

最优刀具更换周期上界、检查间隔下界的证明

闵孟斌

(江苏宿迁师范专科学校, 宿迁 223800)

摘要: 本文针对 99 年大学生数学建模竞赛 A 题中问题 1, 利用目标函数求出了一般情况下刀具更换周期最优解 $T < \mu$ 的一个充分条件及最优检查间隔的下界, 并证明了问题 1 中刀具更换周期最优解 $T < 551 < \mu$ 和检查间隔最优解 $n = 8$

关键词: 刀具更换周期; 检查间隔; 最优解

通过分析题目给出的 100 次刀具发生故障时所生产的零件数, 易得工序发生故障服从

截尾正态分布, 其概率分布函数为 $p_x = F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$, 其中 $\sigma = 196$, $\mu = 600$

在问题 1 的情况下, 工序故障时生产的零件全为不合格品, 正常时生产的零件均为合格品, 我们要解决的问题是最好的检查间隔和最优的刀具更换周期, 当刀具的寿命 $X < T$ 时, 进行故障后更换; 当 $X \geq T$ 时, 进行预防性更换, 使得每个合格产品的平均生产费用最小

在问题 1 的情况下, 设刀具检查间隔为 n , 刀具更换周期为 T , 则目标函数为

$$G(T, n) = \frac{H(T, n)}{L(T)} = \left[\left(k + \frac{dT}{n} \right) (1 - p_T) + \left(d + \frac{n+1}{2} f \right) p_T + \frac{t}{n} \int_0^T \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \right] \left/ \left[T(1 - p_T) + \int_0^T \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \right] \right.$$

其中 $\frac{n+1}{2}$ 为刀具在 T 之前发生故障所产生的不合格产品数的均值

引理 设 $F(x)$ 为正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的分布函数, 且 $\mu = \sqrt{2\pi}\sigma/2$, 则函数 $\Phi(x) = x[1 - F(x)]$ 在 $[\mu, +\infty)$ 为减函数, 其极大值为 $\mu/2$

证明

$$\Phi(x) = 1 - F(x) - \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[\frac{x(x-\mu)}{\sigma^2} - 2 \right]$$

易得当 $x \in \left[\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 8\sigma^2}}{2}, \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 8\sigma^2}}{2} \right]$ 时, $\Phi'(x) < 0$, 此时 $\Phi(x)$ 为减函数

1°由题设 $\mu = \sqrt{2\pi}\sigma/2$, $\Phi(\mu) = 1 - 1/2 - \mu/(\sqrt{2\pi}\sigma) = 0$

所以 $x \in [\mu, \mu/2 + \sqrt{\mu^2 + 8\sigma^2}/2]$ 时 $\Phi'(x) < 0$, 即 $\Phi(x)$ 为减函数

2°当 $x \in [\mu/2 + \sqrt{\mu^2 + 8\sigma^2}/2, +\infty)$ 时, 有 $\Phi'(x) > 0$, 即 $\Phi(x)$ 为增函数

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$, 所以此时 $\Phi(x) > 0$, $\Phi(x)$ 为减函数

由 1.2 知 $\Phi(x)$ 在 $[\mu, +\infty)$ 上为减函数, 其极大值为 $\mu/2$

推论 设 $F(x)$ 为正态分布 $N(600, 196^2)$ 的分布函数, 则函数 $\Phi(x) = x[1 - F(x)]$ 在 $[470, +\infty)$ 上为减函数

证明同引理, 再注意到 $\Phi(470) < 0$, 且 470 在 Φ 小于 0 的区间中即得

定理 1 问题 1 中, 检查间隔的最优解 $n = \sqrt{2t\mu/f}$.

证明

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(T, n)}{\partial n} &= -\frac{tT}{n^2}(1 - p_T) + \frac{1}{2}fp_T - \frac{t}{n^2} \int_0^T \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= -\frac{tT}{n^2}(1 - p_T) + \frac{1}{2}fp_T - \frac{t}{n^2} \left[\int_0^T \frac{y-\mu}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy + \int_0^T \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \right] \\ &= -\frac{tT}{n^2}(1 - p_T) + \frac{1}{2}fp_T - \frac{t}{n^2}(\mu p_T - m_T) \end{aligned}$$

这里 $m_T = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \right]$, 因 $T = 2\mu$ 时, $m_T = 0$; $T > 2\mu$ 时, $m_T < 0$, 但刀具问题 $\mu = 3\sigma$, 相当于不预防性更换, 故以下假设 $m_T = 0$

令 $\frac{\partial G(T, n)}{\partial n} < 0$, 即 $\frac{\partial H(T, n)}{\partial n} < 0$

就是 $-\frac{tT}{n^2}(1 - p_T) + \frac{1}{2}fp_T - \frac{t}{n^2}(\mu p_T - m_T) < 0$

解得 $n < \sqrt{\frac{2t[(1 - p_T)T + \mu p_T - m_T]}{fp_T}}$, 设 $E(T) = (1 - p_T)T - m_T$, 令 $E(T) = 0$, 即 $1 -$

$p_T - \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0$, 所以 $1 - p_T = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 将其代入 $E(T)$ 得 $E(T)$ 的极小值为

$s(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left[(T\mu - \sigma^2) e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \sigma^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \right]$, 而 $s(T) = \frac{T}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{T-\mu}{\sigma^2} \mu \right]$ 先正后负,

所以 $s(T)$ 先增后减, 又 $s(0) = 0$, $\lim_{T \rightarrow +\infty} s(T)$ 为正, 所以 $T > 0$ 时, $s(T) > 0$, 所以 $E(T) = (1 -$

$p_T)T - m_T > 0$, 所以 $\sqrt{\frac{2t[(1 - p_T)T + \mu p_T - m_T]}{fp_T}}$ 关于 T 的极小值不小于 $\sqrt{\frac{2\mu p_T}{fp_T}} = \sqrt{\frac{2\mu}{f}}$.

即当 $n < \sqrt{2\mu/f}$ 时, $G(T, n)$ 关于 n 单调下降

所以检查间隔的最优解 $n = \sqrt{2\mu/f}$.

对于本题 $n = \sqrt{2 \times 10 \times 600/200} = \sqrt{60}$, 即可取 $n = 8$

定理 2 问题 1 中, 刀具更换周期最优解 $T < \mu$ 的充分条件为下列 (I) - (IV) 同时成

立

(I) $\mu < \sqrt{2\pi\sigma}/2$; (II) $9T_1(d + f - k) > 10k(\mu - m_{T_1}) + 10m_{T_1}(d + f)$;

(III) $9T_1 < \mu + 10m_{T_1}$; (IV) $(9f + 2d)(9T_1 - \mu - 10m_{T_1}) > 2k(17\mu + 10m_{T_1} - 9T_1)$

其中 $p_{T_1} = \frac{1}{10}$, $m_{T_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(T_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \right]$.

证明 若存在一个刀具更换周期 T_1 , 检查间隔 n_1 , 使得对任意的 $T < \mu$, 任意的检查间

隔 $n-8$ (定理 1), 都有 $G(T, n) - G(T_1, n_1) > 0$ 成立, 则定理成立

即

$$\Delta = H(T, n)L(T_1) - H(T_1, n_1)L(T) > 0$$

又

$$\begin{aligned} H(T, n) &= \left(k + \frac{T}{n}\right) (1 - p_T) + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right) p_T + \frac{t}{n} \int_0^T \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \left(k + \frac{T}{n}\right) (1 - p_T) + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right) p_T + \frac{t}{n} (\mu p_T - m_T) \\ L(T) &= T(1 - p_T) + \int_0^T \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy = T(1 - p_T) + \mu p_T - m_T \end{aligned}$$

取 T_1 , 使 $p_{T_1} = \frac{1}{10}, n_1 = n$

则

$$\begin{aligned} \Delta &= H(T, n)L(T_1) - H(T_1, n)L(T) = \left[\left(k + \frac{tT}{n}\right) (1 - p_T) + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right) p_T + \frac{t}{n} (\mu p_T - m_T)\right] \left[\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right] \\ &\quad - \left[\left(k + \frac{tT_1}{n}\right) \frac{9}{10} + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right) \frac{1}{10} + \frac{t}{n} \left(\frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right)\right] \\ &\quad \cdot [T(1 - p_T) + \mu p_T - m_T] \\ &= (1 - p_T) \left[\left(k + \frac{tT}{n}\right) \left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right) - \frac{9}{10}kT - \frac{9tT_1}{10n}T\right. \\ &\quad \left.- \left(d + \frac{n+1}{2}f\right) \frac{1}{10}T - \frac{t\mu}{10n}T + \frac{m_{T_1}}{n}T\right] + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right) \left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right) p_T \\ &\quad + \frac{t}{n} \mu p_T \left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right) - \frac{m_T}{n} \left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right) - \left(k + \frac{tT_1}{n}\right) \frac{9}{10} \mu p_T \\ &\quad - \left(d + \frac{n+1}{2}f\right) \frac{1}{10} \mu p_T - \frac{t}{n} \left(\frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right) \mu p_T \\ &\quad + \left[\left(k + \frac{tT_1}{n}\right) \frac{9}{10} + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right) \frac{1}{10} + \frac{t}{n} \left(\frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right)\right] m_T \\ &= (1 - p_T) \left[\left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right) k - T \left(\frac{9}{10}k + \frac{1}{10}d + \frac{n+1}{20}f\right)\right] \\ &\quad + p_T \left[\left(d + \frac{n+1}{2}f\right) \left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right) - \frac{9}{10}\mu k - \left(d + \frac{n+1}{2}f\right) \frac{\mu}{10}\right] \\ &\quad + \left[\frac{9}{10}k + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right) \frac{1}{10}\right] m_T \\ &= \left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T_1}\right) k + p_T \left[\left(d + \frac{n+1}{2}f\right) \left(\frac{9}{10}T_1 - m_{T_1}\right) - \left(\mu + \frac{9}{10}T_1 - m_{T_1}\right) k\right] \\ &\quad - (1 - p_T) T \left(\frac{9}{10}k + \frac{1}{10}d + \frac{n+1}{20}f\right) + \left(\frac{9}{10}k + \frac{1}{10}d + \frac{n+1}{20}f\right) m_T \quad () \end{aligned}$$

Δ 记为 $R_1 + p_T \cdot R_2 - (1 - p_T)T \cdot R_3 + R_0$

因 $R_3 > 0$, 所以当 $T = \mu$, 且 $\mu = \sqrt{2\pi}\sigma/2$

(I)

由引理得 $(1 - p_T)TR_3$ 的极大值为 $\mu R_3/2$

当 $T = \mu, 9T_1(d+f-k) - 10k(\mu - m_{T_1}) + 10m_{T_1}(d+f)$ (II)
 时, $R_2 = 0, p_T R_2$ 的极小值为 $R_2/2$ 又 $m_T = 0$, 显然 R_0 不小于 0, 所以此时

$$\Delta = R_1 + R_2/2 - \mu R_3/2$$

$$= \frac{n+1}{40}f(9T_1 - \mu - 10m_{T_1}) + \frac{k}{20}(9T_1 - 17\mu - 10m_{T_1}) + \frac{d}{20}(9T_1 - \mu - 10m_{T_1})$$

当 $9T_1 = \mu + 10m_{T_1}$ (III)

$$\Delta = \frac{8+1}{40}f(9T_1 - \mu - 10m_{T_1}) + \frac{k}{20}(9T_1 - 17\mu - 10m_{T_1}) + \frac{d}{20}(9T_1 - \mu - 10m_{T_1})$$

$$= \frac{1}{40}[(9f + 2d)(9T_1 - \mu - 10m_{T_1}) - 2k(17\mu + 10m_{T_1} - 9T_1)] \quad (n = 8)$$

显然当

$$(9f + 2d)(9T_1 - \mu - 10m_{T_1}) - 2k(17\mu + 10m_{T_1} - 9T_1) \quad (IV)$$

时, $\Delta = 0$

即由 (I) (II) (III) (IV) 均成立就有 $\Delta = 0$

证毕

推论 1 在问题 1 中, 刀具更换周期 T 的最优解 $T < 600(\mu)$.

容易验证问题 1 符合定理 2 中 (I) - (IV).

推论 2 在问题 1 中, 刀具更换周期的最优解 $T < 551$.

证明 经查表得 $p_{551} = 0.4$

取 $T_1 = 350, p_{T_1} = 0.1, m_{T_1} = 34, n_1 = n = 8$. 则由定理 2 中 () 式有

$$\Delta = H(T, n)L(T_1) - H(T_1, n)L(T) = \left[\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T_1} \right] k$$

$$+ p_T \left[\left(d + \frac{n+1}{2}f \right) \left(\frac{9}{10}T_1 - m_{T_1} \right) - \left(\mu + \frac{9}{10}T_1 - m_{T_1} \right) k \right]$$

$$- (1 - p_T)T \left[\frac{9}{10}k + \frac{1}{10}d + \frac{n+1}{20}f \right] + \left[\frac{9}{10}k + \frac{1}{10}d + \frac{n+1}{20}f \right] m_T$$

值代入, $\Delta = 341000 + p_T(28100n - 9900) - (1 - p_T)T(1210 + 10n)$

由引理的推论知

$$\Phi(x) = x[1 - F(x)] \text{ 在 } [551, +\infty)$$

上为减函数 所以当 $T = 551$ 时, $T(1 - p_T)$ 有极大值为 $551 \times (1 - p_{551}) = 551 \times 0.6 = 330.6$,

同时 $p_T = p_{551} = 0.4$

所以

$$\Delta = 341000 + 0.4 \times (28100n - 9900) - 330.6 \times (1210 + 10n)$$

$$= 7934n - 62986 > 0 \quad (n = 8)$$

即当 $T = 551, n = 8$ 时, $G(T, n) > G(350, n)$

证毕.

参考文献:

- [1] 姜启源 数学模型 高等教育出版社, 北京, 1993

The Proofs of the Upper Bound for Optimal Knife-Replacement Period and the Lower Bound for Check Period

M N Meng-bin

(Suqian teaching training school, Suqian 223800)

Abstract As to the question (1) of problem A in CMC - 99, this article at first uses the objective function to obtain a sufficient condition under which the optimal solution to knife-replacement period T is less than μ and the lower bound for optimal check period under general circumstances, and then proves that the optimal solution to the knife-replacement period in question (1) is less than 551, while the one to check period is greater than 7.

Keywords knife-replacement period; check period; optimal solution

煤矸石堆积经费问题的几点讨论

王如云, 朱永忠, 丁根宏

(河海大学数理系, 南京 210098)

摘要: 本文讨论了土地征用策略, 分别在不考虑银行存、贷款利率和考虑银行存、贷款利率时的分堆情况, 以及在考虑银行存、贷款利率时平均单位体积的矸石处理经费与安息角、出矸率的关系

关键词: 策略; 安息角; 出矸率

模型假设

1. 原煤年产量理解为包括矸石的产量
2. 年度征地方案理解为每年年初最多征地一次
3. 运矸车在上升过程中效率的降低是均匀的
4. 设运矸车在运行过程中所受的摩擦力和重力忽略不计, 只考虑运矸车内矸石的势能, 并且运矸车的运行是匀速的, 做的有效功全部转化为矸石的势能
5. 征地费于当时付出, 电费于当年内付出, 不可拖欠

1 几个基本量

在题图中 $A-SBOD$ 是棱锥部分, $A-BCD$ 是圆锥部分, 由实际情况, 矸石堆要堆积稳