第 20 卷 第 5 期
2003 年 03 月

工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol.20 No.5
Mar. 2003

文章编号:1005-3085(2003)05-0074-07

彩票方案的评价

刘世明, 王 进, 王元元
指导教师: 贺祖国
(北京邮电大学,北京 100876)

编者按:本文从经济学角度利用效用函数分别考虑了彩票方案的奖金额和中奖面对彩民的吸引力,并分别加权确定了反映吸引力大小的指标函数,对已有的方案作出了评价。但在模型求解过程中确定两个方面的吸引力时,构造的比较矩阵不够合适,因为方案的各等级奖金和概率差不是简单的成倍数增加。

摘 要:我们把彩票方案的优劣的评价标准归结为其对彩民吸引力的大小,又把这种吸引力分为两部分:奖金额产生的吸引力和中奖面(即中奖概率)产生的吸引力。通过构造经济学中常用的效用函数,把总的吸引力归结为这两部分加权作用的结果。其中,奖金额产生的吸引力和中奖面(即中奖概率)产生的吸引力又可以分别由每个等级奖项的奖金额和中奖概率所产生的吸引力来加权表示。单个等级奖项的奖金额和中奖概率所产生的吸引力是该等级奖项的奖金额和中奖概率的单增、上凸函数,在这里,我们借用了高通滤波系统的传输函数。我们用层次分析法和熵值取权法确定相应的权值,对各个彩票方案进行了评价(5,6 两种方案较优)。在问题二的解决中,我们建立了一个动态规化模型,求出了最优彩票方案为“34 选 6”,一等奖、二等奖、三等奖的奖金在整个高项奖奖金额的份额为 60%、25%、15%,而对低项奖,四等奖、五等奖、六等奖的奖分别为 370、15、8 元,不设七等奖。

关键词:吸引力;层次分析法;熵值取权法;效用函数;传输函数

分类号:AMS(2000) 90C05 **中图分类号**:O221.1 **文献标识码**:A

1 问题的重述(略)

2 模型假设

1) 不考虑除奖项设置方案以外的其它可能影响彩民购买彩票的因素(如广告等媒体宣传手段)。

2) 彩民购买彩票的注数与彩票方案的吸引力直接相关,表现为吸引力越大,售出的彩票注数越多。

3) 不同的彩民对彩票有不同的喜好,表现为中奖面(即获奖概率)和奖金额度对其吸引力的不同。

3 问题的分析

评价某一设奖方案的优劣应该以其能给彩票发行部门带来的利润为标准,利润 $R =$ 彩民购买彩票的总注数 $D \times$ 单注金额 $\times$ (1 − 总奖金比例),在总奖金比例固定的情况下(50%),R

与 D 成正比。对于不同的设奖方案,D 是此方案对彩民吸引力 A 的单调增函数,吸引力越大,彩民购买彩票的注数就会越大,则彩票发行部门所能获得的利润就会越大。因此可以将不同设奖方案的评价函数定义为此方案对彩民的吸引力。结合实际情况,不同的彩民对奖项和奖金额设置的偏好程度不同,表现为某一确定的设奖方案对不同彩民的吸引力是不同的。设第 i 种设奖方案共有 l 个奖项,1 等奖到 l 等奖的中奖率分别为 $p_{i1},\cdots,p_{il}$,单项获奖金额分别为 $c_{i1},\cdots,c_{il}$,它对某一类型彩民的吸引力为 A_i,当 $p_{i1},\cdots,p_{il}$、$c_{i1},\cdots,c_{il}$ 这 $2l$ 个参数中只有一个增大,而其余$(2l-1)$个不变时,根据实际情况可以知道,吸引力 A_i 必然随之增大,而且吸引力 A_i 应该是以 $p_{i1},\cdots,p_{il}$、$c_{i1},\cdots,c_{il}$ 这 $2l$ 个参数为自变量的函数,且对于每一个自变量而言,均是单调增函数,这一点对任何设奖方式均适用。设吸引力函数为 $A_i=f_i(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{il};c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{il})$,则应该满足:$\frac{\partial A_i}{\partial p_{ij}}\geq 0,\frac{\partial A_i}{\partial c_{ij}}\geq 0(j=1,2,\cdots,l)$。

在实际的购买彩票的活动中,当 p_{ij}(或 c_{ij})增大到一定程度时,吸引力 A_i 随着 p_{ij}(或 c_{ij})的增加就已经很缓慢,即 $\frac{\partial A_i}{\partial p_{ij}}$:(或 $\frac{\partial A_i}{\partial c_{ij}}$)$\to 0$,在整个定义域内均有 $\frac{\partial^2 A_i}{\partial p_{ij}^2}\leq 0$(或 $\frac{\partial^2 A_i}{\partial c_{ij}^2}\leq 0$),因此可以定性地得到 A_i 关于 p_{ij}(或 c_{ij})的函数曲线大致形状如图 1:

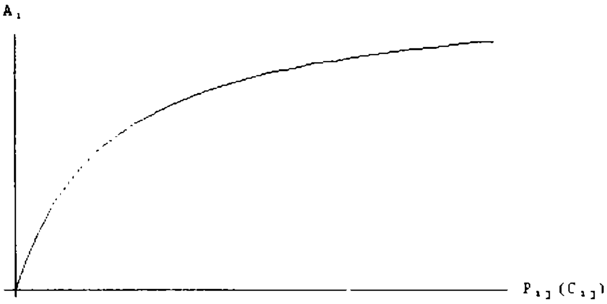

图 1 A_i 关于 p_{ij}(或 c_{ij})的函数曲线

4 问题(1)模型的建立

模型一 吸引力函数 f_i 是 $2l$ 个变量的函数,我们将这 $2l$ 个变量分为两组:

$Ap_i(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{il})$和 $Ac_i(c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{il})$,则

$$f_i(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{il};c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{il})=\tilde{f}_i(Ap_i,Ac_i)$$

其中,Ap_i 表示第 i 种设奖方案中奖面(获奖概率)对彩民的吸引力,Ac_i 表示第 i 种设奖方案的中奖金额对彩民的吸引力。参考经济学中的效用函数,定义

$$\tilde{f}_i(Ap_i,Ac_i)=\frac{Ap_i\times Ac_i}{\rho_1\times Ac_i+\rho_2\times Ap_i},(\text{其中 }\rho_1+\rho_2=1)$$

其中,ρ_1,ρ_2 分别表示彩民对中奖面和对中奖金额的偏爱程度,与具体的设奖方案无关。

对 Ap_i、Ac_i,我们定义成以下的形式

$$\begin{cases}Ap_i=\sum_{j=1}^{l}\omega_j\times g(p_{ij})\\ \sum_{j=1}^{l}\omega_j=1\end{cases},\quad\begin{cases}Ac_i=\sum_{j=1}^{l}u_j\times g(c_{ij})\\ \sum_{j=1}^{l}u_j=1\end{cases}$$

其中,$g(x)$是表示吸引力的函数,大致形状如图 1。$g(p_{ij})(g(c_{ij}))$表示第 i 种设奖方案中第 j 等奖的中奖概率(中奖金额)的吸引力。由前面的分析可知,$g(x)$应该是关于 x 的单调增函数,且当 x 比较大时,$\frac{dg(x)}{dx}\to 0$,在整个定义域内均有 $\frac{d^2g(x)}{dx^2}<0$。联想到高通滤波系

统的传输函数$\left(H(s)=\frac{s}{s+a}\right)$具有该特性，且表达形式较为简单，我们将 $g(x)$构造成相应的形式，即 $g(x)=\frac{x}{x+a}$。

把具有各种不同喜好的彩民视作一个整体，用层次分析的方法建立模型，如图 2

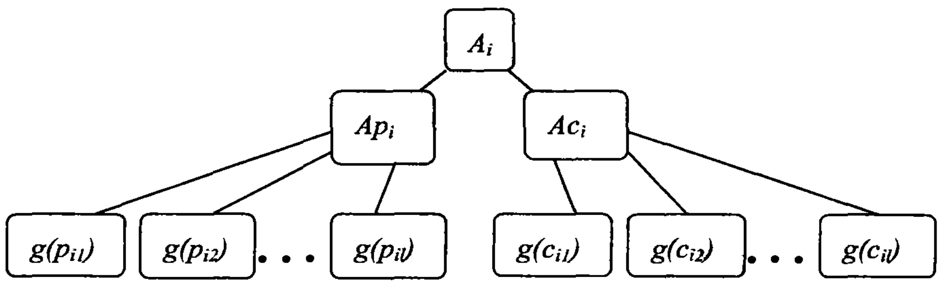

图 2　层次结构图

用 $\omega_j(u_j)$表示第 j 等奖的中奖概率（中奖金额）的吸引力在 $Ap_i(Ac_i)$中所占的比重，ω_j 和 u_j 代表彩民对第 j 等奖的中奖概率和中奖金额的重视程度，只会随着彩民类型的变化而变化，而与具体的设奖方案无关。

通过构造 $g(p_{i1})$到 $g(p_{il})$、以及 $g(c_{i1})$到 $g(c_{il})$两个成对比较矩阵，得到它们相对于上层目标的权向量$(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_l)$和$(u_1,u_2,\cdots,u_l)$，从而可以确定 Ap_i 和 Ac_i。再构造 Ap_i 和 Ac_i 的比较矩阵，得到二者相对于最终目标层的权重向量(ρ_1,ρ_2)，进而得到吸引力 A_i。

模型二　根据彩民对中奖面和对中奖金额的不同偏爱，将彩民分为 n 种彩民群体，每一种群体对中奖面（即获奖概率）和奖金额度的重视程度不同，则某一确定的设奖方案对每种人群的吸引力也不同。设第 k 种人群占总人群的比重为 r_k，第 i 种设奖方案对第 k 种人群的吸引力为 A_{ik}，则第 i 种方案对彩民总体的吸引力 A_i 函数形式可以表示为

$$\begin{cases} A_i=\sum_{k=1}^{n} r_k A_{ik} \\ A_{ik}=\tilde{f}_{ik}[Ap_{ik},Ac_{ik}] \\ \sum_{k=1}^{n} r_k=1 \end{cases}$$

其中，$Ap_{ik}(Ac_{ik})$表示第 i 种设奖方案的中奖面（中奖金额）对第 k 种彩民群体的吸引力，其函数形式为

$$\begin{cases} Ap_{ik}=\sum_{j=1}^{l}\omega_{jk}\times g_k(p_{ij}) \\ \sum_{j=1}^{l}\omega_{jk}=1 \end{cases},\qquad \begin{cases} Ac_{ik}=\sum_{j=1}^{l}u_{jk}\times g_k(c_{ij}) \\ \sum_{j=1}^{l}u_{jk}=1 \end{cases}$$

其中，$g_k(p_{ij})(g_k(c_{ij}))$表示第 i 种设奖方案的第 j 等奖的中奖概率（中奖金额）对第 k 种彩民群体的吸引力。$w_{ik}(u_{ik})$表示第 k 种彩民群体对第 j 等奖的中奖概率（中奖金额）的重视

程度,与具体的设奖方案无关。

5 问题(1)模型的求解

对于同一种设奖方案,$p_{i1},\cdots,p_{il}$、$c_{i1},\cdots,c_{il}$在数量级上的差异是很显著的,为了将 $g(p_{i1}),\cdots,g(p_{il})$、$g(c_{i1}),\cdots,g(c_{il})$按权系数进行线性求和,必须将 $p_{i1},\cdots,p_{il}$、$c_{i1},\cdots,c_{il}$置于同一数量级

假设共有 m 种设奖方案,构造矩阵:$(p_{ij})_{m\times l}$,对矩阵的每一列进行归一化,得到一个新的矩阵$(p_{ij}^{*})_{m\times l}$,对矩阵$(c_{ij})_{m\times l}$进行同样的处理,可得到矩阵$(c_{ij}^{*})_{m\times l}$。

这样一来,$p_{i1}^{*},p_{i2}^{*},\cdots,p_{il}^{*}$、$c_{i1}^{*},c_{i2}^{*},\cdots,c_{il}^{*}$处于同一数量级,我们可以用相同的 $g(x)$将 $p_{i1}^{*},p_{i2}^{*},\cdots,p_{il}^{*}$、$c_{i1}^{*},c_{i2}^{*},\cdots,c_{il}^{*}$映射到各自所对应的吸引力。

对于 $g(x)=\dfrac{x}{x+a}$中参数 a 的取定,参考高通滤波系统中下限截止频率的确定方法,以相对最大增益衰减 3dB 时的 x 作为下限截止频率,解得下限截止频率为 $x=2.4a$,可以认为当 $x>2.4a$ 时,$\dfrac{dg}{dx}\to 0$。

应用到下面的求解中,由于 $p_{i1}^{*},p_{i2}^{*},\cdots,p_{il}^{*}$、$c_{i1}^{*},c_{i2}^{*},\cdots,c_{il}^{*}$均在[0,1]区间内,参数 a 大约应该在[0,0.4]区间内,我们取 $a=0.2$,得到 $g(x)=\dfrac{x}{x+0.2}$,该函数曲线与图 1 相符合。

模型一

联系实际情况及所给的数据,对不同的设奖方案,取定 $l=7$,即奖项为从 1 等奖到 7 等奖,若某种设奖方案的某些低项奖空缺,则该低项奖的中奖概率和中奖金额均按 0 处理。

先构造 $g(p_{i1})$到 $g(p_{i7})$的成对比较矩阵,因为我们并没有彩民喜好的相关数据,所以假定一种情况(影响力排序为:1 等奖 > 2 等奖 > …… > 7 等奖)进行了构造。我们构造了下边的成对比较矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

用和法求出该成对比较矩阵的近似特征向量为

$$\{0.350396, 0.237473, 0.158966, 0.105558, 0.0696454, 0.0461632, 0.0317984\}$$

最大特征根的近似值为：$\lambda = 7.19728$，$CI = \dfrac{\lambda - 7}{7 - 1} = 0.0328796$

对其进行一致性检验得：$CR = \dfrac{CI}{RI} = 0.0249088 < 0.1$，满足一致阵要求，求得的近似特征向量可以作为各奖项的权重向量$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_l)$和$(u_1, u_2, \cdots, u_l)$。

将 $p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{i7}$按列归一化得到的 $p_{i1}^*, p_{i2}^*, \cdots, p_{i7}^*$代入得 $Ap_i = \sum_{j=1}^{7} \omega_j \times g(p_{ij}^*)$

同理，用同样的权重向量和 $g(x)$，可以求出 Ac_i：$Ac_i = \sum_{j=1}^{7} u_j \times g(c_{ij}^*)$。

再构造 Ap_i 和 Ac_i 的比较矩阵：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$为一致阵，故取权重向量$(\rho_1, \rho_2) = (2/3, 1/3)$，由 $A_i = \dfrac{Ap_i \times Ac_i}{\rho_1 \times Ac_i + \rho_2 \times Ap_i}$，求得这种方案的吸引力 A_i。

我们对给出的方案用以上的方法进行了评价，计算机求解的结果如图 3。

模型二

同时考虑到彩民种类的多样性及复杂性，为了简化模型的求解，我们认为模型中的 ω_{jk}、u_{jk}、$g_k(x)$对于不同的彩民群体（即对于不同的 k）均具有相同的形式，分别记为 ω_j、u_j、$g(x)$，并将彩民分为两种主要类型（即 $k = 2$）对中奖面较为敏感的彩民和对中奖金额较为敏感的彩民，分别称其为“保守型”和“冒险型”，两者在彩民总体中所占的比重分别为 r_1 和 r_2。则此模型归结为

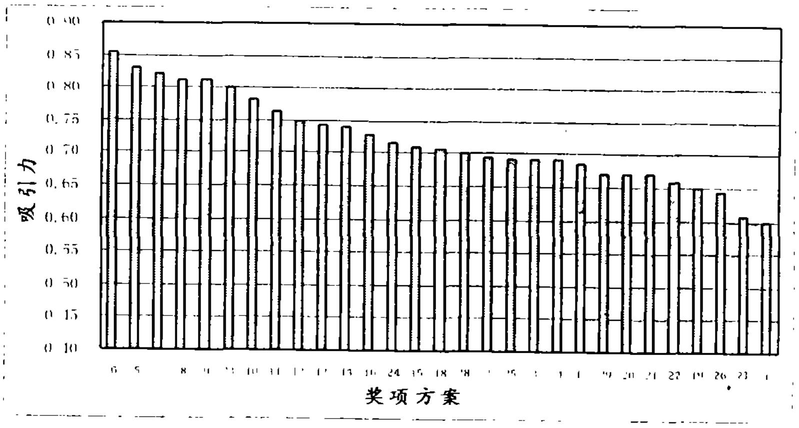

图 3 模型一求解的吸引力（降序排列）

$$
\begin{cases}
A_i = \sum_{k=1}^{2} r_k A_{ik}, & \sum_{k=1}^{2} r_k = 1 \\
A_{ik} = \dfrac{Ap_i \times Ac_i}{\rho_{1k} \times Ac_i + \rho_{2k} \times Ap_i}, & \rho_{1k} + \rho_{2k} = 1 \\
Ap_i = \sum_{j=1}^{l} \omega_j \times \dfrac{p_{ij}^*}{p_{ij}^* + 0.2}, & \sum_{j=1}^{l} \omega_j = 1 \\
Ac_i = \sum_{j=1}^{l} u_j \times \dfrac{c_{ij}^*}{c_{ij}^* + 0.2}, & \sum_{j=1}^{l} u_j = 1 \\
k = 1, 2
\end{cases}
$$

其中，ρ_{11}和 ρ_{21}（ρ_{12}和 ρ_{22}）分别表示“保守型”（“冒险型”）彩民对中奖面和对中奖金额的偏爱程度。

我们采用较客观的“熵值取权法”来确定 ω_j 和 u_j，具体步骤如下：由 $g(x) = \dfrac{x}{x + 0.2}$，可以

得到矩阵$(g(p_{ij}^*))_{m\times l}$。再计算它的熵值，令 $d_j=-\sigma\times\sum_{i=1}^{m}g(p_{ij}^*)\times\ln[g(p_{ij}^*)]$，让 $\sigma=\frac{1}{\ln(m)}$，这里 $0\le d_j\le 1$。定义权系数 $\omega_j=\frac{(1-d_j)}{\sum_{j=1}^{l}(1-d_j)}$，计算 Ap_i 的值：$Ap_i=\sum_{j=1}^{l}\omega_j\times g(p_{ij}^*)$。

对矩阵$(c_{ij}^*)_{m\times l}$进行同样的处理，可以得到权系数 u_j，从而确定 Ac_i 的值：

$$Ac_i=\sum_{j=1}^{l}u_j\times g(c_{ij}^*)。$$

由 $A_{ik}=\frac{Ap_i\times Ac_i}{\rho_{1k}\times Ac_i+\rho_{2k}\times Ap_i}$，求得这种方案的吸引力 $A_i=\sum_{k=1}^{2}r_kA_{ik}$。

在计算中，我们使用的数据是 $\rho_{11}=0.7$、$\rho_{21}=0.3$、$\rho_{12}=0.3$、$\rho_{22}=0.7$，$r_1=0.4$，$r_2=0.6$。对给出的方案用该方法进行了评价，计算机求解的结果如图 4。

6 问题(2)的求解

为了提出一种更好的设奖方案，我们构造以下的模型

1) 对于每一种确定的抽奖方式，各等奖项的中奖概率是确定的，其对彩民的吸引力只与各等奖项的奖金分配方式有关。对各等奖项的金额分配作优化，就可以得到在这种抽奖方式下的最优奖金分配方案。

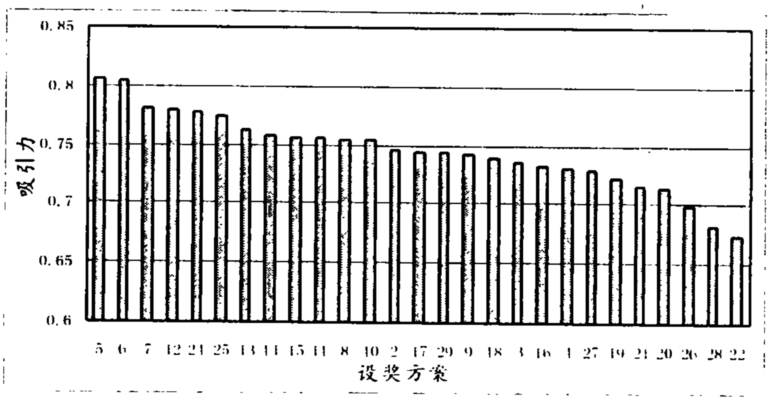

图 4 模型二求解的吸引力(降序排列)

把奖金分配给每个奖项等级的这一过程作为一个阶段，把分配给每个奖项等级的奖金作为决策变量，则此问题的求解归结为一个典型的一维资源分配问题，用动态规划模型来求解。

2) 对于 m 选 n 的抽奖方式(可以是传统型或乐透型)，对 m 从 25 到 70，n 从 5 到 12 进行遍历，比较各种抽奖方式的最大吸引力，最后用计算机求解得到的最优抽奖方式如表 1。

表 1 最优抽奖方式

34 选 6						
一等奖比例	二等奖比例	三等奖比例	四等奖金额	五等奖金额	六等奖金额	七等奖金额
60%	25%	15%	370	15	8	0

7 写给彩民

近年来，电脑彩票风靡全国，购买彩票的队伍不断壮大。谁都希望 500 万的巨额大奖会落到自己头上，但显然并不是每个人都有好运气。由于电脑彩票采取随机摇奖的方式，因此中奖号码并没有规律可循，但是广大彩民还是试图从中找到规律，以此作为自己购买彩票的

理论参考。我们从概率学的角度出发,对这个问题进行简单的分析。

从长期来看,购买彩票的回报期望必然是负值,也就是说购买彩票并不是投资。虽然每次总有一些幸运儿诞生,但是这必然是以更多的人亏本为代价的。与股票和其他投资相比,购买彩票盈利的可能性要小得多。所以,理智的办法是把购买彩票看成一种娱乐的方式,沉溺其中就不是智者所为了。

虽然报纸杂志上有很多介绍购买彩票技巧的文章,但是大多数没有确切的理论依据可言,其中所论述的种种"技巧"并没有什么科学道理。那么购买彩票时到底有没有什么确定规律可循呢? 没有。当你购买彩票时,摆在你面前的每一张彩票都可能是你梦寐以求的大奖,但更可能什么奖都没有。

如果有几种不同的彩票要你选择,你该怎么办呢? 风险和收益是一对双胞胎,风险越大的彩票,收益往往也就越高。这往往是令大多数彩民拿不定主意的地方。我们给您的建议是根据自己的经济承受能力和您对于中奖金额的期望来选择彩票。

如果经济条件允许而您对高项奖又很感兴趣时,您可以只关心这些彩票设立的高项奖,不妨选择那些高项奖的奖金额大或得奖可能比较大的彩票,如 6 + 1/29;如果您只是把彩票当成一种娱乐的话,就可以选择一些中奖概率比较大的彩票,如 7/30、7/33、7/34 等,这样得到意外惊喜的可能会比较大。当然不同的奖金比例和金额对得奖概率也有很大的影响,在选择彩票时应该综合考虑这些因素。

希望我们的文章可以对您有所帮助!

参考文献:

[1] 姜启源著.数学模型(第二版)[M].北京:高等教育出版社,1993

[2] 郑君里等著.信号与系统(第二版)[M].北京:高等教育出版社,2000

[3] 《运筹学》教材编写组编.运筹学(修订版)[M].北京:清华大学出版社,1990

[4] 师爱芬.新产品创意的筛选方法研究[J].数学的实践与认识,第 32 卷第 3 期(2002),396-399

The Evaluation of Lottery Project

LIU Shi-ming, WANG Jin, WANG Yuan-yuan

Advisor: HE Zu-guo

(Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876)

Abstract: We make the attraction of the lottery project to be its evaluation standard. The attraction can be divided into two aspects. One is from the amount of prize, and the other is from the winning probability. We use the utility function in economics to synthesize the two aspects by weight. Furthermore, each aspect of the attraction can also be synthesized by every single grade of prize or winning probability. The attraction of a single grade is the prize or the winning probability's increasing and upwards bulgy function. We use the transfer function of a High-Pass-Filter. We calculate the weight by analytic hierarchy process and entropy method, and then finish the evaluation (project 5 and 6 are better). In problem 2, we establish a dynamic optimization model and work out the optimized lottery project.

Keywords: attraction; analytic hierarchy process; weight decision by entropy; utility function; transfer function