

文章编号:1005-3085(2004)07-0036-07

临时超市网点的规划模型研究

孟军波, 田晓磊, 高晓玉

指导教师: 李向东, 金殿川

(河北理工大学, 唐山 063009)

编者按: 这篇论文的特点是假设合理, 模型基本正确, 结果也较合理。更主要的是文章的思路清晰, 书写简练, 是今后参赛论文的一个样板。

摘 要: 本文首先对2008年北京奥运会期间观众的出行方式、用餐方式、消费额的概率分布进行预测, 并运用统计方法计算每个商区的人流量和购物需求, 据此我们给出了MS网点的整数规划模型, 并利用一组数据计算出了MS网点的具体设计方案。

关键词: 经验概率分布; 整数规划; 人流量; 购物需求; MS网点

分类号: AMS(2000) 90C10

中图分类号: O221.4

文献标识码: A

1 问题分析

由于一个商区内的购物需求(即总购买力)直接决定该商区内的总销售额, 因此要对20个商区内的MS网点进行设计, 必须先知道各个商区内的购物需求。而要计算一个商区内的购物需求, 就要首先知道这个商区的人流量及每个人的购物欲望。场馆附近的道路设置及观众的出行和用餐方式决定了每个商区的人流量; 一位观众一天的消费额及其出行路线决定了这位观众在其经过的商区内的购物欲望。

由此分析可知, 应首先获取: 观众的出行和用餐方式的规律性, 观众一天的消费额, 场馆附近的人行道布置, 观众的出行路线等基本信息; 再根据基本信息并按照如下步骤进行求解:

第一步: 根据题目中给出的问卷调查数据, 统计并预测出奥运会期间观众的出行方式、用餐方式、消费额的经验概率分布。

第二步: 假定每个看台上的人数是它的最大容量(即场馆的上座率为100%), 根据观众的出行方式、用餐方式的经验概率分布及根据最短路径原则所确定的具体行走路线, 就可以确定每个商区的人流量。

第三步: 由消费额的经验概率分布, 出行方式的经验概率分布, 以及观众一天的行走路线, 可计算出每位观众的购买欲望, 从而可求出每个商区的总购买力, 进而在满足三个基本要求(满足奥运会期间的购物需求、分布基本均衡和商业上赢利)的条件下给出20个商区内MS网点的设计方案(即每个商区内不同类型MS的个数)。

2 模型假设

1) 在三个场馆和车站、停车场及餐饮部门等地点之间来往的观众只能走人行道, 即观众的出行路线被限制在人行道上; 2) 假设每位观众一天消费额(非餐饮)的上限为1000元;

3) 每位观众出行的往返路线是同一路线, 且出行方式不变;

4) 出行的最短路线不止一条时, 观众选择每条路线的几率相等;

5) 三个场馆中的各个看台都座无虚席, 即场馆的上座率为100%;

6) 假设在一次出行过程中, 观众在其经过的各个商区内购物欲望均等;

7) 假设在一天两次出行的4个来回路线上, 观众的购物欲望均等。

3 符号说明

i 第 i 个出口或商区, (其中, $i=1、2、\dots、10$ 对应商区A1-A10; $i=11、12、\dots、16$ 对应商区B1-B6、 $i=17、18、\dots、20$ 对应商区C1-C4)

j 第 j 个地点(车站、停车场、餐饮部门等), 其对应关系见表1:

表1 第 j 个地点的对应关系表

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
地点	公交南北	公交东西	出租	私车	地铁东	地铁西	中餐	西餐	商场

x_{ij} 在第 i 个出口与第 j 个地点之间来往的人数

x_{ijk} 从第 i 个出口(或商区)到第 j 个地点, 经过第 k 个商区的人流量

x_k 第 k 个商区的总人流量($k=1, 2, \dots, 20$)

q_{ij} 一位观众在第 i 个出口与第 j 个地点之间来往时, 经过某商区时的购买欲望

Q_k 第 k 个商区内的购物需求(即总购买力), 单位: 万元

$n_i、m_i$ 第 i 个商区内大、小超市的数目

4 模型建立与求解

4.1 观众在出行、用餐和购物方面的规律:

1) 出行方式的经验概率分布:

若将在预演的运动会中观众的出行方式看作随机变量 X , 那么, 三次问卷调查中对出行方式的调查就可以看作是对总体 X 的三次抽样。于是, 我们可以从这三次抽样中统计出在预演的运动会中观众的出行方式的经验概率分布。统计结果如下(表2):

表2 六种出行方式的频数统计表

	第一次	第二次	第三次	总计
公交南北	612	538	624	1774
公交东西	598	558	672	1828
出租	680	595	735	2010
私车	308	294	356	958
地铁东	645	605	756	2006
地铁西	657	610	757	2024
总计	3500	3200	3900	10600

将此统计表作归一化处理, 得到六种出行方式的频率如下(表3):

从此表中可以看出, 在三次问卷调查中, 各种出行方式的频率是基本一致的; 也就是说, 观众的出行方式呈现出统计规律性。若将三次问卷调查看成一次抽样, 则其统计结果将更具有代表性; 我们就用它作为在预演的运动会中观众出行方式的经验概率分布, 并以此作为奥运会期间观众的出行方式的概率分布的预测值, 见表4。

我们可以用同样的方法得到奥运会期间观众的餐饮方式、消费额的概率分布的预测值如下:

2) 餐饮方式的经验概率分布: 见表5

3) 消费额的经验概率分布: 见表6

4) 消费额 Z 的数学期望:

由假设(2)可知, 第6档消费额的范围为500-1000元。那么, 可得各档消费额的均值(表7):

表3 统计数据归一化表

	第一次	第二次	第三次	
公交南北	0.1749	0.1681	0.1600	0.1674
公交东西	0.1709	0.1744	0.1723	0.1725
出租	0.1943	0.1859	0.1885	0.1896
私车	0.0880	0.0919	0.0913	0.0904
地铁东	0.1843	0.1891	0.1938	0.1892
地铁西	0.1877	0.1906	0.1941	0.1909

表4 出行方式的经验概率分布

出行方式	1	2	3	4	5	6
概率分布 p_j	0.1674	0.1725	0.1896	0.0904	0.1892	0.1909

表5 餐饮方式的经验概率分布

餐饮方式	7	8	9
概率分布 p_j	0.2247	0.5252	0.2501

表6 消费额的经验概率分布

消费额 Z	1	2	3	4	5	6
概率分布 p_z	0.1943	0.2480	0.4404	0.0927	0.0148	0.0097

表7 各档消费额的均值

消费额	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-1000
均值 $E(z_t)$	50	150	250	350	450	750

那么, 一位观众一天的消费额 Z 的数学期望可以表示为:

$$E(Z) = \sum_{t=1}^6 p_t E(z_t) = 203.425 \text{元}$$

4.2 20个商区的人流量分布:

x_k 的计算方法: 先计算在 i 、 j 之间来往的人数 x_{ij} ; 再由 x_{ij} 确定从 i 到 j , 经过第 k 个商区的人流量 x_{ijk} ; 最后由 x_{ijk} 确定第 k 个商区的人流量 x_k 。

1) 在第 i 个出口与第 j 个地点之间来往的人数:

由每个看台容量均为1万人及假设(5)知: 每次出行中, 从每个出口出来的观众均为1万人。又因为奥运会期间每位观众平均出行两次, 一次为进出场馆, 一次为餐饮。由出行、餐饮方式的经验概率分布, 可以得出在 i 、 j 之间来往的人数如下(表8):

$$x_{ij} = 10000p_j \quad (j = 1, 2, \dots, 9)$$

表8 i 、 j 间来往的人数

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_{ij}	1674	1725	1896	904	1892	1909	2247	5252	2501

2) 第*i*个出口与第*j*个地点间的路线:

题目中要求“出行均采用最短路径”，但由于没有具体数据衡量每条路径的长度，我们只能通过图2（建模结构图）确定第*i*个出口与第*j*个地点间的路线。在假设（1）的条件下，我们给出确定*i*、*j*间路线的两个原则：

最短路径原则——若在图2中能确定*i*、*j*间的最短路径，就以此最短路径作为*i*、*j*间的路线。例如：A1—中餐，B5—商场等；

商区优先原则——当在a)原则下得出的路线不止一条时，考虑到观众的购物欲望，取经过商区最多的那条路线（若有几条路线都满足此原则，则都作为*i*、*j*间的路线）。例如：C4—西餐，C3—公交南北等；

当*i*、*j*间的路线确定后，这条路线所经过的商区也就确定了。例如：

A3—西餐经过的商区有：A3, A4, A5, A6；

B6—私车有两条路线，各自经过的商区有：B6, B5, B4, B3; B6, B1, B2, B3。

由此，我们得到每条路线及路线上的商区的详细信息（略），这是确定从第*i*个出口到第*j*个地点，经过第*k*个商区的人流量 x_{ijk} 的基础。

3) 确定 x_{ijk} 的方法:

由2)可知从第*i*个出口到第*j*个地点的路线只有一条，两条，四条三种。

根据假设4)可以得到：若*i*、*j*间有*n*条路线，则 x_{ij} 位观众从第*i*个出口到第*j*个地点时，人流在每个商区的分布 x_{ijk} 可表示为：

$$x_{ijk} = \begin{cases} \frac{x_{ij}}{n} & \text{经过商区 } k \\ 0 & \text{不经过商区 } k \end{cases}$$

按照此算法计算出所有的 x_{ijk} 值，以此作为计算每个商区的人流量 x_k 的数据。（由于 x_{ijk} 的数目很大，我们不再列出）

4) 每个商区的人流量分布:

每位观众平均出行两次，即：每位观众一天要通过场馆出口4次。由假设3)可知，出行目的相同的往返两次路线上人流量不变，也就是说 x_{ijk} 一样。

那么，第*k*个商区的人流量可表示为：

$$\begin{aligned} x_k &= 2 \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^6 x_{ijk} + 2 \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=7}^9 x_{ijk} \\ &= 2 \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^9 x_{ijk} \end{aligned}$$

注：在上面和式中，前者为进出场馆出行路线经过商区*k*的人流量之和；后者为餐饮出行经过商区*k*的人流量之和。

由上述公式计算20个商区的人流量列表如下（表9、10）：

4.3 商区内MS网点的设计:

1) 每个商区内的购物需求:

由假设6)、7)可知，观众的购物需求在商区和路线上均等，所以一位观众从第*i*个出口到第*j*个地点的一条路线上的某个商区时的购物欲望可表示为：

$$q_{ij} = \frac{1}{N_{ij}} \frac{E(Z)}{4} \quad \text{其中, } N_{ij} \text{ 为 } i、j \text{ 之间一条路线上商区的个数}$$

每个商区的购物需求等于经过这个商区的所有观众的购买欲望之和，即：

$$Q_k = 2 \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^9 x_{ijk} q_{ij}$$

由此公式计算20个商区的购物需求列表如下(表11):

表9 20个商区的人流量分布(单位: 10^3 人次)

商区	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
人流量	190.4	114.9	127.8	140.7	153.6	303.6	153.6	140.7	127.8	114.9
商区	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
人流量	107.5	94.5	149.7	94.5	107.5	214.3	62.5	60.1	59.1	134.7

表10 20个商区的人流量分布(用百分比表示)

商区	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
人流量	7.17%	4.33%	4.81%	5.30%	5.79%	11.55%	5.79%
商区	A8	A9	A10	B1	B2	B3	B4
人流量	5.30%	4.81%	4.33%	4.05%	3.56%	5.64%	3.56%
商区	B5	B6	C1	C2	C3	C4	
人流量	4.05%	8.07%	2.36%	2.26%	2.23%	5.07%	

表11 20个商区的购物需求(单位: 万元)

商区	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Q_k	156.02	80.45	83.39	94.36	116.10	273.34	116.10	94.36	83.39	80.45
商区	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
Q_k	97.22	80.77	141.71	80.77	97.22	229.46	51.16	62.59	46.78	119.23

2) 商区内MS网点的整数规划模型:

考虑到超市的存储量和上货速度的限制, 每个超市都有自己的最大日销售额。设 a 为大超市的最大销售额; b 为小超市的最大日销售额。

超市是以赢利为目的, 每个超市为了赢利都有自己的最小日销售额(保证超市赢利的销售额底线)。设 c 为大超市的最小销售额; d 为小超市的最小日销售额。

对20个商区内MS网点进行设计时, 要满足的三个基本要求:

1) “满足奥运会期间的购物需求”指的是商区内所有超市的最大日销售额之和不小于本商区的购物需求, 即:

$$an_i + bm_i \geq Q_i$$

2) “分布基本均衡”指的是各个商区内超市的总数目基本相同, 即:

$$|n_i + m_i - n_j - m_j| \leq k_1 \quad k_1 \text{ 为各个商区间超市总数目允许的最大差值}$$

3) “商业上赢利”指的是本商区的购物需求要大于商区内所有超市的最小日销售额之和, 即:

$$cn_i + dm_i < Q_i$$

在满足这三个基本要求的基础上, 我们以赢利最大为目标给出20个商区内MS网点的整数规划模型如下:

$$\max \sum_{i=1}^{20} (Q_i - cn_i - dm_i)$$

$$\text{S.T} \begin{cases} an_i + bm_i \geq Q_i \\ |n_i + m_i - n_j - m_j| \leq k_1 \\ cn_i + dm_i < Q_i \\ n_i, m_i \text{ 为正整数} \end{cases}$$

3) 模型的模拟求解:

为使求解得到设计方案更加贴近实际,我们调查了一些大小规模不同的超市,参考它们各自给出的日销售额经验值,然后结合本模型中这种临时超市的特殊性——建立目的、所处地点、顾客主体、经营商品等,综合给出了如下一组数据: $a=50$ 万元, $b=10$ 万元, $c=25$ 万元, $d=5$ 万元, $k_1=3$ 。用这组数据对模型进行求解,结果见表12:

表12 20个商区的设计方案

商区	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
大超市数	2	0	0	0	1	5	1	0	0	0
小超市数	7	9	9	10	8	4	8	10	9	9
商区	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4
大超市数	0	0	1	0	0	3	0	0	0	1
小超市数	10	9	10	9	10	8	9	9	9	8

5 模型的分析

5.1 问卷调查的统计结果具有代表性:

用于计算的统计数据为随机抽样所得,由统计推断原理可知这种数据具有统计推断功能。因此,我们把由抽样调查的数据统计出观众的出行方式、用餐方式、消费额的经验概率分布应用到奥运会期间是很合理的。

5.2 设计模型的合理性:

假设的合理性直接决定模型的合理性,我们需对假设做进一步的讨论。假设1)、2)、3)的合理性是很明显的,下面对其它假设进行如下讨论:

1) 题中并未给出 ij 间距离的具体值,但只要充分利用建模结构图提供的各个地点之间的相对位置并作合理的处理(当在 ij 之间可行路线不止一条时,为了确定 x_{ijk} 和 x_k ,按假设4)处理)就能确定最短路径。这些做法虽然有一定的主观性,但在数据匮乏的情况下,不失为一种合理的处理方法。

2) 在实际中,比赛的上座率会因场馆中进行的比赛项目的不同而变化。与此相应的,场馆周边商区的购物需求不免会有一些波动,这将使假设5)不再成立。但以上座率100%为假设来确定MS个数是合理的,因为这样做一定会满足奥运会期间的购物需求,也就达到了建立这种临时超市以方便观众购物的目的。

3) 每位观众经过某商区时的购物欲望的算法,是在假设6)、7)的基础上设计的。这两个假设的合理性将影响计算出的每个商区的购物需求的合理性,我们需要对其进行讨论。观众的购物欲望在不同的时间,不同的地点应该是不相同的;但本题有其自身的特殊性:观众的出行在时间与地点上呈现规律性(在确定的时间,按照确定的路线出行)。那么,我们就可以做出假设6)、7);也就是说,对本题而言假设6)、7)是合理的。

5.3 求解结果与实际比较贴近:

通过对实际情况的分析可知,与人行道相接的商区的购物需求应比不与人行道相接的商区的购物需求大;也就是说,人行道相接的商区建立的大超市比较多,不与人行道相接的商区建立的小超市比较多。求解结果中,商区A6、B6、A1内建设的大超市数目分别居第一位(5个)、第二位(3个)、第三位(2个),与实际情况相符合。说明我们模拟求解的结果与实际情况是比较贴近的。

6 模型评价

模型中,我们先根据问卷调查数据,统计出奥运会期间观众的出行方式、用餐方式、消费额的经验概率分布,将其应用到奥运比赛的观众中去,首先定出了观众的出行路线,进而求出了各个商业区的人流量,并计算出了每个商业区的购买需求,给出了各个商区内MS网点的设计方案。

该模型是在假设每个场馆中的各个看台都座无虚席,即上座率为100%的前提下建立的。但在实际中,比赛的上座率会因场馆中进行的比赛项目的不同而变化。与此相应的,场馆周边商区的购物需求不免会有一些波动,本模型在此方面还可作进一步改进。

因为商圈描述了一个商店的覆盖范围,而影响商店选址的主要因素是商圈内的人流量及购物欲望。联系到本模型,虽然得出了大小超市在各个商区里的数目,但这些超市在商区里的位置分布没有给出。我们可以进一步将模型进行改进,即在每一个商区内规划建立超市时,考虑每个商店的商圈,使各个超市能尽量均匀的分布在商区里。

参考文献:

- [1] 盛骤. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989;8
- [2] 冯文权. 经济预测与决策技术[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002;3
- [3] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003;8
- [4] 万中. 数学实验[M]. 北京: 科学出版社, 2001

The Research of the Programming Model for the Provisional Supermarket Site

MENG Jun-bo, TIAN Xiao-lei, GAO Xiao-yu

Advisor: LI Xiang-dong, JIN Dian-chuan

(Hebei Polytechnic University, Tangshan 063009)

Abstract: Firstly, according to the investigation's data we estimate for the probability distribution of the audience's way of coming and going, the dining method and the amount of the consumption during the 2008 Beijing Olympic Game. Then, we compute the person's discharge and the shopping needs in every commercial area by the statistical method. In view of the above, we develop an integral programming model to characterize this problem, and use a set of reasonable data to compute the concrete design scheme of the MS site.

Keywords: experienced probability distribution; integral programming; person's discharge; shopping need; the MS site