第28卷 第1期 数学的实践与认识 Vol. 28 No. 1
1998年 1月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan., 1998

关于零件参数问题的建模

余 辉 那永林 肖云翔

指导教师：史道济

(天津大学，天津 300072)

编者按 本文在合理的假设下取质量损失函数，符合实际情况，说明了 y 近似服从正态分布. 给出了单位产品质量损失的表达式和较完整的数学模型. 特别是在最优化过程中，探讨了其算法.

摘 要 这是一个如何安排加工次序的组合优化问题，首先建立了一般问题的数学模型，在对其求解过程中我们采取了分枝限界法，保证了所得结果的最优性，且具有很高的时效性. 其次针对某部门所采取的贪婪算法给以了评价，在评价中以其近似解与最优解的接近程度、得到最优解的概率为标准，利用计算机模拟对其进行评估，发现对于该问题贪婪算法并不能保证解的最优性，但近似程度较好. 而后对调整刀具费用为 0 的情形进行了讨论，首先给出了一个引理，然后给出了一个简明的优化准则：当对各切割平面按其厚费比以不升序排列时，所得次序为最优加工次序. 最后利用题中所给数据进行了验证，再次表明了所得结论的正确性.

一、问题的背景分析 (略)

二、问题的假设

(1) 模型的参数

$\cos t$:	总费用函数 (单位产品);	$\cos t_1$:	质量损失函数 (单位产品);
$\cos t_2$:	成本函数 (单位产品);	Δ_i :	代表零件i的容差;
C_1 :	产生一个费品造成的损失;	C_2 :	产生一个次品造成的损失;
A_1 :	费品的界限;	A_2 :	次品的界限;
Y :	表征产品性能的指标;	σ_i :	零件参数的方差;
$x_i = E[x_i]$:	零件参数标定值的期望;	σ_y :	产品性能指标的方差;
$Y_0 = E[Y]$:	产品性能指标的期望;	Y_0^* :	Y的目标值1.50;
$P(y)$:	代表产品性能指标的分布概率	N :	产品生产数目;
	在程序及打印数据中以dy代替	x_i :	7个零件参数的标定值 $(i=1,\cdots,7)$;

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{代表第} i \text{个零件中第} j \text{个等级容差;}\\ 0, & \text{代表第} i \text{个零件未选中第} j \text{个等级容差;}\end{cases}$$

$$\text{其中}\quad i=1,\cdots,7,\ \ j=1,\cdots,3.$$

(2) 模型的假设

a. 为简化模型只考虑用单参数指标 y 表征产品性能并已知 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$;

b. 容差 Δ_i 近似等于 3 倍均方差 $(\Delta_i=3\sigma_i)$, x_i 服从正态分布 $-N\left[x_i,\left(\frac{\Delta_i}{3}\right)^2\right]$, X_i 之间相互独立;

c. Y 的目标值 Y_0^* 已定, (即 $y_0^*=1.5$);

d. 结合问题并考虑到实际生产，假设已知质量损失函数：

$$Q(y)=\begin{cases} C_1, & Y_0^*-A_1>y \text{ 或 } y<Y_0^*+A_1, \\ C_2, & Y_0^*-A_1<y<Y_0^*-A_2 \text{ 或 } Y_0^*+A_2<y<Y_0^*+A_1, \\ 0, & Y_0^*-A_2<y<Y_0^*+A_2 \end{cases}$$

e. 由于批量生产，产品性能指标 Y 受到多个设计参数及加工工艺的影响，所以假设 Y 近似服从正态分布.

f. 由于批量生产数目N较大 (实例中N = 1000), 造成一批产品质量的损失，则 $Q(Y)$ 可近似看成为一连续的函数.

三、模型的建立

A 问题的进一步分析

(I) 容差等级选取的精度升高，造成成本 $\cos t_1$ 上升；零件标定值 X_i 选取的不同影响 Y 中心值 (Y_0^*) 变动，它和容差共同影响次废品出现的概率，从而影响质量损失 $\cos t_2$, 因此考虑总费用

$$\cos t=\cos t_1+\cos t_2$$

(II) 容差等级是离散的，即对每一个 Δ_i 只有几个是可选的，考虑用 0 — 1 整数规划，表示 $\cos t_2$ 如下： g

$$\cos\, t_2=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{3}K_{ij}a_{ij}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{3}a_{ij}=1, \qquad a_{ij} \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1$$

K_{ij} 为第 i 种零件 j 级精度时的单位价格. 对于本问题中不存在的等级，其价格 K_{ij} 可取 $+\infty$ 或直接改变 a_{ij} 值进行优化，如本问题中第 1 组零件只有一个容差等级 2(即 B 等), 那么在用计算机进行优化时可直接约定 $a_{12}=1$, $a_{13}=a_{11}=0$ 即可.

III) 由于单位产品的质量损失可视为连续函数，而且设计中心值 Y_0^* 和废次品范围已定 ($y<1.2$ 或 $y>1.8$ 为废品， y 在 [1.2, 1.4] 或 [1.6, 1.8] 范围可视为次品), 所以

$$\cos t_1=9000\left(\int_{-\infty}^{1.2}P(y)dy+\int_{1.8}^{+\infty}P(y)dy\right)+1000\left(\int_{1.2}^{1.4}(y)dy+\int_{1.6}^{1.8}P(y)dy\right)$$

其中

$$P(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}}2\, e^{\frac{-(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}}, \qquad \sigma_y^2=\sum_{i=1}^{7}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\sigma_{x_i}^2$$

$$\sigma_{x_i}^2=\left(\frac{\Delta i}{3}\right)\left[0.01^2\cdot a_{i1}^2+0.05^2\cdot a_{i2}^2+0.1\cdot a_{i3}^2\right]$$

B 综合上述分析，完整模型表示如下：

$$\mathrm{Min}\,(\cos t=\cos t_1+\cos t_2), \qquad \cos t_2=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{3}K_{ij}a_{ij}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 1, \qquad a_{ij} \text{ 取 0 或 1}$$

$$\cos t_1 = 9000 \left(\int_{-\infty}^{1.2} P(y)dy + \int_{1.8}^{+\infty} P(y)dy \right) + 1000 \left(\int_{1.2}^{1.4} P(y)dy + \int_{1.6}^{1.8} P(y)dy \right)$$

其中

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} e^{\frac{-(y-y_0)^3}{2\sigma_y^2}}, \qquad \sigma_y = \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \sigma_{x_i}$$

$$Y = f(x_1, x_2, \cdots, x_7) \qquad \sigma_i^2 = \left(\frac{\Delta i}{3} \right) \left[0.01^2 \cdot a_{i1}^2 + 0.05^2 \cdot a_{i2} + 0.1 \cdot a_{i3}^2 \right]$$

四、模型算法的探讨

(一) 本模型可以归为运筹学中的非线性规划问题. 目前非线性规划还没有适用于各种问题的一般算法. 我们知道线性规划问题最优解只能在其可行域的边界上达到 (特别是在可行域的顶点上到达). 而非线性规划问题最优解 (如果存在) 则可能在其可行域中任一点达到, 所以从理论上各种算法寻找的均为局部最优极值点, 从现实角度考虑要求算法收敛快, 稳定性好, 寻到的极值接近最优值.

(二) 采用问题所给的数据我们先用 Mathcad 软件作出 $\cos t_1-(y_0,\sigma)$ 的三维关系图 (彩色附图略), 通过做等值线分析可知:

i) 当 y_0 偏离 1.5 较远时, $\cos t_1$ 对 y_0 取值敏感性要远大于对取值敏感性.

ii) 当 y_0 很接近 1.5 时, $\cos t_1$ 对 σ_u 敏感性较大.

结论 考虑本身变动范围较小, 综合 i) 、 ii) 分析所得, 并结合 Mathcad 软件粗略运算得到 $\cos t_1=300$ 时有 $\left|\frac{\partial \cos t_1}{\partial y_0}\right|=10\left|\frac{d \cos t_1}{\sigma_y}\right|$, 所以 $\cos t_1>300$ 时 (σ_y 动范围为 0.09~0.100), y_0 的邻域在首次搜索时定为 [1.48, 1.52].

(三) 程序算法分析:

在编程计算时, 考虑到程序执行时间因素, 故采用三分算法进行计算, 这样可使程序执行效率提高上千倍甚至更高 (试验证明, 此种方法比穷举法效率提高几万倍). 具体算法步骤如下:

首先将各参量所允许区间分为四等分, 取其三个分点进行计算 (取点如下)

参量	下界	分点一	分点二	分点三	上界	步长
x_1	0.075	0.0875	0.1	0.1125	0.125	0.0125
x_2	0.225	0.2625	0.3	0.3375	0.375	0.0375
x_3	0.075	0.0875	0.1	0.1125	0.125	0.0125
x_4	0.075	0.0875	0.1	0.1125	0.125	0.0125
x_5	1.125	1.3125	1.5	1.6875	1.875	0.1875
x_6	12	14	16	18	20	2
x_7	0.5625	0.6625	0.75	0.85	0.935	0.1

如上, 算出各分点 (共 3^7 个) 各自的质量损失, 经过比较得到 $\cos t_1$ 最低的几个点.

其次, 在所得到的点的小邻域内继续采取相同的算法, 计算步长逐步缩小, 并对 0 所得点的质量损失函数值进行比较, 逐步筛选.

再将上述过程重复数次, 直至质量函数值变化不大为止, 取其最小进行容差设计.

最后, 在最优点的很小邻域内进行最后选优, 容差选取考虑采用穷举法. 经过比较总费用 $\cos t$ 计算得出几组最优解, 数据结果附下.

结果数据

X_1		X_2		X_3		X_4		X_5		X_6		X_7		$\cos t$	Y	DY
值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等			
075	*B*	.29	*B*	.108	*B*	.095	*C*	1.33	*C*	19.3	*B*	.64	*B*	427.72	1.4952	.091308
.075	*B*	.29	*B*	.109	*B*	.095	*C*	1.31	*C*	19.6	*B*	.65	*B*	427.68	1.4954	.091315
.075	*B*	.30	*B*	.108	*B*	.095	*C*	1.252	*C*	19.2	*B*	.65	*B*	426.21	1.4954	.091199
.075	*B*	.30	*B*	.108	*B*	.095	*C*	1.298	*C*	19.1	*B*	.60	*B*	426.17	1.4966	.091272

注：其中，“值”代表标定值，“等”代表等级；$\cos t$ 的单位为 (元 / 个)

(四) 算法程序 (具体程序略)

其中　程序一的功能为完成数据点的初次搜索；

程序二的功能为在初选点的基础上通过调整容差使结果进一步优化；

(五) 实例问题的求解

在原设计中，一个零件参数的标定值为：$x_1=0.1, x_2=0.3, x_3=0.1, x_4=0.1, x_5=1.5, x_6=16, x_7=0.75$;

$$a_{ij} = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\cos t_2 = 9000\left(\int_{-\infty}^{1.2} P(y)dy + \int_{1.8}^{+\infty} P(y)dy\right) + 1000\left(\int_{1.2}^{1.4} P(y)dy + \int_{1.6}^{1.8} P(y)dy\right) = 2887\text{元} / \text{个}$$

$\cos t_2 = 200$ 元 / 个　　$\cos t = 3087$ 元 / 个

采用我们的算法程序求得

X_1		X_2		X_3		X_4		X_5		X_6		X_7		$\cos t$	Y	DY
值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等			
0.75	*B*	.30	*B*	.108	*B*	.095	*C*	1.298	*C*	19.1	*B*	.60	*B*	426.17	1.4966	.091272

与原设计比较，总费用降低了 2660.83(元 / 个)×1000 个 ~26 万元

五、一般零件的参数设计 (略)

六、模型的评价

本模型的成功之处在于使一个多因素的问题，以极简便的方法快速得到结论．采用本模型辅以一台 PC 机，可以在十几分钟之内寻找出问题的优化答案，而采用普通的算法通常在十几小时都难于找出答案．这就为解决涉及多因素的问题提出了一条捷径，另外此模型并不涉及许多深奥的数学理论，可以很方便地推广到实际生产中．模型的不足之处在于模型求解需要依靠计算机进行，离开计算机进行求解会有一定困难．

优点为当具体问题中影响产品性能指标的零件数目减少时，用网格法搜索时，计算量呈指数下降，所以可以考虑直接寻优．

七、模型的推广

本模型可广泛用于实际生产中的诸多领域，对受多种因素影响的具体问题可以很方便地求出优化解，而且也可用于理论分析和科学实验中，其特点在于用一段简单的程序就可将一复杂问题解决．

参 考 文 献

[1] 叶其孝主编，大学生数学建模竞赛辅导教材，湖南教育出版社，长沙.

[2] 衷光定，应用概率统计 —MATHCAD 数理分析图形软件，北京师范大学出版社，北京.

[3] 盛昭瀚、雷忻，最优的方法教程，东南大学出版社，南京.

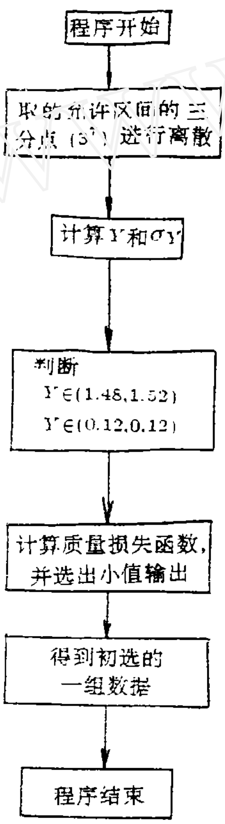
[4] 傅家良、周仲良、魏国华，运筹学，复旦大学出版社，北京

[5] 叶其孝，卢树铭，数学建模教育与国际数学建模竞赛，中国工业与应用数学学会，工科数学杂志社.

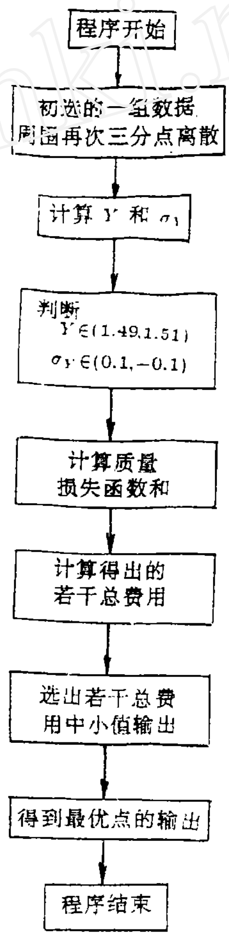
[6] 谭浩强编， C 程序设计，清华大学出版社社，北京.

[7] 姬振豫，正交设计，天津科技翻译出版公司，天津.

[8] 可计算理论目的三次设计，中国现场统计研究会三次设计组编著.



程序图 1



程序图 2