

文章编号: 1005-3085 (2002) 05-0041-06

# 血管切片的三维重建

柳海东, 陈璐, 江浩

指导教师: 卢钦和

(苏州大学, 苏州 215006)

**编者按:** 本文指出在一定的条件下, 血管中轴线与截面的交点必落在截面边界上的一对点的连线的中点上, 过这对点的截面边界的两条切线是相互平行的。据此, 设计出相应的算法, 计算结果比较精确。在求得中轴线的离散点后进行了多项式拟合得到中轴线方程。文章用多种方法对建立的模型进行了检验, 这是本文的主要优点之一。

**摘 要:** 本文讨论血管的三维重建问题。我们通过研究, 证明了以下的定理。

**定理** 设  $C^{(i)}$  是中轴线和平面  $Z = i$  的交点, 那么存在以  $C^{(i)}$  为中点且端点  $P_1^{(i)}, P_2^{(i)}$  在  $\partial^{(i)}$  上的线段, 并且在  $P_1^{(i)}, P_2^{(i)}$  处  $\partial^{(i)}$  的切线相互平行。

根据定理, 我们找到利用求截面图象边界曲线的平行切线方法找到中轴线和 100 个截面的交点及管道的直径 59.1238pixel。并用这 100 个交点的数据拟合出中轴线的方程:

$$\begin{aligned} x(t) = & -0.207806 - 0.610303t + 0.206455t^2 - 0.0144935t^3 \\ & + 0.000517774t^4 - 8.394241977754047 \times 10^{-6}t^5 \\ & + 6.133353112035975 \times 10^{-8}t^6 - 1.6673218267444805 \times 10^{-10}t^7 \\ y(t) = & 158.211 + 1.86595t - 0.266798t^2 + 0.0141407t^3 \\ & - 0.000325412t^4 + 3.043275597680807 \times 10^{-6}t^5 \\ & - 9.899171274615063 \times 10^{-9}t^6 \\ z(t) = & t \end{aligned}$$

然后用中轴线的方程重建了三维血管, 并求出了重建血管在 40 个平面上的截面  $\partial^{(i)} (30 \leq i \leq 69)$ , 并与原始截面  $\partial^{(i)} (30 \leq i \leq 69)$  进行比较, 截面平均符合率高达 96.8024%。

**关键词:** 切线; 多项式拟合; 模型检验

**分类号:** AMS(2000) 65D17

**中图分类号:** O242.1

**文献标识码:** A

## 1 问题重述(略)

## 2 模型假设

- 1) 不考虑血管的弹性, 将血管视为一类特殊的管道, 其表面由球心沿某一曲线(称为中轴线)且半径固定的球滚动包络而成。
- 2) 管道中轴线与每张切片有且只有一个交点。
- 3) 切片间距以及图象像素的尺寸均为 1, 可将切片图象视为平面图形。
- 4) 中轴线充分光滑且它每一点的曲率  $K(t)$  较小 ( $\frac{1}{K(t)} > R$ ,  $R$  为管道半径)。

3 符号说明

pixel	象 素 单 位
$C$	中轴线
$\hat{C}$	拟合出的中轴线
$C^{(i)}(x,y)$	中轴线被平面 $Z=i$ 截得的点的坐标 $(0 \leq i \leq 99)$
$\hat{Q}^{(i)}(x(t_i),y(t_i))$	拟合出的中轴线被平面 $Z=i$ 截得的点的坐标 $(0 \leq i \leq 99)$
$D^{(i)}$	由 $Z=i$ 截面图象求得的管道直径 $(0 \leq i \leq 99)$
$R$	管道半径
$S$	拟合出的管道
$K(t)$	中轴线上点 $\{x(t),y(t),z(t)\}$ 的曲率
$S_j^{(i)}$	$Z=i$ 截面图象中选取的上、下弧 $(0 \leq i \leq 99, 1 \leq j \leq 2)$
$P_j^{(i)}(x_j^{(i)},y_j^{(i)})$	$Z=i$ 截面图象中确定直径的两个端点 $(0 \leq i \leq 99, 1 \leq j \leq 2)$
$\partial^{(i)}$	$Z=i$ 截面图象 $(0 \leq i \leq 99)$
$\hat{\partial}^{(i)}$	拟合出的 $Z=i$ 截面图象 $(0 \leq i \leq 99)$
$\partial^{(i)}$	$Z=i$ 截面图象的边界 $(0 \leq i \leq 99)$
$\hat{\partial}^{(i)}$	拟合出的 $Z=i$ 截面图象的边界 $(0 \leq i \leq 99)$

4 问题分析

这是一个重建三维图象的问题,所给的 100 张截面图是分别由平面  $Z=0, Z=1, \dots, Z=99$  截管道得到的。我们将这 100 张图片叠加起来得到管道在  $XOY$  平面上的投影(如图 1),从直观上可以粗略推出中轴线的走向以及中轴线各点的挠率随  $z$  的增大而逐渐变小。

为了得到血管重建的方法,我们证明了下面的定理。

定理 设  $C^{(i)}$  是中轴线和平面  $Z=i$  的交点,那么存在以  $C^{(i)}$  为中点且端点  $P_1^{(i)}, P_2^{(i)}$  在  $\partial^{(i)}$  上的线段,并且在  $P_1^{(i)}, P_2^{(i)}$  处  $\partial^{(i)}$  的切线相互平行。

定理的证明略。

根据上面的定理,我们可以得到寻找中轴线上的点和管道直径的方法。过截面图象边界上的一点  $a$  作此边界曲线的切线  $L_1$ ,过  $a$  作  $L_1$  的垂线与对弧交于  $b$  点。如果过  $b$  点的切线  $L_2$  与  $L_1$  平行,则线段  $ab$  的中点  $c$  可能是中轴线和该截面的交点,线段  $ac$  的长度等于管道的半径。(见图 2)

我们在每个截面上找出这样的  $c$  点,并根据这些  $c$  点的坐标数据拟合出管道中轴线的方程,从而实现血管的三维重建。

5 模型建立与求解

根据上面的分析,理论上我们可以对每张截面,用上述方法找出中轴线和该截面的交点和管道的半径。但具体实现时会遇到下述两个问题:



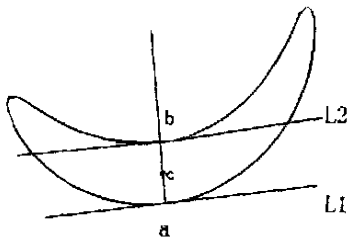


图 1

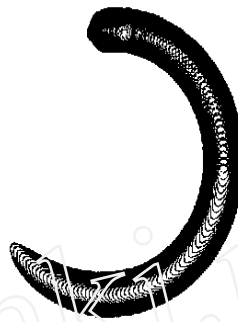


图 2

1) 题目中截面边界上的点的坐标是从图象中读取的,这些数据是经过离散化的,因而边界曲线并不光滑,无法精确作出边界曲线在任一点处的切线。

2) 定理只给出了截面上的点在中轴线上的必要条件,所以在一片截面上可能会出现多个这样的点。

为了克服第一个困难,我们设计出下面的算法一:

先把每张取定的截面图中所有点编号,根据编号将图的边界点划分为上弧、下弧。对于上弧上固定的一点  $a_i$ ,求出该点到下弧上点  $b_j$  的距离  $d_{ij}$ ,令  $d_i = \min d_{ij}$ 。当  $a_i$  取遍上弧中每一点,并得到其对应最短距离  $d_i$ ,令  $D = \max d_i$ ,则  $D$  为由该截面所确定的管道直径。

为了克服第二个困难,我们设计的算法二:

对可能为球心的  $n$  个点  $c_i (1 \leq i \leq n)$ ,把  $c_i$  中到其余  $n - 1$  个点的距离之和最小的点作为该截面与中轴线的交点。

具体求解过程如下:

**Step1.** 对于 100 张截面图,用 VC++ 编程读出每张图的边界点。将边界曲线分为上弧、下弧。

**Step2.** 由  $Z = 99$  截面图象用算法一计算出直径  $D^{(99)}$  以及中轴线  $C$  被平面  $Z = 99$  截得的点  $C^{(99)}(x, y)$ 。得到  $D^{(99)} = 59.1354\text{pixel}$ ,并确定出取到直径的端点  $P_1^{(99)}(x_1^{(99)}, y_1^{(99)})$ ,  $P_2^{(99)}(x_2^{(99)}, y_2^{(99)})$ ,取中点得  $C^{(99)}$ 。满足上述条件的点可能不止一个,我们利用算法二求出  $C^{(99)}$ ,其坐标为  $C^{(99)}(15, -188)$ 。

**Step3.** 设当  $Z = i$  时已经求出  $C^{(i)}$  和  $P_1^{(i)}(x_1^{(i)}, y_1^{(i)})$ ,  $P_2^{(i)}(x_2^{(i)}, y_2^{(i)})$ ,由于相邻两个截面之间的距离很小,从而  $C^{(i-1)}$  在截面  $Z = i$  上的投影和  $C^{(i)}$  的距离很小,故在  $Z = i - 1$  的截面上分别以  $P_1^{(i)}(x_1^{(i)}, y_1^{(i)})$ ,  $P_2^{(i)}(x_2^{(i)}, y_2^{(i)})$  为圆心,  $30\text{pixel}$  为半径作圆与  $\partial^{(i)}$  交出弧段  $S_1^{(i)}, S_2^{(i)}$ 。利用算法一求出坐标  $C^{(i-1)}$  和直径  $D^{(i-1)}$ 。依照上面的做法,依次对  $Z = 98, Z = 97, \dots, Z = 0$  截面进行计算,得到  $D^{(i)}$ ,以及中轴线与各平面的交点的坐标  $C^{(i)}(x, y)$ , ( $i = 0, 1, \dots, 98$ )

**Step4.** 我们最后根据  $D^{(i)} (0 \leq i \leq 99)$  求出直径的平均值为  $59.1238\text{pixel}$ ,从而  $R = 29.5619\text{pixel}$ 。

**Step5.** 对于计算得到的 100 个中轴线上的点,我们用 Mathematica 软件对其进行拟合,从而得到管道中轴线的拟合曲线方程。

(1) 折线连接 由于管道长度很短,故得到的 100 个点彼此间的排列很紧密,因而我们可以用折线连接的方法得出中轴线的近似曲线。对此曲线分别向  $XOY, YOZ, XOZ$  平面作投

影得到三条相应的投影曲线。

(2) 曲线拟合 把中轴线方程表示为参数式  $C: (x(t), y(t), t)$ , 其中  $x(t), y(t)$  均是  $t$  的多项式,  $z(t) = t$ , 并用 Mathematica 中的非线性拟合 (Statistics 'NonlinearFit') 对中轴线进行多项式拟合, 从而得到拟合曲线  $C$  的参数方程:

$$\begin{aligned} x(t) &= -0.207806 - 0.610303t + 0.206455t^2 - 0.0144935t^3 \\ &\quad + 0.000517774t^4 - 8.394241977754047 \times 10^{-6}t^5 \\ &\quad + 6.133353112035975 \times 10^{-8}t^6 - 1.6673218267444805 \times 10^{-10}t^7 \\ y(t) &= 158.211 + 1.86595t - 0.266798t^2 + 0.0141407t^3 \\ &\quad - 0.000325412t^4 + 3.043275597680807 \times 10^{-6}t^5 \\ &\quad - 9.899171274615063 \times 10^{-9}t^6 \\ z(t) &= t \end{aligned}$$

并将拟合曲线和连接折线在  $XOY$ ,  $YOZ$ ,  $XOZ$  平面上的投影曲线画在下面的图 3 中。



图 3

## 6 模型检验

我们对所得到的中轴线的拟合曲线作误差分析。分别用下面的三种方法讨论。

**方法一 截面比较法:** 对于用多项式拟合得到的空间曲线  $C': \{x(t), y(t), t\}$ , 用半径为  $R$  的球球心沿  $C$  滚动包络而成管道  $S'$ 。再用平面  $Z = i (i = 30, 31, \dots, 69)$  去截  $S'$  得到的 40 张截面  $(i)$  与题设中的对应截面  $(i)$  比较, 我们称  $(i)$  的面积与  $(i)$  的面积之比为面积重合率。经程序计算可得面积重合率的平均值为 96.8024%, 从这 40 张截面中取出 5 张  $Z = 30, Z = 40, Z = 50, Z = 60, Z = 69$  与对应的截面迭加, 其重合的情况如图 4 所示。(黑色区域表示题设中的对应截面, 灰色表示截  $S'$  所得的区域)。

**方法二 “重心”法:** 对于用多项式拟合得到的空间曲线  $C': \{x(t), y(t), t\}$ , 考虑  $C'$  与中轴线的偏差程度, 我们用如下方法: 用“重心”偏移量的大小来描述误差, 从而确定拟合曲线的好坏。对于求得的曲线  $C$  和半径  $R$ , 用半径为  $R$  的球沿  $C$  滚动包络而成管道  $S'$ 。再用平面  $Z = i$  去截  $S'$  得到 40 张截面  $(i = 30, 31, \dots, 69)$ , 用截面的边界点  $\partial^{(i)}$  求出每张图的“重心”坐标 (即所有点的  $x$  坐标平均,  $y$  坐标求平均)。把此“重心”与原截面的边界  $\partial^{(i)}$  的“重心”作比较, 计算它们之间的距离, 求得平均偏移量  $\bar{d} = 3.35722 \text{ pixel}$ 。

**方法三 随机投点检验法:** 对于最后得到的拟合曲线  $C'$ , 当半径为  $R$  的球沿着  $C$  滚动时, 用平面  $Z = i (30 \leq i \leq 69)$  去截。考虑此球通过平面  $Z = i$  的过程。设在  $t_1 \leq t \leq t_2$  时, 球与  $Z = i$  相交, 并且当  $t = t_1$  及  $t = t_2$  时与平面  $Z = i$  相切。把区间  $[t_1, t_2]$  240 等分, 则第  $s$  个分点  $t_s = s \times (t_2 - t_1) / 240 + t_1$ , 对每个  $t_s$ , 球在  $t_s$  时与  $Z = i$  交成一个圆, 由此可以得到 240

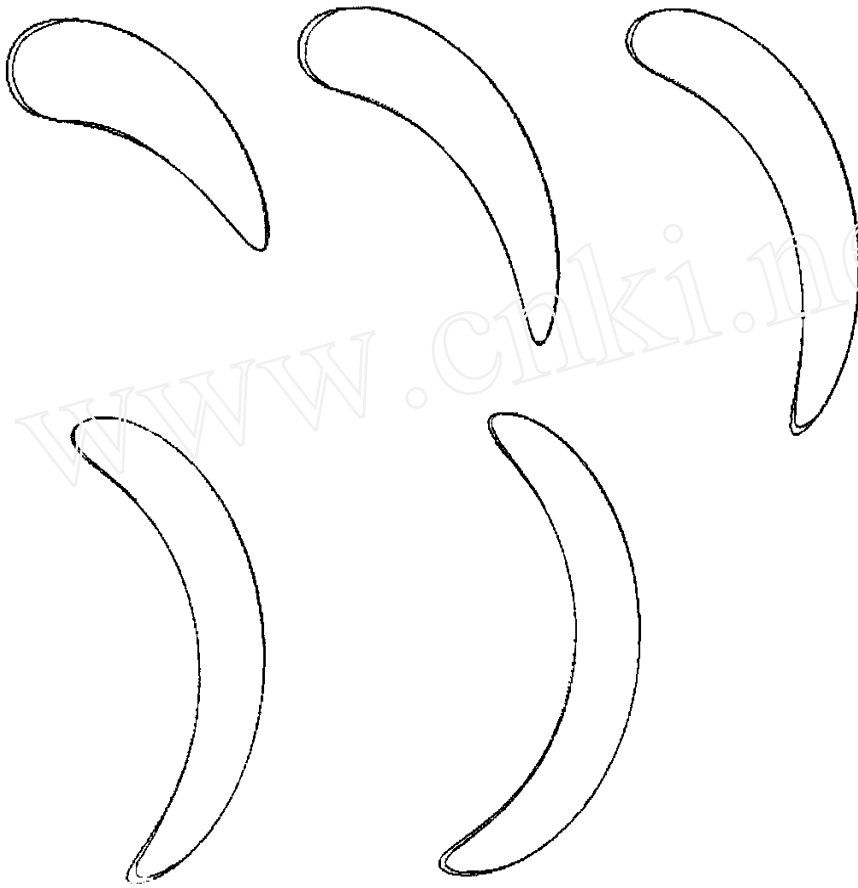


图 4

个圆,然后在这 240 个圆的圆周上随机取 7200 个点,每个圆周所取的点的数目与半径长度成正比,然后把这些点向  $z = i$  的截面图象  $(i)$  投点,由此计算出这些点落于  $(i)$  中的比例(30  $i = 69$ )。经计算,其平均比例为 94 % 以上。

以上三种方法对模型的检验证实,重建血管的数据和所给血管的原始数据比较一致,从而可以说明本文所用方法是可行的。

## 7 模型改进与进一步讨论

本模型实际上是在综合考虑了编程的可实现性和运算量的大小后,采用改进的切线法来求出中轴线与每个截面的交点位置以及管道半径,如果在程序中增大搜索范围则所得的结果会更为精确,但会增加运算量。

另外,我们还可以用收缩或扩大管道半径的方法来建立模型,即对于一个初始给定的半径  $R_0$ ,对每一个截面图象  $z = i$ ,判断这个半径为  $R_0$  的圆是否可以完全含于截面图象中。如果每张截面图象均能完全覆盖此圆,则把球半径  $R_0$  增大  $1/2\text{pixel}$ ,否则将  $R_0$  减小  $1/2\text{pixel}$ 。直到对某一个  $R_0$ ,当  $R_0$  增大  $1/2\text{pixel}$  时至少有一个圆不能完全含于所有的截面图象中,则将这个  $R_0$  作为管道半径。用这种方法建模也是比较合理的,但计算量较大,留待以后进行具体计算。

## 参考文献:

- [1] 杨 钰,何旭洪,赵昊彤等编著. Mathematica 应用指南[M]. 人民邮电出版社,1999 年 10 月第一版
- [2] 苏步青等编著. 实用微分几何引论[M]. 北京:科学出版社,1986 年 11 月版
- [3] 谭浩强编著. C 程序设计[M]. 北京:清华大学出版社,1991 年 7 月版
- [4] 姜启源. 数学模型[M]. 高等教育出版社,2001 年 1 月版
- [5] 白其峥主编. 数学建模案例分析[M]. 2001 年 1 月版
- [6] 雷功炎编著. 数学模型讲义[M]. 1999 年 4 月版

## Re-construction of Vessel in Three Dimension

LJU Hai-dong, CHEN Lu, JIANG Hao

The tutor: LU Qir-he

(Suzhou University, Suzhou 215006, P. R. China)

**Abstract :** The re - construction of vessel in three dimension will be discussed in this essay. We first show the following proposition.

**Proposition** Let  $C$  be a curve along which the center of a ball moves,  $C^{(i)}$  a section sliced from the original vessel by the plane  $Z = i$ , and  $\partial^{(i)}$  the boundary of  $C^{(i)}$  ( $0 \leq i \leq 99$ ). Let  $C^{(i)}$  be the intersection point of  $C$  with the plane  $Z = i$  ( $0 \leq i \leq 99$ ), then there are a line segment with two end points  $P_1^{(i)}, P_2^{(i)}$ , ( $P_j^{(i)} \in \partial^{(i)}, 0 \leq i \leq 99, 1 \leq j \leq 2$ ) such that  $C^{(i)}$  is the middle point of the line segment

$P_1^{(i)} P_2^{(i)}$  and two parallel tangent lines which touch  $\partial^{(i)}$  only at  $P_1^{(i)}, P_2^{(i)}$  respectively ( $0 \leq i \leq 99$ ).

On the basis of the proposition shown above,  $C^{(i)}$  ( $0 \leq i \leq 99$ ) and the diameter of the vessel  $D = 59.1238$  pixel have been found.

The equation of  $C$  is simulated by coordinate data of 100 intersection points:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -0.207806 - 0.610303t + 0.206455t^2 - 0.0144935t^3 \\
 &\quad + 0.000517774t^4 - 8.394241977754047 \times 10^{-6}t^5 \\
 &\quad + 6.133353112035975 \times 10^{-8}t^6 - 1.6673218267444805 \times 10^{-10}t^7 \\
 y(t) &= 158.211 + 1.86595t - 0.266798t^2 + 0.0141407t^3 \\
 &\quad - 0.000325412t^4 + 3.043275597680807 \times 10^{-6}t^5 \\
 &\quad - 9.899171274615063 \times 10^{-9}t^6 \\
 z(t) &= t
 \end{aligned}$$

On the ground of that equation, the simulated vessel in three dimension is figured out, and at the same time, the 40 sections sliced from the simulated vessel are also made out, matching the original vessel at the average rate as much as 96.8024%.

**Key words :** tangent lines; polynomial fit