第 30 卷第 1 期 数学的实践与认识 Vol. 30 No. 1
2000 年 1 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan. 2000

problem, the objective functiom is built. We present the mapping principle, to map the locations of the original wells into a unique unit block of the mesh, so as to simplify the solution of the model. Using the mapping algorithm and the ergodic algorithm, we solve the problem under the direction constraint. Then we generalize the algorithms to the solution without the direction constraint. We studied the sufficient conditions and give some criteria of the availability on three particular conditions. The method of bisection on perpendicular at midpoint is presented.

钻井布局的数学模型

胡海洋, 陈 建, 陆 鑫
指导教师: 陈 晖, 姚天行

(南京大学, 南京 210093)

摘要: 本文对钻井布局问题的研究, 是从全局搜索入手, 逐步深入讨论了各种算法的有效性、适用性和复杂性, 得到不同条件下求最多可利用旧井数的较好算法.

对问题 1, 我们给出了全局搜索模型、局部精化模型与图论模型, 讨论了各种算法的可行性和复杂度. 得到的答案为: 最多可使用 4 口旧井, 井号为 2, 4, 5, 10. 对问题 2, 我们给出了全局搜索、局部精化和旋转矢量等模型, 并对局部精化模型给出了理论证明, 答案为: 最多可使用 6 口旧井, 井号为 1, 6, 7, 8, 9, 11, 此时的网格逆时针旋转 44.37 度, 网格原点坐标为(0.47, 0.62).

对问题 3, 给出判断 n 口井是否均可利用的几个充分条件、必要条件和充要条件及其有效算法.

1 模型假设及符号说明(略)

2 问题分析与模型准备

如果一个已知点 P_i 与某个网络结点 X_j 距离不超过给定误差 $\epsilon(0.05)$ 单位, 则认为 P_i 处的旧井资料可以利用. 因此, 在棋盘(欧氏)距离定义下, 可以以 P_i 为中心, 2ϵ 单位为边长作一个正方形(半径为 ϵ 的圆). 若网络在平移过程中, 网络中的某个结点 X_j 落在以 P_i 为中心的正方形(圆)内或边上, 可认为 X_j 可利用旧井 P_i 的相应资料. 同样可以以 X_j 为中心, 2ϵ 单位为边长作一个正方形(圆). 若网络在平移过程中, P_i 落在以 X_j 为中心的正方形(圆)内或边上, 可认为 X_j 可利用旧井 P_i 的相应资料. 这两种方法分别对应于网格移动和坐标平移, 显然它们是等价的. 以下的讨论将不明显区别这两种方法. 为了简化讨论, 引入以下法则.

映射法则:

将点 i 映射至以 (a, b), $(a+1, b+1)$ 为对角顶点的正方形内的点 i', $i'_x = i_x - [i_x] + a$; $i'_y = i_y - [i_y] + b$, 其中 $[x]$ 为 x 的整数部分.

覆盖法则:

将所有旧井映射至 $(-1, -1)$, $(0, 0)$; $(-1, 0)$, $(0, 1)$; $(0, -1)$, $(1, 0)$; $(0, 0)$, $(1, 1)$ 为对角顶点的四个正方形上. 以 2ϵ 为边长作小正方形, 该正方形形心在以 $(-0.5, -0.5)$,

(0.5, 0.5) 为对角顶点的正方形内移动, 则可被正方形所覆盖的映射点为可同时利用的点 这样的正方形称为判决正方形或判决方块 相应的, 在第二问中采用一个半径为 ϵ 的圆移动来覆盖映射点, 称为判决圆

映射法则和覆盖法则是易于理解也是易于证明的 下面我们讨论时都应用了映射法则和覆盖法则, 将点映射后在映射区间内判断旧井是否可利用

3　模型的建立

3.1　对问题一的讨论

1. 目标函数的给出

设网络的起点为 (a, b), 地域中某旧井 P_i 坐标为 (P_{ix}, P_{iy}), 则该旧井可利用的条件是:

$$a+N_i-\epsilon \leq P_{ix} \leq a+N_i+\epsilon$$

且

$$b+N_j-\epsilon \leq P_{iy} \leq b+N_j+\epsilon,$$

其中 N_i 和 N_j 为非负整数

令函数

$$M(X_i, Y_i)=\begin{cases}1, & a+N_i-\epsilon \leq X_i \leq a+N_i+\epsilon, b+N_j-\epsilon \leq Y_i \leq b+N_i+\epsilon \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

由于问题要求寻找尽量多的可利用旧井点, 因此, 建立目标函数如下:

$$F(a, b)=\max\left(\sum_{i=1}^{n} M(X_i, Y_i)\right).$$

根据以上的分析, 可以建立以下模型

2. 模型一: 枚举法

在本题中, 由于精度的要求为 0.01, 且网格可上下、左右平行移动 因此可按纵、横坐标方向分别平移 100 次(即 1 个单位长), 用覆盖法对区域中的所有 12 个旧井点搜索, 如覆盖旧井点, 则记录覆盖数 最后比较在这 100×100 次平移中, 哪一次覆盖数最大, 则该网格位置为最优

该算法的复杂度为 $O\left(n/\rho^2\right)$, n 为旧井数, ρ 为数值的要求精度, 在本题中为 0.01

计算结果如下: 网格节点为 (0.36, 0.46), 最多可利用旧井数为 4, 分别是 2, 4, 5, 10 号井 枚举法对精度要求不高时, 颇为有用, 但当精度要求很高时, 往往较为复杂 在模型一的基础上, 我们进行了部分改进, 提出模型二及其算法

3. 模型二: 部分穷举法 I

显然对 12 个旧井点中的任一个井点都存在一个网格, 使得该井点可被该网格所用 因此可以在 P_i 已被该网格利用的情况下, 再去检查其它旧井点能否被该网格所利用 因此, 可将网格中一个结点放在以该点为中心, 2ϵ 为边长的一个正方形区域中, 再去测试其它旧井点是否满足条件 对于一个而言, 网格某个结点, 在以该点为中心, 2ϵ 为边长的正方形区域中有 $(2\epsilon/\rho)^2$ 种放置法 这样即得部分穷举法的复杂度为 $O(n^2(\epsilon/\rho)^2)$.

部分穷举法抓住一个旧井点后考察其它旧井点的情况 因此, 它比全部穷举法优点在于: 避免了对所有旧井点均不可利用的情形的搜索 但该算法的缺点在于 n 不能太大, 否则可能得不偿失, 使计算量度大为增加

计算结果与模型一相同

4. 模型三: 部分穷举法Ⅱ

在模型二中我们根据至少利用一个点的原则移动判决方块 在本模型中我们在至少有两口井可用情况下, 由两口井确定一个判决方块, 进而进一步缩减计算量

定理 1. 3. 1 在覆盖点数最多的判决方块中必有一个方块A 满足下述两条之一:

(1) 有两点 P_i 与 P_j 分别在A 的左边框和下边框上;

(2) 有一点 P_i 在A 的左下顶点处

该定理的证明从直观上看是显然的, 若某判决方块A 覆盖的点数最多, 将A 连续向右和向上移动, 直至若继续移动将会有点跑出为止, 此时A 的位置记为A , 则A 必适合定理中两条件之一, 且A 中点数也是最多的

由此定理, 我们只需在所有以两点确定左边框和下边框的判决方块和以一点为左下顶点确定的判决方块的覆盖数之间进行比较, 最大者即为最多可利用旧井数

该方法对于 n 个井点, 需计算约$(C_n^2+ n)n$, 复杂度为$O(n^3)$, 是与精度无关的算法

计算结果同上

5. 模型四: 涂层法

由映射法则, P_i, P_j 的映射点在正方形$[(-\epsilon, -\epsilon); (1+\epsilon, 1+\epsilon)]$内为 P_i', P_j', 则 P_i, P_j 可用的充要条件是 $d(P_i', P_j') \leq 2\epsilon$, 即分别以 P_i', P_j' 为心, 边长 2ϵ的两个正方形相交 对于 n 个点, 则这 n 个点都可用的充要条件是以这 n 个点为中心的正方形都相叠 以相叠部分为网格点, 总可以利用这 n 个点 本模型即用这样的思路, 计算最多有多少正方形相叠, 并以相叠部分中的一点以网格结点作网格

算法思想: 用矩阵A 表示$[(-\epsilon, -\epsilon); (1+\epsilon, 1+\epsilon)]$, 将点离散化, 以精度 ρ 取样 则A 表示为$\frac{1+2\epsilon}{\rho}$阶零矩阵 用全 1 矩阵 a 表示以映射点 P_j' 为中心, 2ϵ为边长的小方形 则将这些小矩阵加到大矩阵的相应位置上去, 即相当于把小正方形"涂"到大框里 则A 中某点上数字之和即表示该点被多少正方形覆盖, 也即以该点为起点的网格可利用多少旧井 找出A 中数字最大者, 即为最大利用旧井数, 该点为最优网格的起始点

该算法复杂度为$O\left(n(\epsilon/\rho)^2\right)$. 在精度不太高时计算是迅速的 精度高时, 对内存和速度都有较高要求

计算结果同上

6. 模型五: 图论模型

定理 1. 5. 1 作一无向图$G[V, E]$, V 为旧井点的集合 若第 i 与第 j 号井可同时利用, 则在 i, j 之间加一条边 则可同时利用的井点组成一个完全子图, 即团 在棋盘距离下最多可利用旧井数等于最大团的阶数

证明 (略).

此定理对欧氏距离不适用 由此定理可得到下述推论

推论 在棋盘距离下, 若某些旧井两两可同时利用, 则这些旧井可被同时利用

由此提出图论模型如下: 按定理 1. 5. 1 构造图G, 找最大完全子图

首先, 找出可同时利用的旧井对 可利用下述定理求得

定理 1. 5. 2 P_i, P_j 均可以在某网络中被利用的充要条件是存在非负整数N_1, N_2, 使得:

$$d_x(P_i, P_j) \in [N_1 - 2\epsilon, N_1 + 2\epsilon],$$
$$d_y(P_i, P_j) \in [N_2 - 2\epsilon, N_2 + 2\epsilon],$$

其中 d_x 与 d_y 分别表示 x 方向与 y 方向距离

证明 (略).

下述定理是图论中熟知的定理

定理 1.5.3 设 G 是 n 阶无向图, V^* 为 G 中极大(最大)团当且仅当 V^* 为 $\overline{G}$ 的中的极大(最大)独立集, 其中 $\overline{G}$ 是 G 的补图

因此, 问题归结为寻找 $\overline{G}$ 中的最大独立集 但寻找最大独立集为 NP 问题, 目前尚无好的方法

图论模型优点在于: 它在理论上是完备与精确的, 不受数值精度与 ϵ 的影响

7. 五个模型的比较

对于五个模型的比较, 我们认为模型三、四、五是较优的 模型三与精度无关, 复杂度为 $O\left(n^3\right)$. 对于大多数情况都是适用的 模型四与精度有关 复杂度为 $O\left(n\left(,\epsilon/\rho\right)^2\right)$, 在本题中 $\epsilon/\rho = 5$ 在精度要求不太高, 且点数较多时, 可获得比模型三更快的速度 模型五是一个 NP 问题, 当点数较多时, 甚至是不可能求解的 但本模型提供了一个较完美的具有理论意义的图论模型

3.2 对问题二的讨论

1. 模型一: 全局搜索法

以某一个角度为步长转动网格, 在每一角度下, 固定网格方向按问题一的方法检验最多有多少旧井可以利用 再比较所有搜索过的角度下可利用的旧井数, 即可得允许转动时可利用最多旧井数 两点间的棋盘距离会因转动而改变, 故问题二采用欧氏距离 由于方格的对称性, 只需从 0 旋转到 90 即可. 为保证旋转小角度后, 点的变动不超过精度 $\rho = 0.01$, 使步长 $\Delta\theta \leq \frac{\rho}{R}$, R 为距离最远点到旋转中心的距离 本题中求出 $\Delta\theta \leq 1.04 \times 10^{-3}$. 需要将 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 分为 2000 份, 因此本题要进行 2000 次问题一的计算 该模型简单可靠, 易于理解, 缺点是计算量较大, 有很多不必要的搜索 因此有待改进

计算结果为: 网格逆时针转动 44.37°, 一个网格点在原坐标系下的坐标为 (0.47, 0.62). 这时可有 6 个井被同时使用, 井号为 1, 6, 7, 8, 9, 11.

2. 模型二: 旋转矢量法

首先找两个可以同时利用的旧井, 将这两旧井确定一个大致的方向, 至多只能再转动一个极小的角度 在这个极小的角度内以步长 $\Delta\theta$ 转动, 搜索最多可利用的旧井数 任意一对可同时利用的旧井都需要进行以上操作

定理 2.2.1 两旧井 a, b 可同时利用的充要条件为存在整数 m, n 使 $\left|d - \sqrt{m^2 + n^2}\right| \leq 2\epsilon$, 其中 $d = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}$ 为两旧井的欧氏距离

证明 (略)

定理 2.2.2 设两旧井 a, b 可同时被利用, a 点到网格原点距离 d_1 与 b 点到结点 (m, n) 距离 d_2 均不超过 ϵ 则当网格转动角度超过 $\frac{4\epsilon}{d}$ (其中 d 为 a 到 b 的距离) 弧度时, 则 d_1 与 d_2

中至少一个将超过 ϵ

证　因 $\epsilon < d$, 以原点为旋转中心, 将网格旋转 $\Delta\theta$ 弧度, b 点相对结点 (m, n) 至少移动 $d\Delta\theta$, 于是当 $\Delta\theta > \frac{2\epsilon}{d}$ 时, $d_2 > \epsilon$ 同样以 (m, n) 为旋转中心, 旋转 $\Delta\theta \frac{2\epsilon}{d}$ 时, $d_1 > \epsilon$ 考虑最不利情形, 当网格转动 $\Delta\theta \frac{4\epsilon}{d}$ 时, d_1 与 d_2 中至少一个超过 ϵ

依据该定理, 先将网格旋转与平移到某一位置, 使 a, b 两旧井均被利用, 在该位置, 网格最多允许再旋转 $\frac{4\epsilon}{d}$ 弧度 我们只需要在该小范围内检查其它井是否可被利用 对每一对井均作上述讨论, 即可求得可利用的井数的最大值

3. 模型三: 全局搜索　局部精化

本模型的思想是先以较大步长进行全局搜索, 找到一个大概范围, 再在该范围内精确搜索, 直至得到最优结果

将网格旋转某一角度 θ(以弧度为单位), 再将所有旧井按前文方法映射到原点周围四个单位网格内 现将误差扩大为 $\epsilon' = (1+\delta)\epsilon$, 其中 $\delta > 0$ 作半径分别为 ϵ 与 ϵ' 的同心圆⊙与⊙′, 使得⊙′内覆盖的映射点数最大, 设为 k'. 若网格旋转角度有一个小的改变量 $\Delta\theta$, 则各旧井在网格中的位置将移动 $|R_i\Delta\theta|$, 其中 R_i 为第 i 号井到旋转中心的距离, 此时它们的映射点也将移动 $|R_i\Delta\theta|$ 距离 设 $R = \max\{R_1, R_2, \cdots, R_n\}$, 且 $|R\Delta\theta| \le \epsilon' - \epsilon = \delta\epsilon$, 即

$$|\Delta\theta| \le \delta\epsilon/R, \qquad (*)$$

则原来在⊙′外的点不可能移入至⊙中(这是因为这两个同心圆边界的距离 $\delta\epsilon$ 大于映射点移动距离), 于是当 $(*)$ 成立时, ⊙覆盖的映射点数 $k \le k'$.

基于上述分析, 算法思想为: 先取一适当的 δ, 以 $\epsilon' = (1+\delta)\epsilon$ 为允许误差, $\rho = 2|\Delta\theta| = 2\delta\epsilon/R$ 为步长, 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 进行搜索, 求得可利用旧井数的上界 M. 将允许误差仍回到 ϵ, 求得圆⊙覆盖的点数为 m. 若 $m = M$, 则可利用的旧井数就是 M, 问题已解决 若 $m < M$, 则适当减小 δ, 此时步长 ρ 也相应减小, 进行精细搜索 搜索的范围可以减少很多 这是因为若对某一个角度 θ, 第一次以 ϵ' 为允许误差求得的覆盖点数小于 m, 则显然旋转角度在区间 $[\theta - |\Delta\theta|, \theta + |\Delta\theta|]$ 内时, 可利用的点数也小于 m, 因此在第二次精细搜索时, 该区间就不必检查了.

从 $(*)$ 可看出, 若能减小 R 值, 则在相同允许误差 $\epsilon' = (1+\delta)\epsilon$ 条件下, 步长 $\rho = 2|\Delta\theta|$ 将可增大, 我们的做法是选择旋转中心, 使得各旧井到旋转中心的最远距离最小, 目标函数为

$$f(x, y) = \max_{1 \le i \le n}\{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2\},$$

$$\text{s.t.}\quad \min f(x, y),$$

其中 (x, y) 为新坐标原点(即旋转中心).

这是非线性无约束最优规划问题, 我们用 SAS 软件, 采用单纯形法计算, 结果为 $x = 5.04$, $y = 1.70$, $R = \sqrt{f(x, y)} = 4.55$ 此时 R 比以原坐标原点为旋转中心减少一半以上

我们取检查次数 $N = 120$, 步长为 $90°/120 = 0.75°$ 此时 $\delta = \frac{\pi R}{4N\epsilon} \approx 0.6$, $\epsilon' \approx 1.6\epsilon$, 得到可利用旧井的上界 $M = 6$

另一方面, 取任一步长, 以半径为 ϵ 的判决圆搜索可得到可利用旧井数的下界 m.

显然若上界与下界相等, 则可利用的旧井数最多为 m. 而网格的方向就随之可确定

对于本题, 步数取 120, 判决圆半径为 $\epsilon' = (1+\delta)\cdot\epsilon$ 时, 可得上界 $M = 6$. 再取步数为 2, 判决圆半径为 ϵ 时, 步长为 45 度, 得下界 $m = 6$. 故可知最多可利用旧井数为 6, 旋转角度即为 45 度. 仅需 122 次左右问题一的计算, 可以较大的削减计算量

算法结果: 可利用的旧井数的上限为 6. 网络逆时针旋转 45°, 其中一个节点坐标为 (0.46, 0.56), 可利用旧井序号为 (1, 6, 7, 8, 9, 11).

4. 对问题二各模型的评价

模型一是直观和易于理解的, 但搜索步数过多, 耗时过长, 模型二是先确定一个大致方向, 再在该方向附近进行搜索. 在 n 较小时, 可较大的削减计算量. 但较大时, 其确定的大致方向数过多, 有可能得不偿失, 反而增加计算复杂性

模型三我们认为是较好的, 先以较大的步长搜索, 再以小步长搜索, 可以较大地减少计算量

3.3 问题三的解答

在解决问题一、问题二的基础上, 解决问题三. 我们仅判断 n 个点是否均可利用

1. 棋盘距离下

因坐标旋转会改变两点间的棋盘距离, 故只讨论网格不可旋转的情形. 以某一口旧井为坐标原点建立平面直角坐标系, 再将各旧井映射到以 (-0.5, -0.5) 与 (0.5, 0.5) 为对角顶点的正方形内, 即若旧井 P_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 的坐标为 (x_i, y_i), 它的映射象 P_i' 的坐标 (x_i', y_i') 满足

(1) $-0.5 < x_i' \le 0.5$, $-0.5 < y_i' \le 0.5$;

(2) $x_i - x_i'$ 与 $y_i - y_i'$ 均为整数

显然我们有:

定理 3.1 记 $d_x = \max\limits_{1\le i<j\le n}\{|x_i - x_j|\}$, $d_y = \max\limits_{1\le i<j\le n}\{|y_i - y_j|\}$, 则在棋盘距离下 n 口旧井均可利用的充要条件为 $d_x \le 2\epsilon$, $d_y \le 2\epsilon$

2. 欧氏距离下网格不可旋转的情况

同上述棋盘距离的映射方法, 我们有:

定理 3.2.1 网络不可旋转的条件下, 采用欧氏距离, n 口旧井均可利用的充要条件为它们的映射象 $P_1', P_2', \cdots, P_n'$ 可被一判决圆所覆盖

适当移动判决圆, 总可使该判决圆周上至少含两个映射点. 据此, 算法思想为: 以任意两映射点确定两个半径为 ϵ 的圆, 检查是否所有的映射点均在判决圆上. 最多检查 $2C_n^2 = n(n-1)$ 次. 算法的时间复杂度为 $O(n^3)$.

我们还可给出欧氏距离下, 不可旋转时 n 口旧井均可利用的充分条件与必要条件:

定理 3.2.2 充分条件为任意两个映射象 P_i' 与 P_j' 的距离均不超过 $\sqrt{3}\epsilon$

证明 (略)

定理 3.2.3 必要条件为任意两个映射象 P_i' 与 P_j' 的距离均不超过 2ϵ

证明 (略)

3. 欧氏距离下网格可旋转的情况

选择一口旧井, 使各旧井到它的最远距离最小, 以这口井为坐标原点和旋转中心. 设旋转了某一角度 θ后, 各井按旋转后的新坐标映射到以(- 0.5, 0.5) 与 (0.5, 0.5) 为对角顶点的正方形内, 它们的映射象为 P_i', $i= 1, 2, \cdots, n$. 则我们有

定理 3.3.1 存在一个角度 $\theta\in[0, \pi/2]$, 使得旋转 θ角后, 各旧井的映射象 P_1', P_2', $\cdots$, P_n' 被一判决圆全部覆盖.

计算可利用井数在问题二中已有详细讨论, 我们建立的模型与算法均可用.

例如由定理 2.2.1 可知, 若对两旧井 a, b, 不存在整数 m, n, 使得 $\left|d - \sqrt{m^2+n^2}\right| \leq 2\epsilon$ 成立, 则 a, b 中最多只能利用一口井. 因此该定理可作为判别 n 口井均可利用的一个必要条件.

对于该问题, 我们认为有效的一个充要条件是难找的, 只有对实际问题进行求解计算来验证.

4 模型结论改进方向及建议(略)

参考文献:

[1] 姜启源. 数学模型. 高等教育出版社, 北京, 1993.

[2] 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材. 湖南教育出版社, 长沙, 1997.

[3] 朱道元. 数学建模精品. 东南大学出版社, 南京, 1999.

The Mathematical model of Borehole Layout

HU Hai-yang, CHEN Jian, LU Xin

(Nanjing University, Nanjing 210093)

Abstract: In this thesis, we begin our research of mathematical model of borehole layout with an eye to the whole and then analyze step by step the effeciency, flexibility and complexity of all kinds of calculating methods. At last, we get a relativity better method to make out the number of boreholes that can be utilized under different circumferences.

To the first question, after the demonstration of an overall research model, precise local model and a graphizal modle, and after the discussion of the flexibility and complexity of various calculating methods, we come to the answer ramedy, that only four used boredholes can be utilized at most, numbered 2, 4, 5, and 10.

To the second question, we offer an overall research model, a precise local model as well as a revolving vector model. In particular, we give a theoretical demonstration of the local model. The answer we get is that only 6 used boreholes can be utilized at most, numbered 1, 6, 7, 8, 9, and 11 and that the net will revolve 44.37 with a coordinate (0.47, 0.67).

To the third question, in order to judge whether all of the given boreholes can be used, we enumerate the ample requirements and the compulsory requirements together with the approriately effective calculating method.