

钻井布局模型

陈 罡, 郭成良, 吴廷彬

指导教师: 教师组

(大连理工大学, 大连 116024)

编者按: 本文根据钻井布局的实际情况, 重点研究了在欧氏距离下最大限度地利用初探时所钻井的问题, 提出了仅依据旧井的坐标检验旧井是否能全部利用的条件, 并提出了两种检验方法. 虽然将所得条件用于寻找最大数量的旧井(问题 2)时仍较麻烦, 是否还能找到更简便的办法有待进一步研究, 但作者在三天时间内能对该问题作出较深入的分析, 得出了关键性的结果, 并给出了较严格的证明, 是十分可嘉的.

摘要: 本文的关键思想是找出在变化中的不变量. 对于第一小题, 作者发现可以把所有的点“移到”一个方格中, 而它们相对网格结点的距离不变, 这样问题就得到了大大的简化. 对于第二题, 本文发现坐标变换时各点之间的欧氏距离不变, 利用各点的距离关系, 给出一系列的判定条件, 最后用优化算法(充要条件)判定. 第二题的算法对于第三题也是通用的, 因此第三题应用第二题的方法来解决.

关键词: M - N 分解; 网格坐标系; 结点

1 问题重叙(略)

2 问题的条件和假设

(1) 在本题中, 地形对误差无影响, 无需考虑地形这一因素

(2) 不需要考虑总井数, 利用旧井不会导致总井数的增加, 只要考虑尽可能多利用旧井.

(3) 给出的旧井均在所定勘探区域内

(4) 网格充分大

3 符号约定和名词解释

$[X]$ 取整, 等于 X 的整数部分

ϵ 在没有说明的情况下代表题设误差, 即 0.05 单位

P_i 第 i 口旧井 (a_i, b_i) 所在的点

P_i 第 i 口旧井平移 (m, n) 个单位后的点 $(a_i + m, b_i + n)$ ($m, n \in \mathbb{Z}$).

X_i 代表 P_i 附近的网格结点

Q 一个边长为 2ϵ 的只可平移不可转动的正方形

W 结点 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ 所围成的一个网格

网格坐标系 以某点为坐标原点, 以网格纵横方向为 x, y 轴方向建立的坐标系, 并以题设网格边长为单位长度

矢量的 M - N 分解 若矢量 \vec{A} 可表示成 $\vec{A} = m\vec{i} + n\vec{j}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, \vec{i}, \vec{j} 为互相垂直的单位向量, 则称 m, n 为 \vec{A} 的一组 M - N 分解

距离的近似M - N 分解 两个点 $P_i P_j$ 的距离 d 满足 $|d - \sqrt{m^2 + n^2}| \leq 2\epsilon, m, n \in \mathbb{Z}$, 称 m, n 为距离 d 的近似M - N 分解, 简称近似M - N 分解

网格原点 设起始时网格坐标系与题设坐标系重合, 称这时的坐标原点为网格原点

4 问题分析和解答

4.1 问题一的分析

根据题意, 网格的方向是固定的, 对于任意一点 P_i , 当网格纵横平移整数个单位时, P_i 相对于最近的网格结点的距离是不变的, 即当 P_i 在网格上纵横平移整数个单位时, P_i 相对于网格结点的距离不变. 于是, 我们把所有的旧井点都纵横平移整数个单元, 使它们都落在同一网格单元中, 此时, 各点相对于最近网格结点的距离保持不变.

如图 1- 1 所示, 我们把 n 个旧井点都移到网格 W 里. 在题一的距离意义下, 要使尽可能多的网格结点与旧井点的距离不大于 ϵ , 等价于让尽可能多的旧井点落在以结点为中心, 2ϵ 为边长的正方形内. 此时, 如果正方形的中心为某种网格的网格结点, 则正方形里面的点都可以利用. 这样原来的问题就转化为用小正方形 Q 去盖住尽可能多的点.

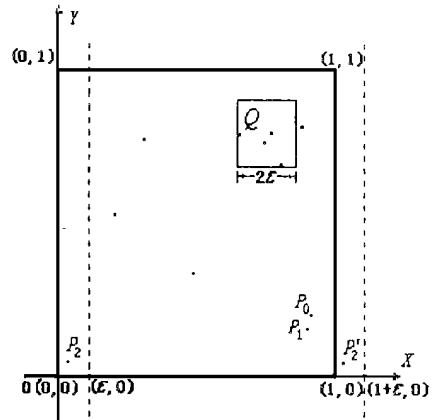


图 1- 1

4.2 问题一解题步骤

基本步骤如下:

1. 对所有的旧井点进行坐标变换使它们平移到

网格 W 里. 设原旧井点的坐标为 (x, y) , 则新的坐标为 (x', y') , 其中:
$$\begin{cases} x' = x - [x] \\ y' = y - [y] \end{cases}$$

2. 考虑到图 1- 1 中点 P_2 , 它位于离网格边界 ϵ 的地方, 它的映像点 P_2' 可能与 P_0, P_1 同时被正方形 Q 盖住, 如果不作处理, 则这种情况可能遗漏. 因此在实际解题的过程中, 我们把这样的点映射到 $[1, 1 + \epsilon]$ 再进行处理.

3. 对于网格 W 中的旧井点, 我们先对它们按 X, Y 坐标进行分组, 设

$$A_i = \{(x, y) \mid x \in [a_i, a_i + 2\epsilon], (x, y) \in \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$B_i = \{(x, y) \mid y \in [b_i, b_i + 2\epsilon], (x, y) \in \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

令 $C_{ij} = A_i \cap B_j \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$

易知任何一个 C_{ij} 中所有的点都可以被左下角坐标为 (a_i, b_i) 的正方形 Q 同时盖住, 同时这个正方形不能再盖住别的点.

4. 找出元素数目最多的 C_{ij} , 以此再构造一个正方形来盖住这些点. 则这个正方形的中心就是达到盖住最多旧井点的结点. 把网格原点移到这个结点, 此时的网格 N 即为所求.

4.3 问题一的结论

按上述步骤编写的程序为 FIRST.CPP. 对于所附的数据经过计算机计算后得出结论为: 最大可同时利用四口旧井(编号为 4, 10, 5, 2), 此时网格原点移到: (0.40, 0.55).

4.4 问题二的分析

由于纵横坐标方向不定,且坐标原点不定,因此直接考虑坐标是不切实际的,但是在坐标变换的过程中,点和点的距离是不变的

命题 2-1 两口旧井能同时利用的充要条件是:

存在 $m, n \in \mathbb{Z}$ 使得 $|S_{P_i P_j} - \sqrt{m^2 + n^2}| \leq 2\epsilon$ (其中 $S_{P_i P_j}$ 为旧井 P_i, P_j 之间的距离)

证明 【必要性】如果 P_i, P_j 能同时利用,如图 2-1,则存

在两个网格结点 X_i, X_j 满足 $S_{P_i X_i} \leq \epsilon, S_{P_j X_j} \leq \epsilon$

显然存在两个整数 m, n 使得 $S_{X_i X_j} = \sqrt{m^2 + n^2}$

$$S_{P_i P_j} = S_{X_i X_j} + S_{P_i X_i} + S_{P_j X_j}$$

$$S_{P_i P_j} = S_{P_i X_i} + S_{P_j X_j} + S_{X_i X_j}$$

整理得 $|S_{P_i P_j} - S_{X_i X_j}| \leq |S_{P_i X_i} + S_{P_j X_j}| \leq 2\epsilon$

$$\text{即 } |S_{P_i P_j} - \sqrt{m^2 + n^2}| \leq 2\epsilon \quad (1)$$

【充分性】在线段 $P_1 P_2$ 所在直线上取两点 X_1, X_2 (其中 X_1 在 P_1 一侧, X_2 在 P_2 一侧), 使得 $|X_1 X_2| = \sqrt{m^2 + n^2}$ 且 P_1, P_2 的中点与 X_1, X_2 的中点重合, 则

$$|P_1 X_1| = |P_2 X_2| = \frac{|P_1 P_2| - |X_1 X_2|}{2} = \frac{|P_1 P_2| - \sqrt{m^2 + n^2}}{2} \leq \epsilon$$

又 $|X_1 X_2| = \sqrt{m^2 + n^2}, m, n \in \mathbb{Z}$

显然 X_1, X_2 都可在某网格的结点上

两个旧井能同时利用

证毕

推论 2-1 n 口旧井能同时利用的必要条件是任意两口旧井的距离满足近似 $M - N$ 分解

命题 2-2 三个点 X_1, X_2, X_3 在某网格坐标系下都是结点的充要条件是向量 $\overrightarrow{X_1 X_2}, \overrightarrow{X_2 X_3}, \overrightarrow{X_3 X_1}$ 存在 $M - N$ 分解 $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)$ 使得:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 m_i = 0 \\ \sum_{i=1}^3 n_i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

证明 【必要性】根据向量的性质知 $\overrightarrow{X_1 X_2} + \overrightarrow{X_2 X_3} + \overrightarrow{X_3 X_1} = \vec{0}$, 相应的分量相加即为 (2) 式

【充分性】设 $\overrightarrow{X_1 X_2}, \overrightarrow{X_2 X_3}, \overrightarrow{X_3 X_1}$ 可表示为:

$$\begin{cases} \overrightarrow{X_1 X_2} = m_1 \vec{i} + n_1 \vec{j} \\ \overrightarrow{X_2 X_3} = m_2 \vec{i} + n_2 \vec{j} \\ \overrightarrow{X_3 X_1} = m_3 \vec{i} + n_3 \vec{j} \end{cases}$$

设有一网格坐标系 (如图 2-2), 记其 x 轴, y 轴的单位向量为 \vec{i}, \vec{j} , 在该网格任取一结点 Y_1 , 由于 $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, 可找到结点 Y_2, Y_3 使 $\overrightarrow{Y_1 Y_2} = m_1 \vec{i} + n_1 \vec{j}, \overrightarrow{Y_2 Y_3} = m_2 \vec{i} + n_2 \vec{j}$ 又 $\overrightarrow{Y_3 Y_1} = -\overrightarrow{Y_1 Y_3} = -(\overrightarrow{Y_1 Y_2} + \overrightarrow{Y_2 Y_3}) = -(m_1 + m_2) \vec{i} - (n_1 + n_2) \vec{j}$

及 $m_1 + m_2 + m_3 = 0, n_1 + n_2 + n_3 = 0$

可知 $\overrightarrow{Y_3 Y_1} = m_3 i_3 + n_3 j_3$

以下证明 $Y_1 Y_2 Y_3$ 与 $X_1 X_2 X_3$ 全等

事实上, 根据构造 $Y_1 Y_2 Y_3$ 过程易知 $Y_1 Y_2 Y_3$ 与 $X_1 X_2 X_3$ 对应边长相等, 所以两三角形全等. 由于 Y_1, Y_2, Y_3 在一网格的结点上, 所以 X_1, X_2, X_3 也可以在某网格的结点上

三点共线时, 易证结论成立

证毕

如果三个点的任意一边满足距离的近似 M - N 分解, 而且分出的 (m_i, n_i) 满足命题 2-2 的条件, 称这三个点构成的三角形为可近似整数分解三角形

推论 2-2 若 $P_1 P_2 P_3$ 是可近似整数分解三角形, 则存在某网格的三个结点, 使得该三角形的三个顶点分别靠近这些网格结点

证明 如图 2-3, 设 $P_1 P_2, P_1 P_3, P_2 P_3$ 的近似 M - N 分解分别为 $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)$, 作一条与 $P_1 P_2$ 中点重合, 且在 $P_1 P_2$ 所在直线上, 长度为 $\sqrt{m_1^2 + n_1^2}$ 的线段 AB. 则易知 $|P_1 A| < \epsilon, |P_2 B| < \epsilon$. 设点 C 是使得

ABC 为三边分解为 $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)$ 的可整数分解三角形的点. 这样可以根据 A, B, C 建立网格坐标系, 使得 A, B, C 都是网格结点. 又因为 ABC 与 $P_1 P_2 P_3$ 各边的差很小 (根据 $P_1 P_2 P_3$ 为近似可整数分解三角形且其分解和 ABC 的分解相同), 所以 C 点和 P_3 点的距离也很小 (当然这个距离可能大于 ϵ , 但是现在不需要也无法给出一个充分的结论).

证毕

推论 2-3 n 口井都可同时利用的必要条件是: 任意三个点构成的三角形都是近似整数化三角形

命题 2-3 n 个共线的点 X_1, X_2, \dots, X_n 都是某网格坐标系的结点的充分必要条件是它们的一组 M - N 分解满足:

$$\begin{cases} m_{12} + m_{2i} + m_{i1} = 0 \\ n_{12} + n_{2i} + n_{i1} = 0 \end{cases} \quad (i = 3, 4, \dots, n) \quad (3)$$

(其中 m_{ij}, n_{ij} 为 $\overrightarrow{X_i X_j}$ 的一组 M - N 分解, 且不妨设当 $i = j$ 时, $m_{ij} = 0, n_{ij} = 0$.)

证明 【充分性】以 X_1 点为原点建立一网格坐标系, 旋转该坐标系使 X_2 处在结点 (m_{12}, n_{12}) 上 (根据 M - N 分解的定义, 易知这是可以实现的). 取结点 (m_{1i}, n_{1i}) , 显然这个点与 X_1, X_2 构成的矢量的 M - N 分解满足 (3) 式且在 $X_1 X_2$ 所在的直线上. 又因为满足 (3) 式的点到 $X_1 X_2$ 两点的距离确定, 所以这个结点就是 X_i .

【必要性】如果有 n 个共线的点 X_1, X_2, \dots, X_n 在网格结点上, 显然有 (3) 式成立

引理 若一个点 X_1 到三个不共线三点 X_2, X_3, X_4 的距离确定, 则 X_1 的相对位置唯一.

证明 如果存在不同于 X_1 的点 X_1 使得 $|X_1 X_i| = |X_1 X_i|$, 则点 X_2, X_3, X_4 在线段 $X_1 X_1$ 的中垂线上与 X_2, X_3, X_4 不共线的假设相矛盾

命题 2-4 设有 n 个点 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 不共线, 且 X_1, X_2, X_3 为不共线的点, 则这 n 个点都在某网格坐标系的结点上的充分必要条件是满足:

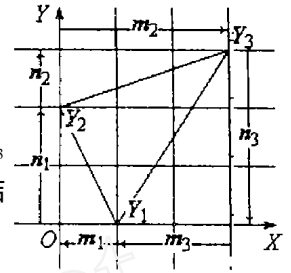


图 2-2

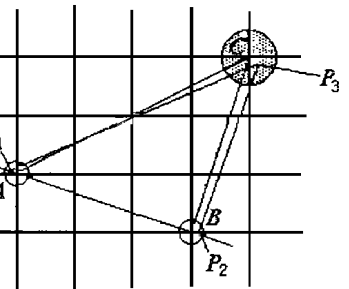


图 2-3

$$\begin{cases} m_{12} + m_{2i} + m_{i1} = 0 \\ n_{12} + n_{2i} + n_{i1} = 0 \\ m_{23} + m_{3i} + m_{i2} = 0 \\ n_{23} + n_{3i} + n_{i2} = 0 \end{cases} \quad (i = 3, 4, \dots, n) \quad (4)$$

(其中 m_{ij}, n_{ij} 的意义同命题 2- 3 中 m_{ij}, n_{ij})

证明 【充分性】

1. $n = 3$ 时即为命题 2- 2, 显然成立

2. 设 $n = k - 1$ 时成立

3. 当 $n = k$ 时, 考虑:

$$\begin{cases} m_{12} + m_{2k} + m_{k1} = 0 \\ n_{12} + n_{2k} + n_{k1} = 0 \\ m_{23} + m_{3k} + m_{k2} = 0 \\ n_{23} + n_{3k} + n_{k2} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

根据上一步假设 $k - 1$ 个点时成立, 即在某网格坐标 G 下 $k - 1$ 个点都在某格节点上, 在该网格坐标系 G 中, 作 $\overrightarrow{X_1X_k} = m_{1k} \cdot \vec{i} + n_{1k} \cdot \vec{j}$ ($m_{1k} = -m_{k1}, n_{1k} = -n_{k1}, \vec{i}, \vec{j}$ 意义同前), 连接线段 X_2X_k, X_3X_k , 根据 (5) 式和矢量的性质可知 $\overrightarrow{X_2X_k} = m_{2k} \cdot \vec{i} + n_{2k} \cdot \vec{j}, \overrightarrow{X_3X_k} = m_{3k} \cdot \vec{i} + n_{3k} \cdot \vec{j}$.

$$|\overrightarrow{X_1X_k}| = |\overrightarrow{X_2X_k}|, |\overrightarrow{X_2X_k}| = |\overrightarrow{X_3X_k}|, |\overrightarrow{X_2X_k}| = |\overrightarrow{X_3X_k}|$$

又 X_1, X_2, X_3 不共线

根据引理可知 X_k 与 X_k 重合, X_k 在网格节点上

$n = k$ 时成立

【必要性】 设 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 在网格坐标系 G 下都是结点, 对 $X_i (i \geq 3)$ 进行分析. 当 $i = 3$ 时, 设 $\overrightarrow{X_1X_2}, \overrightarrow{X_2X_3}, \overrightarrow{X_3X_1}$ 在 G 下的分量分别为 $(m_{12}, n_{12}), (m_{23}, n_{23}), (m_{31}, n_{31})$ 根据命题 2- 2, (4) 式前两个等式成立

当 $i > 3$ 时, 由于 X_1, X_2, X_3, X_4 都在网格节点上, 根据命题 2- 2 可知 (4) 式前两个等式和后两个等式分别成立 证毕

易知: 命题 2- 3 的条件包含在命题 2- 4 的条件中, 所以满足命题 2- 4 的条件自然满足命题 2- 3 的条件

推论 2- 4 如果 n 个旧井点的相互连线 $P_iP_j (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$ 的近似 $M - N$ 分解 m_{ij}, n_{ij} 满足命题 2- 4 中 (4) 式, 那么这 n 个旧井点可以通过坐标变换分别靠近某网格的 n 个结点 (不一定小于 ϵ).

根据命题 2- 3 和推论 2- 2 容易得到结论

命题 2- 5 n 口井 $P_i(a_i, b_i)$ 都可利用充分必要条件是以下两式有公共解

$$\begin{cases} (x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2 = m_{i1}^2 + n_{i1}^2 \\ (x_i - x_2)^2 + (y_i - y_2)^2 = m_{i2}^2 + n_{i2}^2 \\ (x_i - x_3)^2 + (y_i - y_3)^2 = m_{i3}^2 + n_{i3}^2 \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (6)$$

$$\sqrt{(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2} \in \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

(其中: m_{ij}, n_{ij} 为 P_iP_j 的一种近似 $M - N$ 分解且满足命题 2- 4, 当 $i = j$ 时, 记 $m_{ij} = 0, n_{ij} =$

0, 且所有的 $\frac{m_{ij}}{n_{ij}}$ 不全等时, 总是设 $\frac{m_{12}}{n_{12}} \quad \frac{m_{13}}{n_{13}}$).

证明 【充分性】 设 (6) 式有解, 表示存在一系列点 $X_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 使得 $|X_i X_j| = \sqrt{m_{ij}^2 + n_{ij}^2}$, 所以 $\overrightarrow{X_i X_j}$ 存在一种 M - N 分解为 (m_{ij}, n_{ij}) . 又因为 m_{ij}, n_{ij} 满足命题 2- 4 中的 (4) 式, 根据命题 2- 4 的充分条件 ($\frac{m_{ij}}{n_{ij}}$ 全等时表明 X_i 共线, 由于 m_{ij}, n_{ij} 满足 (4) 式显然也满足 (3) 式, 由命题 2- 3 的充分条件) 可知 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都在某网格坐标系的结点上. 而 (7) 式说明 $|P_i X_i| \in \epsilon (i = 1, 2, \dots, n)$, 即 $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都可以利用

【必要性】 n 口井都利用即表示在某网格坐标系 (不妨设为 G) 下 $|P_i X_i| \in \epsilon (X_i(x_i, y_i))$ 为该网格上的结点, 则 $X_i(x_i, y_i)$ 满足 (7) 式. 又因为 X_i 是 G 上的结点, 设 $\overrightarrow{X_i X_j}$ 在坐标 G 下的分量为 m_{ij}, n_{ij} , 显然 m_{ij}, n_{ij} 满足 (6) 式.

必要条件成立

证毕

4.5 问题二的解答步骤

步骤 1 建立一张 12 口井之间的距离互相关系表. 如下表所示, 当两口旧井之间的距离满足近似的 M - N 分解时, 记录下能进行所有可能的近似 M - N 分解. 如果旧井点 P_i, P_j 可以进行近似 M - N 分解, 就在第 i 行 j 列记下 $P_i P_j$ 的近似 M - N 分解的可能数目, 如果 P_i, P_j 不能进行近似 M - N 分解, 则记为 0. 通过对绝对值小于两点之间的距离的所有整数进行穷举, 求出所有可能的 m, n , 把它们存入数组, 以供以后使用. (下面是根据原题所附数据得出的结果)

2#	0										
3#	0	0									
4#	1	1	1								
5#	1	1	1	1							
6#	2	1	0	1	0						
7#	1	1	3	1	1	1					
8#	1	2	1	1	0	1	1				
9#	3	2	0	1	1	1	1	1			
10#	1	3	1	1	3	1	2	1	0		
11#	2	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
12#	2	3	0	1	1	2	2	0	1	0	0
1#	2#	3#	4#	5#	6#	7#	8#	9#	10#	11#	

步骤 2 根据推论 2- 1, 找出系列集合, 使得集合中间任意两点之间的距离都可以进行近似 M - N 分解 (通过步骤 1 给出的表判定), 算法程序为子程序 Tconduct, 为了加快运算, 用子程序 band 去掉重复的集合.

步骤 3 根据命题 2- 2, 在上述集合中, 进一步判断, 找出任意三个点都可构成近似整数分解三角形的集合.

步骤 4 对步骤 3 判断的结果进一步判断. 对其中的任何一个集合, 判断这 k 个点的近似 M - N 分解是否可能满足命题 2- 4 条件, 如果不可能, 则该集合不满足条件. 如果可能, 则输出该集合和相应的 M - N 分解值. 这样可以得到可能的结果为: (只打出 4 个元素以上

的集合)

1	4	6	8		
1	4	6	9		
1	4	6	11		
2	4	5	10		
1	4	6	8	9	11
1	6	7	8	9	11

真解就是在这些集合中

以上 4 步由程序 PREDUCT.CPP, SECOND.CPP 完成

步骤 5 对输出集合进行顺序调整, 当 k 个点都在同一直线上 (即: $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \dots = \frac{m_k}{n_k}$) 任取三点 X_1, X_2, X_3 . 否则, 不妨设有不共线的三点 X_1, X_2, X_3 , 然后把 (6) 式转化为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k) = \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (b_1 - y_1)^2} - \epsilon$$

$g(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k), h(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k)$ 为向量函数 其分量为

$$g_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k) = \sqrt{(a_i - x_i)^2 + (b_i - y_i)^2} - \epsilon$$

$$h_{i-1} = (x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2 - (m_{i1}^2 + n_{i1}^2)$$

$$h_{k+i-3} = (x_i - x_2)^2 + (y_i - y_2)^2 - (m_{i2}^2 + n_{i2}^2)$$

$$h_{2k+i-6} = (x_i - x_3)^2 + (y_i - y_3)^2 - (m_{i3}^2 + n_{i3}^2)$$

$$(i = 1, 2, \dots, k)$$

考虑如下规划模型

$$\min f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k)$$

$$\text{s.t. } g_i(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) = 0$$

$$h_i(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) = 0$$

显然该规划模型与命题 2-5 中 (6) (7) 式是等价的 又因为命题 2-5 是一个充分必要条件, 所以: 当 $\min f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) = 0$ 时表示存在 $X_i(x_i, y_i)$ 满足 (6) 式, 即 n 口井都可以利用 当 $\min f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) > 0$ 时, n 口井不可能被同时利用

采用 MATLAB 作为优化工具, 用 constr 函数进行优化, 逐步判断所有集合中所含元素最多的子集和集合本身, 通过运算得出满足条件的集合为: $\{1, 6, 7, 8, 9, 11\}$. 根据返回的 $X_i(x_i, y_i)$ 的 M-N 分解值建立网格坐标系, 将 12 个旧井点的坐标进行转换, 得到如附图所示的结果, 在这个网格中, 6 个点到它们各自附近整点的距离最大值为: $S_9 = 0.049 < \epsilon$

4.6 问题三的分析和解法

显然, 问题二的解法是一个通用算法, 对于问题三同样适用 综合问题二的命题和推论得出以下算法: (本题在欧氏距离意义下讨论)

1. 根据推论 2-1: n 个点能同时利用必需满足对任意两点 P_i, P_j , 存在 (m_{ij}, n_{ij}) 使得

$$|P_i P_j| - \sqrt{m_{ij}^2 + n_{ij}^2} \leq 2\epsilon$$

2. 根据推论 2-3: n 个点能同时利用必须满足任意三点 P_i, P_j, P_k 的任意一边满足近似 M-N 分解, 而且分出的 (m_i, n_i) 满足命题 2-2 中式 (2).

3 根据推论 2- 4: 如果 n 个旧井点的相互连线 $P_i P_j (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$ 的近似 $M - N$ 分解 m_{ij}, n_{ij} 满足命题 2- 4 中 (4), 那么这 n 个旧井点可以通过坐标变换靠近 n 个网格结点 (不一定小于 ϵ).

在通过这三步的判断后我们提出两种方法来作最后的判断

方法一 根据命题 2- 5: n 口井能同时利用的充分必要条件是在满足上述三个条件的前提下, 满足命题 2- 5 中的不等式 (7). 依次判断给定的 n 个点是否满足上面分析中的 4 个条件, 如果其中一步不满足, 则表明不能同时利用, 如果全部满足, 则表示这 n 个点可以同时利用 具体步骤参考问题二

方法二 根据前面的计算得出的可能网格坐标系结点, 算出这些结点在该网格坐标系下的坐标为 $X_i(c_i, d_i)$, 则把这些结点作坐标变换 $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i + \Delta x \\ d_i + \Delta y \end{pmatrix}$, 即可得:

$$\begin{cases} x_i = f_i(\theta, \Delta x, \Delta y) = \cos \theta (c_i + \Delta x) + \sin \theta (d_i + \Delta y) \\ y_i = f_i(\theta, \Delta x, \Delta y) = -\sin \theta (c_i + \Delta x) + \cos \theta (d_i + \Delta y) \end{cases} \quad (8)$$

又根据命题 3- 3 (见后面所附命题), 要使得 n 个点能同时被利用, 至少要保证任何一个点 P_i 附近存在 n 层重叠区域 S_i , 根据 S_i 的构造方法易知判断 S_i 的存在性等价于判断下面的不等式组是否有解:

$$\begin{cases} \sqrt{(a_i - x_i)^2 + (b_i - y_i)^2} \in \\ \sqrt{(a_j - x_i)^2 + (b_j - y_i)^2} \in S_{ij} + \epsilon \\ \sqrt{(a_j - x_i)^2 + (b_j - y_i)^2} \geq S_{ij} - \epsilon \end{cases} \quad (9)$$

(其中 $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n; S_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$) 把 (8) 式代入不等式组 (9) 并整理即可得一组关于 $(\theta, \Delta x, \Delta y)$ 的不等式组

$$\begin{cases} \sqrt{(a_i - f_i(\theta, \Delta x, \Delta y))^2 + (b_i - g_i(\theta, \Delta x, \Delta y))^2} \in \\ \left| \sqrt{(a_i - f_i(\theta, \Delta x, \Delta y))^2 + (b_j - g_i(\theta, \Delta x, \Delta y))^2} \right| \in \end{cases} \quad (10)$$

对所有的 X_i 解这样的不等式组就可得出结论 由于时间的关系, 我们没有给出方法二的具体程序, 但是因为方法二是一个比较初等的方法, 因此可以很容易的构造出它的具体解法和程序

4.7 问题三的附加命题

命题 3- 1 设有任意两点 P_1, P_2 和某网格两结点 $X_1, X_2, s = |X_1 X_2|$, 以 P_1 点为圆环中心, 作一个半径为 $R = s + \epsilon, r = s - \epsilon$ 的圆环, 再以 P_2 点为圆心作一个半径为 ϵ 的圆, 设圆环和圆的重叠区域为 S_2 . 同理对称地在 P_1 点附近求得一个重叠区域 S_1 . 那么满足 $|X_1 P_1| \in |X_2 P_2| \in \epsilon$ 的充要条件是: 存在 $X_1 \in S_1, X_2 \in S_2$.

证明 【充分性】 如果 $X_1 \in S_1, X_2 \in S_2$, 命题显然成立

【必要性】 (先不妨设 $s = |P_1 P_2|$, 则圆环与圆的重叠区域必然如图 3- 1 所示) 假设, 不妨设 $X_2 \in S_2$ (S_2 为 P_2 圆内除去 S_2 的部分). 连接 $X_1 P_1, X_1 X_2, X_2 P_1$ 三条线段, 根据三角形的性质有: $|X_1 P_1| + |X_1 X_2| \geq |X_2 P_1|$

又显然 X_2 在圆环外侧, 所以 $|X_2 P_1| > R = s + \epsilon$

$$|X_1 X_2| = |X_2 P_1| - |X_1 P_1| > s + \epsilon - \epsilon = s$$

即 $|X_1 X_2| > |X_1 X_2|$, 产生矛盾

假设不成立

$X_2 \in S_2$, 同理 $X_1 \in S_1$

当 $s > |P_1 P_2|$ 时, 证法与此类似, 应用三角形三边的关系即可得证, 因此略去

命题 3-2 在命题 3-1 的基础上考虑三个点 P_1, P_2, P_3 的情形, 如图 3-2 取其重复三层覆盖的区域为 S_1, S_2, S_3 , 这样要使 $|X_1 P_1| \leq \epsilon, |X_2 P_2| \leq \epsilon, |X_3 P_3| \leq \epsilon$ 的充要条件是: 存在 $X_1 \in S_1, X_2 \in S_2, X_3 \in S_3$.

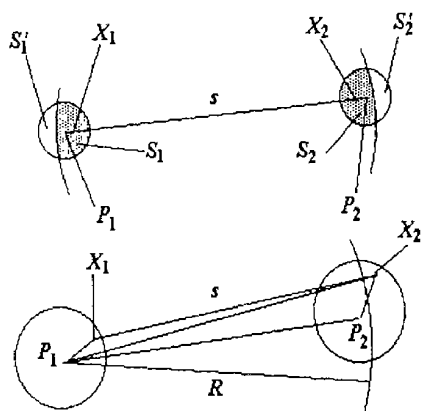


图 3-1

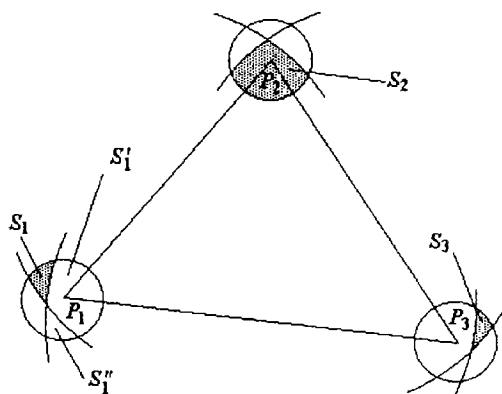


图 3-2

证明 【充分性】易知

【必要性】例如对点 P_1 , 根据命题 3-1, 如果 $X_1 \in S_1$, 则 X_1, X_3 不能同时满足条件, 如果 $X_1 \notin S_1$, 则 X_1, X_2 不能同时满足条件.

命题 3-3 类似地可以对 n 个点的情形进行证明, 取其 n 层重叠区域为 S_1, S_2, \dots, S_n . 要使得 $|X_i P_i| \leq \epsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 如果某一个点 P_i 附近不存在 n 层重叠区域, 即 $S_i \cap \Phi$, 则 $X_i \notin \Phi$, 这样的 X_i 不存在, 即这 n 个点不可能同时有某网格的 n 个结点使得 $|X_i P_i| \leq \epsilon$. 如果存在, 且能找到某网格的 n 个结点 X_1, X_2, \dots, X_n 使得 $X_i \in S_i$, 则这 n 个点能满足同时利用的条件.

5 算法分析

(1) 在第二题的解法中, 我们给出了一个通用的解法, 不仅能判断 n 个旧井点是否可以同时利用, 而且在不能同时利用时给出了能同时利用旧井点的最大数

(2) 算法采用逐层筛选, 不存在误差. 最后的多变量求极值时, 根据命题四的分析, 我们知道 n 个点都靠近网格结点, 因此误差很小

(3) 通过必要条件的层层筛选, 不仅优化步骤提供了 $M - N$ 分解值, 是必不可少的一步. 而且使后来的优化处理的数据范围小, 大大减少了优化的次数

(4) 在第三题的解法中, 我们给出了两种不同的解法, 这两种解法的区别在于第二种解

法需要的仅仅是求关于三个变量的 n^2 个不等式是否有解, 可以用穷举的办法来解决, 不需要用优化方法来解题

参考文献:

- [1] 周承高, 廖 园《优化方法及应用程序设计》中国铁道出版社, 1989
- [2] 张培强《MATLAB 语言》中国科技大学出版社, 1995 11
- [3] 刘来福, 曾文艺《数学模型与数学建模》北京师范大学出版社, 1997, 8

Location Arrangement Model of Drilling Well

CHEN Gang, GUO Cheng-liang, WU Ting-bin

(Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Abstract The key idea of this paper is to determine the invariants with respect to coordinate transformations. For the first problem, the authors find that all the wells can be moved into a single grid, and the distance from each well to the nearest crunode is a constant, therefore the question is greatly simplified. For the second question, since the Euclidean distance between two wells is constant under coordinates transformations, a series of necessary conditions are obtained to conclude whether the all given wells can be used. Furthermore, a optimization model is established to get a necessary and sufficient condition. The arithmetic of the second question fits the third question as well. We can use the same method to treat the third question as in the second one.

钻 井 布 局

徐胜阳, 陈思多, 金 豪
指导教师: 数学建模教练组

(武汉汽车工业大学, 武汉 430070)

编者按: 本文对前两问的解答采用了正确的穷举算法, 得到了正确的结果. 对问题三的解答有特点: 第一, 给出了一个好用的充分条件: $\forall i, j, D_{ij} \in \epsilon$. 第二, 通过算法给出了求 n 个点的最小外接圆的方法, 该圆的半径即可作为判别 n 个源点是否可用的条件. 此处反应出作者们较强的创造性.

摘要: 本文将旧井的利用问题归结为 0-1 规划问题, 由此建立了目标函数. 提出映射原理, 将旧井的位置映射到一个单位网格中, 从而大大地简化了模型的求解. 应用映射原理和穷举方法, 求解出有方向约束条件下的可利用点为 4 个, 经过转化, 推广到无方向约束条件下的可利用问题, 解得 6 个点可利用. 研究了目标成立的充分条件, 给出了三种特殊情形下的判定方法. 提出了中垂线上的二分逼近法.