第 29 卷 第 1 期
1999 年 1 月

数学的实践与认识
MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY

Vol. 29 No. 1
Jan., 1999

资产投资收益与风险模型

陈定涛　　蒋　浩　　肖红英

指导教师：　梁元第

(四川联合大学，成都 610065)

编者按　本文建立了正确的双目标模型，并且把该模型通过控制总体风险合理地转化为单目标线性规划问题，还给出了计算结果. 文章的特色在于通过计算的收益 — 风险的一系列解，通过多次函数拟合建立了收益 — 风险的函数关系，并且根据函数的导数、二阶导数的性质，结合本题的经济含义，获得了保守型、温和型、冒险型的区分及较合理的投资区间. 分析结论有一定的数为理论依据，而且也较符合实际

摘　要　本文应用多目标决策方法建立模型，并通过简化，成为一个单目标线性规划问题. 计算后得到了一个合乎公司要求的、净收益尽可能大，而总体风险尽可能小的最优方案，如下所示：

问题 1 的最佳投资方案

对第 i 项投资的金额	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
收益	$0.0033M$	$0.2368M$	$0.3947M$	$0.1076M$	$0.2277M$

对表二中的数据进行同样的计算和分析，也获得了一个理想的投资方案，从而证明了我们的模型具有一般性.

问题重述（略）

问题分析

本题中的投资问题是利用所给数据，通过计算分析得到一种尽量让人满意的投资方案，并推广到一般情况. 下面是实际中要考虑的两点情况.

a. 在风险一定的情况下，取得最大的收益

b. 在收益一定的情况下，所冒风险最小.

不同的投资者对利益和风险的侧重点不同，但在一定范围内都是正常的. 所以我们只能要求选择一种尽量好的方案. 即风险尽量小，收益尽量大，这符合题意和一般投资者的心理.

表 1 给出的四种投资项目各自的平均收益率、风险损失率以及交易费率各不相同，我们先以 q_i 为横坐标表示风险. 以 $(r_i - p_i)$ 为纵坐标表示收益建立一个粗略的图形. 从大体趋势可以看出，q_i 越大，$(r_i - p_i)$ 也越大，即风险越大，期望收益越大. 同理对表 2 画出图 2，亦可看出同样的趋势. 虽然很粗糙，但符合一般的实际情况.

题目中给出交易费的计算数额是一个分段函数，设为 $t_i = \begin{cases} u_i, & x_i \le u_i \\ x_i, & x_i > u_i \end{cases}$. 在实际计算中，不容易处理，但我们注意到，在表 1 中，u_i 的数值非常小，$\sum_{i=1} u_i = 103 + 198 + 52 + 40 = 387$ 元，对其中最大的 u_i 来说，$u_2 = 198 < 200$ 元，而已知 M 是一笔相当大的资金. 同时交易费率 p_i 的值也很小. 即使在 $x_i < u_i$ 时，以 u_i 来计算交易费与用 x_i 直接计算交易费相差无几. 所以，后

面我们具体计算时，为简化暂不考虑 u_i 的约束，都以 x_i 来代替 u_i 计算交易费. 这一小的误差将在后面的讨论中具体加以分析.

公司在问题一的情况下可对五种项目投资，其中银行无风险，收益 $r_0=5\%$ 为定值，在投资期间不会变动. 其它投资项目虽都有一定的风险，但收益可能大于银行利率. 我们拟建立一个模型，这个模型对一般投资者都适用. 并根据他们风险承受能力的不同提出多个实用于各种类型人的投资方案. (把投资者分为一冒险型，温和型与保守型，越积极冒险的人对风险损失的承受能力越强，用 c 作为指标来划分.)

由前面的分析已经知道，风险越大，利益可能越大. 所以，利益与风险是一对矛盾，我们根据公司要求，用多目标划来建模，力求利益大，风险小. 寻找一种令公司满意的方案.

设计第 i 种资产投入钱数占总金额 M 的比例为 x_i. 则投资期满所得净收益为 $\sum(x_ir_i-t_ip_i)$ 总风险以 S_i 项中所冒风险的最大值来考虑. 这是一个二目标线性规划模型.

问题二扩大了投资范围，首先我们根据问题一中所建模型对数据计算，取不同的 c 值，得到一组数据，这与前面的方法相同.

我们又对表 2 中的数据观察，发现数据极一规则，有些项目 x_i, q_i, p_i 的数值明显不符合投资要求，因而可在计算之前整体优化. 即对所给项目粗略去舍，再对剩余项目进行投资. 这将在模型的优化中加以讨论.

模型建立

当该公司对市场上的资产进行投资时，涉及到两个衡量投资方案好坏的标准，也即有两个目标：1. 净收益大； 2. 风险小.

我们设 z_1 为净收益函数

$$z_1=\text{收回资产时的总资产}-\text{投资时的总资产}$$

因此：

$$z_1=\sum_{i=0}^{n}x_i+\sum_{i=0}^{n}x_ir_i-1.$$

又因为此 $\sum\limits_{i=0}(x_i+t_ip_i)=1$ (同投资时交易费从 M 中扣去) 所以

$$z_1=\sum(x_ir_i-t_ip_i)\qquad \text{其中}\ t_i=\begin{cases}u_i, & x_i\le u_i,\\ x_i, & x_i>u_i,\end{cases}$$

同时，我们希望，所投第 i 项中最大风险越小越好. 以 z_2 表示风险函数.

$$z_2=\max\{x_iq_i/i=0,1,2,\cdots,n\}$$

综合以上分析，得出模型：模型 A: (双目标决策模型)

$$\max\{z_1=\sum_{i=0}^{n}(x_ir_i-t_ip_i)\},\qquad \min\{z_2=\max\{x_iq_i\},$$

$$\sum_{i=0}^{n}(x_i+t_ip_i)=1$$
$$\text{s.t.}\, x_i\ge 0.$$

该模型的非劣解集可以用线性加权法求出，但对于双目标决策来说，存在两个问题：

1. 两目标各自的权重不好任意决定；

2. 对本模型目标函数 z_2 难以处理，考虑到这两种情况，我们对模型 A 进行下面的简化.

引进一个参量 e. 表示投资者风险的承受能力. 由题意要求： $x_iq_i \le e$ 这样迫使投资分散，风险也就相应减小，从直观上来讲就是各个项目同时发生风险的概率不大. 防止了盲目的追求利益，是对风险的一种量化. 于是对

$$\min\{z_2 = \max\{x_iq_i\}\}$$

可以把目标函数 z_2 变成约束条件

$$x_iq_i \le e$$

在问题分析中，已经证明不考虑 u_i 的约束，对投资方案影响不大. 综合各种情况把模型 A 整个简化成以下模型.

模型 B

$$\max z_i = \sigma x_i(r_i - p_i)$$

$$\text{s.t} : x_iq_i \le e$$

$$sumx_i(1 + p_i) = 1$$

$$x_i \ge 0$$

这个模型是一个单目标的线性规划. 在给定的 e 值下，很容易求出此时的最优解，我们又根据各人的不同承受能力给出一系列 e 值，求出一系列最优解. 我们期望通过对这一系列点 (e, z) 的拟合，得出一个函数关系式 $z_1 = f(e)$, 从而由此拟合函数 $f(e)$, 运用数学方法可以求得一个合理的投资方案.

数据计算与分析

一、对问题 1 的计算与分析

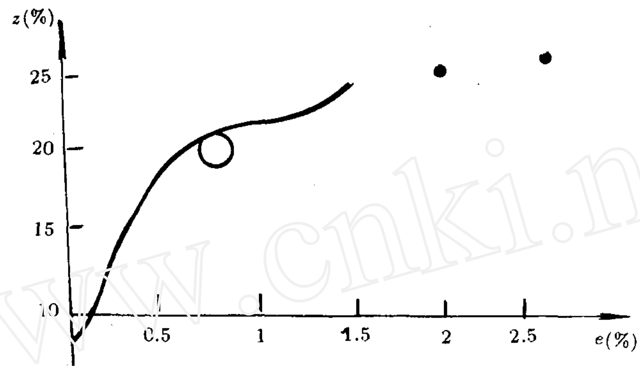
利用附表 A 的程序 (略) 在 mathmatica 软件包中解出对应于给定不同 e 的最优解，列表如下：

$e\%$ \ 投资项	z_1	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0.1	7.5528	0.8316	0.04	0.0667	0.0182	0.0385
0.2	10.1055	0.6633	0.08	0.1333	0.0364	0.0769
0.3	12.6583	0.4949	0.12	0.2	0.0545	0.1154
0.4	15.211	0.3266	0.16	0.2647	0.0727	0.1338
0.45	11.4874	0.2424	0.18	0.3	0.818	0.1731
0.5	17.7638	0.1582	0.2	0.3333	0.0909	0.01923
0.55	19.0402	0.074	0.22	0.3167	0.1	0.2115
0.6	20.1908	0	0.24	0.4	0.1091	0.2212
0.7	20.6607	0	0.28	0.4667	0.1273	0.1016
0.8	21.1043	0	0.32	0.5532	0.1271	0
0.9	21.552	0	0.36	0.6	0. 0233	0
1.0	21.902	0	0.4	0.5843	0	0
1.5	23.5392	0	0. 6	0. 3863	0	0
2.0	25.1763	0	0.8	0.1882	0	0
2.5	26.7327	0	0.9901	0	0	0

从表中数据可看出，e 越大，z_1 越大．即风险大，收益也大．这是合乎常理的．

通过对上述数据的分析，我们不妨把投资者大概分为三种类型，即：保守型、温和型、冒险型．由上表，我们还可以看出，当投资越分散时，投资者所承担的风险也越小，这与题意也是一致的，也即冒险型的投资者会出现集中投资的情况，而保守型的投资者则尽量分散的投资．

我们又对一系列坐标点 (e,z) 进行多项式拟合在六次的情况下，拟合状况，如下图所示：



所得的 $z-e$ 函数关系式为

$$z_1 = 7.2 - 9.1e + 162.2e^2 - 301e^3 + 235e^4 - 83.7e^5 + 11.2e^6$$

由图我们注意到：尽管当 e 增大时，z_1 也同时增大，但其增长势头也即 $f'(e)$ 在一定区间 $[e_1,e_2]$ 内迅速减少．

我们认为在 $f'(e)$ 发生相对剧烈变化的区间投资是合理的．因为在现实生活中，正常人不会多冒相对较大的风险去求取相对很少的收益，即这也就是指 $e>e_2$ 的投资区域，相反，也不会因为多冒相对很小的风险，而放弃相对增加很多的收益，这也就是指 $e<e_1$ 的投资区域．在这里，$f'(e)$ 可以理解为每一个单位风险所能获得的收益，又注意到 $f'(e)$ 在经过急剧减少后，$f'(e)$ 将会保持保持相对稳定，但 $f(e)$ 趋向水平也即每增加一个单位风险所能多获得的收益很小．

作为一个理性的投资者，我们确定以 $[e_1,e_2]$ 区间上曲率最大（也即 $f(e)$ 函数曲线最弯曲的点所对应的投资方案作为最佳的投资方案）．

即对于曲率公式

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

要求函数 K 取最大值时所对应的点，也就是最佳方案所对应的点．

从拟合曲线可估算出 $[e_1,e_2]$ 区间为 $[0.4,1]$ 区间，在 Mathematica 软件上计算可得 $e^*=0.74$．然而我们通过连接折线注意到拟合曲线在折线斜率急剧变化的区间拟合得不好，因而在这段区间上我们通过增加坐标点进行小区间拟合，，又通过 Mathematica 软件计算出，当 $e^{**}=0.592$ 时，其曲率最大，所以我们选择 e^{**} 为最优点，其对应的方案如下：

对第 i 项投资的金额	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
收益	0.0033	0.2368	0.3947	0.1076	0.2277

即在 $e^{**}=0.592$ 时，有一个最佳的投资方案．

二、对表二的计算与分析

利用附录程序 B 在 Mathematica 软件下解出对应于给定 e 的最优解 z_1，列表如下

e	0. 5	1.5	3	5	8	15	30
x_0	0. 8459	0.5376	0.0753	0	0	0	0
x_1	0.0119	0.0357	0.0714	0	0	0	0
x_2	0.0093	0.0278	0.0556	0.026	0	0	0
x_3	0.0083	0.025	0.05	0.0833	0.1333	0.25	0.5
x_4	0.0119	0.0357	0.0714	0.1190	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0.0128	0.0385	0.0769	0.1125	0	0	0
x_7	0.0083	0.025	0.05	0.0833	0.1333	0.25	0.4451
x_8	0.0149	0.0449	0.0898	0.1497	0.1739	0	0
x_9	0.0094	0.0281	0.0563	0.0938	0.1501	0	0
x_{10}	0.0125	0.0375	0.075	0.125	0.2	0.375	0
x_{11}	0.0161	0.0484	0.0968	0	0	0	0
x_{12}	0	0	0	0	0	0	0
x_{13}	0.0109	0.0326	0.0652	0.1087	0.1739	0.0829	0
x_{14}	0	0	0	0	0	0	0
x_{15}	0.0217	0.0652	0.1304	0	0	0	0
z_1	7.2714	11.8141	18.6283	26.6713	32.3891	35.0148	37.32

注　其余数据见附录(略).

由上表数据也可以看出，风险承受能力越大，收益也越大，而投资越分散，其对应的风险了就越小，这与表数据结果的分析结论是吻合的．同样，我们也可以对 (e,z) 点集进行拟合函数为:

$$z_1=3.43867+6.34598e-0.382283e2+0.000923e^3+0.000674e^4-0.000022e^5+2.16593\times10-7e^6$$

从而得到

$$e^*=7.40$$

在此情况下的最优投资方案为

$$(0,0,0,0.1233,0.0123,0,0,0.1233,0.2216,0.1388,0.185,0,0,0.1609,0,0)$$

对表 2 数据的计算与分析，验证了我们的模型适合于一般情形.

模型的优化

考虑到当投资项过多时，会使计算很复杂，因而我们在直接计算数据前对投资项目按一定标准进行估算，去掉一些明显的劣项，进而简化计算，我们这里以 (r_i-p_i) 作为净收益的估计值，以 q_i 作为风险的估计值．给定在两目标决策时净收益与风险的权重分别为 0.9 和 0.1，即 $0.9(r_i-p_i)-0.1q_i$ 作一个综合的估计值．从而对表 2 的数据进行估算，由上面的数据可以得出(1)、(11)、(12)、(15)，这几项是可以去掉的．然后，我们任选一 e $(e=1.5)$ 通过计算，$z^*=11.5269$．对在简化之前同等件下 $z=11.8141$，

S_i	$\frac{r_i-p_i}{q_i}$	数学期望
1	0.178	2.55
2	0. 283	8.37
3	0.723	33.06
5	0.5533	15.96
6	0.417	0.33
7	0.516	24.79
8	0.841	21.92
9	0.58	22.48
10	0.848	26.51
11	0.216	2.93
12	0.6	2.42
13	0.762	24.47
14	0.925	3.88
15	0.319	4.34

我们可以得出，删除一些，劣等投资项目后，会对 z 以及 x_i 产生影响，但对收益 z 的影响不大，可计算出相对误差 $= (11.8141 - 11.5269)/11.8141 = 0.024$，而当投资项目众多，而又有一定数量的劣等投资项目时，这件方法对计算的简化是非常明显的.

模型的讨论

一、拟合状况对最优投资方案的影响

由于是以拟合曲线在一定范围内曲率最大的点所对应的方案，为最佳方案，但是考虑到在实际中拟合曲线，存在一定的误差，因而我们所选取的方案不一定是一般情况下最好的方案，但必定在最优方案的附近. 为了解决这个问题，我们可以将各坐标点用线段连接起来，通过分析可以得到各线段，斜率变化相对剧烈的区间，进而在这个区间内通过减小 c 的步长来增加坐标点然后在这个区间内进行第二次拟合，再用同样的方法可以求出区间内曲率，最大的一点. 从而得到一般情况下的最好方案.

二、稳定性的讨论

灵敏度讨论：在我们所建立的线性规划模型 B 中，假定参数 r_i, q_i 都是常数，但实际上这些系数往往是估计值和预测值，市场和人为因素对这类参数的确定有一定影响，当 r_i, q_i 有微小变化时，目标函数的变化是否会很大？因此需要进行灵敏度分析.

不妨在 $c = 0.05$ 时，使 r_i 与 q_i 有小的增长，求出目标函数 f 变化幅度并列表如下：

r 增长幅度	q 增长幅度	f 值变化幅度
1%	0	1.1%
2%	0	2.2%
5%	0	5.5%
10%	0	11%
0	0	−0.7%
0	2%	−1.4%
0	5%	−3.4%
0	10%	−6.5%
10%	10%	3.4%
5%	10%	1.5%

对该表数据进行分析可知，r_i、q_i 微小变化对目标函数影响不大，表明我们的模型通过了灵敏度检验，具有实用价值.

三、对 u_i 的讨论

在模型中，我们没有考虑 u_i 对交易费的影响，从而简化了模型. 由条件可知，当满足 $x_iM \geq u_i$ 时，可以对 u_i 忽略不计，通过对数据的计算可知，在 M 相当大的情况下，x_i 都能满足上述条件，因而我们认为一般情况下 u_i 对模型的影响非常小，所以在计算时忽略它是比较合理的.

附 录(略)

参 考 文 献

[1] 钱颂迪等，运筹学，清华大学出版社，北京， 1990.
[2] 周汉良，范玉妹，数学规划及其应用，冶金工业出版社，北京， 1985.
[3] 陈雨露，赵锡军，金融投资学，中国人民大学出版社，北京， 1996.
[4] 李庆扬等，数值分析，华中理工大学出版社，武汉， 1996.