第 29 卷 第 1 期　　数学的实践与认识　　Vol. 29 No. 1
1999 年 1 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan., 1999

风险投资分析

程文鑫　　苑　青　　骆文润
指导教师：　数模组
(海军工程学院，武汉 430033)

编者按　本文概念清析、分析透彻，正确地建立了问题的双目标规划模型，并转化为单目标线性规划问题. 用网络法算出正确的结果. 同时，提出并论证了两个准则，简化了模型的求解；特别对假设 $M_i \geq u_i$ 的合理性、银行利率变化对投资组合的影响等作了灵敏度分析.

摘　要　本文主要研究多种资产的组合投资问题. 根据题目所给信息，建立了在一定简化条件下的多目标规划模型和单目标风险约束模型，并对问题一与问题二分别使用上述两模型进行求解得到多种投资组合方案，同时对一般情况进行了讨论，最后对模型进行了相应的灵敏度分析，讨论了简化条件的适用情况，结果表明模型是较为符合实际的.

一、问题的提出与分析 (略)

二、符号的说明

参数	范围	说明
S_i	$i=1,2\cdots,n$	能够投资的资产种类
M	相当大	投资总额
M_i	$i=1,2,\cdots,n$	资产 S_i 的纯购买额
P_i	$i=1,2,\cdots,n$	购买资产 S_i 的交易费率
C_i	$i=1,2,\cdots,n$	购买资产 S_i 的交易费
q_i	$i=1,2,\cdots,n$	购买资产 S_i 的风险损失率
r_i	$i=1,2,\cdots,n$	购买资产 S_i 的平均收益率
U_i	$i=1,2,\cdots,n$	交易费的门阀值
z_i	$i=1,2,\cdots,n$	购买资产 S_i 的金额在总资金中的比例
μ	$\mu\in(0,1]$	投资者对投资风险的厌恶程度
R_i		资产 S_i 的净收益
E_i		购买资产 S_i 所获得的收益

对于同期银行存款，其相应的符号分别表示为 S_0, M_0, r_0, z_0 等，其中 C_0, P_0, q_0, U_0 全为零.

三、模型的建立

(一)　有关概念的定义

1.　平均收益率 r_i 和净收益 R_i

$$r_i = \frac{\text{收益}}{\text{购买额}} = \frac{E_i}{M_i}$$

$R_i = E_i - C_i$，此时

$$r_i = \frac{E_i}{M_i} = \frac{R_i + C_i}{M_i}$$

故总体净收益

$$R = \sum_{i=0}^{n} R_i = \sum_{i=0}^{n} (M_i r_i - C_i)$$

2. 风险损失率 q_i 和总体风险 σ

$$q_i = \frac{\text{风险损失资金}}{\text{购买额}} = \frac{\sigma_i}{M_i}$$

则在用资金 M_i 购买资产 S_i 时的风险为 $c_i = M_i q_i$. 根据假设 4，购买若干种资产时，其总体风险为

$$\sigma = \max_{1 \le i \le n} \{M_i q_i\}$$

(二) 模型的建立

1. 模型 A　根据上述概念，我们可建立存在无风险投资时，资产组合投资决策函数为：

$$R = \sum_{i=0}^{n} R_i = \sum_{i=0}^{n} (M_i r_i - C_i), \tag{1}$$

$$\sigma = \max_{1 \le i \le n} \{M_i q_i\}, \tag{2}$$

由于两个函数具有一般性，计算比较复杂. 考虑到投资金额 M 相当大，即可以认为 $M_i \ge U_i$，从而可把交易费 C_i 简化为 $C_i = M_i P_i$.

在资产 S_i 中投资的总额可表示为

$$M_i + C_i = M_i + M_i P_i = M_i(1 + P_i)$$

此时购买额可表示为

$$M_i = \frac{M z_i}{1 + P_i}$$

这样上述两决策函数 (1) 、 (2) 可转化为

$$R = \sum_{i=0}^{n} (M_i r_i - C_i) = M \sum_{i=0}^{n} \frac{(r_i - P_i)}{1 + P_i} z_i$$

$$\sigma = \max_{1 \le i \le n} \{M_i q_i\} = M \cdot \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{q_i}{1 + P_i} z_i \right\}$$

从而可以建立双目标规划模型：模型 A

$$\max R = M \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{r_i - P_i}{1 + P_i} z_i, \tag{3}$$

$$\min \sigma = M \cdot \max_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{q_i}{1 + P_i} z_i \right\} \tag{4}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n} z_i = 1, \\ z_i \geq 0,\end{cases} i = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

2. 模型 B　对于双目标规划模型 A，其一般解法可采用网格搜索法. 在投资种类较多时，模型 A 求解比较复杂，为此需在模型 A 的基础上进行适当简化.

现对总体风险赋予一个上界值 δ 在 σ 不超过 δ 的情况下，寻求使收益 R 达到最大的投资组合 (投资比例)，其数学模型为模型 B

$$\max R = M \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{r_i - P_i}{1 + P_i} z_i \right), \tag{5}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sigma = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\{ \dfrac{M z_i}{1 + P_i} q_i \right\} \leq \delta, \\ \sum_{i=0}^{n} z_i = 1 \\ z_i \geq 0\end{cases} i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

四、模型的求解

(一) 模型 A 的求解

由于模型 A 为双目标函数规划模型，因此我们采用双目标规划的一般方法进行求解，设 $(1-\mu)$ 和 μ 分别表示投资者赋予期望收益和总体风险的权重数，令 $k = (1-\mu)(-R) + \mu\sigma$，此时将双目标规划模型 A 转化为如下单目标规划模型

$$\min K = -M \sum_{i=0}^{n} (1-\mu) \sum \frac{r_i - P_i}{1 + P_i} z_i + \mu M \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{q_i}{1 + P_i} z_i \right\},$$

$$\text{s.t.}:\begin{cases}\sum_{i=0}^{n} z_i = 1, \\ z_i \geq 0, \\ \mu \in (0, 1]\end{cases} i = 1, 2, \cdots, n$$

一般情况下 $\mu \neq 0$. μ 越大表示投资者对总体风险越厌恶，当 $\mu = 1$ 时表示投资者对资产投资风险极端厌恶.

对上述模型用网格搜索法求解 (程序见附录 1(略))．可得给定 μ 下的最佳投资组合.

在问题 1 中投资种类 $n = 4$，对于不同的 μ 易得到资金的投资比例 $z = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ 及相应的净收益 R 和风险 δ. 即可得到对于不同 μ 的投资组合如下：记 $z = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$

$0 < \mu < 0.76$ 时　$R = 0.267M$　$\sigma = 0.0247M(0.00, 1.00, 0.00, 0.00, 0.00)$,

$\mu = 0.78$ 时　$R = 0.217M$　$\sigma = 0.0094M(0.00, 0.38, 0.62, 0.00, 0.00)$,

$\mu = 0.80$ 时　$R = 0.216M$　$\sigma = 0.0091M(0.00, 0.37, 0.62, 0.01, 0.00)$,

$\mu = 0.82$ 时　$R = 0.206M$　$\sigma = 0.0076M(0.00, 0.31, 0.52, 0.14, 0.03)$,

$0.84 < \mu < 0.86$ 时　$R = 0.203M$　$\sigma = 0.0062M(0.00, 0.25, 0.42, 0.11, 0.22)$,

$\mu > 0.88$ 时　$R = 0.200M$　$\sigma = 0.0060M$ $(0.00, 0.24, 0.41, 0.11, 0.24)$.

为了进一步分析模型结果，画出 $R-\mu, \sigma-\mu$ 曲线图 (略)

由图可知，R, σ 是 μ 的非增函数，这是由于随着 μ 的增大，，即投资者对风险 σ 的厌恶程度增大，风险承受力降低，从而使 R, σ 减小. 从图中还可看出一个有趣的现象，在 $\mu = 0.768$ 时，R

和 σ 均发生突变，这是由于在风险超过一定限度时，投资者就会由风险型变为保守型，这比较符合实际.

(二) 模型 B 的求解

对于某一次投资，因 M 为常数，此时模型 B 可简化为

$$\max \sum_{i=0}^{n} \frac{(r_i - P_i)}{1+P_i} z_i,$$

$$\text{s.t}: \begin{cases} \sigma \le \delta, \\ \sum_{i=0}^{n} z_i = 1, (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \\ z_i \ge 0, \end{cases}$$

此模型为单目标线性规划模型，可直接利用 Lindo 软件求解，但为了在 n 较大时求解方便，我们提出下述准则以给出更为简便的算法.

准则 1 各资产的投资比列分配由净收益率 $\frac{r_i - P_i}{1+P_i}$ 从大到小排序.

准则 2 如有资产 S_i 和 S_j 的净收益率相等，则对应的风险较小的资产优先考虑.

现假设各资产投资的净收率排序为: $r'_1 \ge r'_2 \ge \cdots \ge r'_N \ge r'_0 \ge r'_{N+1} \ge \cdots \ge r'_n$.

则在分配中，若 $z_{i+1} = 0$, 则必有 $z_{i+1} = z_{i+2} = \cdots z_N = z_0 = z_{N+1} = \cdots = z_n = 0$. x 现用反证法证明准则 1.

假设 A: 存在 $z_{i+1} \ne 0$ 而 $z_i = 0$, 分两种情况进行讨论.

(1) 当分配给 S_i 和 S_{i+1} 的分配比列值 $\frac{S}{\frac{q_{i+1}}{1+P_{i+1}}} \le \frac{\delta}{\frac{q_i}{1+P_i}}$ 时，此时对于净收率关系式

$$\sum_{K=1}^{i-1} r'_K + z_K + r'_i z_i \ge \sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_K + r'_{i+1} z_i \ge \sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_K + r'_{i+1} z_{i+1}$$

恒成立，即投资比例 $(z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, 0, z_{i+1} \cdots 0)$ 不比投资比例 $(z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, z_i, 0, 0, 0 \cdots)$ 更优.

(2) 当分配给 S_i 和 S_{i+1} 的分配比例值 $\frac{S}{\frac{q_{i+1}}{1+P_{i+1}}} > \frac{\delta}{\frac{q_i}{1+P_i}}$ 时，不妨设 $z_{i+1} = z_i + z'_{i+1}$, 此时 $\sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_K + r'_{i+1} z_{i+1} = \sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_k + z_K + r'_{i+1} z_i + r'_{i+1} z'_{i+1} \le \sum_{K=1}^{i-1} r'_K z_K + r'_i z_i + r'_{i+1} z'_{i+1}$ 成立.

则投资比例 $(z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, 0, 0 \cdots 0)$ 不妨投资比例 $(z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, 0, 0 \cdots 0)$ 更优.

由此可见，假定 A 不成立，即不存在 $z_{i+1} \ne 0$ 而 $z_i = 0$ 的投资比例为最优.

准则 2 说明：对于净收艺相等的若干种资产，假设投资比例总和为 $Z_{总}$, 在某个 M 值下，不管怎样分配，它们所产生的净收益为 $M_{z总}$, 即净收益不变，而风险 $\sigma = \max\limits_{1 \le i \le n} \left\{ M \cdot z_i \frac{q_i}{1+P_i} \right\}$ 为取得更小的风险，我们应尽量将投资放在 $z_i \frac{q_i}{1+P_i}$ 小的资产上，这样可以得到其它投资比例不变的情况下风险最小而克净收益不变的最优解.

因此上述准则 1. 准则 2 是合理的.

由上述准则 1. 2 进行编程 (程序附录 2(略)) 即可求出一系列以 δ 为上限的最佳投资组合.

(三) 模型 B 所得的主要结论

1. 问题 2 的解

由于问题 2 中的风险投资种类 $n = 15$, 我们利用模型 B 进行求解. 任意给定 δ, 确定投资风险 σ 在不超过 δ 情况下的最优投资组合，列表 (表 4-1) 、画 $\delta - R$ 曲线图 (略).

表 4.1

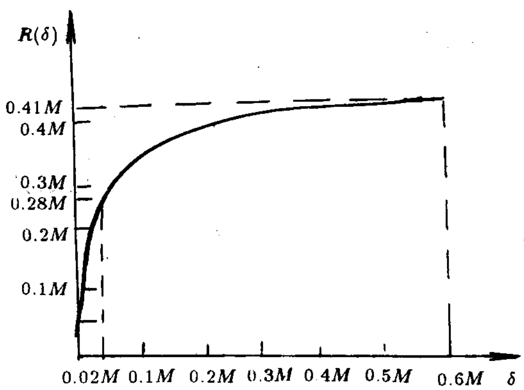
δ/M	0.05	0.09	0.11	0.15	0.20	0.30	0.40	0.45	0.50	0.55
R/M	0.264	0.329	0.338	0.349	0.359	0.373	0.387	0.394	0.400	0.407

由图可知, 随着 δ 的增加, 收益 R 逐渐增大, 投资者可根据自己的偏好, 选择满足要求的 δ 和 R, 进行有效资产组合投资. 考虑到 R 要尽量大, σ 要尽量小, 同时分析 $\delta-R$ 曲线知, 在 $\delta<0.08M$ 时, R 随 δ 急骤上升, 这是由于随着 δ 的增大, 人们对风险的厌恶程度减缓, 投资者逐渐走向风险型, 而在 $\delta>0.08M$ 时, 曲线渐趋平缓, 这是由于当 δ 大到一定程度时, 风险收益大的资产均已投资, 收益变化不大. 由于 δ 变缓范围较广, 限于时间不一一例举. 在此只给出一个较优的资产组合.

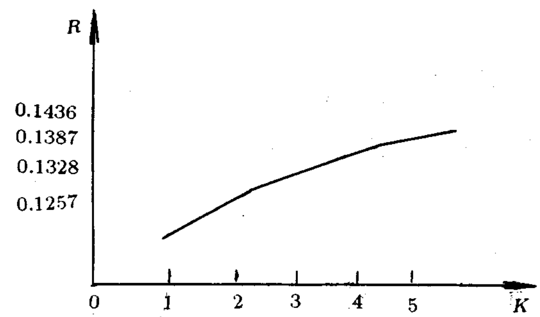
$$R=0.323M,\qquad \sigma=0.08M,$$
$$z_3=14.1\%,\qquad z_7=12.4\%,\qquad z_8=19.6\%,$$
$$z_9=15.4\%,\qquad z_{10}=20.6\%,\qquad z_{13}=17.9\%$$

2. 一般问题的求解

在此我们利用模型 B 将问题一和问题二结合在一起考虑, 即此时的风险投资种类 $n=19$ 种, 通过附录 II(略) 的程序求解 R, 并画出 $R-\delta$ 曲线如下:



R —δ 曲线图



K—R 曲线图

由上图曲线知, 曲线可分为三段: i) $0\le\delta/M\le 0.007$ 时, R 急骤增大, 这是因为随着 δ 的增大, 投资者对风险的厌恶程度降低, 即投资者由保守型走向风险型, 并且此时只需考虑问题二的 15 种投资, 故 R 增大显著. ii) $0.007<\delta/M<0.02$ 时, R 随 δ 快速增大, 这是因为风险的增加对投资方向的影响减缓. iii) $\delta/M>0.02$ 时, R 渐趋平缓.

为了研究投资资产的个数 K 对 R 的影响, 我们取 $\delta=0.01$, 利用模型 B 分别计算了不同投资资产数目时的收益, 由计算结果可以看出: 当资产数目较少时, 随着资产数的增加, R 迅速增长, 但当 $K=5$ 时, R 几乎与最大收益相等. 由此可看出, 投资过于分散, 并不能增加 R. 再考虑到资金管理因素, 因此组合投资的数目不宜过多.

五、灵敏度分析

1. 在模型 A, B 中, 我们假设 $M_i\ge u_i$ 成立, 研究此假设的合理性, 我们求出满足假设的最小总投资额 M', 此时 $M'\cdot z_i-M'z_i\cdot P_i\ge U_i$ 恒成立, 故

$$M'=\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{U_i}{z_i(1-P_i)}\right\}.$$

对于模型 A 或 B 来说，当 μ 或 δ 变化时，M' 也随之变化. 为此，我们可以通过改变 μ 或 δ 的值，得到一组 M'. 其结果见表 5.1、表 5.2. 从表中结果可以看出：M' 相对于资金总额 M 很小，故对模型 A 和模型 B 的简化是合理的.

表 5.1

μ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M'	104	104	104	104	104	104	104	281	433	433

表 5.2

δ/M	0.05	0.1	0.15	0.2	0.35	0.35	0.4	0.45	0.5	0.6
M'	5154	2603	2361	1288	1501	650	850	947	1616	6655

2. 一个好的模型不仅只适用于某一具体问题，而且还应对同一类问题有效，因此我们尝试对原始数据进行修改，以考察模型的适用性. 由于银行资产比较特殊，故此我们对银行利率进行改动，我们选择 0.05, 0.1, 0.15 三个数据进行考察.

表 5.3

r_0	$\mu=0.1$ 时		$\mu=0.5$ 时		$\mu=0.1$	
	R	z_0	R	z_0	R	z_0
0.05	0.267	0	0.267	0	0.05	1
0.10	0.267	0	0.267	0	0.10	1
0.15	0.267	0	0.267	0	0.15	1

表 5.3 中的数据由模型 A 计算计算得到，银行利率改变对投资没有影响，这主要是因为 S_1, S_2, S_3, S_4 均为高收益低风险资产，从表 5.3 中看出：银行利率的小幅上涨（相对于 $S_1 \sim S_4$）并不改变投资者的投资方向.

表 5.4

r_0	$\delta=0.01$		$\delta=0.05$		$\delta=0.1$		$\delta=0.5$	
	R	z_0	R	z_0	R	z_0	R	z_0
0.05	0.09	0.693	0.26	0	0.33	0	0.4	0
0.128	0.798	0.26	0	0.33	0	0.4	0	
0.17	0.844	0.27	0.22	0.33	0	0.4	0	

表 5.4 中的数据由模型 B 计算得到，当 δ 较小时，即投资者对风险承受力较小时，银行利率变化对投资者影响较大；而当 δ 较大时，影响几乎为 0. 这说明对于冒险型投资者来说银行利率的提高并不影响他们的投资方向.

七、模型的优缺点及改进方向 (略)

参 考 文 献

[1] 陈云贤，证券投资论，北京工业大学出版社，北京，1992.
[2] 程仕军，系统工程，极大化证券组合的投资收益率，1994.
[3] 哉加礼等，工程运筹学，北京工业大学出版社，北京，1988.