

文章编号:1005-3085(2005)07-0085-07

# DVD 在线租赁系统的优化设计

李蓬蓬, 朱小满, 解 炜

指导教师: 指导教师组

(国防科技大学, 长沙 410073)

**编者按:** 这是一篇全面的论文, 模型和方法基本正确。对问题一, 采用通用模型在平均意义下求出 DVD 量, 而随机服务模型用模拟方法很有特色; 对问题三, 先建立多目标规划模型, 然后将满意度作为约束条件, DVD 最少为目标, 转化为单目标问题求解是一种可行的方法; 对问题四的求解也很有想象力。在处理问题三时将“会员得到他想看的 DVD”理解为有一张想看的即可, 虽然从字面上可算是一种理解, 但恐怕不会为多数现实的消费者认同。

**摘 要:** 本文在 DVD 在线租赁背景下, 对 DVD 的租赁与归还, 网方的购买与分配以及需求预测等相关问题进行了建模和研究。首先, 对题中给出的表示会员对各 DVD 的偏爱程度的偏好指数进行修正, 提出了绝对满意度和相对满意度的合理定义。在模型的建立和求解上, 本文首先建立了基于 DVD 租用次数限制的通用模型和以 Poission 过程模拟 DVD 归还过程的随机服务模型解决了在预知市场需求的情况下, 各 DVD 采购量的问题。随后, 建立 0-1 整数线性规划模型并结合 Lingo 软件进行求解, 很好地回答了现有碟的一次性分配问题。结合抽样统计的知识, 建立 0~1 规划模型用以解答第三问的多目标规划问题。在双目标规划的求解处理上, 采取以满意度为限制条件, 以碟的总量最小为目标进行规划的方式寻优求解。针对第四问, 本文引入 VIP 机制, 分别建立并求解了 VIP 会员与普通会员的权重不同时的加权规划模型、VIP 会员有优先权的分层规划模型。还简单讨论了会员的信用度、邮递时间、租赁规则、DVD 价格因素等实际问题。

**关键词:** 随机服务模型; 0-1 整数规划; 多目标规划; 抽样统计; VIP 机制

**分类号:** AMS(2000) 90C30

**中图分类号:** O221

**文献标识码:** A

## 1 模型假设

设每月租赁两次 DVD 的会员为 A 类会员, 每月租赁一次 DVD 的会员为 B 类会员。

- 1) 假设问卷调查所得数据符合统计规律。
- 2) 假设邮寄时间可以忽略不计。
- 3) 假设不同会员对某种 DVD 的偏好指数是相互独立的。同一会员对不同种 DVD 的偏好指数也是相互独立的。
- 4) 假设 DVD 碟一经归还, 立即租出。
- 5) 假设 A 类会员在每月1日租借的碟15日归还, 再租借其它的碟到月底归还。B 类会员在每月1日租借碟, 到月底归还。
- 6) 不同 DVD 的采购价格相同。

## 2 模型的建立与求解

### 2.1 满意度的定义:

- 1) 偏好指数的修正:

我们把题目表格2中表示喜好程度的数字定义偏好指数  $q_{ij}$ , 为了计算中排除偏好指数为0的干扰, 修正为  $n_{ij}$ , 修正式为:  $n_{ij} = \begin{cases} q_{ij} & (q_{ij} = 0) \\ 11 - q_{ij} & (q_{ij} \neq 0) \end{cases}$ .

2) 相对满意度的定义:  $\xi = E/E_0$ ,

① 个人相对满意度:

个人绝对满意度  $E$ : 该名会员得到的所有 DVD 所对应的偏好指数之和。

个人绝对满意度最大值  $E_0$ : A(B) 类会员:  $E_0$  为该会员对各种碟的偏好指数中最大的六(三)个数之和。

② 在具体的分配方案下, 所有会员的绝对满意度总和最大值  $E_0$  求解如下:

首先, 对修正后偏好指数进行统计, 其从10到1出现的次数如下表所示:

表 1: 各满意度的统计结果

满意度值	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
统计结果	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	791	582

第二问的求解是一个一次性分配问题, 由于每个会员最多能租借到3张 DVD,

从统计的角度出发, 由表1可知此时的总满意度最大值  $E_0 = 27000$ 。

第三问的求解存在返还碟的再次分配的情况, 由于有 60% 的碟会被返还, 考虑到一个人不会重复租借同一种碟, 同上分析有

$$E_0 = 60\% * \sum_{i=1}^{1000} (10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5) 40\% * \sum_{i=1}^{1000} (10 + 9 + 8) = 37800.$$

注 上述情况只符合宏观统计, 分析题中表格2的数据可知, 并不是每一个会员在借3张碟的时候的最大偏好指数和都能取到27。

## 2.2 第一问求解

### 2.2.1 模型一: 基于 DVD 碟租用次数限制的通用 (General Model) 模型

1张 DVD 在第一次被租借后, 如果被归还, 那么本月内可以有两个会员看到该碟。给出如下模型

$$2k * D_i + (1 - k) * D_i = M_i$$

$k$  表示在每月第一批次租借碟  $D_i$  的会员中, A 类会员所占比例,  $(1 - k)$  表示 B 类会员所占比例,  $M_i$  表示一个月看到第  $i$  种碟的总人数。

模型求解: 1) 一个月至少 50% 的会员看到 DVD1 的情况:

我们默认抽样调查符合统计规律。  $M_1 = 20000 * 50\% = 10000$ 。

正常情况下, 认为第一批租借碟的会员中, A 类占 60%, B 类占 40%, 即:  $k = 0.6$ , 带入求解得:  $D_1 = 6250$  张。

悲观估计认为在 20000 个会员中最多有 8000 个 B 类会员, 都分布于  $M_1$  中, 即:  $2 * D_1 = M_1 + 8000$  解得:  $D_1 = 9000$  张, 此时:  $k = 8/9$ 。

从乐观估计的角度出发, 上述 8000 个 B 类会员, 认为都不分布于  $M_1$  中, 即:  $2 * D_1 = M_1$  解得:  $D_1 = 5000$ , 此时:  $k = 1$ 。

2) 保证三个月内至少 95% 的希望看到该碟的会员能够看到 DVD1 的情况:

由于 95% 的比例相当大, 其中的两类会员的分布应该符合整体分布情况。

基于上文的假设, 每个月所有租出的碟在月末之前都返还回来, 相当于每个月的情况都是独立的。易知:  $2 * k * D_i + (1 - k) * D_i = \frac{1}{3} * M_i$  其中  $k = 0.6$ 。

此时,  $M_i$  表示三个月内看到第  $i$  种碟的总人数。代入解得:  $D_1 = 3958.3 = 3959$  张。

按照上述思想, 求得第一问的解如表2所示:

表 2: 通用模型求解结果

DVD 名称		DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
一个月 50%的人看到	正常估计	6250	3125	1563	782	313
	悲观估计	9000	4500	2250	1125	450
	乐观估计	5000	2500	1250	625	250
三个月 95%的人看到	正常估计	3959	1980	1032	516	198

由于该模型的求解基于几个很理想化的假设, 我们考虑到从实际角度出发, 为了充分利用现有资源, DVD 碟应该被允许被多次租借, 才能保证网站业务的连续性, 同时提高碟的利用率, 使碟的购买量更小, 为此我们给出随机服务模型。

### 2.2.2 模型二: 随机服务模型 (Random Server Model) 简称 RS 模型

本模型基于 Poission 过程模拟每天归还 DVD 的会员人数 (以天为单位)。

$\lambda$  的估计: Poission 分布:  $P\{x = k\} = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^k}{k!} (k = 0, 1, 2, \dots)$

在  $(0, 2\lambda)$  区间内累积积分值可近似为 1 ( $\lambda \geq 3$ ) (文献 [1]) 可知一个月借一次  $2\lambda = 30$ , 得  $\lambda = 15$ , 同理, 一个月内借一次时,  $\lambda = 30$ 。

**RS 模型:** 目标函数就是寻求某一 DVD 的准备量最小。

目标函数:  $\min D_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$

初始条件:  $x_{i1} = D_i * 60\% \quad y_{i1} = D_i * 40\%$

随机模型约束:  $p(x_{j,j+k}) = e^{-15} * 15^k / k! \quad p(y_{j,j+k}) = e^{-30} * 30^k / k!$

第  $j$  天借出碟中符合不同约束的数目:  $x_{ij} = 60\%(x_{ij} + y_{ij}) \quad y_{ij} = 40\%(x_{ij} + y_{ij})$

第  $j$  天租借出的数目等于以前租出的 DVD 在该天归还的数目:

$$x_{ij} + y_{ij} = \sum_{n=1}^{j-1} x_{in} * p(x_{nj}) + \sum_{n=1}^{j-1} y_{in} * p(y_{nj}), \quad (j = 2, 3, 4, \dots).$$

租借总人数的约束:  $\sum_{j=1}^{30} (x_{ij} + y_{ij}) = M_i$

其中  $x_{ij} \dots$  A 类会员在第  $j$  天租借的第  $i$  种碟的数量总和;

$y_{ij} \dots$  B 类会员在第  $j$  天租借的第  $i$  种碟的数量总和;

$p(x_{jk}) \dots$  A 类会员在第  $k$  天归还其在第  $j$  天租借的 DVD 的比率, ( $j < k < j + 30$ )

$p(y_{jk}) \dots$  B 类会员在第  $k$  天归还其在第  $j$  天租借的 DVD 的比率, ( $j < k < j + 60$ )

上述约束条件描述一个随机服务模型, 随机主要体现在归还碟时间上的随机性。

模型求解: 我们采用 C++ 编程 (文献 [7]) 求解如表3所示:

表 3: RS 模型求解结果

DVD 名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
一个月内 50%	5085	2543	1271	636	254
三个月内 95%	3921	1961	981	490	196

通过对比表2和表3中的数据可知,用随机服务模型可以有效地模拟实际情况,从而减少碟的购买量,增加了网站的利润空间。

### 2.3 第二问, 现有碟的分配 (BIP 模型)

现有碟的一次性分配是一个线性规划 (LP) 问题, 我们建立 0-1 整数线性规划 (Binary Integer Programming) 模型 (BIP)(文献 [6]), 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{表示第 } i \text{ 个会员没有租借到第 } j \text{ 种碟,} \\ 1 & \text{表示第 } i \text{ 个会员租借到第 } j \text{ 种碟.} \end{cases}$$

$$\text{BIP 模型目标函数: } \max E = \sum_{i=1}^{1000} \sum_{j=1}^{100} m_{ij} * n_{ij}$$

由于本问是一个一次分配问题, 最大可能满意度值  $E_0 = 27000$

$$\text{租赁规则约束: } \sum_{j=1}^{100} m_{ij} \leq 3$$

$$\text{DVD 数量限制: } \sum_{i=1}^{1000} m_{ij} \leq D_i$$

模型求解: 采用 C++ 编程对数据进行处理, 然后在 Lingo 中实现相关矩阵的输入, 并求解。结果: 所有会员的绝对满意度之和为:  $E = 24746$ , 相对满意度:  $\xi = E/E_0 = 24746/27000 = 0.9165$

### 2.4 第三问求解

#### 2.4.1 抽样分析

在本问中, 只能在已经确定 1000 名会员中两类会员的确切标号的前提下才能求解。经过初步的数据分析, 我们发现, 不同的碟几乎在各个方面的数据上都趋于一致。我们采取随机抽样 (文献 [2]) 的方法, 在 1000 名会员中随机指定 600 名为 A 类会员, 求解此时的  $\xi$ , 将多次抽样的结果进行比较, 得出如下结论:

结论: 在本问的相关约束下, 当 DVD 的具体数量一定时, 按照第一次分配总量 60% 的比例, 任意指定 600 名会员归还所借的碟, 总体最大满意度的变动非常小, 可以认为不变。

#### 2.4.2 模型建立

基于以上结论, 我们指定编号为前 600 的会员为 A 类会员。

本问是一个多目标规划问题, 规划的目标是使 100 种碟的总量最小, 同时要求满意最大, 我们把满意度作为限制条件, 通过在不同满意度条件下来求解碟的最小总量的方式实现规划:

目标函数

$$\min \sum_{i=1}^{100} D_i$$

满意度限制

$$\sum \sum s_{ij} \times n_{ij} + \sum \sum t_{xy} \times n_{xy} \geq E.$$

所有的碟在第一次分配时都会借出

$$\sum_{x=1}^c \sum_{i=1}^{100} t_{xi1} + \sum_{y=601}^{1000} \sum_{j=1}^{100} s_{yj1} = \sum_{k=1}^{100} D_k;$$

月中借出的碟不超过总碟的 60%

$$\sum_{z=c+1}^{600} t_{zi2} + \sum_{y=601}^{1000} s_{yj2} \leq 60\% * \sum_{k=1}^{100} D_k;$$

每一个人每次最多租到3张碟

$$\sum_{j=1}^{100} s_{ijk} \leq 3, \sum_{j=1}^{100} t_{ijk} \leq 3;$$

每个人在月内不会重复租同一张碟:  $s_{ij1} \times s_{ij2} = 0$ ;

月内没租到碟的会员占总会会员数的 5%:  $d_A + d_B \leq 1000 * 5\%$ ;

其中

$$d_A = \sum_{y=601}^{1000} \prod_{k=1}^2 \prod_{j=1}^{100} (1 - s_{yjk}), \quad d_B = \sum_{x=1}^c \prod_{i=1}^{100} (1 - t_{xi1}) + \sum_{x=c+1}^{400} \prod_{i=1}^{100} (1 - t_{xi2}).$$

变量说明:  $s_{ijk}$  A 类会员  $i$  在第  $k$  次分配中租赁第  $j$  种碟 ( $k=1, 2$ )

$t_{ijk}$  B 类会员  $i$  在第  $k$  次分配中租赁第  $j$  种碟 ( $k=1, 2$ )

注: 上述变量均为 0-1 变量, 租到为 1, 未租到为 0.

$d_A$  A 类会员中没有租到碟的人数

$d_B$  B 类会员中没有租到碟的人数

### 2.4.3 模型求解

由求解结果知 100 种 DVD 的总量只要大于 624, 就可以保证至少存在一种合理的分配方案, 使得至少 95% 的会员能看到他们想看的 DVD.

通过给定的限制, 我们计算出相对满意度与 DVD 最小采购总量的关系如图1.

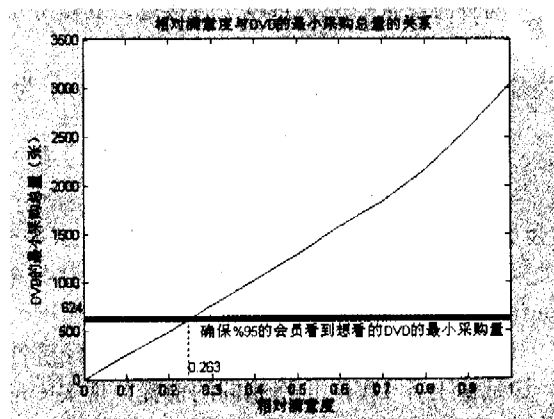


图 1: 相对满意度与 DVD 最小采购总量的关系图

从网站盈利最大化和尽量满足会员需求的角度出发,我们推荐给上图中相对满意度为1时对应的100种DVD的购买量作为网络运营管理人员的参考。

### 2.5 在需求预测、购买和分配中值得研究的一些重要问题

我们通过多目标规划中经常用到的修改目标函数(文献[4])的方法,将VIP机制引入到第二问建立的0-1整数规划模型,从而解决在有会员等级制度的情况下DVD的分配问题。假设编号前500的会员(C001~C500)为VIP会员。租赁规则、现有各DVD数量及各会员的需求均与第二问相同。

#### 加权规划模型:

将第二问模型的目标函数改为普通会员(G)的满意度与VIP会员(V)的满意度之和,即

$$\max E = \sum G_{xi} \times n_{xi} + \sum P \times V_{yj} \times n_{yj}, \quad x \neq y,$$

其中G、V为0-1变量,对应两种会员是否获得相应的DVD,P为VIP会员满意度的权重,可根据现实情况,如经验、印象、统计规律来确定。比如,可设普通会员的满意度权重为1,VIP会员为2,求得分配方案与第二问结果相比较,前30名(VIP)会员的个人满意度有大幅度提高,这说明用加权的方式修改了目标函数后,模型对解决有会员等级划分的情况下DVD的分配问题是有效的。

#### 分层规划模型:

根据实际情况,也可给予VIP会员优先权,在确保VIP会员满意度最高的情况下,使普通会员的满意度尽可能高。具体说来,是以VIP会员总的满意度:

$$\max E_1 = \sum V_{yj} \times n_{yj}, \quad x \neq y$$

为第一层规划的目标函数,把求得的解作为第二层规划的约束条件,再以普通会员总的满意度:

$$\max E_2 = \sum G_{xi} \times n_{xi}, \quad x \neq y$$

为第二层规划的目标函数,求得的分配方案与加权规划相比,VIP会员满意度有了更大的提高。

#### 两种模型之间的联系:

当随着权重P的增大,两种方法求得的解将越来越接近,其实分层规划就是极限情况下的加权规划。

若设 $f_1(G, V, n, P)$ 为加权法规划出的目标函数值, $f_2(G, V, n)$ 为层次规划法解出的目标值,则有

$$f_2(G, V, n) \Leftrightarrow \lim_{P \rightarrow +\infty} f_1(G, V, P, n).$$

**多等级规划模型:**当会员等级有更多的分类时,处理方法与上式完全类似不再赘述。

**邮寄时间:**考虑邮寄时间问题,引入邮寄时间变量 $t$ ,并考虑其分布,用计算机生成大量随机数 $t$ 进行仿真,以Monte Carlo方法模拟,解决第一问。

**DVD的价格:**第三问在各DVD采购数量的规划上,按照经济性原则,以DVD总购买量最小为目标进行规划,这是基于各DVD价格相同的前提,现实中应当以各DVD的价格为权重,进行相应的目标规划。

**租赁规则:**题设中的租赁规则与实际中影片租赁公司(如:沃尔玛、netflix、blockbuster等)的运营模式很不相同。题设规则对于每月租赁次数和每次租赁碟数的限制同时也限制了会

员消费, 从而影响网站的经济利益。一次租赁3张的方式对于网方来说具有更高的风险性, 也对会员的信誉提出了要求。

**会员信誉:** 对于历史记录上信誉高的会员(无欠费和迟还纪录), 可以允许他一次租借更多的 DVD, 这就在本题中引入了相应的租借数量限制矩阵作为约束, 模型适用性更广, 不过模型的求解时间(或者说程序的运行时间)也将更长。

**统计方法:** 对于现实中会员人数的数量级更高时, 对所有会员整体上一次规划用软件求解是不可能的。在这种情况下, 我们仍可以抽取足够多的会员作为样本, 从而缩小软件求解规模, 多次抽取样本, 以样本特征估计整体。

### 3 模型评价

优点:

1. 确定规划和随机模拟相结合。本模型着眼于更贴近实际地解决问题, 兼顾求解的复杂程度, 将确定性与随机性因素统一考虑, 二者互为补充, 互相印证。

2. 可拓展性强。由于本模型充分考虑了租赁规则、商家目标以及会员感受, 任一条件的改动都会灵敏地反映在模型中, 从而影响规划结果, 为商家决策提供指南。

缺点: 囿于商业运作知识的缺乏, 对一些因素(比如满意度)的把握可能欠妥当。

参考文献:

- [1] 李德, 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982
- [2] 盛聚等. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001
- [3] 张志涌等. 精通 MATLAB 6.5 版教程[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2003
- [4] 吴翊, 吴孟达等. 数学建模的理论与实践[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1999
- [5] 胡运权. 运筹学教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982
- [6] 徐玖平, 胡知能等. 运筹学[M]. 北京: 科学出版社, 2004
- [7] 姚庭宝. 语言及编程技巧[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2003

## Optimal Design for Online DVD Tenancy System

LI Peng-peng, ZHU Xiao-man, XIE Wei

Advisor: Instructor Group

( National University of Defense Technology, Changsha 410073 )

**Abstract:** We've done some research about the tenancy and retribute of DVD. First, we come up with the reasonable definition about the absolute satisfaction degree index and relative satisfaction index to measure the member's satisfaction. During the process on solving the model, we use Poisson procedure to simulate DVD's retribute process and successfully make prediction about the market requirement on the basis of the limited tenancy times. Then we construct a binary integer programming (BIP) model to make answer about the one-off DVD distribution, and apply LINDO in our model. Next we treat the quantity of DVD as object function and satisfaction as constrains to find the optimal solution to this multiple goal programming. Finally, we introduce the VIP mechanism. We construct a weighted programming model, assuming that VIP's weight is higher than common members. And we also develop a hierarchical programming model, assuming that VIP has priority.

**Keywords:** BIP; multiple goal programming; VIP mechanism