

文章编号:1005-3085(2007)08-0138-07

## 手机“套餐”资费问题的评价与优化设计模型

韩中庚

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450002)

**摘 要:** 本文的问题是2007年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛的C题。首先, 文章建立了手机“套餐”资费问题的评价与优化设计模型, 并给出了求解结果, 最后对评卷的具体情况做了简要的评述。

**关键词:** 手机套餐; 套餐资费; 边际效能; 优化模型

**分类号:** AMS(2000) 90C05

**中图分类号:** O221

**文献标识码:** A

### 1 问题的提出

对于手机资费问题一直是人们关心的热点问题, 多少年来手机资费始终没有实质性变化。但是, 2007年以来先后有上海、北京等地的移动和联通两大运营商都相继推出了所谓的“手机单向收费方案”——各种品牌的套餐, 广大手机用户好像是看到了单向收费的希望。事实上, 运营商都是以所谓的套餐形式推出的, 手机套餐的花样实在多得惊人, 如北京的“99套餐”; 上海“68套餐”等等。于是, 人们不禁要问: “手机套餐究竟优惠几何?” 正是在这样的背景下竞赛题针对北京的“99套餐”和上海的“68套餐”提出了四个具体的问题。

### 2 问题的分析

首先, 我们知道各地的套餐都是针对全球通用用户, 其他的手机用户无效。同时, 注意到北京、上海的套餐都是针对本地通话费, 而没有涉及长途通话费。虽然套餐优惠都是针对本地通话费, 但在具体内容上还是有区别的。即北京的套餐内有主叫和被叫之分, 而上海的套餐没有区分主叫和被叫, 对此分别进行分析研究。判断一个套餐方案的优劣, 从经济学的角度, 应该考虑投入与产出的费效比, 即根据费效分析法, 一个好的方案应该使得费效比尽量的大<sup>[1]</sup>。

注意到各套餐方案都与全球通50元的基本费无关, 为此不考虑这部分费用; 因套餐对漫游无效故不考虑漫游; 套餐用户都达到套餐规定的最低通话量, 否则也按最低通话量计算。

### 3 问题的模型建立与求解

#### 3.1 问题(1)的比较分析模型

根据各种套餐的设置方案, 所述的本地主叫通话时间  $T$  包括拨打本地电话的时间和直接拨打国内异地电话时间、国际长途电话时间、港澳台长途电话的时间, 分别记为  $t_1, t_2, t_3, t_4$ ; 以及用 IP 拨打国内异地长途电话、国际长途电话、港澳台长途电话的通话时间, 分别记为  $I_1, I_2, I_3$ 。即

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + I_1 + I_2 + I_3, \quad (1)$$

为此, 一个套餐用户的本地主叫通话费用为

$$P_b = \begin{cases} P_0, & T \leq T_0, \\ P_0 + p_0(T - T_0), & T > T_0. \end{cases} \quad (2)$$



其中  $P_0$  表示套餐月租费,  $T_0$  表示套餐内包本地通话时间,  $p_0$  表示套餐内本地主叫通话费(元/分钟)。对全球通的原来资费方案的记费标准, 每次通话的本地主叫通话费计算方法为

$$Q_b^{(1)} = 0.4T = 0.4(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + I_1 + I_2 + I_3), \quad (3)$$

一段时间的总本地主叫通话费为  $Q_b = \sum Q_b^{(1)}$ 。则每一次通话的总费用为

$$Q_z^{(1)} = Q_b^{(1)} + p_1 \left\lfloor \frac{60t_2}{6} \right\rfloor + p_2 \left\lfloor \frac{10t_3}{6} \right\rfloor + p_3 \left\lfloor \frac{10t_4}{6} \right\rfloor + p_4 [I_1] + p_5 [I_2] + p_6 [I_3] + p_7 [m], \quad (4)$$

其中  $\lfloor \cdot \rfloor$  表示向上取整运算。 $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 分别表示直拨国内、国际、港澳台的长途的单价,  $p_i$  ( $i = 4, 5, 6$ ) 分别表示用 IP 拨打国内、国际、港澳台长途的单价。根据目前的记费标准, 国内长途分闲时和忙时, 闲时 00:00 ~ 7:00 为优惠时段, 其他时间为忙时, 优惠时段国内长途为 0.04 元/6 秒钟, 国际长途 0.48 元/6 秒钟。国际 IP 长途按不同的国家资费不同, I 类国家(美国、加拿大)为 2.40 元/分钟、II 类国家(英国、法国、意大利、德国、新西兰、韩国、日本、澳大利亚、新加坡、马来西亚、泰国、印尼、菲律宾)为 3.60 元/分钟、其他国家为 4.60 元/分钟。 $p_7$  表示漫游通话单价,  $m$  表示国内漫游通话时间。具体的取值为

$$p_1 = \begin{cases} 0.04, & 0:00 \sim 7:00, \\ 0.07, & 7:00 \sim 24:00, \end{cases} \quad p_2 = \begin{cases} 0.48, & 0:00 \sim 7:00, \\ 0.60, & 7:00 \sim 24:00, \end{cases} \quad p_3 = 0.2,$$

$$p_4 = 0.3, \quad p_5 = \begin{cases} 2.40, & \text{I 类国家,} \\ 3.60, & \text{II 类国家,} \\ 4.60, & \text{其他国家.} \end{cases} \quad p_6 = 1.50, \quad p_7 = 0.60.$$

则任一段时间的总通话费用为

$$Q_z = \sum Q_z^{(1)}. \quad (5)$$

#### 1) 北京的“99套餐”方案

对于北京的“99套餐”用户而言, 每一次本地的主叫通话费由(1)式和(2)式确定, 而该用户的每月总的通话费用为

$$P_z = P_0 + P_c, \quad (6)$$

这里  $P_0$  分别为 99, 139, 199, 299(元); 相应的  $T_0$  分别为 280, 560, 1000, 2000(分钟)。 $P_c$  为非本地通话费用的总和, 即每一次通话的费用为

$$P_c^{(1)} = p_1 \left\lfloor \frac{60t_2}{6} \right\rfloor + p_2 \left\lfloor \frac{10t_3}{6} \right\rfloor + p_3 \left\lfloor \frac{10t_4}{6} \right\rfloor + p_4 [I_1] + p_5 [I_2] + p_6 [I_3] + p_7 [m], \quad (7)$$

其中  $p_4 = 0.1$  元/分钟, 其他都与(4)式相同。则  $P_c = \sum P_c^{(1)}$ 。

对于北京的全球通用户根据自己以往通话量, 可以考虑选择还是不选择套餐方案, 在确认要选用套餐时又适合选择何种方案? 同时注意到四种套餐方案的月租费  $P_0$ , 即相当于用原方案的通话量 ( $P_0/0.4$ ) 分别为 247.5, 3347.5, 497.5, 747.5(分钟)。则有如下结论:

当一个用户每月的本地主叫通话费  $Q_b < 99$  元时, 则该用户不适宜选择任何一种“套餐”方案; 否则, 该用户应根据每月本地主叫通话量  $T$  的多少选择适宜的一种套餐方案:



- 1) 当  $247.5 \leq T < 347.5$  时, 则该用户
  - 2) 当  $347.5 \leq T < 497.5$  时, 则该用户适合选择“139套餐”方案。
  - 3) 当  $497.5 \leq T < 747.5$  时, 则该用户适合选择“199套餐”方案。
  - 4) 当  $T \geq 747.5$  时, 则该用户适合选择“299套餐”方案。
- 用户可以用(5)(6)和(7)式来核算比较相应总的通话费用。

## 2) 上海的“68套餐”方案

对于上海的套餐用户而言, 本地的通话(含主被叫)量为

$$T = T_1 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + I_1 + I_2 + I_3,$$

则套餐用户的本地通话费用可用(2)式计算。每月的总通话费用计算方法与(6)和(7)式相同, 在(7)式中  $p_4 = 0.30$  元/分钟, 其他不变。上海的全球通用用户根据自己以往通话量, 可以决定是否选择套餐方案, 在确认选用时又选择何种套餐? 同时注意到三种套餐方案的月租基本费  $P_0$ , 即相当于用原方案的通话量 ( $P_0/0.4$ ) 分别为 170, 320, 420(分钟)。则有如下结论:

当一个用户每月的本地主叫通话费  $Q_b < 68$  元时, 则该用户不适宜选择任何一种套餐方案; 否则该用户应根据每月本地主叫通话量  $T$  的多少选择适宜的一种套餐方案:

- 1) 当  $170 \leq T < 320$  时, 则该用户适合选择“68套餐”方案。
- 2) 当  $320 \leq T < 420$  时, 则该用户适合选择“128套餐”方案。
- 3) 当  $T \geq 420$  时, 则该用户适合选择“168套餐”方案。

用户可以用(5)(6)和(7)式来核算比较相应总的通话费用。

## 3.2 问题(2)的评价模型

### 1) 北京的“99套餐”方案的评价分析

首先将北京的四种套餐方案与原方案作一比较, 四种套餐方案的最低消费额分别为 99, 139, 199 和 299 元。只要主叫时间不超过相应的包打时间  $T_0$ , 不另计费, 超过部分按相应的标准  $p_0$  元/分钟计费。如果用户本地主叫时间达不到时间  $T_0$ , 则同样也按  $T_0$  计算, 当月核算, 不可累计。事实上, 对于各套餐方案都有  $P_0/T_0 \approx p_0$ , 即套餐内的本地主叫通话费基本与套餐外的主叫通话费相同。国内 IP 长途通话费为 0.10 元/分钟, 每分钟比原方案优惠 0.20 元。而原方案没有最低消费, 不打电话不交费, 多打电话多交费, 但其通话费用相对较高, 并且是双向收费, 长途通话费用也相对较高。四种套餐方案都体现了“薄利多销”的经营策略。

为了分析比较各方案的优劣及合理与否, 在这里采用经济学中费效分析方法。首先考虑到各套餐方案所交费用的不同, 产生的效果(优惠幅度)也不同, 即费效不同。对于北京的四种套餐方案优惠的项目有本地主叫、本地被叫和国内 IP 长途费用三项, 但事实上, 套餐内包打本地的时间正好就是所交费用按相应标准的通话时间, 即套餐内外的资费标准是相同的。各方案的效能定义为

$$\text{套餐方案效能} = \text{原方案的资费} - \text{套餐方案的资费}.$$

具体各方案的结果如下表 1 所示。

表 1: 北京各套餐方案的效能对照表

方案	套餐月租	本地主叫优惠	本地被叫优惠	本地通话平均优惠 ( $c_1$ )	单位: 元/分钟 IP 国内长途优惠 ( $c_2$ )
99	99	0.05	0.40	0.225	0.20
139	139	0.15	0.40	0.275	
199	199	0.20	0.40	0.30	
299	299	0.25	0.40	0.325	



由于原方案本地主、被叫的资费相同, 均为 0.40 元, 通常情况下, 全球通手机用户的主被叫的机会基本相同, 为此本地通话费可以取二者的平均值。IP 国内优惠数为 0.20 元/分钟。根据信息产业部公布的 2006 年的统计数据表明, 2006 年全年手机用户总通信量为 18357.3 亿分钟, 具体的各类通信数据如下表 2 所示。

表2: 2006 年全国手机用户的通信量

通信类别	本地通信	IP 国内 长途	IP 港澳台 长途	IP 国际 长途	直拨国 内长途	直拨港澳 台长途	直拨国 际长途
通信量(亿分钟)	15882.7	1465.6	12.3	10.7	977.8	4.0	4.2
占总量的百分比 ( $w_i$ )	0.86598	0.07984	0.00067	0.0058	0.05326	0.00023	0.00022

取各类通信时间的比率作为相应的权值, 即本地通信量、IP 国内长途的权值分别为  $w_1, w_2$ 。为此定义各套餐方案的综合效能函数为  $W = w_1c_1 + w_2c_2$ , 则相应的各方案费效比为  $W/P_0$ 。费效比主要反映用户投入与收益效果的指标。而对运营商来说, 判断一个方案优劣通过一个收益指标来反映, 在此定义为

$$A = w_1(0.4x_1 + 0.6x_2) + w_2x_3,$$

其中  $x_1, x_2, x_3$  分别表示本地主叫、本地被叫、国内 IP 长途费用单价。指标  $A$  反映一个方案对运营商的相对效益的大小。具体计算结果如下表 3 所示。

表3: 北京各套餐方案的综合效能和费效比

方案	套餐月租费 ( $P_0$ )	综合效能 ( $W$ )	效能比 ( $W/P_0$ )	收益指标 ( $A$ )	方案优劣排序
99	99	0.2108	0.0021	0.12922	1
139	139	0.2541	0.0018	0.09458	2
199	199	0.2758	0.0014	0.07727	3
299	299	0.2974	0.000995	0.05994	4

由结果可知, 四种套餐优劣排名是依次排列的, 说明该套餐方案的设计还不尽合理。

## 2) 上海的“68套餐”方案的评价分析

将上海的三种套餐方案与原方案作分析比较。三种套餐方案的最低消费额分别为 68, 128, 168 元, 只要本地通话时间不超过相应的时间  $T_0$ , 不另记费, 超过部分主叫按相应的  $p_0$  元/分钟记费。本地通话时间达不到  $T_0$ , 也按  $T_0$  计算。事实上, 对三种套餐内的本地通话费 ( $P_0/T_0$ ) 分别为 0.19, 0.16, 0.14 (元/分钟)。同原方案比较, 类似于北京的套餐方案, 相应地效能指标如下表 4 所示。

表4: 上海各套餐各方案的效能对照表

单位: 元/分钟

方 案	套餐月租 费(元)	套餐内本地 主被叫资费	套餐内本地主被 叫优惠数 ( $c_1$ )	套餐外本地 主叫资费	套餐外本地主 叫优惠数 ( $c_2$ )	套餐外本地被 叫优惠数 ( $c_3$ )
68	68	0.19	0.21	0.18	0.22	0.40
128	128	0.16	0.24	0.16	0.24	0.40
168	168	0.14	0.26	0.13	0.27	0.40

该套餐只对本地的通话费用有优惠, 而其他项目均与原方案相同。但从这些指标可知, 套餐内并不是单向收费, 套餐外为单向收费, 其效能的计算方法同北京的套餐效能相类似。考虑到主



叫与被叫机会基本相同的情况,但人们更偏重于接听免费的影响;同时套餐内的影响应稍大于套餐外的影响。为此,在此取效能函数为

$$W = w_1[0.6c_1 + 0.4(0.4c_2 + 0.6c_3)],$$

类似地,定义运营商的收益指标为

$$A = w_1[0.6x_1 + 0.4(0.4x_2 + 0.6x_3)] + w_2x_4,$$

其中  $x_1, x_2, x_3$  分别表示套餐内本地主被叫、套餐外本地主叫、套餐外本地被叫、国内 IP 长途费用单价。对三种方案的具体情况进行计算,相应各方案的效能  $W$ , 费效比  $W/P_0$  的指标值和运营商的收益指标值  $A$  如下表 5 所示。由结果可知,三种套餐优劣排名是依次排列的。

表5: 上海各套餐方案的综合效能和费效比

方案	套餐月租费 ( $P_0$ )	综合效能 ( $W$ )	效能比 ( $W/P_0$ )	收益指标 ( $A$ )	方案优劣排序
68	68	0.2227	0.0033	0.1476	1
128	128	0.2411	0.0019	0.1293	2
168	168	0.2556	0.0015	0.1147	3

### 3.3 问题(3)的评价方法

北京移动公司 2007 年 5 月 23 日又推出了所谓的全球通“被叫全免费计划”方案,实质上也是一个套餐方案,同样也不是真正的单向收费方案。用上述问题(2)的方法类似地可以说明,对多数一般的用户并不合算,它适用于本地通话量较大的用户。

### 3.4 问题(4)的方案设计模型

一个合理的套餐方案,就应该是使得费效比或边际效能尽量的大,无论是从运营商,还是从用户的角度都是合理的。为此,根据北京、上海的实际情况,在已有套餐方案的基础上来设计更合理的套餐方案。

#### 1) 北京的“套餐”方案的设计

根据北京已有的套餐方案,在这里还是不考虑套餐内和套餐外的区别,同样不考虑国际和港澳台的长途通话优惠问题。假设决策变量  $x_1, x_2, x_3$  分别表示套餐方案中本地主叫通话、本地被叫通话、IP 国内长途通话单价。 $P, T$  分别表示套餐的月租费和包打本地通话时间。要设计一个新的方案,是在保证运营商的收益降低不超过 10% 的前提下,尽量让用户有更大收益。根据边际效能最大的原则,建立下面的优化模型

$$\begin{aligned} \max z &= \frac{1}{P} \{w_1[0.4(0.4 - x_1) + 0.6(0.4 - x_2)] + w_2(0.3 - x_3)\} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} w_1(0.4x_1 + 0.6x_2) + w_2x_3 \geq 0.9A, \\ A = w_1(0.4p_1 + 0.6p_2) + w_2p_3, \\ P/T \leq x_1 \leq 0.4, \quad 0 \leq x_2 \leq x_1, \quad 0.1 \leq x_3 \leq 0.3, \\ P = 99, 139, 199, 299, \quad T > 0, \quad \text{且为整数.} \end{cases} \end{aligned}$$

这是一个简单的规划模型,用 LINGO<sup>[2]</sup> 求解所得最优方案如下表 6 所示。由结果可知,现行四种套餐方案设计是不太合理的,即应该在保证运营商的利益不受太大损失的前提下,尽量让利给消费者,这样更能吸引更多的用户使用套餐。关于套餐月租费设置是另外的问题,譬如取  $P = 66, 166, 266, 366$  或  $P = 88, 188, 288, 388$ , 则可以得到相应的“66 套餐”和“88 套餐”等等。



表6: 北京更好的套餐方案

方 案	套餐月租费 ( $P_0$ )	包本地主叫 时间(分钟)	本地主叫 资费(元/分钟)	本地被叫 资费(元/分钟)	国内 IP 长途 资费(元/分钟)	费效比 ( $W/P_0$ )
99	99	371	0.27	0	0.30	0.00257
139	139	787	0.18	0	0.30	0.00205
199	199	1512	0.13	0	0.30	0.00151
299	299	3453	0.09	0	0.30	0.00106

## 2) 上海的“套餐”方案的设计

根据上海现有的套餐方案, 假设决策变量  $x_1, x_2, x_3, x_4$  分别表示套餐内本地主被叫通话、套餐外本地主叫通话、套餐外本地被叫通话、IP 国内长途通话的单价。P, T 分别表示套餐的月租费和包打本地通话时间。则类似地有下面的优化设计模型

$$\begin{aligned} \max z &= \frac{1}{P} w_1 \{0.6(0.4 - x_1) + 0.4[0.4(0.4 - x_2)0.6(0.4 - x_3)]\} + \frac{1}{P} w_2 x_4 \\ \text{s.t.} &\begin{cases} w_1[0.6x_1 + 0.4(0.4x_2 + 0.6x_3)] + w_2x_4 \geq 0.9A, \\ A = w_1[0.6p_1 + 0.4(0.4p_2 + 0.6p_3)] + w_2p_4, \\ P/T \leq x_1 \leq 0.4, \quad x_1 \leq x_2 \leq 0.4, \quad 0 \leq x_3 \leq x_2, \quad 0.1 \leq x_4 \leq 0.3, \\ P = 68, 128, 168, \quad T > 0, \quad \text{且为整数.} \end{cases} \end{aligned}$$

用 LINGO 求解所得最优方案如表7所示。与上海的现行套餐方案进行比较可知, 现行的三种套餐方案设计的也是不尽合理。这里关于套餐月租费 P 的取值也可取其他的数值, 从而可得到相应的方案。从这些方案可知, 在保证运营商的利益没有受太大损失的情况下, 对用户还有很大的优惠空间。

表7: 上海更好的套餐方案

方 案	套餐月租 费 ( $P_0$ )	包本地主 被叫时间	套餐内本地 主被叫资费	套餐外本地 主叫资费	套餐外本地 被叫资费	国内 IP 长途资费	费效比 ( $W/P_0$ )
68	68	509	0.13	0.40	0	0.10	0.00349
128	128	1200	0.11	0.40	0	0.10	0.00197
168	168	1895	0.09	0.40	0	0.10	0.00155

## 4 对手机“套餐”优惠几何问题答卷的评述

手机“套餐”优惠几何问题今年被用作全国大学生数学建模竞赛乙组的竞赛题, 并且赛后参加了全国和湖北、湖南及河南赛区的评卷工作, 当中评阅了很多同学的参赛论文, 我的感受是有喜也有忧。今年乙组参赛队全部是由在校专科学子组成的, 参赛论文的整体水平都有很大的提高, 这是让人高兴的事。同时, 在具体问题上对问题的细节和关键环节把握上还有不尽人意的地方。具体表现有以下几个方面:

1) 手机资费问题几乎涉及到在校学生的每一个人, 但从完成的论文来看, 并不是参赛学生都对这个生活中的问题都能认识清楚, 而且都能够把有关的资费问题算得明白。尤其是手机套餐都涉及到本地通话费问题, 而对“本地通话费”包含哪些内容, 真正算清楚的不多。就题



目的第一问而言,虽然所有的参赛队都给出了各种各样的计算公式或方法,但准确、全面的也不多见。

2) 关于对各套餐方案适应于什么用户的讨论,大都根据用户通话时间的多少给出了相应的结论,但多数答卷在时间段的化分上不够准确。

3) 第二问要求对各套餐方案与现行的方案进行分析、比较和评价。注意到,实际中要评价一个方案的优劣,总是应该有一个全面评价方案优劣的指标,指标应综合考虑到移动公司和用户两个方面的利益,单纯考虑一个方面的利益是不太合适的。可喜地是很多论文都定义了相应的指标,例如有的用“方案的费用差”、“方案的通话费率”、“方案的优惠度”等等作为评价指标,都有一定的意义,但多数是只站在了用户的利益上,不尽合理。

4) 在这个问题中有不少的参赛队用了层次分析和模糊评判等方法,这里似乎有一个错觉,一遇到有关“评价”字眼的问题就想到用这些方法,不考虑方法的适用与否。事实上,这个问题似乎不适合用这些方法。这也值得引起我们指导老师的注意,在给学生讲各种建模方法的同时,也应该告诉学生相应的方法适用于解决什么样的问题。

5) 题目的第四问是要求在北京和上海现有套餐的基础上设计更合理的套餐。可行的方法应是在第二问评价结果的基础上,建立优化模型,通过求解得到“更合理”的方案。在全国的参赛答卷中,我们看到了有不少的答卷给出了形式各异的优化模型,也得到了相应的结果。但多数都是在现有套餐方案的基础上直观地修改一些指标得到新方案,一般认为这种结果缺少说服力。

6) 在全国的参赛论文中,还有的用到了一些比较有创意的方法,如几何图形法、抽样理论、数据模拟和经济学中效用理论、边际分析、剩余理论等方法。

## 5 结束语

手机套餐优惠几何作为赛题是属于一个“即时性”的问题,也紧跟社会的热点,与老百姓的生活密切相关,这也反映出数学建模的问题来自于实际、应用于实际的特点。从竞赛结果来看,这个题目对于在校的专科学子来说,无论是从题型、知识面,还是解题方法应是合适的。

2007全国大学生数学建模竞赛活动圆满的结束了,这项赛式已走过了第16个年头,作为一个从事这项工作十多年的建模爱好者,看到现在全国数学建模活动的发展规模和水平,让人由衷的高兴和欣慰。在此,也衷心地祝愿全国大学生数学建模活动更健康有序地发展,不断地提高水平,为国家培养更多的创新型高素质人才服务。

致谢:全国组委会的专家在命题讨论过程中给予了很多指导和帮助,特别是清华大学的姜启源教授和北京大学的孙山泽教授,在一些具体的细节问题上提出了很多建设性的意见,在此,一并表示感谢。

## 参考文献:

- [1] 韩中庚. 数学建模方法及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005
- [2] 谢金星, 薛毅. 优化建模与LINDO/LINGO软件[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005

## The Evaluation Model and Optimal Design about the Problem of How Many Benefits A Package Deal Offers

HAN Zhong-geng

(Institute of Information Engineering, Information Engineering University, PLA, Zhengzhou 450002)

**Abstract:** In this paper, according to the grading process of problem C of 2007 Higher Education Press Cup CUMCM, we establish the evaluation model and optimal design model about the problem of how many benefits a package deal offers, the results of the problem are obtained. At last the brief comments are given about correcting specific cases.

**Keywords:** handset packages; package deal offer; marginal effectiveness; optimal model