

# 煤矸石堆放的最低费用预测

钟小勇, 段国辉, 马雨东

指导小组: 代西武等

(北京建筑工程学院, 北京 100044)

**编者按:** 本文作者通过分析, 首先得到征地费和电费都取决于矸石堆积的安息角 $\alpha$ 和出矸率 $p$ 的结论, 正确地导出矸石堆体积和占地面积由运输坡道长度 $x$ 表示的关系式, 所提出的数学模型简洁而清楚

本文的最大特点是, 作者从实际出发, 既建立了符合参考答案的“一次性征地”模型, 又通过实际调查研究有创造性地提出符合我国《土地法》要求的模型, 而且假设简单合理, 解答正确, 行文流畅

文章的不足之处是所给出矸石堆的体积和面积表达式过于复杂, 未通过简单的数值计算加以简化, 另外, 正文中也未给出最主要的数值计算结果

**摘要:** 本文主要研究如何对原地区煤矿堆积煤矸石制订出合理的年度征地方案, 并对最低费用进行预测. 由于要考虑存贷款、地价上涨、煤矸石的产量以及电费计算等诸多因素的变化, 人工计算的工作量巨大, 而且短时间内不能完成. 因此, 我们通过建立不同的数学模型利用计算机来解决这个复杂的问题

本文最终从出矸率和自然安息角的各种不同值中, 找出了对应费用最小的合理方案, 并对原问题中未涉及到的《土地法》的因素进行了讨论

## 1 问题的提出(略)

## 2 基本假设

对运矸车机械效率理解为电能完全转化成煤矸石的重力势能的效率(即运矸车的质量及摩擦产生的能耗均已考虑, 且机械效率随着坡道的延长而连续下降).

每年比实际占地多征的 10% 用地为空地, 不可以用来堆下一年煤矸石

题目中的“全部采出”理解为原煤和矸石的总和

电费与征地费全部在年初交纳, 100 万元每年年初一次到位

假设运矸车总是在图中 A 点(即矸石山的山顶)向两侧倒煤矸石

题中“出矸率一般为 7% ~ 10%”, 我们只考虑 7% ~ 10% 的出矸率, 且认为出矸率在 20 年内是不变动的

## 3 问题分析

由题意, 处理矸石的经费只计征地费和堆积时运矸车的电费

### a. 征地费分析

征地费取决于矸石的占地面积, 而占地面积由立体几何知识可知, 取决于矸石堆积的体积和自然堆的安息角 $\alpha$ , 而体积又由出矸率决定, 因此, 征地费只取决于 $\alpha$ 和出矸率 $p$ 值

### b. 电费分析

电费取决于运矸车的机械效率和煤矸石运到轨道顶端所获得的重力势能. 由假设可知机械效率只取决于轨道长度, 而重力势能取决于煤矸石的质量和所达高度. 轨道长度、高

度和煤矸石的质量均由矸石堆的体积和形状决定, 矸石堆体积由出矸率  $p$  决定, 其形状取决于自然安息角  $\alpha$ 。因此, 电费也只取决于  $\alpha$  和  $p$  值

由  $a$  和  $b$  可知, 每年总费用  $\text{Sum fee}$  只取决于  $\alpha$  和  $p$ , 从而可建立三者之间的函数关系:  
 $\text{Sum fee} = f(\alpha, p)$

本问题就是对此函数求最小值, 即根据不同的出矸率制订出合理的年度征地计划和预测出矸石处理的最低费用

#### 4 单位换算和记号约定

a. 单位换算:

1 度 =  $3.6 \times 10^6$  焦      1 亩 = 666.67 平方米      1 吨 = 1000 千克

b. 记号约定:

$p$  —— 出矸率;  $\Delta m$  —— 矸石堆每一年增加的质量;  $\Delta V$  —— 矸石堆每一年增加的体积;  
 $V_i$  —— 第  $i$  年末矸石堆的总体积;  $x_i$  —— 第  $i$  年末的轨道  $SA$  的长度;  $S_i$  —— 第  $i$  年末矸石堆占地面积;  $Zd(i)$  —— 第  $i$  年的征地面积;  $Zdfee(i)$  —— 第  $i$  年的征地费用;  $\eta$  —— 机械效率;  
 $Dfee(i)$  —— 第  $i$  年的电费;  $\text{Sum fee}(i)$  —— 第  $i$  年的总费用;  $y_i$  —— 第  $i$  年用于堆积煤矸石的投资余额, 可正可负 (包含存款、贷款利息)。

所有费用以万元为单位, 以后出现的符号及变量将在文中说明

#### 5 模型建立及其合理性分析

我们建立了以下列三种模型, 其中电费的计算方法都是一样的, 区别仅在于征地方式的不同

模型一:

这是一种比较符合实际的模型, 即每年征入当年堆矸用地。若每年 100 万元加上前一年余额之和够用, 则将多余的资金存入银行; 不足, 则进行贷款

在此模型中每一年年初根据出矸率预测出本年采出的矸石总质量, 进而求出这一年年所占用土地的实际面积, 由此求出这一年的征地费, 再加上这一年的电费, 即得出这一年的总费用。如果总费用大于本年拨的 100 万元与前一年的余额之和, 则必须贷款, 贷到够本年用为止; 反之, 可将余款存入银行, 作为下一年经费

a. 每年征地费的计算:

由于出矸率一定, 原煤产量一定, 所以每年煤矸石采出量固定

由  $\frac{\Delta m}{3 \times 10^9 + \Delta m} = p$  得  $\Delta m = \frac{3 \times 10^9 p}{1 - p}$

每年矸石的增量相同, 所以矸石堆每年体积增量也相同

$$\Delta V = \Delta m / 2000 = 1.5 \times 10^6 \cdot p / (1 - p)$$

由  $V_i = i\Delta V$ , 及立体几何知识可推出矸石堆体积  $V$ 、占地面积  $S$  与轨道长度  $x$  的函数关系: (推导见附录)

$$(1) \quad V = \frac{1}{3} x^3 \{ \sin^3 \beta \cdot \text{ctg}^2 \alpha \cdot \frac{\pi + 2 \arcsin(\text{tg} \beta \cdot \text{ctg} \alpha)}{2} + \sin^2 \beta \cos \beta \cdot \text{ctg} \alpha \cdot \cos[\arcsin(\text{tg} \beta \cdot \text{ctg} \alpha)] \}$$

$$(2) \quad S = x^2 \{ \sin^2 \beta \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \frac{\pi + 2 \arcsin(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha)}{2} + \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos[\arcsin(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha)] \}$$

由此可计算出第  $i$  年矸石堆积占地面积  $Zd(i)$  和征地费用  $Zdf ee(i)$ :

$$\begin{aligned} Zd(i) &= (1 + 10\%) (S_i - S_{i-1}) \\ Zdf ee(i) &= Zd(i) \times 0.012 \times (1 + 10\%)^{i-1} \\ (0.012 \text{ 万元/米}^2 &= 8 \text{ 万元/亩}) \end{aligned}$$

#### b. 每年的电费计算

求电费的关键在于求出把煤矸石运到轨道顶端所耗电能 由于假设轨道连续变化, 而煤矸石的重力势能随着轨道的延长连续变化, 所以可用积分法求出电能

由于  $dV = 3A x^2 dx$ , 其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \{ \sin^3 \beta \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \frac{\pi + 2 \arcsin(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha)}{2} + \sin^2 \beta \cos \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos[\arcsin(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha)] \} \\ dm &= 2 \times 10^3 dV \end{aligned}$$

而且轨道顶端离地面高度  $h = x \sin \beta$ , 所以一年所耗的电能

$$E_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{6 \times 10^3 A x^2 \cdot x \sin \beta}{\eta} dx$$

其中机械效率  $\eta = 0.3 \times (1 - 0.02)^{\frac{1}{10}}$ , 第  $i$  年的电费

$$Df ee(i) = \frac{E_i}{3.6 \times 10^6} \times 0.5$$

#### c. 总费用和余额的计算

第  $i$  年的总费用  $Sum f ee(i) = Zdf ee(i) + Df ee(i)$

对第  $i$  年来说, 前一年的余额  $y_{i-1}$  是已知的 ( $y_0 = 0$ )

$$y_i = [100 + y_{i-1} - Sum f ee(i)] \times (1 + 0.05)$$

当  $100 + y_{i-1} > Sum f ee(i)$  时, 说明这一年的资金有余, 将多余的资金加上利息留给下一年

当  $100 + y_{i-1} = Sum f ee(i)$  时, 说明这一年的资金刚好够用, 余额为零

当  $100 + y_{i-1} < Sum f ee(i)$  时, 说明这一年的资金不够, 需要的贷款加贷款利息留给下年偿还

#### 模型二:

由于地价涨幅大于同期贷款利率, 采取一次性征地费用最低 可在第一年征足二十年要用的土地, 以后每年只须付电费

##### a. 每年征地费计算:

征地费只须计算第一年的, 以后每年均为 0 所以  $Zdf ee(1) = (1 + 10\%) \cdot S_{20} \times 0.012$  ( $S_{20}$  为第 20 年末矸石堆的占地面积).

$$Zdf ee(i) = 0 \quad (1 < i \leq 20);$$

##### b. 电费的算法同模型一.

##### c. 总费用和余额的算法同模型一.

模型三:

考虑《土地法》中对征地连续二年未使用则要求收回土地使用权及保护耕地的因素, 但由于地价涨幅大于同期贷款利率, 因此, 在政策允许范围内, 也要尽可能的多征土地 即每年要把下一年用地提前征用

a. 征地费的算法:

设模型三每年征地面积为  $Zd(i)$ , 则

$$Zd(1) = Zd(1) + Zd(2)$$

( $Zd(i)$  为每一年的实际用地, 包括矸石堆占地面积和保护耕地的用地 )

$$Zd(i) = Zd(i + 1) \quad (1 < i \leq 19)$$

$$Zd(20) = 0$$

征地费  $Zdf ee(i) = Zd(i) \times 0.012 \times (1 + 10\%)^{i-1}$

b. 电费的算法同模型一.

c. 总费用和余额的计算同模型一.

6 模型结果分析和方法确定:

选择模型一, 给定  $\alpha = 55\%$ ,  $p = 10\%$ . 可用计算机求出每年的征地费、电费和总费用 经比较发现征地费是影响总费用的主要因素, 因此对征地费用需进一步研究 征地费用主要取决于矸石堆占地面积, 占地面积由  $\alpha$  和  $p$  值决定 当  $p$  为定值时, 容易设想,  $\alpha$  越大, 矸石堆越陡, 占地面积越小, 因此, 在  $p$  不变的情况下,  $\alpha$  越大, 征地越少, 从而征地费越少 由于征地费是影响总费用的主要原因, 为了考察“  $\alpha = 55\%$  时总费用最小 ”, 这个假设是否合理, 在  $\alpha \in (25\%, 55\%)$  (为什么  $\alpha$  在范围内取值, 见附录的证明) 每隔 1 选取一值, 制订计算程序, 根据运行结果, 证明假设是正确的

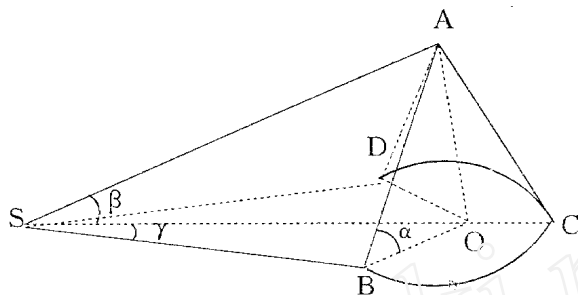
因此  $\alpha$  取 55%; 在此情况下, 对三个模型取不同的  $p$  值, 再求出总费用的最小值 经编程上机计算得出下表:

煤矸石堆放最低费用一览表 (单位: 万元)							
出矸率 方案	7%	7.5%	8.0%	8.5%	9.0%	9.5%	10%
一	1584.90	1780.81	1978.87	2179.03	2381.78	2587.24	2795.61
二	790.972	946.526	1104.66	1265.54	1429.33	1596.20	1766.30
三	1483.30	1674.05	1866.92	2062.12	2259.89	2460.41	2663.88

对结果进行比较可知: 方案二最经济, 方案三次之, 所以, 首选这两个方案 但考虑到《土地法》和保护耕地因素, 方案二更符合实际

7 模型评价(略)

## 附录



解一:

推导体积  $V$  和面积  $S$  与轨道长度  $x$  的函数关系式:

$$\beta = 25^\circ \quad \gamma = \angle BSC$$

$$AO = SA \sin \beta$$

$$SO = SA \cos \beta$$

$$BO = AO \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\gamma = \arcsin \frac{BO}{SO} \quad BOS = 90^\circ - \gamma$$

$$BOD = 180 + 2\gamma$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{A-SBCD} AO + \frac{1}{3} \pi BO^2 \cdot AO \cdot \frac{BOD}{360^\circ} \\ &= \frac{1}{3} x^3 \sin^2 \beta \cos \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos[\arcsin(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha)] \\ &\quad + \frac{1}{3} \pi x^3 \sin^3 \beta \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \frac{180^\circ + 2\arcsin(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha)}{360^\circ} \\ S &= \pi BO^2 \cdot \frac{BOD}{360^\circ} + 2 \cdot SB \cdot BO \times \frac{1}{2} \\ &= \pi x^2 \sin^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \frac{180^\circ + 2\arcsin(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha)}{360^\circ} \\ &\quad + x^2 \cos \beta \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos[\arcsin(\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \alpha)] \end{aligned}$$

证明一:

已知:  $AO \perp$  平面  $SBCD$

$SB$  为圆的切线, 即  $SB \perp OB$

可证  $SB \perp AB$

证:  $AO \perp$  平面  $SBCD$

$$AO \perp SB$$

又  $SB \perp OB$

且  $OB \cap AO = O$

$SB \perp$  平面  $ABO$

$SB \perp AB$

证明二:

本证明解释为什么搜索  $\alpha$  范围在  $(25^\circ, 55^\circ]$ , 即  $\alpha > 25^\circ$

$$BO = AO \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$SO = AO \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

在  $Rt\triangle SBO$  中,  $SO > BO$

$$\text{即 } AO \cdot \operatorname{ctg} \alpha < AO \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

$$\operatorname{ctg} \alpha < \operatorname{ctg} \beta$$

$$\alpha > \beta = 25^\circ$$

## The Calculation of the Minimum Expense for Piling up Gangue

ZHONG Xiao-yong, DUAN Guo-hui, MA Yu-dong

(Beijing Institute of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044)

**Abstract** The main purpose of this article is to draw up a reasonable, annual land-purchasing program for piling up the gangue in the original colliery, and to calculate its minimum expense. Since there is need to consider several factors such as deposit and loan, rising prices of land, output of gangue, and the charge for electricity, a huge calculation should be taken which is impossible to accomplish by hand in a short time. Therefore, we are going to make use of computer to solve the complicated problem by setting up different mathematical models.

At the end of this article with a reasonable sound solution to the minimum expense is obtained from the varied values between the tapping rate of gangue and the natural angle of the pile. The factor of  $\langle L \text{ and } L_{\text{aw}} \rangle$ , which are not involved in the original problem, is also discussed in this article.

## 煤矸石堆积模型

赵易蓉, 陈伟, 孙东杰  
指导教师: 储理才

(集美大学, 厦门 361021)

**编者按:** 本文对于煤矿堆积煤矸石的费用问题建立起数学模型, 并就不同的征地方式和煤矸石堆数进行了分析讨论, 得出了合理的结论。作者将严格的数学论证与科学计算很好地结合起来, 其方法具有普遍性, 比如, 通过建立微分方程来求得运矸车的机械效率; 通过引进一些重要参数来比较取不同的征地方式和堆数所得到的结论; 最后还对不同的出矸率所需的最低费用作了预测, 并结合实际对模型作出了较客观的评价。

**摘要:** 本文就煤矿堆积煤矸石费用问题建立数学模型, 就不同的征地方式(建矿初期一次性征完 20 年所需用地和分批征地方式)和煤矸石堆数进行了分析讨论, 得出结论: 在建矿初期一次性征完所需用地, 且所有煤矸石全堆成一堆的方案是最优的, 并就不同的出矸率计算出该最优方案的总费用, 最后给出对不同的出矸率处理矸石的最低年度平均费用公式。