

节水洗衣机的设计

韩春生 杨黎明 苟林

(杭州电子工学院, 杭州 310037)

指导教师: 数模组

编者按 本文根据实际问题, 在基本合理的设计基础上, 分析了洗涤过程, 建立了一个非线性约束的规划问题. 该文还讨论了变化衣物的重量, 洗涤剂“分配比例”系数等对总用水量的影响.

摘 要 根据全自动洗衣机在放入衣物和相应洗涤剂后, 洗衣机“加水—漂洗—脱水”的循环运行过程, 在分析了洗衣机内衣物与水对洗涤剂的吸附与溶解的平衡关系后, 推导出了洗衣机“加水—漂洗—脱水”一轮后衣物上残留洗涤剂与加水量的数学关系, 并证明了在总用水量 and 轮数一定时, 各轮加水量相等时, 洗涤效果最佳(最后一轮残留洗涤剂最少)的结论, 从而能用较简单的计算机程序, 解出在满足一定洗涤效果的条件下总用水量最少时, 洗衣机需运行的轮数和每轮加水量, 最后, 选用一些衣物参数进行了计算和结果分析, 并对模型的应用前景作了初步探讨.

1. 问题的提出与分析

在实际生活中, 衣服的洗涤是一个十分复杂的物理化学过程. 洗衣机运行过程可以理解成洗涤剂溶解在水中, 通过水进入衣物并与衣物中的赃物结合, 这种结合物易溶于水, 但衣物对这种结合物也有一定的吸附作用, 可以认为在经过一定时间的漂洗后, 它在水与衣物中的分配达到平衡. 经过脱水, 去除了溶于水中的洗涤剂及洗涤剂与赃物的结合物(统称为有害物). 然后再注入清水, 开始一个新的洗涤轮回, 吸附于衣物中有害的大部分溶到水中, 漂洗后达到一个新的分配平衡, 然后再次脱水, 使得衣物中的有害物逐渐减少. 这种洗涤轮回循环下去, 直至衣物中残留的有害物含量达到满意程度(即满足一定的洗涤效果)为止.

2. 模型建立与求解

为了建立衣物中的有害残留物与洗涤轮回数及每轮的加水量之间的数学关系, 根据目前洗衣机的有关情况, 作出如下假设:

假设 I: 第一轮漂洗后, 水与衣物中的残留洗涤剂及洗涤剂与衣物赃物结合物的重量之和, 与洗衣开始加入的洗涤剂重量接近, 设 D_0 为洗涤前加入的洗涤剂重量, 因而可作为初始的有害物重量. 在文中简单地用洗涤剂来代替有害物.

假设 II: 设在每轮漂洗后, 洗涤剂(有害物)在水中和衣物的分配可达到平衡(即充分漂洗). 设 $G_{衣}$ 为在衣物中吸附的洗涤剂重量与衣物重量的百分比, 它与衣物材料有关, $G_{水}$ 为在水中的洗涤剂重量与水重量的百分比(即浓度), 它们代表了对洗涤剂的亲和能力. 设比例系数 $\alpha = \frac{G_{衣}}{G_{水}}$ 在每一轮洗涤过程中均保持不变(即与残留洗涤剂多

少无关).

假设要洗的衣物重量为 W , 开始洗涤前按要求加入洗涤剂 D_0 . 并设第 t 轮洗涤后剩余的洗涤剂含量为 D_t , 第 t 轮加水量为 $V_t (t = 1, 2, \dots)$.

在第一轮洗涤中, 用 V_1 水洗涤后, 剩余洗涤剂量为 D_1 . 则随水排出的洗涤剂量为 $D_0 - D_1$, 这样

$$\alpha = \frac{G_{\text{水}}}{G_{\text{衣}}} = \frac{D_0 - D_1}{\frac{D_1}{W}}$$

从而可得 $D_1 = D_0 \left(\frac{W}{W + \alpha V_1} \right)$. 易见在第 t 轮洗涤后, 剩余的洗涤剂量为:

$$D_t = D_0 \prod_{i=1}^t \left(\frac{W}{W + \alpha V_i} \right).$$

我们把衣物中剩余的洗涤剂重量与衣物的重量之比作为衡量衣物洗涤效果的标准, 并设为 $C_0 = \frac{D_t}{W}$ (其中 D_t 为 t 轮洗涤后剩余的洗涤剂重量, W 为衣物重量). 则在一定的洗涤条件下, 确定最佳的洗涤轮数与每轮加水量, 用最少的水达到满意的洗涤效果的数学模型. 为求解下式中的 t 与 $V_i (i = 1, \dots, t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t V_i &= \min \\ \frac{D_0 \prod_{i=1}^t \left(\frac{W}{W + \alpha V_i} \right)}{W} &\leq C_0 \\ V_{\min} &\leq V_0 \leq V_{\max} \end{aligned}$$

式中 V_{\min} 和 V_{\max} 分别为最小加水量与最大加水量.

为求解上述模型, 先证明一个定理.

定理 在总水量一定的条件下, 平均分配每次加水量, 实现的洗涤效果最好.

证明: 由算术平均数与几何平均数的关系可知

$$\frac{C}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \geq \sqrt[n]{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n}$$

其中等号的成立条件为 $X_1 = X_2 = \dots = X_n$, 即有当 $X_1 + X_2 + \dots + X_n = C$ (C 为常数), 只有当 $X_1 = X_2 = \dots = X_n$ 时, 乘积 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 为最大.

对于 t 次洗涤的效果, 它只与 $\prod_{i=1}^t \left(\frac{W}{W + \alpha V_i} \right)$ 有关, 而由于 $\sum_{i=1}^t V_i$ 为定值, 所以 $\sum_{i=1}^t (W + \alpha V_i)$ 亦为定值, 所以由上述结论, 只有 $V_1 = V_2 = \dots = V_t$ 时, $\prod_{i=1}^t (W + \alpha V_i)$ 最大, 从而 $\prod_{i=1}^t \left(\frac{W}{W + \alpha V_i} \right)$ 最小, C_0 亦最小. 证毕

这样, 为达到最节省水的目的, 每次加水量都必须相同, 设为 V_0 , 则有 $\frac{D_0 \left(\frac{W}{W + \alpha V_0} \right)^t}{W} \leq C_0$. 当每次加水量都为最小量 V_{\min} 时, 所需要的轮数为最多, 设为 T_{\max} , 代入上式得

$$T_{\max} = \log \left(\frac{W}{W + \alpha V_{\min}} \right) \frac{C_0 \cdot W}{D_0}$$

当每次加水量都为最小量 V_{\max} 时 (一般指加满水), 所需要的轮数为最少, 设为 T_{\min} , 得

$$T_{\min} = \log_{\left(\frac{W}{W + \alpha V_{\max}}\right)} \frac{C_0 \cdot W}{D_0}$$

由于 T_{\max} 和 T_{\min} 均为整数, 当上两式求得的 T_{\min} 和 T_{\max} 不为整数时, T_{\max} 需取整加 1, T_{\min} 需取整. 这样可能的最佳省水方案为使 $\frac{D_0 \left(\frac{W}{W + \alpha V_0}\right)^t}{W} \leq C_0$ 的每次加水量 V_0 , ($t = T_{\min}, T_{\min} + 1, \dots, T_{\max}$) 可以通过计算机遍历 t 值, 得出最优的 T 值和每次加水量 V_T .

3. 计算机实现

根据以上建立的模型, 当洗衣轮数一定时 (设为 T), 总的最优加水量

$$V_T = V_0 \times T = T \times \frac{W \left(\frac{C_0 \cdot W}{D_0} \right)^{\frac{1}{T}} - W}{\alpha}$$

可以设计计算机程序, 先求出 T 的取值范围 T_{\min} 和 T_{\max} , 然后遍历 T 从 T_{\min} 到 T_{\max} 的各整数, 求出各个 T 下的最小加水量 V_T , 从中选择最优解, 包括需要洗涤多少轮, 每轮应加多少水.

4. 计算结果分析

结果分析与检验

1. 不同的 α , D_0 , W 的变化与最小用水量的关系.

1.1 洗涤剂添加量 D_0 的变化对结果的影响. 测试前提: 衣物重量为 3 千克; 洗涤效果为 0.05 克 / 千克; $\alpha = 0.56$; 最大水量为 40 升; 最小水量为 25 升.

表 1

D_0 (克)	轮数 (次)	每轮用水量 (升)	最终用水量 (升)
20	3	25	75
25	3	25	75
30	3	26	78
35	3	28	84
40	3	30	90
45	3	31	93

结论: 在其它条件一定的情况下, 洗涤剂的添加量越少越省水.

1.2 分配比例 α 的变化对结果的影响, 测试前提: 衣物重量为 3 千克; 洗涤剂添加量为 30 克; 洗涤效果为 0.05 克 / 千克; 最大水量为 40 升; 最小水量为 20 升.

表 2

α	轮数 (次)	每轮用 水量 (升)	最终用 水量 (升)	α	轮数 (次)	每轮用 水量 (升)	最终用 水量 (升)
0.30	5	20	100	0.35	4	24	96
0.40	4	21	84	0.45	4	20	80
0.50	4	20	80	0.55	4	20	80
0.60	3	25	75	0.65	3	23	69
0.70	3	21	63	0.75	3	20	60
0.80	3	20	60				

结论：在洗衣机一定，其它条件一定的情况下， α 反映了洗涤剂的洗涤效果。洗涤剂的洗涤效果越好， α 的值越大，越省水。

1.3 衣物重量 W 的变化对结果的影响。测试前提：洗涤剂添加量为 30 克；洗涤效果为 0.05 克 / 千克； $\alpha = 0.56$ ；最大水量为 40 升；最小水量为 20 升。

表 3

W (千克)	轮数 (次)	每轮用水量 (升)	最终用水量 (升)
1	3	20	60
2	3	21	63
3	3	26	78
4	4	20	80
5	4	21	84

结论：在其它条件一定的情况下，衣物越多越费水。

5. 模型应用

我们建立的模型可以广泛的应用到实际生产和生活中去。例如，我们可以依据节水思想设计一种节水洗衣机。洗衣物时，每轮的加水量都是可以连续变化的，它们全部均由洗衣机上的单片机来自动控制。在实际应用中，洗衣机用户不会也不可能完全按照我们最优方案确切地设置参数来洗涤衣物，所以我们考虑在实际应用中给出几个模糊的可让用户确定的参数范围放在控制面板中，以达到用户的满意程度。