

零件的参数设计

闽令建 黄毅 汪细敏

指导教师：丁旺才

(兰州铁道学院, 兰州 730070)

编者按 本文用田口玄一的三次设计方法解决零件的参数设计问题, 通过统计分析调整参数值, 基本达到较优解. 文字清晰.

摘要 本文对零件的参数设计问题进行了分析, 提出了质量特性的全微分形式, 从而根据零件参数的分布函数求得质量特性的分布函数, 并求出了总质量损失, 这种方法也适用于质量损失函数为不连续分段函数形式的情况. 本文对零件参数的设计方法做了进一步探讨, 本模型为望目特性的参数设计, 对于模型的求解首先进行改善信噪比的设计, 然后进行目标值的修正, 最后进行容差设计, 使总费用达到最小. 对题中的分离器参数进行的再设计, 使总费用从原设计的 3, 085, 790 元降低到 463, 899 元. 所用方法基于数理统计理论, 得到的结果合理. 本文还讨论了模型的优缺点, 并给出了一般的零件参数设计方法.

一、问题重述(略)

二、符号说明

$x_i, i=1, 2, \dots, 7$	零件参数变量;	Q	质量损失;
$X_i, i=1, 2, \dots, 7$	零件参数标定值;	C	成本;
$\Delta_i, i=1, 2, \dots, 7$	零件参数容差;	y	产品参数(即产品质量特性);
F	总费用;	y_0	产品质量特性目标值(1.50);

三、问题分析

参数设计是产品设计的核心, 它在系统设计之后进行. 该问题目的是要选择系统中所有参数的最佳水平组合, 从而尽量减少各种干扰的影响, 使所设计的产品质量特性 y 波动小, 稳定性好.

1 统计特性

该问题是针对批量生产的产品进行分析. 由于 $X_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 的随机波动, 使 y 产生波动, 从而偏离目标值, 产生质量损失. 所以该问题要用概率统计的理论方法进行分析设计.

2 非线性效应与参数标定值设计

通常产品质量特性 y 与零件参数的水平(标定值)之间是非线性关系. 本问题亦然.

例如在图一中, 若参数 x 取水平 x_1 , 由于波动 Δx , 引起 y 的波动范围为 Δy_1 , 通过参数设计, 若将水平 x_1 移到水平 x_2 , 此时对于同样的波动范围 Δx , y 的波动范围缩小为 Δy_2 . 易见 $\Delta y_2 \ll \Delta y_1$. 可见, 只要合理地选择参数的水平, 在参数的波动范围

不变的条件下(因而不增加成本), 就可大大减少质量特性的波动范围, 提高了产品的稳定性. 若按照传统的设计方法, 单纯提高零件的质量, 把 C 等品改为 A 等品, 此时参数 x 的波动范围由 Δx 缩小为 Δx_1 , 而质量特性 y 在水平 x_1 处相应的波动范围变为 Δy_3 , 虽然 $\Delta y_3 \gg \Delta y_2$. 所以并非由 A 等品组装起来的产品就一定是一级产品, 参数设计就是要利用这种非线性效应, 寻找参数的最佳水平(标定值)组合.

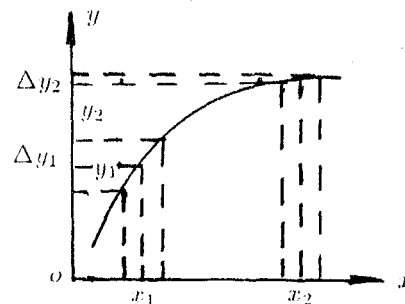


图 1

3 容差设计：

容差大小对质量特性 y 的影响可在图 1 中表明，若缩小 Δx ，则 Δy 也缩小。

容差设计的思路是：根据各参数的波动对产品质量特性影响的大小，从经济角度考虑有无必要对影响大的参数给予较小的容差，以便进一步减少质量特性的波动，减少质量损失，但这样会使产品的成本有所提高。因此，要寻找使总费用最小的容差设计方案，使所设计的产品质量特性 y 波动小，稳定性好。

四、模型的建立及求解

根据对本题的分析，我们的设计目标是设计一组参数标值 $x_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 及其容差 $\Delta_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 使得：

$$E(y) = y_0, \quad v(y) = \sigma^2 \text{ 越小越好}$$

以上即为望目特性的参数设计。

1 质量特性 y 的全微分及质量损失

要计算质量损失需知道 y 的分布函数。由于本题 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_7)$ 是一较复杂的经验公式，所以尽管已知 $x_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 的分布函数，但无法直接推出 y 的分布函数。

如果各偏导数存在且连续，则我们用全微分原理能够得到

$$\delta y = \sum_{i=1}^7 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (1)$$

这些偏导数，我们可利用 Mathematica 软件包进行求解。从上式可知各偏导数的值影响了 x_1, x_2, \dots, x_7 各自波动时对 y 值波动的贡献系数，当一组标值 $x_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 确定以后，我们近似的认为这些贡献系数是一些常数。则 δy 与 $\Delta x_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 有关，由于后者为正态分布，则也可认为 δy 是正态分布，这样也从另一方面说明了假设 4 的合理性。我们可以由 $\Delta x_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 的方差求得 δy 的方差

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^7 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 \quad (2)$$

于是，对于正态分布的 y

$$E(y) = Y = f(X_1, X_2, \dots, X_7) \quad (3)$$

$$D(y) = \sigma^2 \quad (4)$$

即 y 的概率密度函数为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

由于质量损失函数

$$Q(y) = \begin{cases} 0, & |y - y_0| < 0.1 \\ 1000, & 0.1 \leq |y - y_0| < 0.3 \\ 9000, & |y - y_0| \geq 0.3 \end{cases} \quad (6)$$

求得总的质量损失：

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \int Q(y) f(y) dy = 1000 \int_{0.1 \leq |y-y_0| < 0.3} f(y) dy + 9000 \int_{|y-y_0| \geq 0.3} f(y) dy \\ & \quad 0.1 \leq |y - y_0| \leq 0.3 \quad |y - y_0| \geq 0.3 \end{aligned} \quad (7)$$

若总成本为 C , 则总费用 F 为

$$F = \tilde{Q} + C \quad (8)$$

根据以上算法求得的原设计值下的结果为: 正品率: 12.55%, 次品率: 62.31% 废品率: 25.14%, 总的质量损失: $\tilde{Q}=2,885,700$ (元); 总成本: $C=200,000$ (元); 总费用: $F=3,085,700$ (元);

2. 标定值 $X_i (i=1, 2, 3, \dots, 7)$ 选优设计:

标定值选择的好坏, 直接影响了 Y 的受力大小. 为了反映各零件参数对质量特性 Y 的影响, 我们引入信噪比和灵敏度这两个统计指标进行了分析, 分两段进行

(a) 信噪比分析: 寻找使信噪比达到最大, 即稳定性最好的最佳水平组合.

(b) 灵敏度分析: 寻找与信噪比无关, 灵敏度显著的可控因素 — 称为调整因素. 并进行调整作业, 使最佳条件下质量特性的期望值趋近目标值 y_0 .

我们利用正交表的内外表直积法进行求解.

(1) 可控因素及误差因素

所谓可控因素, 系指在技术上已指定, 并且能够进行选择和控制的质量因素. 我们构成经验公式的变量, 可控因素有 7 个

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7.$$

所谓误差因素, 系指使系统质量产生波动的原因的总和, 即所有波动的原因, 有时也称之为干扰. 为了区分可控因素和误差因素, 我们利用在英文字母的右边加 ' 来表示误差因素, 如 X_1' 表示 X_1 因素是误差因素.

误差因素有 7 个, $\Delta x_i (i=1, 2, \dots, 7)$

(2) 确定可控因素水平

我们考虑用原设计的参数值作为可控因素的第二水平, 第一、第三水平采用等差数列来确定, 并且其差尽量取得大些, 以便使研究的范围更广些.

我们所确定的第二水平为: $x_1=0.1, x_2=0.3, x_3=0.1, x_4=0.1, x_5=1.5, x_6=16, x_7=0.75$

按等差数列来确定第一、三水平, 得到可控因素水平表 (见表 2), 此为 7 因素水平.

可控因素水平表 1

水平	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
水平 1	0.075	0.225	0.075	0.075	1.125	12	0.565
水平 2	0.1	0.3	0.1	0.1	1.5	16	0.75
水平 3	0.125	0.375	0.125	0.125	1.875	20	0.935

(3) 内设计

安排可控因素的正交表称为内表, 相应的设计称为内设计, 我们选用正交表 $L_{36}(3^{13})$ 作为内表进行内设计.

表头设计为

列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
因素	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7						

空列作为误差列, 内表见表 2

(4) 外设计

安排误差因素和信号因素的正交表称为外表, 相应的设计称为外设计. 对于外设计, 我们仍选用 $L_{36}(3^{13})$ 正交表进行. 为不失一般性, 我们把 $\Delta x_1, \dots, \Delta x_7$ 共 7 个误差因素依次排列在正交表 $L_{36}(3^{13})$ 中的第一列, \dots , 第七列, 其余为空列.

(5) 计算信噪比

信噪比的计算公式 (附录略).

(6) 内表的统计分析

表 2 内表及信噪比数据

编号	$\eta(DB)$	编号	$\eta(DB)$	编号	$\eta(DB)$	编号	$\eta(DB)$
1	7.293358	2	-0.667325	3	-7.809498	4	-0.944386
5	6.0723015	6	12.018950	7	-15.599517	8	6.791221
9	-4.632693	10	6.534921	11	-1.063730	12	0.042895
13	-6.152885	14	0.025610	15	9.569289	16	4.319945
17	4.369740	18	7.67204	19	17.752659	20	6.314679
21	10.42688	22	10.32445	23	4.981981	24	8.3599532
25	15.421156	26	9.988859	27	7.414917	28	0.945912
29	3.442791	30	5.141854	31	10.770247	32	-3.260096
33	11.27773	34	21.635672	35	9.260098	36	10.731010

内表的统计分析对象是信噪比,它是衡量内表中方案稳健性的指标.我们首先计算出每个因素($x_1 \sim x_7$ 共7个因素)各水平(三个水平)下信噪比的合计值及平均值,结果见表5.然后计算各种波动平方和与自由度.

总波动 S

$$S_r = \sum_{i=1}^{36} (\eta_i - \bar{\eta})^2 = \sum_{i=1}^{36} \eta_i^2 - 1/36 \left(\sum_{i=1}^{36} \eta_i \right)^2$$

表 3 外表

编号	$y-y_0$	编号	$y-y_0$	编号	$y-y_0$	编号	$y-y_0$
1	0.015189	2	-0.205808	3	372261	4	-0.240722
5	-0.405250	6	0.102015	7	-0.047623	8	-0.096853
9	-0.401065	10	0.038727	11	-0.312656	12	-0.39549
13	-0.255442	14	-0.364351	15	0.050741	16	-0.007782
17	-0.421923	18	-0.112883	19	-0.545118	20	-0.12668
21	0.14699	22	-0.374668	23	-0.097154	24	-0.107961
25	-0.464484	26	0.040643	27	-0.124105	28	-0.317290
29	-0.184350	30	-0.158516	31	-0.391648	32	-0.229455
33	0.082814	34	-0.612884	35	0.021405	36	0.122002

然后,将上述结果整理为方差分析表(见表5).从方差分析表可以看出, x_6 高度显著,因素 x_1, x_7 显著, x_2, x_3, x_4, x_5 不显著.

表 4 方差分析辅助表

T_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
T_1	12.1290	8.8695	10.4274	9.0850	9.8308	10.4250	13.6580
T_2	7.8174	12.0985	10.2146	9.8887	12.5296	6.2090	9.5773
T_3	11.7023	10.6808	11.0067	12.675	9.2884	15.0148	8.4134
T		189.892					

(7). 确定参数组合:

(a) 本题中 x_2, x_3, x_4, x_5 因素不显著, 所以其水平可自由选取; 显著因素和高度显著因素 x_1, x_7 和 x_6 的水平必须由信噪比来选取. 从而得到一组满足稳健性的参数(见表6).

将这一组满足稳健性的参数标定值代入经验公式得到 $Y \approx 0.71$

(b) 再利用不显著因素求(一致性)参数组合. 用于满足稳健性的参数组合对应的输出特性与目标值相差太大(偏移过多), 我们必须进行校正. 通过调整对信噪比影响不显著, 但对灵敏度影响显著的因素的参数值, 使输出特性接近目标值.

表 5 参数设计表内表的方差分析

来源	S	f	V	F
X_1	33.863	2	16.932	0.442
X_2	15.71	2	7.858	
X_3	1.008	2	0.504	
X_4	21.297	2	10.649	
X_5	14.125	2	7.063	
X_6	116.384	2	58.192	1.516
X_7	45.565	2	22.782	0.594
I	1640.955	21	50.522	
\bar{I}	1193.103	(29)	38.383	
T	189.422	35		

表 6

参数	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
水平	1	2	1	3	3	3	1

(c) 为了确定具体的调整因素, 我们需要求出灵敏度. 所谓灵敏度, 是反映平均特性的指标. 计作 $s = \hat{\mu}^2 \mu$ 的无偏估计为 $\hat{\mu}^2 = (S_m - V_e)/n$

因此, 我们利用类似求信噪比的方法, 得到灵敏度的估计公式如下:

$$S = 10 \lg [1/n(S_m - V_e)]$$

从而得到灵敏度的值 (如表 7).

表 7

0	1	2	3	4	5	6	7	8
-1.6064	-12.0466	-21.1154	-14.8225	-8.5211	7.556130	-28.1167	-1.978	-17.9564
9	10	11	12	13	14	15	16	17
-3.2513	-15.161	-10.73	-19.741	-14.115	4.6633	-6.447	-10.6314	2.753
18	19	20	21	22	23	24	25	26
-2.088	-3.046	7.7046	-6.4040	-4.94	3.089	-3.0788	3.844	-0.9729
27	28	29	30	31	32	33	34	35
-13.575	-6.61	-3.515	-6.10	-14.052	7.18	-0.385	2.2595	6.5231

通过以上的两阶段设计, 我们把可控因素分成以下几个类 (见表 8)

表 8 可控因素分类

	信噪比	灵敏度	因素名称
X_1	显著	显著	确定因素
X_2	不显著	显著	可调因素
X_3	不显著	显著	可调因素
X_4	不显著	不显著	次要因素
X_5	不显著	显著	可调因素
X_6	显著	不显著	确定因素
X_7	显著	显著	确定因素

表 9

X_2 增大	Y 减小
X_3 增大	Y 增大
X_5 增大	Y 减小

由于通过参数设计得到的一组水平组合代入 y 的表达式所得 Y 值与目标值相差过大, 我们应该通过调整可调因素 X_2, X_3, X_5 来调整 y 值使其更接近于目标值 1.50, 易推知 Y 随 X_2, X_3, X_5 的变化关系如表 9.

我们也利用 Mathematica 软件画出 y 值随 X_2, X_3, X_5 的变化关系曲线 (如图 2—4)

3 容差设计

通过以上调整得到一组最佳组合下的 $x_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 的标定值, 在此标定值下 $E(y)=y_0$. 我们应该找到一组零件质量等级的组合使总的费用最小. 因随零件质量等级的不同, 生产成本也不同, 所以提高零件质量未必能减少总费用. 而应该提高那些对产品质量波动影响较显著的零件的质量等级, 即给这些零件以较小的容差范围. 而对那些对产品影响甚小的零件, 给以较大的容差范围, 以降低生产成本.

通过上面的分析我们知道, 应当首先确定 $x_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 中哪些零件的容差对产品影响较大, 这就是容差设计.

因此我们应使 x_2, x_5 的值减小, x_3 的值增大, 从而使 y 值增大.

通过计算我们得到了一组标定值 x_i 的最佳水平组合 $X_1=0.075, X_2=0.225, X_3=0.125, X_4=0.125, X_5=1.621, X_6=20, X_7=0.565$

(1) 给出误差因素水平表

以最佳条件 $x_1=0.075, x_2=0.225, x_3=0.125, x_4=0.125, x_5=1.62067, x_6=20, x_7=0.565$ 为标定值, 按各零件的最低等级作为零件质量特性的波动范围, 可得到如下的误差因素水平表 (表 10).

表 10 容差设计水平表

水平	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
水平 1	0.07125	0.2025	0.1125	0.1125	1.4586	18	0.53675
水平 2	0.075	0.225	0.125	0.125	1.62067	20	0.565
水平 3	0.07875	0.2475	0.1375	0.1375	1.78273	22	0.59325

(2) 我们选用 $L_{36}(3^13)$ 的正交表进行容差设计. 把误差因素依次排在正交表的 1—7 列, 由 y 的经验公式 $y=f(x_1, x_2, \dots, x_7)$ 计算出输出特性 y 及 $\Delta y=y-y_0$, y 及 Δy 的计算可用 C 语言编程实现. 其结果见表 11.

(3) 方差分析

因该设计中误差水平等间隔, 故可用正交多项式的回归理论进行方差分析.

根据波动平方和分析公式

$$S'_T = \sum_{i=1}^{36} (y_i - y_0)^2 = n(\bar{y} - y_0)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

该式说明总波动来自两个方面:

第一是均值偏移波动 n ;

第二是以 \bar{y} 为中心的随机波动 $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$, 若 S_m 表示第一波动, S_i 表示因素波动, 则

$$S'_T = S_m + \sum_{i=1}^7 S_{x_i} + S_e$$

另外, 我们将因素的波动还可以分解为一次波动 S_e 和二次波动 S_q .

下面我们给出计算各自波动的平方和及自由度的公式总波动: $S'_T = \sum_{i=1}^7 (y_i - 1.5)^2$; 均值偏移波动:

S_m . x_i 因素的一次项波动

$$S_{x_i e} = (-1 \times T_1 + 0 \times T_2 + 1 \times T_3)^2 / (r \lambda^2 s), \quad (r = 12, \lambda^2 s = 2)$$

$$F_{x_i e} = 1,$$

x_i 因素的二次项波动

$$S_{x_i q} = (1 \times T_1 - 2 \times T_2 + 1 \times T_3)^2 / (r \lambda^2 s), \quad (r = 12, \lambda^2 s = 6)$$

$$F_{x_i q} = 1$$

对以上调整方案总成本的计算和模型前面部分给定标定值时的求解方法完全相同. 通过对以下调整方案的比较我们得出了此问题的最优解.

调整方案为: X_3 (B 等) x_4 (b 等) X_5 (B 等)

综上, 我们得出再设计后的结果如下:

标定值 $X_1=0.075, X_2=0.025, X_3=0.125, X_4=0.125, X_5=1.621, X_6=20, X_7=0.565$. 容差等级分别取 B, C, B, B, C, B, B 得出正品率: 82.62%, 次品率: 17.38%, 总成本: 295000 元, 损失费: 1738000 元, 总费用: 468800 元.

表 11 最佳条件下的输出特性值

编号	$y-y_0$	编号	$y-y_0$	编号	$y-y_0$	编号	$y-y_0$
1	0.2538301	2	-0.000000	3	-0.192927	4	-0.0404470
5	-0.231161	6	0.356770	7	-0.047099	8	-0.221959
9	-0.157628	10	70.139081	11	-0.222314	12	-0.017327
13	-0.027336	14	-0.112780	15	-0.037419	16	-0.229514
17	-0.250485	18	-0.107690	19	-0.4728657	20	-0.281010
21	0.254411	22	-0.288519	23	0.288041	24	-0.017174
25	-0.180150	26	0.141121	27	-0.01997	28	-0.055204
29	-0.2591450	30	0.146285	31	-0.215396	32	-0.027410
33	0.334515	34	-0.416369	35	-0.005087	36	0.4490659

为了进行方差分析我们首先给出方差分析的辅助表

表 12 容差的方差分析的辅助表

T_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
T_1	-0.3732	0.4965	-1.3379	1.5861	1.8783	0.9626	0.4920
T_2	-0.2368	0.2139	-0.0710	0.1553	-0.0522	0.244	-0.0765
T_3	1.2825	-0.6379	1.4814	-1.8669	-1.7540	-1.1317	-0.3429
T		0.07258					

方差分析表见表 13, 由表可知道误差因素 X_3, X_4, X_5 显著

表 13 容差的方差分析表

来源		S	f	V	F	S'	$\rho(\%)$
m		0.000146	1				
x_1	x_{11}	0.21201	1	0.21201	1.72411	0.089	8.43
	x_{1q}	0.008511	1				
x_2	x_{21}	0.05362	1				
	x_{2q}	0.0045	1				
x_3	x_{31}	0.28497	1	0.28497	2.31743	0.162	15.34
	x_{3q}	0.001132	1				
x_4	x_{41}	0.44146	1	0.44146	3.59002	0.3185	30.16
	x_{4q}	0.00215	1				
x_5	x_{51}	0.54959	1	0.54959	4.46936	0.4266	40.40
	x_{5q}	0.000729	1				
x_6	x_{61}	0.18278	1	0.18278	1.48644	0.05982	5.56
	x_{6q}	0.005898	1				
x_7	x_{71}	0.02904	1				
	x_{7q}	0.00127	1				
e		3.7052	21				
\bar{e}		3.8120	(31)	0.12297			
T		5.4829	36	0.15230			

(4) 容差的确定

由方差分析表上看出, 只有 X_1, X_3, X_4, X_5, X_6 的容差对质量损失有影响。又 X_1, X_5 的容差是不可调的, 因此只有调整 X_3, X_4, X_6 的容差。其可行的调整方法有如下几种 (表 14)

表 14

	等级		
	X_3	X_4	X_6
未调整	C	C	C
调整方案	C	B	C
	C	A	C
	B	B	C
	A	B	C
	B	B	B
	B	B	A

五、模型优缺点及一般零件参数设计步骤

- (1) 模型的建立及求解依据数理统计的原理与方法, 结果合理可靠;
 - (2) 模型引入质量特性的全微分近似求解的偏差, 可得到它的分布函数, 解决了质量损失函数分段不连续的问题;
 - (3) 零件的参数设计采用“新概念”设计, 即设计阶段采用波动大, 价格低廉的零件, 通过调整寻找它们最佳水平组合, 设计出稳定可靠的产品。因此对我国这样的发展中国家来说, 这是一个重要的质量管理方法;
 - (4) 设计中采用正交设计方法, 这种多因素选优法能够从代表性强的少数几次试验, 选取最优设计方案;
 - (5) 本文所采用的方法可以大规模地在我国各行各业的参数设计中采用。
- 一般零件参数设计步骤 (略)

参 考 文 献

- [1] 韩之俊等, 质量工程学—线外, 线内质量管理, 科学出版社, 北京, 1991.
- [2] 韩之俊等, 质量工程学, 北京理工大学出版社, 北京, 1991.
- [3] 盛骤等编, 概率论与数理统计, 高等教育出版社, 北京, 1989.
- [4] 邹应, 数学分析, 高等教育出版社, 北京, 1995.

* * * * *

勘 误

由于本刊编辑工作中的疏忽, 本刊第二十七卷第三期发表的“新中国数学会的始末”一文中误把原文中“... 还有胡鹏、杨从仁、关肇直和我, ... (p281, 倒 6 行), 误印为“... 还有胡鹏、杨从仁、关肇直和张友余, ...”, 特此更正。感谢作者张友余先生指出这一错误, 并明确指出“我”指的是姚志坚先生。此外, 该文 p283 倒 16 行中“... 刘晋年 (1094—1967), ...”应为“... 刘晋年 (1904—1967), ...”。