第 19 卷　建模专辑
2002 年 02 月

工　程　数　学　学　报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 19 Supp.
Feb. 2002

文章编号:1005-3085(2002)05-0101-06

公交车调度问题的数学模型

谭泽光,　姜启源
(清华大学,北京 100084)

摘　要: 给出本问题的背景、建模思路、一个具体的确定性数学模型,及相应的计算结果。

关键词: 公交车调度;运行模型;多目标规划
分类号: AMS(2000) 90C08　　**中图分类号**: TB114.1　　**文献标识码**: A

1　问题的背景和要求

公交车调度问题的背景是某大城市公交部门提出的一个实际科研课题。该课题要求对一条确定的公交路线,解决三个方面的问题:

第一,根据历史积累和必要的补充调查数据,提出沿路各站来站与离站的乘客分布规律;

第二,研制一个模拟该线路公交运行过程的数学模型;

第三,在前两条的基础上为该线路提出一个配备车辆和司(机)售(票员)人员数目的方案,以及一个在通常情况下车辆的运行时间表。

根据这个背景,我们在有关人员的大力支持下,对问题作了大幅度的简化,提出了如下建模问题。首先选择了该市一条比较典型的公交线路,沿线上行方向共 14 站,下行方向共 13 站,根据多年来沿线各站乘客来、离站的人数调查数据,给出了该线一个工作日两个运行方向各站上下车的乘客数量按时间的分布。为简单明确起见,同时假设:公交公司配给该线路同一型号的大客车,每辆标准载客 100 人;客车在该线路上运行的平均速度为 20 公里/小时;并顾及社会效益对运营调度提出的基本要求为:乘客候车时间一般不要超过 10 分钟,早高峰时一般不要超过 5 分钟,车辆满载率不应超过 120%;同时又考虑到提高公交公司运营效益,提出了车辆满载率一般也不要低于 50%的指标。

问题要求根据上述数据,在尽可能适当考虑公交社会效益和公交公司利益的目标下,为该线路设计一个便于操作的全天(工作日)的公交车调度方案,即两个起点站的发车时刻表,并指出实现这个方案至少需要配备多少辆车;给出这种方案照顾乘客和公交公司双方的利益程度的数量指标,从而将这个调度问题抽象成一个明确、完整的数学模型,并指出求解模型的方法。

2　建立模型的思路和框架

该调度问题可分成三个子问题:

1)　建立模拟公交车运营时的运行模型,即在某一确定调度方案下,公交车在该线路上运行过程的数学描述。一种比较切合实际一些的是随机模型,通过随机模拟来模拟运行过程,由

决策变量及原始数据取得要求的各种目标数值。另一种是建立确定性模型，把运行过程看作一个按一定时间表发车的公交车，在一定要求下，顺序将沿线乘客送达预定地点的确定过程。

2) 通过运行模型优化所需的目标。本问题实际上是一个多目标规划，至少有二个目标要考虑：一个是反映乘客利益的乘客等待时间；另一个是反映公交公司利益的载客率。如何通过优化算法，求解这个双目标规划是该模型的第二个问题。

3) 配车模型，即确定实现调度方案所需的最少车辆数。这是一个带时序的分配问题。

3 建立确定性模型的一个例子

1) 运行模型及其求解

(1) 已知数据

® 车站标记：$j = 1, 2, \cdots, n$；

® 来客密度：在时刻 t 到达 j 站乘客的密度 $u_j(t)$，$j = 1, 2, \cdots, n$；

® 下车乘客密度：在时刻 t 从 j 站下车乘客的密度 $d_j(t)$，$j = 1, 2, \cdots, n$；

® 站间行车时间：从 $j-1$ 站到 j 站站间行车时间(包括在 j 站的停车时间)：τ_j，$j = 2, \cdots, n$；

® 每辆车的载客容量：B；载客容量上限 $\overline{B}$；

® 交通高峰时段等待时间上界 $\hat{t}$；交通平峰时段等待时间上界 $\overline{t}$；

(2) 决策变量及相关变量

决策变量：发车时刻表，向量 $T = (T_0, T_1, T_2, \cdots, T_k, \cdots, T_m)$，

其中，T_0：第一辆车到达起点站 $j = 1$ 的时刻；

T_k：第 k 辆车驶离起点站 $j = 1$ 的时刻，$k = 1, 2, \cdots, m$

相关变量：

® 第 k 辆车驶离 j 站的时刻：$T_{k1} = T_k$，$T_{kj} = T_{k1} + \sum_{\ell=1}^{j-1} \tau_\ell$，$j = 2, 3, \cdots, n-1$；

® 第 k 辆车驶离 j 站时该车上的乘客数：$P_k(T_{kj})$，$k = 1, 2, \cdots m$；$j = 1, 2, \cdots, n-1$；

® 第 k 辆车驶到 j 站时，该站上候车乘客的分布函数：

$W_{kj}(0)$：从 T_{k-1j} 到 T_{kj} 时段的来客数；

$W_{kj}(h)$：第 k 辆车驶到 j 站时，该站上已等候过 h 趟车仍未能上车的乘客数；

h_{kj}：第 k 辆车驶到 j 站时，该站上等待最久乘客的候车趟数，

$$W_{kj}(h_{kj}) > 0, \quad W_{kj}(h_{kj} + 1) = 0$$

运行模型框图(图 1)见下页图：

(3) 相关变量的计算公式

® 第 k 辆车驶到 j 站后，等到该站的乘客下完后，车上仍留下的乘客数：

$$a_{kj} = \max\left\{ \left(P_k(T_{k\,j-1}) - \int_{T_{k-1\,j}}^{T_{kj}} d_j(t)\, dt \right), 0 \right\}$$

® 第 k 辆车驶到 j 站后，等到该站的乘客下完后，j 站可容纳的上车乘客数上界：

$$b_{kj} = \overline{B} - a_{kj},$$

® 第 $k-1$ 辆车驶离 j 站到第 k 辆车驶到 j 站时段内，该站的乘客到达量：

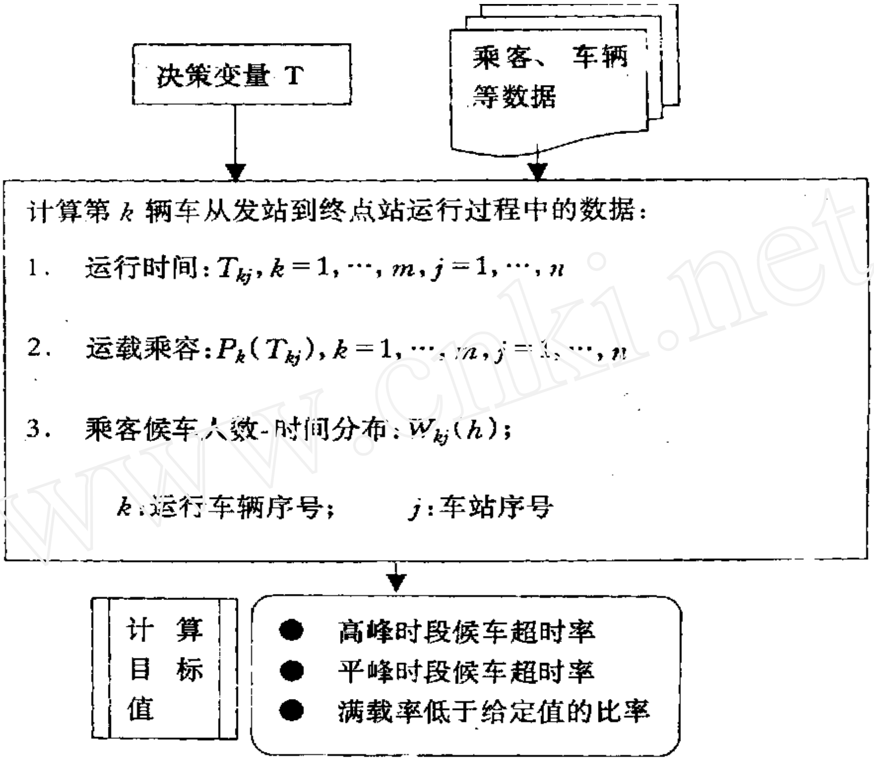

图 1

$$W_{kj}(0) = \int_{T_{k-1\,j}}^{T_{kj}} u_j(t)\,dt;$$

® 计算第 k 辆车驶到 j 站后，在该站实际上车的乘客数 ΔP_{kj}：

第一步：按先到先上车的排队原则，确定 j 在站的乘客当第 $(k+1)$ 辆车到达时，仍要等候车辆数的最大值 h_{kj}^*，为此解如下问题(参看图 2)：

$$\begin{cases} \max\limits_{0 \le h \le h_{kj}} h \\ s.\ t.\quad \sum\limits_{r=h}^{h_{kj}} W_{kj}(r) \le b_{kj} \end{cases}$$

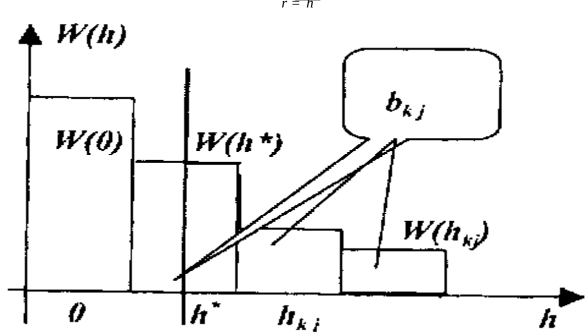

图 2

第二步：若 $h_{kj}^* = 0$，说明此时该站上所有候车人全能上车，这样，

$$\Delta P_{kj} = \sum_{h=0}^{h_{kj}} W_{kj}(h);\ \text{同时令}:\ h_{k+1j} = 0;$$

第三步：若 $h_{kj}^* > 0$，说明此时该站上候车人不能全上车，这样，

$$\Delta P_{kj} = b_{kj};\ \text{同时令}:\ h_{k+1j} = h_{kj}^* + 1,$$

且置：

$$W_{k+1\,j}(h+1) = W_{kj}(h),\ h = 0,1,\cdots,(h_{kj}^* - 1)$$

$$W_{k+1\,j}(h_{kj}^*) = \sum_{h=h_{kj}}^{h_{kj}} W_{kj}(h) - b_{kj}.$$

这样，我们有：第 k 辆车驶离 j 站的时该车上的乘客数：

$$P_k(T_{kj}) = a_{kj} + \Delta P_{kj}$$

$$= \begin{cases} a_{kj} + \sum_{h=0}^{h_{kj}} W_{kj}(h), & \text{若 } h_{kj}^* = 0, \\ \overline{B}, & \text{若 } h_{kj}^* > 0,\ k = 1,2,\cdots m;\ j = 1,2,\cdots n-1。\end{cases}$$

(4) 目标值的计算

® 第 k 辆车驶到 j 站时，该站上已等候 h 趟车的乘客数是：

$$W_{kj}(h),\ h = 1,\cdots,h_{kj}$$

他们已等候的时间是：

$$WT_{kj}(h) = T_{kj} - T_{k-h\,j},\ h = 1,\cdots,h_{kj}.$$

® 确定交通高峰时段：$[T_1, T_2]$，整个时段 $[T_1, T_m]$，则

$$\text{交通高峰时段候车超时率} = \frac{\text{高峰时段，候车超过 5 分钟的总人数}}{\text{高峰时段，上车总人数}}，\text{记作}$$

$$\text{Over } W_1(T) = \frac{\sum_{T_{kj}\in[T_1,T_2]} \{W_{kj}(h) \mid WT_{kj}(h) \geq 5,\ h = 1,\cdots,h_{kj}\}}{\sum_{T_{kj}\in[T_1,T_2]} P_k(T_{kj})}$$

$$\text{交通平峰时段候车超时率} = \frac{\text{平峤时段，候车超过 10 分钟的总人数}}{\text{平峰时段，上车总人数}}，\text{记作}$$

$$\text{Over } W_2(T) = \frac{\sum_{T_{kj}\in[T_1,T_2]} \{W_{kj}(h) \mid WT_{kj}(h) \geq 10,\ h = 1,\cdots,h_{kj}\}}{\sum_{T_{kj}\in[T_1,T_2]} P_k(T_{kj})}$$

$$\text{满载率低于 50 \%的段数百分比} = \frac{\text{满载率低于 50 \%的段数}}{\text{发车次数}\times(\text{车站数}-1))}，\text{记作}$$

$$\text{Cap. low}(T) = \frac{\sum_{kj}\left\{1 \,\middle|\, \frac{B - P_k(T_{kj})}{B} \leq 0.5\right\}}{m \times (n-1)}$$

(5)　**优化模型**

求 $T = (T_0, T_1, T_2, \cdots T_k, \cdots T_m)$，使得：

$$\min_T C = \alpha \text{Over} W_1(T) + \beta \text{Over} W_2(T) + \gamma \text{Cap.low}(T),$$

其中 α, β, γ 为给定的权重系数。

关于决策变量可以简化为：分段等时分布：即先确定高峰时段和平峰时段，在这两种时段内等间隔发车，这样变量就少多了。

(6)　**模型求解**

无约束优化问题：直接法：如复合形方法，数值微分的下降方法等。在实际求解中，如果决策变量不多，利用求出一系列可行解的方法，求出近似最优解，也是可取的。

2)　配车模型及其求解

在分别求出上、下行两个方向的优化后的调度时间表之后，就可以进行配车。该模型可图示如图 3，其中两个时间轴，轴上虚线表示上行车辆，虚线带箭头的线表示上行转为下行；轴上实线表示下行车辆，实线带箭头的线表示下行转为上行。

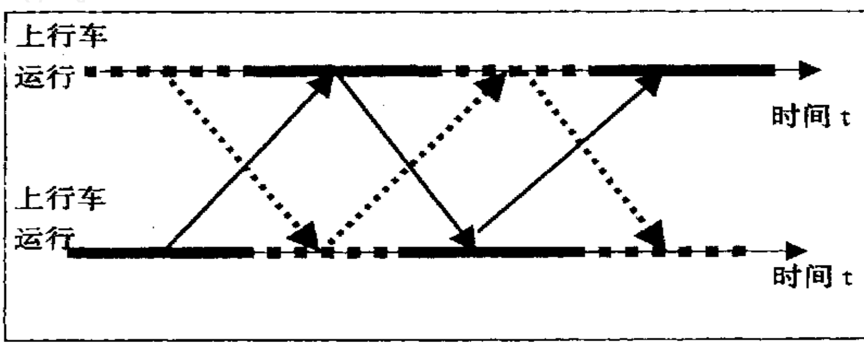

图 3

这里只是一种模型，实际上做法是多种多样的。从建模的角度看，把上、下行分开，将运行与配车两个模型分开，都是简化。不过这可能是必要的，否则问题会变得很复杂，以至于无法求解。

3)　数值计算结果

根据所给数据，按照上述模型的基本思路，用给定发车间隔，计算目标函数，通过比较选优的办法，提供合适的方案。

(1)　假设用所给数据中每时段(1 小时)在每一站的上车人数和下车人数就是该时段到达该站和离去的人数，即通过这些数据计算出 $u_j(t)$ 和 $d_j(t)$。

(2)　用所给数据中站间距和平均车速(忽略上下车时间)得到 τ_j；$B = 100$，$\bar{B} = 120$。

(3)　根据所给数据中始发站的上车人数，确定早、晚高峰时段为：早高峰 6∶40～9∶40；晚高峰 15∶50～18∶50。于是全天分为 3 个时段：平峰时段 I_1，早高峰时段 I_2，晚高峰时段 I_3。高峰时段等待时间上界 $\hat{t} = 5$(分钟)；平峰时段等待时间上界 $\bar{t} = 10$(分钟)。

(4)　给定决策变量为 3 个时段的发车间隔：J_1, J_2, J_3，由此可计算出 $T_0, T_1, \cdots, T_m$。

(5)　对于上行和下行方向均可计算，得到如下结果：记 $\text{Over} W_1$ = 早高峰时段候车超时率，$\text{Over} W_2$ = 平峰时段候车超时率，Cap.low = 满载率低于 50 % 的段数百分比，选择权重系数 α, β, γ 均为 1/3，得目标函数 C。

计算中可记录：Total = 上下行方向全天发车总辆数；按照全程行车时间(考虑每辆车反复

运行) 可记录:上行方向所需车辆数(up. bus),下行方向所需车辆数(down. bus)。

为保证每个始发站每天早发车前与晚收车后的车辆状态都不变,给定的发车间隔有下列两种:

A. 上行与下行方向发车时间间隔相同:

(J_1, J_2, J_3)	Over W_2	Over W_1	Cap. low	C	Total	up. bus	down. bus
(3,2,2)	0.0006	0.0941	0.6175	0.2374	420	22	22
(4,2,3)	0.0488	0.1161	0.4140	0.1930	331	22	22
(4,3,3)	0.1016	0.3194	0.4031	0.2747	301	15	15
(5,2,3)	**0.0517**	**0.1336**	**0.3390**	**0.1748**	**295**	**22**	**22**
(5,3,3)	0.1204	0.3585	0.3150	0.2646	265	15	15
(5,2,4)	0.1565	0.1336	0.3301	0.2067	280	22	22
(6,2,2)	0.0364	0.1632	0.3414	0.1803	299	22	22
(6,3,3)	0.1344	0.3704	0.2547	0.2532	240	15	15

B. 上行与下行方向早高峰和晚高峰时间间隔对换,如(4,3,2)表示:上行为(4,3,2),下行为(4,2,3)。

(J_1, J_2, J_3)	Over W_2	Over W_1	Cap. low	C	Total	up. bus	down. bus
(4,3,2)	0.0184	0.1733	0.4126	0.2014	330	45	15
(4,2,3)	0.0860	0.2547	0.4507	0.2638	331	15	45
(5,3,1)	0.0252	0.0842	0.5672	0.2255	385	135	15
(5,3,2)	0.0250	0.1912	0.3341	0.1834	295	45	15
(5,2,3)	0.1035	0.2933	0.3790	0.2586	295	15	45
(5,3,3)	0.1204	0.3585	0.3150	0.2646	265	15	15
(5,4,2)	0.0922	0.2912	0.3260	0.2365	280	56	11
(6,3,2)	0.0528	0.2203	0.2793	0.1841	269	45	15

从以上各种方案的目标函数 C 及所需车辆数看, *A* 中的(5,2,3)较优(黑体)。

最后,特别要提及的是,该问题的基本数据和参数由北京市地铁研究所康海燕同志提供,编程及计算由清华大学数学科学系研究生完成,在此对他们表示感谢。

A Mathematical Model of Bus Scheduling

TAN Ze-guang, JIANG Qi-yuan
(Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract: In this paper the background of the problem and idea of mathematical modeling are given. A specific mathemctical model and corresponding numerical results are presented.

Key words: bus scheduling; mathematical model