

灾情巡视路线最优解的证明

张建新¹

(沙洲工学院, 张家港 215600)

编者按 本文对问题三的分析有独特之处, 证明正确且较朴实, 特予发表.

摘要 本文对灾情巡视路线中的问题三, 从理论上证明了完成巡视至少要分 22 组, 并给出一个分 22 组总巡视时间为 130.578 小时的方案.

问题三 在 $T = 2$ 小时, $t = 1$ 小时, $v = 35$ 公里 / 小时的假定下, 如果巡视人员足够多, 完成巡视的最小时间是多少? 并给出此时间限定下的最佳巡视路线.

分析 在 T, t 和 v 的值固定不变, 巡视人员足够多的条件下, 我们先假设每个巡视组只负责一个乡 (镇) 或村. 此种情况下, 完成巡视最短时间就等于按最短路线各乡 (镇)、村完成巡视任务所用时间最多的一个, 即为:

$$\max_i \left(\frac{2d_{iO}}{v} + T_i \right)$$

其中 d_{iO} 为 i 点到 O 点的最短距离 ($i = 1, 2, \dots, 35, A, B, \dots, N, P, Q, R$), T_i 为巡视 i 点时所停留的时间, 即

$$T_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq 35, \\ 2, & (i = A, B, \dots, N, P, Q, R) \end{cases}$$

显然这也就是在组数少于 52 的情况下最短巡视时间的下界.

为了证明下面定理, 首先用 Dijkstra 算法求出所有点与 O 点之间的最短距离, 并计算出在最短路径上所花费的时间, 见下表 1 (也可用手工求解).

定理 1 如果巡视人员足够多, 完成巡视的最短时间为 $45/7$ 小时.

证 由表 1 知, 按最短路径, H 点是距县政府 (O) 所在地最远的乡 (镇)、村, 即 $\max[d_{iO} = d_{HO} = 77.5$ 公里, 又因为 $\sum_i (T_i) = 2 = T_H$, 所以 $\max_i \left(\frac{2d_{iO}}{v} + T_i \right) = \frac{2d_{HO}}{v} + T_H = 2 \times 77.5/35 + 2 = 45/7$ 小时.

定理 2 若要在 $45/7$ 小时内完成巡视, 至少需 22 组.

为了证明此定理, 首先引入下列结论.

结论 1 在乡 (镇)、村总停留时间大于 2 小时的任一巡视回路中一定不能含有 H, G, I 三个乡 (镇) 和 14, 15, 12, 10, 13, 16 六个村.

证 假设一巡视回路在乡 (镇)、村总停留时间大于 2 小时, 则在路上所花时间应小于 $6.4286 - 3 = 3.4286$ 小时, 县城至回路中任一乡 (镇)、村的最短路所花时间应小于 $3.4286/2 = 1.7143$ 小时, 结合表 1 可知 H, G, I 三个乡 (镇) 和 14, 15, 12, 10, 13, 16 六个村不满足条件.

结论 2 在乡 (镇)、村总停留时间大于 3 小时的任一巡视回路中一定不能含有 F, J, K 三个乡 (镇) 和 11, 17, 18, 8, 9, 22, 19, 24 八个村.

证 假设一巡视回路在乡 (镇)、村总停留时间大于 3 小时, 则县城至回路中任一乡 (镇)、村的最短路所花时间应小于 $(6.4286 - 4)/2 = 1.2143$ 小时, 结合表 1 可知 F, J, K 三个乡 (镇) 和 11, 17, 18, 8, 9, 22, 19, 24 八个村不满足条件.

¹ 作者现为东南大学国内访问学者、导师朱道元.

表 1

点	最短路径长 (公里)	花费时间 (小时)	点	最短路径长 (公里)	花费时间 (小时)
H	77.5	2.2143	30	35.7	1.0200
14	72.7	2.0772	4	34.9	0.9972
15	69.9	1.9972	7	34.5	0.9858
12	67.3	1.9229	25	31.8	0.9086
10	65.9	1.8829	N	31.1	0.8886
13	64.1	1.8315	32	30.2	0.8629
G	62.7	1.7915	27	28.4	0.8115
I	61.1	1.7458	Q	28.0	0.8000
16	60.3	1.7229	34	27.8	0.7943
11	55.9	1.5972	6	27.2	0.7772
F	55.1	1.5743	33	23.7	0.6772
J	54.3	1.5513	D	22.2	0.6343
17	53.5	1.5286	28	22.2	0.6343
18	52.9	1.5115	31	22.1	0.6315
8	49.7	1.4200	29	20.8	0.5943
9	49.5	1.4143	26	20.6	0.5886
22	49.0	1.4000	M	19.8	0.5657
19	46.2	1.3200	5	17.5	0.5000
24	44.3	1.2658	A	16.3	0.4658
K	43.7	1.2486	3	14.0	0.4000
E	41.7	1.1915	R	12.9	0.3686
21	39.6	1.1315	B	11.9	0.3400
L	39.0	1.1143	C	11.5	0.3286
23	39.0	1.1143	P	10.1	0.2886
20	38.3	1.0943	2	9.2	0.2629
35	36.0	1.0286	1	6.0	0.1715

结论 3 在乡(镇)、村总停留时间大于 4 小时的任一巡视回路中一定不能含有 E, L, N, Q, M 五个乡(镇)和 21, 23, 20, 35, 30, 4, 7, 25, 32, 27, 34, 6, 33, 28, 31, 26 十六个村。

证 假设一巡视回路在乡(镇)、村总停留时间大于 4 小时, 则县城至回路中任一乡(镇)、村的最短路所花时间应小于 $(6.4286 - 5)/2 = 0.7143$ 小时, 结合表 1 可知 E, L, N, Q 四个乡(镇)和 21, 23, 20, 35, 30, 4, 7, 25, 32, 27, 34, 6 十二个村不满足条件; 考虑乡(镇) M 和村 33, 28, 31, 26, 虽然县城到乡(镇) M 和村 33, 28, 31, 26 中任一点的最短路所花时间都小于 0.7143 小时, 但由于在这些点的最短路上在乡(镇)、村总停留时间最多为 4 小时, 因此必须经过不在各自最短路上的乡(镇)、村。下面分三种情况讨论不在各自最短路上的乡(镇)、村:

(1) 分别与这 5 点直接相邻的乡(镇)、村, 因为除与乡 M 相邻的村 5, 与村 31 相邻的村 33、与村 33 相邻的村 31 外的乡(镇)、村都是本结论中所列出的乡(镇)、村, 由上面证明可知无法形成在乡(镇)、村总停留时间为 5 小时并且总巡视时间不超过 $45/7$ 小时的巡视回路, 而经过县城 O 、乡 M 与村 5 的最短回路在乡(镇)、村总停留时间仅为 4 小时, 再加进新的乡(镇)、村总巡视时间又超过 $45/7$ 小时, 经过县城 O 与村 31, 33 的最短回路总路程超过 50 公里。

(2) 分别与这 5 点最短路中间点直接相邻的乡(镇)、村, 如与村 28、26 最短路中的乡 P , 与村 31 最短路中的乡 R , 与村 33 最短路中的乡 A , 村 1 相邻的乡(镇)、村, 不妨设访问最近的村 29, 26, 28, 乡(镇) A, B, C , 这时 $(O, P, 28, 26, O), (O, P, 26, 28, O), (O, P, 28, 29, O),$

$(O, 31, R, A, O), (O, A, 33, B, O), (O, 33, 1, C, O)$ 巡视回路的总路程均超过 50 公里.

(3) 与县城 O 直接相邻的乡(镇)、村, 因为县城到乡(镇) M 和村 33, 28, 31, 26 中任一点最短距离与县城到最近的乡(镇) P 和最近的村 1 中任一点最短距离之和的两倍均超过 50 公里. 所以不存在包括乡(镇) M 和村 33, 28, 31, 26 中任一点在内并且在乡(镇)、村总停留时间为 5 小时, 总巡视时间不超过 $45/7$ 小时的巡视回路.

结论 4 不存在在乡(镇)、村总停留时间为 6 小时, 总巡视时间不超过 $45/7$ 小时的巡视回路.

证 假设一巡视回路在乡(镇)、村总停留时间为 6 小时, 则县城至回路中任一乡(镇)、村的最短距离所花时间应小于 $(6.4286 - 6)/2 = 0.2143$ 小时, 结合表 1 可知只有村 1 满足条件, 而一个村无需停留 6 小时, 因此, 这样的巡视回路不存在.

结论 5 假设一巡视回路只巡视 a, b 两村, 则 O 与 a, a 与 b, b 与 O 之间最短距离之和不大于 155 公里.

证 假设 O 与 a, a 与 b, b 与 O 之间最短距离之和大于 155 公里, 则只巡视 a, b 两村所需总时间大于 $2 + 155/35 = 45/7$ 小时, 所以 a, b 两村不能在同一巡视回路中.

类似可证假设一巡视回路只巡视 a, b 一乡一村(二乡), 则 O 与 a, a 与 b, b 与 O 之间最短距离之和不大于 120(85) 公里.

结论 6 假设一巡视回路只巡视 a, b, c 三村, 则 O, a, b, c 四点构成的最优推销员回路总路程不大于 120 公里.

证 假设 O, a, b, c 四点构成的最优推销员回路总路程大于 120 公里, 则只巡视 a, b, c 三村所需总时间大于 $3 + 120/35 = 45/7$ 小时, 所以 a, b, c 三村不能在同一巡视回路中.

类似可证 假设一巡视回路只巡视 a, b, c 一乡二村(二乡一村), 则 O, a, b, c 四点构成的最优推销员回路总路程不大于 85(50) 公里.

下面证明定理 2

证 由结论 1 知 H, G, I 必须单独巡视, 由于 14, 15, 12, 10 中任何两村不能在同一巡视回路中(由表 1, 最短路径图和结论 5 可得), 所以结论 1 中所列出的 3 个乡(镇)和 6 个村至少需要 7 组才可完成巡视. 这 7 组巡视回路中最多还可以再巡视其它的二个村, 不妨设再巡视结论 2 中所列出的 2 个村(因为换成其它村不影响下面证明的最终结果), 则结论 2 中所列出的乡(镇)、村还剩下 3 个乡(镇)和 6 个村, 由结论 2 知 F, J, K 三个乡(镇)中任何两乡(镇)不能在同一巡视回路中, 又由于 11, 17, 18, 8, 9, 22, 19, 21 中任何三村不能在同一巡视回路中(由表 1, 最短路径图和结论 6 可得), 所以即使前 7 组巡视回路访问了结论 2 中所列出的 2 个村, 经过 F, J, K 的巡视回路组又访问了结论 2 中所列出的三个村, 剩下的三个村至少仍需 2 组巡视, 因此, 结论 2 中剩下的 3 个乡(镇)和 6 个村至少需 5 组才可完成巡视. 这 5 组巡视回路中最多还可以再巡视其它的三个村(或一乡和一村), 不妨设再巡视结论 3 中所列出的三个村(或一乡和一村), 则结论 3 中所列出的乡(镇)、村还剩下 5 个乡(镇)和 13 个村(或 4 个乡和 15 个村), 因为结论 3 中所列出的乡(镇)、村所在的每条巡视回路在乡(镇)、村总停留时间至多 4 小时, 而结论 3 中剩下的 5 个乡(镇)和 13 个村(或 4 个乡和 15 个村)总停留时间为 23 小时, 所以结论 3 中剩下的 5 个乡(镇)和 13 个村(或 4 个乡和 15 个村)至少需 6 组才可完成巡视. 这 6 组巡视回路中最多还可以再巡视其它的一个村, 至此, 上面 $7 + 5 + 6 = 18$ 个组的巡视回路中最多共能巡视 11 个乡(镇)和 31 个村. 考虑剩下的 6 个乡(镇)(O 除外)和 4 个村, 由结论 4 知, 这 6 个乡(镇)和 4 个村所在的每条巡视回路在乡(镇)、村总停留时间至多 5 小时, 而这 6 个乡(镇)和 4 个村总停留时间为 16 小时, 所以这 6 个乡(镇)和 4 个村至少需 4 组才可完成巡视. 即整个巡视至少需要 $18 + 4 = 22$ 组才可完成.

按照上面证明思想, 我们得到一个 22 组的巡视方案, 见表 2.

表 2

巡视路线	巡视时间 (小时)	巡视路程 (公里)	巡视路线	巡视时间 (小时)	巡视路程 (公里)
$O-H-O$	6.429	155	$O-L-20-25-O$	6.366	82.8
$O-G-O$	5.583	125.4	$O-N-26-27-O$	6.223	77.8
$O-I-O$	5.492	122.2	$O-30-Q-28-O$	6.112	73.9
$O-F-9-O$	6.149	110.2	$O-4-D-3-O$	5.995	69.8
$O-J-19-O$	6.103	108.6	$O-P-29-R-O$	6.318	46.1
$O-18-K-O$	6.023	105.8	$O-A-B-1-O$	6.155	40.4
$O-14-13-O$	6.155	145.4	$O-2-5-M-O$	5.392	48.7
$O-15-16-O$	6.309	150.8	$O-31-32-35-34-O$	6.318	81.1
$O-12-11-O$	5.938	137.8	$O-C-33-O$	4.832	64.1
$O-10-8-O$	6.223	147.8	$O-23-24-O$	4.635	92.2
$O-E-7-6-O$	6.383	83.4	$O-21-17-22-O$	6.12	109.2

且总巡视时间为 131.253 小时.

按照尽量沿最短路走和尽量访问邻近乡、村的原则,逐步修改,最后得到一个比上面更优的 22 组的巡视方案,见表 3.

表 3

巡视路线	巡视时间 (小时)	巡视路程 (公里)	巡视路线	巡视时间 (小时)	巡视路程 (公里)
$O-H-O$	6.429	155	$O-L-20-25-O$	6.366	82.8
$O-G-O$	5.583	125.4	$O-N-27-28-O$	6.272	79.5
$O-I-O$	5.492	122.2	$O-Q-30-29-O$	6.04	71.4
$O-F-9-O$	6.149	110.2	$O-4-D-3-O$	5.995	69.8
$O-J-19-O$	6.103	108.6	$O-P-R-O$	5.315	46
$O-18-K-O$	6.023	105.8	$O-C-B-1-O$	5.983	34.4
$O-14-13-O$	6.155	145.4	$O-2-5-M-O$	5.392	48.7
$O-15-16-O$	6.309	150.8	$O-31-32-35-34-O$	6.318	81.1
$O-12-11-O$	5.938	137.8	$O-33-A-O$	4.355	47.4
$O-10-8-O$	6.223	147.8	$O-23-24-26-O$	5.635	92.2
$O-E-7-6-O$	6.383	83.4	$O-21-17-22-P$	6.12	109.2

且总巡视时间为 130.578 小时.

参 考 文 献

- [1] 肖位枢主编,图论及其算法.
- [2] 陈惠开著 [美],吴哲辉,刘昌孝译,网论—网络流.

Proof on Optimality of Casualty Inspecting Routes

ZHANG JIAN-XIN

(Shaozhou Institute of Technology, Zhangjiagang 215600)