

文章编号: 1005-3085(2003)05-0048-09

车灯线光源的优化设计问题

董超平, 萧楠, 晋磊

指导教师: 鲍炎红

(安徽大学数学系, 合肥 230039)

编者按: 本文依据反射定律讨论了从光源上一点发出的光线能反射到B点或C点的条件, 比较准确地确定了反射点的个数。

本文的另一个优点是简洁、明确地给出了问题中求解最优光源长度的数学模型(优化模型), 并给出了相应的算法。

本文的不足之处是没有考虑光线照度的对弦定律, 并且没有考虑到反射面到接收屏之间光照面积的变化。

摘 要: 本文针对车灯优化设计问题, 在指定的测试方案下, 给出了计算线光源长度 $2l$ 的方法。首先我们利用光学知识和 Mathematica 计算得到 B, C 两点的光强 E_B, E_C 与线光源长度 $2l$ 的关系, 结合测试方案的要求, 即 $E_B \geq 2E_0, E_C \geq E_0$, 且使线光源功率最小, 由于 $e_B(x)$ 和 $e_C(x)$ 的显式表达式无法给出, 故我们用数值方法求得最优线光源长度 $2l = 3.7 \text{ mm}$ 。其次, 我们使用计算机模拟技术作出了测试屏的亮区。最后, 在对测试方案进行综合评价时发现, 题设所给出测试方案有一定的优点, 但仍有许多有待改进之处。

关键词: 反射定理; 纬圆; 光强; 功率; 亮区

分类号: AMS(2000) 49K35

中图分类号: O224

文献标识码: A

1 问题重述(略)

2 符号约定及参数说明

Σ —— 作为反射面的旋转抛物面;

$\vec{r}(u, v)$ —— Σ 的参数方程(其中 u, v 为参数);

MM' —— 线光源所在的线段;

$2l$ —— 线光源的长度;

S —— 线光源上某一点, 可看作点光源;

P —— 点光源 S 在抛物面上的一个反射点; \vec{PN} —— 旋转抛物面上点 P 处的法向量;

E_B —— B 处的光强;

E_C —— C 处的光强;

W —— 光源的功率。

3 必要的假设

1) 反射过程中, 光的能量没有损失;

- 2) 将线光源看成几何线段;
- 3) 线光源不会阻挡反射光线的传播;
- 4) 不考虑光的衍射,干涉现象,即是在测试屏上各点的光强只是线光源上各点形成的光强的简单叠加;
- 5) 为简单起见,我们只考虑一次反射。

4 问题分析

4.1 反射点的坐标

如图1,我们以抛物面的对称轴为 y 轴,抛物面的顶点为原点建立坐标系。得到抛物面 Σ 的方程为: $x^2 + z^2 = 60y$ ($0 \leq y \leq 21.6, -36 \leq x, z \leq 36$), 其参数方程 $\vec{r}(u, v) = (v \cos u, \frac{v^2}{60}, v \sin u)$, (其中 u, v 为参数). Σ 在 (u, v) 处的法向量为

$\vec{PN} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (v \cos u, -30, v \sin u)$. 其中 \vec{r}_u, \vec{r}_v 分别为向量 \vec{r} 对 u 和 v 的偏导数。

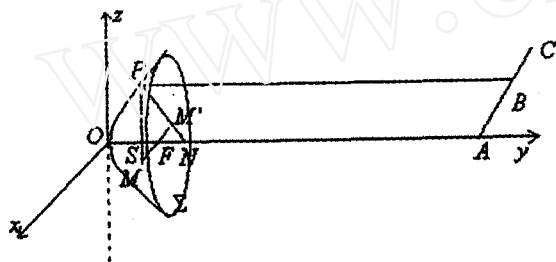


图1 点光源反射

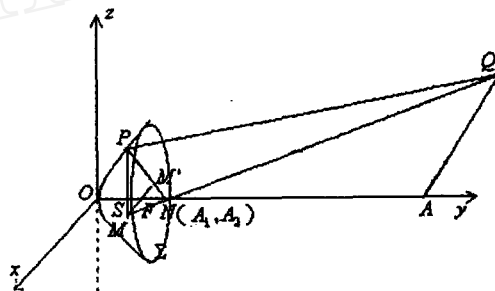


图2 反射关系

设线光源 MM' (如图1) 上任意一点 S 坐标为 $(x, 15, 0)$, 其中 $|x| \leq l$, 显然由线光源的对称性知 $2l$ 即为 MM' 的长度。

我们要考虑 B 的光强, 而 B 处的光是由线光源 MM' 所发出的光经过 Σ 的反射到达的, 光强决定于光源的功率和光源到该点的距离。为此, 不妨设点光源 S 所发出的光线可以经过 Σ 上点 P 的反射到达点 B , 其中设点

$$P = (v \cos u, \frac{v^2}{60}, v \sin u), S = (x, 15, 0), (|x| \leq l), B = (1300, 25015, 0)$$

在求 P 与 S 的具体关系 (即 v, u 与 x 的函数关系) 之前, 我们先来分析点 P 所必须满足的一个条件。为此我引进下面的定理:

定理 如图2所示, S 为 MM' 上任意一点, 点 Q 在 XOY 平面上, S 经 Σ 上的点 P 反射到点 Q , PN 为 P 点的法向量, 那么如果 P 点不在 XOY 平面上, 则 PN 必然经过 SQ 与对称轴 OA 的交点。

证明 由光的反射定理知, PS, PN, PQ 三线共面, 则 PN 必然与 SQ 交于一点, 设为 A_1 。又因为 PN 是 Σ 在点 P 的法线, 则 PN 与 Σ 的对称轴 OA 也有一交点, 设为 A_2 。事实上, 因

为 Σ 为旋转抛物面, 设 $P = (v \cos u, \frac{v^2}{60}, v \sin u)$, 则 $\overrightarrow{PN} = (v \cos u, -30, v \sin u)$ 。只需取对称轴 OA (即 Y 轴) 上一点 $A_2(0, \frac{v^2}{60} + 30, 0)$, 显然有 A_2 在直线 PN 上。而点 P 不在 XOY 平面上, 所以 A_1, A_2 都在平面 XOY 上。同时, 它们亦都在直线 PN 上, 所以 A_1, A_2 重合, 不妨记为 N , 即 P 点的法线 PN 必过 SQ 与 FA 的交点。

注 1) 若 P 在 XOY 平面上, 上述定理无效;

2) 利用本定理, 在已知 S, Q 坐标时可方便地计算出点 P 的坐标。从上述定理我们可以看出, 若令 Q 点为点 B , 则点 N 由点 S (即 x) 唯一确定, 即 $(\frac{v^2}{60} + 30)$ 由点 S (即 x) 唯一确定, 也就是说点 P 的坐标由点 S (即 x) 唯一确定。至此我们可知: 点 P 的位置为

情形 1 在 Σ 的某个纬圆上, 且该纬圆由点 S 唯一确定;

情形 2 在平面 XOY 上。

下面我们来确定这些具体的函数关系。由光反射所满足的条件, 我们有

1) $\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PN}$ 共面

2) 直线 PN 为直线 PS 与直线 PB 的角平分线。

其中

$$\overrightarrow{PB} = (1300 - v \cos u, 25015 - \frac{v^2}{60}, -v \sin u)$$

$$\overrightarrow{PS} = (x - v \cos u, 15 - \frac{v^2}{60}, -v \sin u)$$

$$\overrightarrow{PN} = (v \cos u, -30, v \sin u)$$

由共面知: 混合积 $(\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PS}) \cdot \overrightarrow{PN} = 0$. 即

$$\begin{aligned} & -1300v(15 - \frac{v^2}{60})\sin u - v(-39000 - 24985v \cos u + \frac{1}{60}v^3 \cos u)\sin u \\ & + (x - v \cos u)(24985v \sin u - \frac{1}{60}v^3 \sin u) = 0 \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{60}v(-v^2(-1300 + x) + 300(3900 + 4997x))\sin u = 0$$

解得

$$1^0 -v^2(-1300 + x) + 300(3900 + 4997x) = 0$$

2⁰ $v \sin u = 0$ 即 $\sin u = 0$ (若 $v = 0$, 则为原点, 而这一情形包含在以下我们讨论的情形 2 中)

我们先考虑 情形 1

由得

$$1^0 \text{ 得: } x = \frac{1300(900 + v^2)}{-1499100 + v^2}, \text{ 即 } v^2 = \frac{60(19500 + 24985x)}{x - 1300}$$

由 2), \overrightarrow{PN} 与 $\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PB}$ 的夹角的余弦分别为

$$\cos(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PS}) = \frac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PS}| |\overrightarrow{PN}|}, \cos(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PB}) = \frac{\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PN}| |\overrightarrow{PB}|}$$

则

$$\frac{\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PN}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PS}}{|\overrightarrow{PN}| |\overrightarrow{PS}|}$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{(-1499100 + v^2)(-1500900 - v^2 + 2600v \cos u)}{\sqrt{(25015 - (v^2/60))^2 + (-1300 + v \cos u)^2 + v^2 \sin^2 u}} \\ &= \frac{(900 + v^2)(-1499100 + v^2 - 2600v \cos u)}{\sqrt{(15 - (v^2/60))^2 + (-1300(900 + v^2)/(-1400100 + v^2) + v \cos u)^2 + v^2 \sin^2 u}} \end{aligned}$$

$$\text{解得: } \cos u = \frac{900 + v^2}{2600v}$$

至此, 我们得到 p 点的坐标 (X, Y, Z) 为

$$\begin{cases} X = \frac{7500x}{13(x-1300)} \\ Y = \frac{19500 + 24985x}{x-1300} \\ Z = \pm \sqrt{1499100 - \frac{195 \times 10^7}{1300-x} - \frac{5625 \times 10^3 x^2}{169(1300-x)^2}} \end{cases}$$

同理, 可设 (X', Y', Z') 由 S 所发出的光线经过 Σ 上点 P' 反射到点 C , 则

$$\begin{cases} X' = \frac{3750x}{13(x-2600)} \\ Y' = \frac{78000 + 49970x}{2(x-2600)} \\ Z' = \pm \sqrt{1499100 + \frac{39 \times 10^8}{x-2600} - \frac{14062500x^2}{169(x-2600)^2}} \end{cases}$$

现在我们来考虑情形 2, 若 $\sin u = 0$, 即点 P 的 Z 坐标为 0. 也就是说点 P 在 XOY 平面上.

不妨设 $P = (X, Y, 0)$, 其中 $X^2 = 60Y$

设 k_1, k_2, k_3 分别为直线 PS, PN, PB 的斜率. 如图 3 所示:

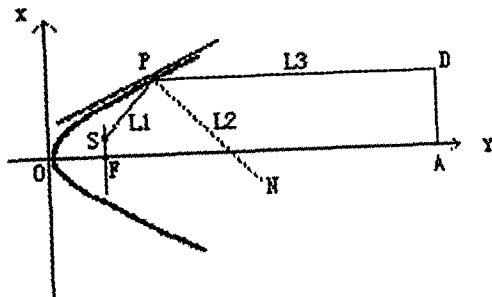


图3 光反射情形

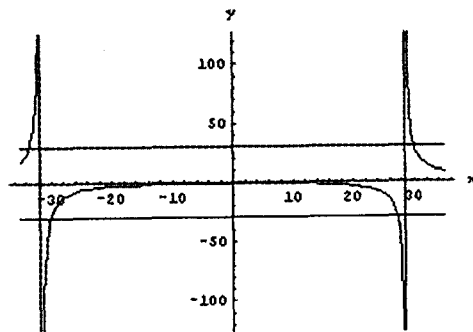


图4 解的图像

$$\text{即 } k_1 = \frac{x-X}{15-Y}, k_2 = \frac{-X}{15}, k_3 = \frac{1300-X}{25015-Y}$$

因为 PN 为 PS 和 PB 的角平分线

$$\text{所以 } \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_3 - k_2}{1 + k_3 k_2}$$

解得

$$x = \frac{(-1300 + X)(900 + X^2)^2}{1350810000 - 460000X - 1498200X^2 + X^4}$$

同理,取点 C 时可以解得

$$x = \frac{(-2600 + X')(900 + X'^2)^2}{1350810000 - 9360000X' - 1498200X'^2 + X'^4}$$

从上式我们可以看出,在已知 x 时,用数值方法可以求得 X (或 X'),进而由抛物线方程可以求得 Y ,这样便知道 P 的坐标 $(X, Y, 0)$ 和 P' 的坐标 $(X', Y', 0)$ 。例如:

取 $x = -10$, 则 $P(-27.3320, 12.4506, 0)$ $P'(12.4506, 10.4277, 0)$

取 $x = 10$, 则 $P(33.9477, 19.2074, 0)$

取 $x = 0$, 则 P 不存在

4.2 反射点的个数

由以上的分析可知,线光源上任一点 S 至多只能经过旋转抛物面上有限个点反射后到达点 B (或 C),以 B 为例,设上述反射点的全体为 $H_x = I_x \cup J_x$ 其中 I 为满足情形 1 的点全体, J 为满足情形 2 的点的全体,设 h_x, i_x, j_x 分别表示 H_x, I_x 和 J_x 中点的个数,显然 $h_x = i_x + j_x$ 。由于我们的反射面有一定的范围,所以对 MM' 上不同的点 S ,它所对应的点 $P(X, Y, Z)$ 个数 h_x 也不同。以下只对此作详细的讨论

对于情形 1: 因为 $0 \leq Y \leq 21.6, -36 \leq X, Z \leq 36$, 可知

$$i_x = \begin{cases} 0, & -30 \leq x < -1.91 \\ 2, & -1.91 \leq x < -0.78 \\ 0, & -0.78 \leq x \leq 30 \end{cases}$$

对于情形 2 我们通过分析函数 $x = \frac{(1300 + X)(900 + X^2)^2}{1350810000 - 4680000X - 1498200X^2 + X^4}$ 的图象

(即图 4) 可知

$$j_x = \begin{cases} 2, & -30 \leq x < -0.78 \\ 0, & -0.78 \leq x < 8.04 \\ 1, & 8.04 \leq x < 15.31 \\ 2, & 15.31 \leq x \leq 30 \end{cases}$$

最后可知

$$h_x = \begin{cases} 2, & -30 \leq x < -1.91 \\ 4, & -1.91 \leq x < -0.78 \\ 0, & -0.78 \leq x < 8.04 \\ 1, & 8.04 \leq x < 15.31 \\ 2, & 15.31 \leq x \leq 30 \end{cases}$$

注 1 $P(X, Y, Z)$ 和 x 的函数关系在前面已经给出。

注2 从上式可以看出 $l \geq 0.78$, 否则线光源上所有光线经过反射均不能到达点 B 。

注3 对 C 点类似考虑有:

$$h_x = \begin{cases} 2, & -30 \leq x < -3.81 \\ 4, & -3.81 < x \leq -1.55 \\ 0, & -1.55 < x \leq 13.35 \\ 1, & 13.35 < x \leq 30 \end{cases}$$

显然, 我们可以得到 $l \geq 1.55$ 。

5 模型的建立

5.1 线光源长度的确定

基于问题分析中的考虑, 线光源 MM' 上任一点 $S(x, 15, 0)$ 可以经过 Σ 上点 $P(X, Y, Z)$ (P 由 S 确定, 即 X, Y, Z 均由 x 确定, 但不同 S 的所决定 P 的个数可能会不同——(*))。

设 MM' 上点光源 S 的功率为 W_0 , 那么线光源 MM' 的总功率为 $2lW_0$, 则 P_i 点功率为 $\frac{W_0}{4\pi |P_i S|^2}$, 从而从点光源 S 发出的光束经抛物面 Σ 反射在点 B 的光强

$$e_B(x) = \sum_i \frac{\lambda W_0}{4\pi |P_i S|^2} = \frac{\lambda W_0}{4\pi} f_B(x) \quad (1)$$

其中 $f_B(x) = \sum_i \frac{1}{|P_i S|^2}$, 则 B 处的光强为

$$E_B(l) = \int_{-l}^l e_B(x) dx = \frac{\lambda W_0}{4\pi} \int_{-l}^l f_B(x) dx = \frac{\lambda W_0}{4\pi} g_B(l) \quad (2)$$

其中 $g_B(l) = \int_{-l}^l f_B(x) dx$ 。同理, 我们可以求得 C 处的光强为

$$E_C(l) = \int_{-l}^l e_C(x) dx \text{ 和 } g_C(l) = \int_{-l}^l f_C(x) dx \quad (3)$$

由题设, 要求 $1^\circ E_C \geq E_0$;

$2^\circ E_B \geq 2E_0$ (E_0 为事先给定的一个初始值)

$\min W$

本题的要求就是满足 $1^\circ, 2^\circ$ 的同时, 使得线光源的功率最小, 即 $s.t. \begin{cases} E_B \geq 2E_0 \\ E_C \geq E_0 \end{cases}$ 。在具体计算

(2) 和 (3) 时, 我们发现 $e_B(x)$ 和 $e_C(x)$ 的显示函数解析式是无法给出的。针对于此, 结合 (*) 及线光源的对称性, 我们作如下处理

1° 对 l 进行离散化的处理。首先合理的 l 满足 $1.55 \leq l \leq 30$ 。以一定步长, 在 $[0, 30]$ 中等距离取出 n 个点, 记为 l_1, l_2, \dots, l_n ;

2° 对于 $l_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 在 $[-l_i, l_i]$ 上, 对 x 进行离散化处理, 以求得 $\int_{-l_i}^{l_i} e_B(x) dx$ 的近似解。以一定步长 (记为 Δx) 在 $[-l_i, l_i]$ 中, 等距离取出 m 个点, 记为 x_1, x_2, \dots, x_m 。利用 (1) 求得 $e_B(x_j)$ 和 $e_C(x_j)$, 进而近似地求得 $E_B(l_i) = \sum_j e_B(x_j) \Delta x, E_C(l_i) =$

$$\sum_j e_c(x_j) \triangle x;$$

3°. 对每一个 l_i 进行判别。若 $E_B(l_i) \geq 2E_0$, 则令 $l_i \in G_1$ 。若 $E_C(l_i) \geq E_0$, 则令 $l_i \in G_2$ 。令 $G = G_1 \cap G_2$, 不妨设 $G = \{l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k}\}$, 其中 $l_{i_1} < l_{i_2} < \dots < l_{i_k}$ 。

4°. 我们现对 $[-l_i, l_i]$ 中的 l_i 进行分析: 以 B 点为例,

$$W = 2lW_0 \quad (4)$$

$$\frac{\lambda W_0}{4\pi} g_B(l) \geq 2E_0 \quad (5)$$

进而

$$W \geq \frac{16E_0\pi}{\lambda} \frac{l}{g_B(l)} \quad (6)$$

同理, 对 C 点我们有

$$W \geq \frac{8E_0\pi}{\lambda} \frac{l}{g_C(l)} \quad (7)$$

取 $g(l) = \max\left\{\frac{2l}{g_B(l)}, \frac{l}{g_C(l)}\right\}$ 得 $W \geq \frac{8E_0\pi}{\lambda} g(l)$, 由此可知, W 可能的最小值为 $(\min\{g(l)\}) \cdot \frac{8E_0\pi}{\lambda}$ 。

此时可求得 l , 实际的计算结果为 $l = 1.85\text{mm}$ 。

具体的计算过程我们是利用 Mathematica 软件包来实现的(程序见附录 1)。

5.2 测试屏上反射亮区

为计算 Π 平面上的光斑的范围, 要求出整个光束的路径, 其在 Π 平面上的截面就是所求的光斑。根据解析几何知识, 可以求出由坐标为 $S(s, 15, 0)$ 的光源出发, 经平面上一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 反射的光线的路径。

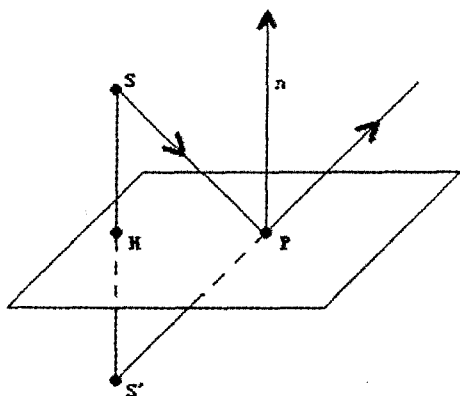


图 5 光反射情形

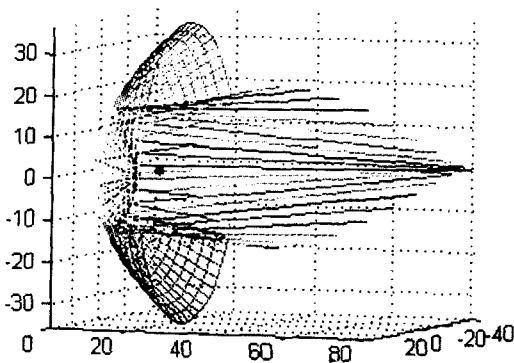


图 6 光束反射

首先求出抛物面上任意一点 P 的法向量:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \Big|_P = (2x_0, -60, 2y_0)$$

根据光的反射定律,即入射角等出射角,可知:

$$\frac{\vec{SP}}{\|\vec{SP}\|} \cdot \frac{\vec{PN}}{\|\vec{PN}\|} = \frac{\vec{NP}}{\|\vec{NP}\|} \cdot \frac{\vec{S'P}}{\|\vec{S'P}\|} \quad (*)$$

其次, SS' 的中点 H 应满足该切平面方程:

$$x_0(X - x_0) - 30(Y - y_0) + z_0(Z - z_0) = 0 \quad (**)$$

结合(*)和(**),解得:

$$\begin{cases} S'_x = \frac{-900s - 900x_0 + 60sy_0 - 60x_0y_0}{900 + 60y_0} \\ S'_y = \frac{15(-900 + 4sx_0 - 60y_0)}{900 + 60y_0} \\ S'_z = \frac{2z_0(-450 + sx_0 - 30y_0)}{900 + 60y_0} \end{cases} \quad (\text{其中代表点光源的轴坐标})$$

下面,根据两点式方程,可知出射光线的方程为:

$$\frac{X - x_0}{S'_x - x_0} = \frac{Y - y_0}{S'_y - y_0} = \frac{Z - z_0}{S'_z - z_0}$$

这样,对于取定的光源位置,可以确定一簇反射光线。在利用计算机绘制图形的时候,不

妨利用以下参数方程,使得工作更为简化: $\begin{cases} X = v \cos u \\ Y = \frac{v^2}{60} \\ Z = v \sin u \end{cases}$ 。图6是点光源 $S(13, 15, 0)$ 发出的光

线在抛物面的一纬圆上反射的光线(此时相当于 v 取定值)。

同理,要求出 Π 平面上亮区,就须在上述基础上对每一个点光源产生的光束在平面 $y = 25015$ 上叠加。经计算机绘图得到的亮区如图7所示。

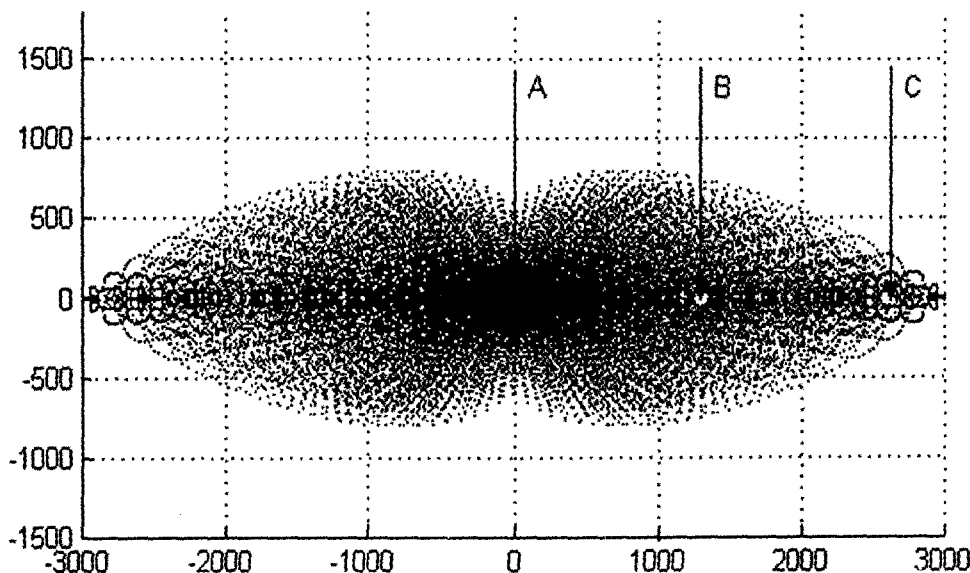


图7 反射亮区

从这个图象可以看出,车灯形成的光斑是一个中间粗,两头细的“梭形”,即大部分的光

照集中在一个长形的区域内。这种由线光源经抛物面聚焦后形成的长形光,可以防止驾驶员产生眩晕感,较传统的点光源设计有着显著的优点。

5.3 测试方案的评价

1) 在现实生活中,由于汽车的速度比较快,因此这样在焦点前 25 米处放测试屏,并不合理,而应该在更远的地方放置测试屏进行测试;

2) 不仅要从节能的角度考虑,还应该考虑其他非常重要的因素,比如在转弯时,左右两侧被照亮的区域是否足够大;

3) 仅选取两点进行测试是不合理的,这是因为正前方(即测试屏的竖直方向)的亮度大小及变化的剧烈程度都会对行车安全造成影响。设想正前方的光线极强,或者强度变化剧烈,将会引起对面的驾驶员感到刺眼,给交通安全带来隐患,所以测试方案中应该考察更多的必要的点;

4) 用微元法来处理线光源,只能是一种理论上的近似,而对其他类型的光源,若试图从理论上计算亮区是十分困难的。故很有必要对投入使用的车灯进行严格的实践测试。

6 模型优缺点评价

本模型中一个最为关键的问题是对光由 S 射到 P 后能量衰减的处理。我们的模型中采用了球面波方式的衰减机制,实际上光强有微元解析式,但依据它计算将非常复杂。

原则上,我们的一整套处理方法有广泛的适应性,比如反射面为一般的二次曲面或光源具有其他形状时,都可以进行类似处理。另外,在绘制亮区图时,我们实际上模拟了光线的一次反射过程,如果程序能进一步完善,则可以非常方便地进行仿真试验。

参考文献:

- [1] 梅向明,黄敬之.微分几何[M].北京:高等教育出版社
- [2] 廖化奎,王宝富.解析几何[M].北京:科学出版社
- [3] 赵凯华,钟锡华.光学[M].北京:北京大学出版社
- [4] 李世雄.波动方程的高频近似与辛几何[M].北京:科学出版社

The Optimization Problem of the Headlight Design

DONG Chao-ping, XIAO Nan, JIN Lei

Advisor: BAO Yan-hong

(Department of Mathematics, Anhui University, Anhui 230039)

Abstract: In this paper we discuss the optimization problem of the headlight design, under a simplified model which takes the reflective surface as a notation paraboloid. Firstly, we calculate the coordinates of the reflective points, then we make out the relation between the number of the reflective points and the variable x which denotes the X-coordinate of the pointed light source. Secondly, using the numeric integration method we calculated the light intensity of point B and C, then got the optimal length. At last, we drew the bright area by the technology of computer-simulation.