$$
\begin{cases}
\dfrac{\theta_i-\theta_j}{2}+\dfrac{\triangle\theta_i-\triangle\theta_j}{2}>\theta_{ij}-ZM-YM \\
\pi-\dfrac{\theta_i-\theta_j}{2}-\dfrac{\triangle\theta_i-\triangle\theta_j}{2}>\theta_{ij}-(1-Z)M-YM \\
\dfrac{\theta_i-\theta_j}{2}+\dfrac{\triangle\theta_i-\triangle\theta_j}{2}>arc\cos\dfrac{\sqrt{d^2-8^2}}{vT_i}-ZM-YM \\
\pi-\dfrac{\theta_i-\theta_j}{2}-\dfrac{\triangle\theta_i-\triangle\theta_j}{2}>arc\cos\dfrac{\sqrt{d^2-8^2}}{vT_i}(1-Z)M-YM \\
\triangle\theta_i-\triangle\theta_j=0+(Y-1)M \\
\dfrac{\theta_i-\theta_j}{2}-\dfrac{\triangle\theta_i-\triangle\theta_j}{2}<arc\cos\dfrac{\sqrt{d^2-8^2}}{rT_i}+ZM+(Y-1)M \\
\pi-\dfrac{\theta_i-\theta_j}{2}-\dfrac{\triangle\theta_i-\triangle\theta_j}{2}<arc\cos\dfrac{\sqrt{d^2-8^2}}{vT_i}+(1-Z)M+(Y-1)M
\end{cases}
$$

（式中 Z＝1，0　y＝1，0　M＝10000　i＝1，2…n－1，j＝i＋1，…n）

飞行管理问题的线性规划模型

孙旭山　魏　华　吕晓光

（清华大学，北京 100084）

编者按：这份答卷的作者没有参加全国的竞赛，而是按照同样的题目和要求参加了学校的竞赛。全国评委会的同志在评阅完全国的优秀答卷后审阅了本文，一致认为该文很有特色，特予发表。

对本题一般都是建立了非线性规划模型，直接求解很困难。该文不仅运用相对速度将不相撞的约束条件线性化（对调整角改变量线性），而且经过合理的选择将目标函数也线性化，从而将整个问题成功地简化为线性规划模型。另外该文表述清晰，证明简洁。

关键词：线性规划，相对速度

一、数学模型

1. 模型假设

（1）新飞机进入边缘时，立即作出计算，每架飞机按照计算机计算后的指示立即作方向角改变（有的飞机方向角可不变）。

（2）每架飞机整个过程中最多只改变一次方向角

（3）忽略飞机转向时间（即认为飞机在接收到指令后立即对方向角调整，且忽略其调整时间）

（4）新飞机进入空域前，在空域中飞行的飞机方向已调合适不会相撞

（5）对方向角的相同调整量的满意程度是一样的，且方向角调整越少，满意程度越高

2. 模型介绍

将每架飞机视为球状模型（二维平面为圆状模型）整个空域视为二维平面，建立直角坐标系，顶点为（0，0），（160，0），（160，160），（0，160），各方向角为飞行方向与 x 轴正向的夹角。每架飞机是一个以飞机坐标点为圆心，以 4 公里为半径的圆（因为相撞距离限为 8 公里）。每架飞机在空域中的状态（位置速度）均可视为矢量，速度为从坐标点出发，方向角为辐角，800 公里为模的矢量。各圆心按其速度方向运行。若有两圆在运行过程中相交即为该两架飞机相撞。

3. 名词、符号解释（如图 1 所示）

α_{ij}：第 i 架飞机与第 j 架飞机的碰撞角，是两圆公切线交角中指向圆的那个角，规定 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$

v_{ij}：第 i 架飞机相对于第 j 架飞机的相对飞行速度。

l_{ij}：第 i 架飞机与第 j 架飞机圆心距。

β_{ij}：第 i 架飞机相对于第 j 架飞机的相对速度与两架飞机圆心连线的交角，规定：以第 i 架飞机为原点，$i\to j$ 连线从 i 指向 j 为正方向，逆时间旋转为正，顺时针旋转为负。

$\triangle\theta_i$：第 i 架飞机相对于直角坐标系旋转的角（即方向角改变量），是代数量。

$\triangle\beta_{ij}$：第 i 架飞机相对于第 j 架飞机 β_{ij}的改变量。

4. 判断准则

不会相撞：当 $|\beta_{ij}|>\alpha_{ij}$时，两架飞机不会相撞（两圆不相交）

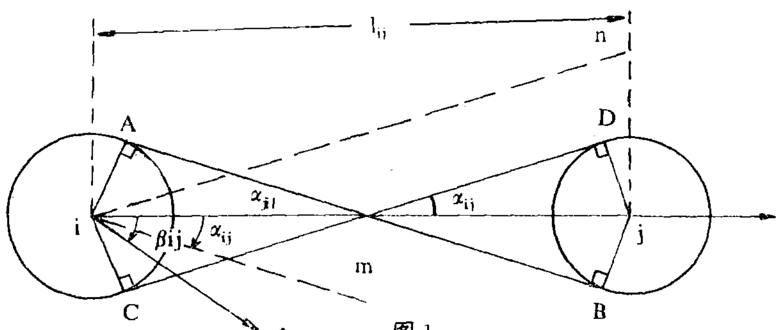

图 1

5. 决策目标

题目要求飞机飞行方向角调整的幅度尽量小，这个尽量小是针对每架飞机而言，同时也要求整体满意程度（即对管理层而言，应使每架飞机的调整都尽量的少），因此构造目标函数时，可以认为若对方向角调整量最大的飞机而言，其调整量可满意，则由假设（5）知对

其余飞机调整量均可满意，即要求每架飞机的调整量(绝对值)都小于某个数 ε($\varepsilon \geq 0$)。

目标函数即是求 ε 的最小值 min ε。

二、建模方案

1. 球形模型的建立

(1) 由于两架飞机如果相距大于 8 公里，则不会发生相碰，故可以考虑为 4 公里，两球不相交，则表明不会发生碰撞事故，若相交，则表明会发生碰撞事故。

(2) 为了研究两球相撞，采用相对速度作为研究对象，因为飞机是否相撞的关键是相对速度。

(3) 球形模型在分析碰撞问题中的运用，如图 1 示。

AB，CD 为公切线，ni∥CD，mi∥AB

i，j 不相撞的充要条件是 $|\beta_{ij}| \alpha_i$，(阴影区外)

若 β_{ij} 在阴影区内则通过调整角(i，j 的方向角)使 β_{ij} 移出阴影区以达到整个空域中的飞机系统不相撞

(4) 由球型模型建立起的函数及方程

i) 重要结论：对第 i，j 架飞机，其飞行方向角改变量($\triangle\theta_i$，$\triangle\theta_j$)之和的一半即为其相对速度方向 β_{ij} 的改变量($\triangle\beta_{ij}$)，

即 $\triangle\beta_{ij} = \dfrac{\triangle\theta_i + \triangle\theta_j}{2}$

证明：由题知 $|\nu_i| = 800km = A$

设改变前的速度分别为 $\nu_{i1} = Ae^{i\theta_i}$，　$\nu_{j1} = Ae^{i\theta_j}$

改变方向解后速度分别为

$$\nu_{i2} = Ae^{i(\theta_i + \triangle\theta_i)}, \quad \nu_{j2} = Ae^{i(\theta_j + \triangle\theta_j)}$$

$$\nu_{ij} = \nu_{i1} - \nu_{j1} = A[e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}]$$

改变后 $\nu'_{ij} = \nu_{i2} - \nu_{j2} = A[e^{i(\theta_i + \triangle\theta_i)} - e^{i(\theta_j + \triangle\theta_j)}]$

$$\frac{\nu'_{ij}}{\nu_{ij}} = \frac{A[e^{i(\theta_i + \triangle\theta_i)} - e^{i(\theta_j + \triangle\theta_j)}]}{A[e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}]}$$

$$= \frac{\cos(\theta_i + \triangle\theta_i) + i\sin(\theta_i + \triangle\theta_i) - \cos(\theta_j + \triangle\theta_j) - i\sin(\theta_j + \triangle\theta_j)}{\cos\theta_i + i\sin\theta_i - \cos\theta_j - i\sin\theta_j}.$$

$$\frac{2\sin\dfrac{\theta_i + \triangle\theta_i - \theta_j - \triangle\theta_j}{2}\left(\sin\dfrac{\theta_i + \triangle\theta_i - \theta_j + \triangle\theta_j}{2} - i\cos\dfrac{\theta_i + \theta_j + \triangle\theta_i + \triangle\theta_j}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\theta_i - \theta_j}{2}\left(\sin\dfrac{\theta_i + \theta_j}{2} - i\cos\dfrac{\theta_i + \theta_j}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\dfrac{\theta_i + \triangle\theta_i - \theta_j - \triangle\theta_j}{2}}{\sin\dfrac{\theta_i - \theta_j}{2}} e^{i(\frac{\triangle\theta_i + \triangle\theta_j}{2})}$$

即 ν'_{ij} 与 ν_{ij} 复角相差 $\dfrac{\triangle\theta_i + \triangle\theta_j}{2}$

$$\triangle\beta_{ij} = \frac{\triangle\theta_i + \triangle\theta_j}{2} \qquad 证毕$$

ii）因为忽略计算时间和转向时间故可得以下方程（不等式）

由决策目标构造目标函数，$\min X = \varepsilon(|\triangle\theta_i| \leqslant \varepsilon)$

由飞机飞行方向角调整幅度不超过 30°知

$$|\triangle\theta_i| \leqslant 30°, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 30°$$

为便整个系统在改变后不发生相碰事故，应有

$$|\beta_{ij} + \triangle\beta_{ij}| > \alpha_{ij}$$

2. 总结函数及各约束条件

$$\min Z = \varepsilon \tag{1}$$

$$s.t. \quad |\beta_{ij} + \triangle\beta_{ij}| > \alpha_{ij} \qquad \triangle\beta_{ij} = \frac{\triangle\theta_i + \triangle\theta_j}{2} \tag{2}$$

$$|\triangle\theta_i| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

$$|\triangle\theta_i| \leqslant 30° \tag{4}$$

$$0° \leqslant \varepsilon \leqslant 30° \tag{5}$$

3. 条件简化

为了利用线性规划对条件(2) $|\beta_{ij} + \triangle\beta_{ij}| > \alpha_{ij}$ 进行如下简化(说明见附录，编者略去)。

当 $\beta_{ij} > 0$ 时 $(2) \Rightarrow \beta_{ij} + \triangle\beta_{ij} > \alpha_{ij}$

当 $\beta_{ij} < 0$ 时 $(2) \Rightarrow \beta_{ij} + \triangle\beta_{ij} < -\alpha_{ij}$

由于$\triangle\theta_i$ 可正可负，为使线性规划中各决策变量均大于等于零，故引入新的决策变量$\triangle\theta_{i1}$、$\triangle\theta_{i2}$满足

$\triangle\theta_i = \triangle\theta_{i1} - \triangle\theta_{i2}$ 其中 $0 \leqslant \triangle\theta_{i1} \leqslant 30°$，$0 \leqslant \triangle\theta_{i2} \leqslant 30°$

4. 线性规划关系式

$$\min Z = \varepsilon \tag{6}$$

$$s.t. \quad \beta_{ij} > 0 \text{ 时} \quad \triangle\theta_{i1} - \triangle\theta_{i2} + \triangle\theta_{j1} - \triangle\theta_{j2} > 2\alpha_{ij} - 2\beta_{ij} \tag{7}$$

$$\beta_{ij} < 0 \text{ 时} \quad \triangle\theta_{i1} - \triangle\theta_{i2} + \triangle\theta_{j1} - \triangle\theta_{j2} < -2\alpha_{ij} - 2\beta_{ij} \tag{8}$$

$$\triangle\theta_{i1} - \triangle\theta_{i2} \leqslant 30° \tag{9}$$

$$\triangle\theta_{i1} - \triangle\theta_{i2} \geqslant -30° \tag{10}$$

$$\triangle\theta_{i1} - \triangle\theta_{i2} \leqslant \varepsilon \tag{11}$$

$$\triangle\theta_{i1} - \triangle\theta_{i2} \leqslant -\varepsilon \tag{12}$$

$$\varepsilon \leqslant 30° \tag{13}$$

$$\varepsilon,\ \triangle\theta_{i1},\ \triangle\theta_{i2} \geqslant 0 \tag{14}$$

[注]：其中 β_{ij}，α_{ij}可由题中已经知道的参数计算得出

设 $\mathbf{x}_i$，$\mathbf{x}_j$ 为飞机在空间的位置的矢量，计算公式如下

$$l_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \tag{15}$$

$$\beta_{ij} = \arg(v_i - v_j) - \arg(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \tag{16}$$

$$\alpha_{ij} = \arcsin(8/l_{ij}) \tag{17}$$

三、计算步骤

1. 记录各飞机状态：位置（坐标），速度（大小，方向角）。
2. 计算各点间 β_{ij}，α_{ij}。
3. 根据建模方案所提，列出目标函数及约束条件，产生 **LINDO** 文件（**LINDO** 是用于计算线性规划的软件）
4. 调用 **LINDO** 得到此条件下的线性规划最优解。

[注]（1）实际过程中，可将 2，3，4 步过程合为一个模块，这样可减少数据传递时间，以提高效率。

（2）程序清单及结果见附录（编者略去）

四、结果检验

对题目所给实例进行计算，清单见附表 1（编者略去）

方案$\triangle\theta_1 = 0°$，$\triangle\theta_2 = 0°$，$\triangle\theta_3 = 1.814732°$，$\triangle\theta_4 = -0.743155°$，$\triangle\theta_5 = 0°$，$\triangle\theta_6 = 1.814732°$

各方向角按此方案改动后，系统各飞机均满足$|\beta_{ij}| > \alpha_{ij}$（即不会相撞），其中有些飞机对满足临界不相撞条件，即$|\beta_{ij}| - \alpha_{ij}$的值$< 0.01°$（$0.01°$是题目要求的计算精度）

将调整后各量再代入算法计算后得目标函数 $\min Z = \varepsilon = 0$（即无需改动）

经模拟程序（见附表 4，编者略去）运行后，动态观察结果正确

五、评价及推广

1. 此模型采用球形模型分析碰撞问题是合理的，同时采用相对速度作为判断标准既体现了碰撞的本质（相对运动），又简化了模型的计算

2. 建模中作了适当的简化，将一个十分复杂的非线性规划问题简化为线性规划求解，既找到合理的解，又提高了运算速度及效率。这对于解决高速运行的飞机碰撞问题是大有裨益的，而且由题目所提供的例子计算出的结果是令人满意的。

3. 简化模型所得的解不一定是最优解，考虑如下极端情况：六架飞机有两架的相对速度刚好与其连线平行，即 $\beta_{ij}=0$，那么按简化模型应如何确定最优解呢？

若假定 $\beta'_{ij}=-\delta'$，$\delta'>0$ 且 $\delta'\to 0$ 则由简化模型可规划出一组解，若假定 $\beta''_{ij}=+\delta''$ $\delta''>0$ 且 $\delta''\to 0$ 同样可规划出一组解，这两组解中必是一优一劣，但因 β'_{ij} 与 β''_{ij} 之差 $\to 0$，所以可认为它们相同，而由同一条件找出两组最优解是不可能的，所以简化模型的解不一定最优。

但实际中，以上极端情况为少数，这正是本模型可取之处，且 $|\beta_{ij}|$ 越大可以认为，改变后的 $(\beta_{ij}+\triangle\beta_{ij})$ 与 β_{ij} 反号的可能性越小，从而由简化模型得到的结果可能越接近最优。

4. 关于模型约束条件数，由对称性知约束条件(2)的个数是 C_n^2（n 是飞机数）所以约束条件数为 $4n+C_n^2=n(\frac{n+7}{2})$ 当飞机数增加后，约束条件数呈二次函数增加，计算量增加不大。

5. 若有若干架飞机同时进入时，依次计算，逐个调整，将它们视为有先后的进入空域，忽略调整时间，即可。