第 28 卷 第 1 期　　数学的实践与认识　　Vol. 28 No. 1
1998 年 1 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan., 1998

截断切割中的最优排列问题

俞文鮆
（华东理工大学应用数学研究所，上海 200237）

谭永基
（复旦大学数学系，上海 200433）

最优排列问题广泛地出现在生产作业调度中，出现在各种生产实践与日常生活中，1997 年全国大学生数学建模竞赛 B 题就是一例．在本文中，我们结合阅卷情况，简述一些有关该题解答的要点．

一、关于建立数学模型与计数

先将该题大略复述如下：

从一个长方体加工出一个尺寸与位置预定的长方体（这二个长方体的对立表面是平行的），通常要经过六次截断切割．设水平切割单位面积的费用是垂直切割的 fr 倍；且当先后二次垂直切割的平面（不管它们之间是否穿插水平切割）不平行时，因调整刀具需额外费用 fe．试设计一种切割方式，使加工费用最少．

设这六个切割面分别位于左、右、前、后、上、下，可将它们相应的编号为 1 、2 、3 、4 、5 、6．这样，一个切割方式就可以表示为加工面 $f\{1,2,3,4,5,6\}$ 的一个排列，这种排列的全体记为 fP_6，其中任一排列可记为 $f\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6$．根据题意，目标函数 $ff(\sigma)$ 定义在 fP_6 上．作为总的切割费用，$ff(\sigma)$ 包括二部分，一部分是加权切割面积之和，另一部分是刀具调整费用之和．为了清楚地表达题意，在建立数学模型时，应尽量将 $ff(\sigma)$ 用显式写出．从体现变量依赖关系的角度来看，我们有：

$$f(\sigma)=\sum_{i=1}^{6} w(\sigma_i)S(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i)+q(\sigma)e, \tag{1}$$

其中 $f\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6$，各项含义如下：

$fS(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i)$ 表示在加工面 $f\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{i-1}$ 进行切割之后，加工面 $f\sigma_i$ 的切割面积．

$fw(\sigma_i)$ 为相应切割面的权，根据题意有：$fw(1)=w(2)=w(3)=w(4)=1$, $fw(5)=w(6)=r$.

$fq(\sigma)$ 为加工面排列 $f\sigma$ 所相应的刀具调整次数．记 $f\sigma'$ 为 $f\sigma$ 中将 5 与 6 移去的排列，称为 $f\sigma$ 的简约排列，如 $f\sigma=(1,5,3,4,6,2)$，有 $f\sigma'=(1,3,4,2)$．显然 $fq(\sigma)$ 只与 $f\sigma'$ 有关，仍记 $fq(\sigma')$．根据题意，有

$$q(1234)=q(3412)=1,\qquad q(1342)=q(3124)=2,\qquad q(1324)=q(3142)=1.$$

关于 $ff(\sigma)$ 的上述表示形式中，$fS(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i)$ 是某状态下加工面 $f\sigma_i$ 的切割面积．它可由原始长方体经加工面 $f\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{i-1}$ 进行切割之后所得的长方体的几何尺寸给出（与它们的次序无关，请思考）．这些几何尺寸可用递推的形式写出来，进一步的描述在这里从略．

于是，我们可以把问题归结为在 fP_6 上求 $ff(\sigma)$ 的最小化问题．当然，也可采用动态规划或最短路线的图论模型来描述该问题，但关键是要把可行域与目标函数描述清楚．

例　可用二进制向量 $f(x_1,x_2,\cdots,x_6)$ 来描述切割过程中的状态，其中 $fx_i=0$ 表示加工面 fi 未被切割，$fx_i=1$ 表示加工面 fi 已被切割；这样，恰有 fk 个加工面已被切割的状态集合便是

$$\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_6)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{6}x_i,\ x_i=0\text{或}1\right\}$$

它可作为切割过程的第 k 个阶段，进一步的描述亦从略.

在问题 $\min\{f(\sigma)|\sigma\in P_6\}$ 中可行域的规模为 $|P_6|=720$，也就是不同切割方式的总数. 由于相邻二个平行面的次序交换不影响总费用 $f(\sigma)$，在此观点下，可将可行域的规模缩小为 426，该数字可由容斥原理算得. 同时，考虑切割面 k 离开相应边界面的距离 h_k，把它称为切割厚度. 不失一般性，可以假设：

$$h_1 \geq h_2, \qquad h_3 \geq h_4, \qquad h_5 \geq h_6. \tag{2}$$

当 (2) 式不成立时，假如 $h_1<h_2$，则把左右次序交换一下便可，其余可类似处理. 在成立 (2) 时，我们只需考虑 P_6 的一个子集，即只考虑 1 在 2 前、3 在 4 前、5 在 6 前的那些排列；该子集的规模为 $720/2^3=90$. 进一步减少规模的分析，将在 (三) 中叙述.

二、关于 $e=0$ 时的优化方法

这时的优化准则为：将 $h_1,h_2,h_3,h_4,h_5/r,h_6/r$ 排列成简单不增序列，相应的指标序列即为切割面的最优序列.

通过计算实验，是发现这个准则的一个途径. 在证明中，不妨设 $r=1$，否则在垂直方向作一个因子为 $1/r$ 的变换. 其切割面积和的最小化相当于原来的加权面积和最小化. 这样，在证明中便不妨假设 $w(i)=1\ (i=1,2,\cdots,6)$. 同时现在考虑 $e=0$ 的情形，于是 (1) 式成为：

$$f(\sigma)=\sum_{i=1}^{6} S(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i), \tag{3}$$

其中 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6$.

下列性质被称为相邻交换原则：设 $\sigma=(\cdots,k,j,\cdots)$，$h_j\geq h_k$，将相邻加工面 k 与 j 交换后得 $\sigma'=(\cdots,j,k,\cdots)$，则对 (3) 给出的函数，必定成立

$$f(\sigma')\leq f(\sigma). \tag{4}$$

在证明这个原则后，就可以得到上述优化准则了. 这是因为，从任何一个最优解出发，如 h_j 最大，切割面 j 通过交换总可调整至第一位，由于 (4) 式，可保持为最优解；对 h_i 次大者，亦可以这样做，等等.

以下是相邻交换原则的简单证法. 设相应于切割方式 $\sigma=(\cdots,k,j,\cdots)$ 中加工面 k，j 的切割面积为 S_k，S_j，设相应于切割方式 $\sigma'=(\cdots,j,k,\cdots)$ 中加工面 j，k 的切割面面积为 S_j'，S_k'. 由几何直观可知

$$h_kS_k+h_jS_j=h_jS_j'+h_kS_k'. \tag{5}$$

事实上，上式二者均等于在加工方式 σ (或 σ') 之下加工面 k 与 j 被切割之前与被切割之后的体积差. 由 (5) 移项即得

$$h_k(S_k-S_k')=h_j(S_j'-S_j)>0,$$

由 $h_j\geq h_k$ 及上式，我们得到 $S_k-S_k'>S_j'-S_j$，即

$$S_j'+S_k'\leq S_k+S_j. \tag{6}$$

但 $f(\sigma')-(S_j'+S_k')$ 与 $f(\sigma)-(S_k+S_j)$ 所含有的各项均相同，于是从 (6) 便有结论 (4). 当然，从有关四个切割面积的表达式着手，也可证明 (6) 式.

由 (5) 及 $h_j\geq h_k$ 得出 (6)，相关条件是 $S_k>S_k'$. 个别参赛队提到，这个结论可以推广到多项相加的情形. 我们认为，这是没有根据的，除非能发掘足够的相关条件.

逐项选择最小费用切割面的准则，可以用例子说明不能达到最优，但较之随机选择切割面，还是要好些.

三、关于 $e \neq 0$ 时的优化方法

用表达式 (1) 建立截断切割的数学模型之后，通常可采用穷举法或分支定界法来求解. 在用分支定界法求解时，每一分支相当于前面几个面的切割方式已经确定的情形. 这时，后面几个切割面还可以用多种方式排列，相应费用的下界可由二部分和来表示. 一部分为加权切割面的面积之和，它可由 $e=0$ 时的优化准则得到，另一部分为刀具调整费用的下界，它总是零或 e.

借助于 $e=0$ 时的解来求 $e\neq0$ 时的解，是一种更为简便的方法. 当 $e=0$ 时的最优解 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6$ 的刀具调整次数 $q(\sigma)$ 为 1 时，σ 使 (1) 中的二项同时达到最小值. 因此 σ 亦必然使 (1) 达到最小. 当 σ 的刀具调整次数 $q(\sigma)$ 为 2 时，则只能断言 σ 使 (1) 在所有刀具调整次数大于 1 的切割方式中达到最小. 为求 (1) 的整体最小，还补充考虑刀具调整次数 $q(\sigma)$ 为 1 的切割方式. 前面提及，不妨设 (2) 式成立. 这时，可只考虑 1 在 2 前、3 在 4 前、5 在 6 前的那些切割方式. 在刀具调整次数为 1 时，在那些切割方式中，加工面 1、2、3、4 的排列方式只可能是 1234 与 3412.

然后将加工面 5 与 6 按照相邻交换原则插入到适当的位置，可得若干个候选的切割方式，它们相当于一定意义的局部解. 这些局部解与上述 σ 组成了候选解；比较所有候选解，便得到 $e\neq0$ 时的最优的切割方式. 由于 h_i 按排列 1234 的次序至多有 2 个单调下降段 (因为 (2))，可知加工面 5 与 6 按相邻单调下降方式插入时，至多可得 3 个局部解. 对排列 3412 亦如此. 所以，$q(\sigma)=2$ 时候选解总数至多为 3+3+1=7. 当 σ 的刀具调整次数 $q(\sigma)$ 为 3 时，除了补充考虑刀具调整次数为 1 的切割方式外，还必须补充考虑刀具调整次数为 2 的切割方式，它们可由加工面 5 与 6 按照相邻交换原则插入到 1342 与 3124.

它们各具 2 个单调下降段 (二者的插入方式各不超过 3)，或者，二者之一具有 3 个单调下降段，而另一则必定只有 1 个单调下降段 (前者的插入方式不超过 6，后者的插入方式为 1，总数不超过 7)，所以候选解的总数不超过 7+6+1=14.

个别参赛队认为，$e=0$ 时的优化准则可以推广到 $e\neq0$ 的情况. 所设想的方法是：

(i) 将 $h_1,h_2,h_3,h_4,h_5/r,h_6/r$ 作为判据，先在它们中取最大者，以相应的加工面作为第一个切割面.

(ii) 以后每次选择切割面时，如某个切割面意味着调整刀具，则将该判据减去 e 的某个倍数，否则仍用原来的判据. 在修改判据之后，仍取一个判据最大者所相应的加工面作为下一个切割面.

我们指出，上述方法是不对的，(i) 就可能导致错误的结果. 下面举一个二维的例子，将 e 取得相当大，将各个加工面 (此时为加工线) 的权均取为相同. 于是，最优解必在刀具调整次数为 1 的切割方式得到，只要比较以下二值即可：

$$f(1234) = C + 2h_3 + 2h_4 + e, \tag{7}$$

$$f(3412) = C + 2h_1 + 2h_2 + e, \tag{8}$$

其中 C 为成品长方形的周长，h_1,h_2,h_3,h_4 的意义同前，可使它们的取值满足：

$$h_1 > h_3 > h_4 > h_2, \qquad h_1 + h_2 < h_3 + h_4. \tag{9}$$

按上述 (i)，加工线 1 应排在第一位，但由上述 (7)—(9) 知，只有 $\sigma=3412$ 才是最优解.

四、推　广

按切割厚度递减逐次选择切割面的原则，对于题意中的长方体情形已被证明能达到切割面积和的最优. 在实际运用中，当从任何一个物体通过多次截断切割加工成为一个凸多面体时，可以设想，推广运用这一准则，按平均切割厚度递减的准则确定切割方式，也能达到较好的效果. 但对此一般情形，要想得到最优解，还必须能取得在各个加工面切割时的截面积数据，以形成明确的数学问题，并进行深入的分析，这是值得探讨的.

不过，在二维的一般情形，截断切割问题可以提得相当明确. 设要从一个平面区域内割出一个预定的 m 边凸多边形 (其非相邻边的延长线在该平面区域内不相交)，单独地沿第 i 边切割时，可得到 3 个长度：第 i 边的边长 l_i，第 i 边二侧的长度 x_i 与 y_i. 已知上述 $3m$ 个长度，如何确定这 m 个边的切割方式，使切割总长度最少？这就是本文末尾留给读者的一个问题.