第 31 卷第 1 期
2001 年 1 月

数学的实践与认识
MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY

Vol. 31 No. 1
Jan. 2001

Abstract: As to the problem of the time needed for an airplane to start from Beijing, fly over arctic pole, and reach Detroit, this article discusses how much time can be saved in the models that established in the article in comparison with the original flight route. And it summarizes selection of the flight route for searching the shortest arc in the surface. Discussion is based on the fact that the shortest arc on surface is geodesic. Model 1 is on the assumption that the Earth is a sphere. It can be solved by the relation between inner-product and included angle of two unit vectors. Model 2 is on the assumption that the Earth is a revolving ellipsoid. It can be solved by the geodesic equation in differential geometry, which turns latitude of the Earth into that of ellipsoid. For the 4 pairs of special points, their latitudes or longitudes are too close to calculate geodesic, so we replace geodesic with ellipse arc, and use software Mathematica to obtain the length.

航程计算的数学模型

谭永基

(复旦大学, 上海 400433)

摘要: 本文对飞机航线飞行距离计算的数学模型进行了概述, 并对 2000 年全国大学生数学建模竞赛的C 题答卷进行了评述

假定飞机保持飞行高度 10 千米作匀速飞行, 忽略起飞、降落和地球自转和公转的影响, C 题可以归结为求飞越通过指定各点的球面或旋转椭球面上的短程线(或测地线) 的航线与飞越直接连结北京上空 10 千米至底特律上空 10 千米的经过北极圈的新航线的时间差 又由于假设飞机作时速为 980 千米/小时的匀速飞行, 问题又可归结为求相应的航程差

1 地球为球体的情形

取直角坐标系如下: 以球心为原点, z 轴指向北极, x 轴通过赤道上经度为 0 和 180 的两点, 正向指向 0°, y 轴垂直于 x 轴和 z 轴, 构成右手坐标系

在半径 $r=6381$ (千米) 的球面上建立球面坐标系 (φ, θ), 由于航线在北半球, 我们取 φ 和北纬度一致, θ 和东经度一致 因此航线上某处的地理坐标为 (f, l), 可用以下方法得到对应的球面坐标 (φ, θ):

$$\varphi = f \times \pi / 180$$

$$\theta^{\circ} = \begin{cases} l, & l \text{ 为东经} \\ 360 - l, & l \text{ 为西经} \end{cases}$$

$$\theta = \theta^{\circ} \times \pi / 180$$

应有

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, \\ y = r\cos\varphi\sin\theta, \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

若球面上两点的球面坐标为(φ_1, θ_1), (φ_2, θ_2), 过这两点的短程线是过这两处的大圆的劣圆弧(即长度较短的一条大圆弧). 从球心指向此两点的矢量分别为

$$(r\cos\varphi_i\cos\theta_i, r\cos\varphi_i\sin\theta_i, r\sin\varphi_i), i = 1, 2$$

设它们的夹角为α, 则有

$$\cos\alpha = \cos\varphi_1\cos\theta_1\cos\varphi_2\cos\theta_2 + \cos\varphi_1\sin\theta_1\cos\varphi_2\sin\theta_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

从而求得α, 进而求得过这两点的航程$r\alpha$

多数参赛队都能正确计算航程, 从而获得节省时间大约为 3.91 小时的结论　由于题目未给出北京和底特律的经纬度, 有些队对两地的经纬度误差估计较大, 因此计算的误差也较大

2　设地球为旋转椭球的情形

此时, 飞机的航线位于方程为

$$\begin{cases} x = 6388\cos\varphi\cos\theta, \\ y = 6388\cos\varphi\sin\theta, \\ z = 6367\sin\varphi \end{cases}$$

的旋转椭球面上, 它通过给定地理坐标的各点, 在相邻两点间为上述椭球面的短程线　在大地测量中, 一点的地球坐标(f, l)中的地理纬度是这样定义的: 用通过该点的子午面与椭球交得一椭圆, 过该点作椭圆的法线, 法线与水平线的夹角f, 即为该点的纬度(见图 1).

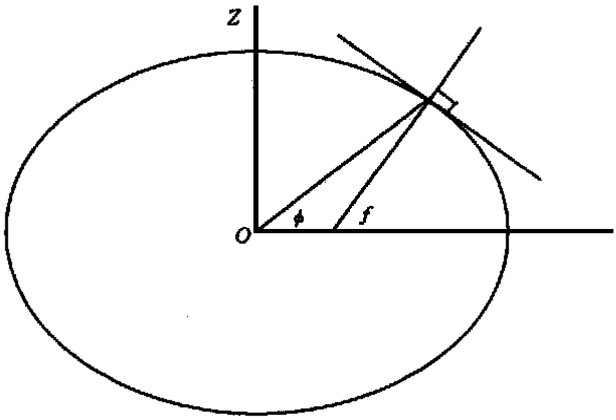

图 1

由于该椭圆的方程为

$$\begin{cases} x = 6388\cos\varphi, \\ y = 6367\sin\varphi \end{cases}$$

该点的切向量和法向量分别为

$$\begin{pmatrix} -6388\sin\varphi \\ 6367\cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6367\cos\varphi \\ 6388\sin\varphi \end{pmatrix}$$

从而
$$\tan\varphi = \frac{6367}{6388}\tan f, \varphi = \arctan\left(\frac{6367}{6388}\tan f\right)$$

得到我们所需的纬度, 文献称为归约纬度

在一般的有关大地测量的文献中均有对地理纬度与归约纬度之间关系的论述　但有较多答卷直接将地理纬度作为归约纬度建模计算　虽因长短半轴差别较小, 计算误差不算大, 但作为精确的数学模型, 这种做法是有缺陷的

就笔者所知, 到现在为止尚未得到过旋转椭球面上任意两点的短程线的解析表达式　在大地测量学和航海学的有关文献中采用个一些有效的近似公式如贝塞尔公式等　在参赛

队中采用这种方法也不在少数 其中有些队从求短程线出发, 建立模型, 经合理简化得到相应的计算公式, 这是可取的; 另一些队简单生硬地套用公式, 多少偏离了数学建模竞赛的宗旨和要求, 他们的答卷不能认为是优秀的答卷

解决问题的另一方法是建立问题的变分模型 这种方法根据航线是短程线的要求, 将过给定两点的曲线的长度表示为依原该曲线的参数方程的一个泛函, 在满足该曲线落在旋转椭球面上的约束条件下, 使该泛函达到最小 在用Lagrange 乘子法后得到 Euler 方程, 然后对此方程用数值方法, 得到近似短程线 有几个参赛队采用此方法, 并得到 Euler 方程的表达式 但因方程较复杂, 未能最终求出数值解

还有一个方法就是用微分几何知识直接获得椭球面上短程线应满足的微分方程, 利用微分方程表达式得到弧长计算公式, 并用数值积分法求得短程线的近似长度 有的参赛队建立了这样的模型, 得到了结果

一种比较直观的方法就是直接搜索法, 即在椭球面上过给定两点的众多曲线中搜索出长度最短的一条作为短程线的近似 由于这些曲线的长度需通过数值积分, 需要将 φ和 θ 进行剖分, 这就将问题化为一个离散的优化问题, 可以采用优化的方法求解 在本期发表的优秀论文中有一篇采用了在一类椭球面上过给定两点的曲线中进行搜索的方法

较多的答卷直接将地球作为球的结果移植到作为旋转椭球的情形, 简单地认为"过椭球面上给定两点的短程线即为过此两点和地心的平面与椭球面交线的劣弧(两点间较短的一条) ."这一结论是错误的, 有时会导致很大的误差

数学软件Mathematica 的程序库中有求近似测地线的函数, 利用这一函数不难求出各点之间的航程 有个别参赛队没有建立合适的数学模型, 直接调用这一函数, 得到近似的结果, 不能视作好的答案

另一些队将用此软件获得的结果作为验证和评价自己模型的手段之一, 这是很值得称道的

Mathematical Modeling for Distance Calculation of Airline

TAN Yong-ji

(Fudan University, Shanghai 400433)

Abstract: The sketch of the mathematical modeling for the Calcalation of the distance covered by an airline is discribed. Some comments to the answer paper for the problem C of 2000 China undergraduate MCM are given.