四个区域,四个区域的水速分别为一定值。这类似于情景二中的条件,在第一、二区域流水最快,三、四区域水速相对要小,则在前两区域用一定比例速度来克制水速(不要很大),在水速比较缓和的第三、四区域可以适度的调大游泳角度,直到终点。

万物之中有玄机,这次比赛是智慧的较量,四两拨千金,只有好的方案才可能引领你到达目的地,否则即使你身轻如燕,箭步如飞,鱼雷穿梭也可能兵败麦城,与奖杯失之交臂。

参考文献:

- [1] 王志魁.化工原理[M].北京:化学工业出版社,1998

- [2] 宋济. 知识助我登上领奖台[J]. 游泳, 2002;4:27-28
- [3] 彭援军. 毛泽东畅游九江[J]. 游泳, 2002;4:28-28
- [4] 史力生. 用数字直接模拟层流[J]. 长沙铁道学院学报, 1994;12(2):43-54
- [5] 杨波, 程亮, 陈晶, 李亮, 吴莎. 抢渡长江最佳路线的探讨[J]. 数学通讯, 2002;24:42-43

The Application of Mathematic Model in the Competition of Crossing the Changjiang River

CHEN Li, PAN Hai-li, GUO Ling

Instructor: CHEN Tao

(Nanchang University, Nanchang 330047)

Abstract: This paper establishes the optimal model for crossing issue. At the beginning, exact results are presented on the first two questions given in the article. We also analyze the main reason for the percentages different of people who can succeed in reaching the opposite bank in 1934 and in 2002 and gives the necessary requirements for those who can reach the destination successfully. In 2002 the minimal speed of those successful competitors was 1.43m/s. In the process of analyzing the latter problems, the idea that adjusting the competitor's flat-out direction as current changes is brought forward to establish Model II and Model III. Model IV provides an ideal crossing way in the case that one can adjust his flat-out direction at any time as current changes and gives a relatively rational distribution function of water speed. By analyzing water speed on the foundation of the real condition, we get a more rational distribution function of water speed and build Model V. The LINGO and MATHEMATICA software are used in proceeding to get the optimized answer. By the end, the models established in this paper can be spread to other fields such as air-flight, space flight and navigation.

Keywords: the competition of crossing the Changjiang River; optimal route

(上接 68 页)

Abstract: Using the SAS software, we traverse all the 120 linear programming sub-problems, and get the most optimum solution. Based on the solution we use the greedy algorithm to get the least truck number and the plan for every truck's routine. For problem one, we figure out that the minimal total transportation load is 85628.62 ton * km, the seven forklifts are placed in the 1st, 2nd, 3rd, 4th, 8th, 9th forklifts position, 13 trucks are needed. For problem two, we use the similar solution to problem one, and make a full use of the present resource, we get a maximal production quantity is 103334 ton, 20 trucks are used, and forklifts are placed in the 1st, 2nd, 3rd, 4th, 8th, 9th, 10th forklifts position. The minimal transportation load is 147792.26 ton * km, the quantity of rocks is 49280 ton, the quantity of ore is 54054 ton.

Furthermore, we analyze the time when two trucks would wait in the same line, and the cost of time for a truck moving from one transportation routine to another.

Keywords: primary-object method, greedy algorithm, the time difference of transfer.