

空洞探测的最优解法

练祥华, 杨胜铭, 秦

指导老师: 数模教研组

(南京师范大学, 南京 210097)

编者按: 本文是 D 题中的优秀论文之一. 论文的假设合理, 使空洞探测问题简化; 建立的线性方程组模型正确, 有一定的创意; 计算结论正确. 论文的文风朴实, 简洁.

摘要: 本文论述在探测过程中, 对山体、坝体、隧洞等某些内部空洞定位问题. 问题简化后, 通过对平面进行区域(我们把它叫做像元)划分, 对波宽带化后, 波经过某空洞像元, 此像元必对波在时间上有贡献, 因而在每个空气洞像元必减慢一个时间单位数(波通过单位空洞所需时间), 进而建立线性方程组模型, 从而解决空洞定位问题.

1 问题的提出(略)

2 基本假设

(1) 所有探测均在同一平面上进行, 所谓空洞即平面上一个区域(即像元).

(2) 如果存在一条狭长的空洞, 只对一条宽带有贡献, 这种情况, 我们不予考虑. 因为这样的空洞在误差范围内.

(3) 如果存在某些(个)数据太小(即比弹性波在最短介质线内传播时间还小), 无法用数学解释, 我们认为是由误差引起的, 满足这样的带宽即为介质线.

(4) 用 a_{ijl} 表示 (i, j) 像元第 L 条宽带通过 (i, j) 的关系, 并满足 $a_{ijl} = S_x / S$ (宽带在像元 (i, j) 中的面积 S_x 与像元面积 S 之比).

3 名词解释与符号

像元: 所探测平面划分成 $(M = N * N)$ 个边长为矩形区域.

带宽: 假设弹性波以一定的宽度(其值为 τ)向对应的接收器传播, 称为波的带宽.

介质线: 宽带所经过的路线没有任何空洞像元, 这样的宽带称为介质线.

空洞线: 宽带所经过的路线至少有一个空洞像元, 这样的宽带称为空洞线.

空洞强度 X_{ij} : 像元在时间上对宽带的贡献量. $X_{ij} = 0$, 表示没有空洞; $X_{ij} = 1$, 表示有一个空洞.

时间单位数: 弹性波通过一个像元所需的时间.

4 模型的建立、分析

将待测的区域划分为 $N * N$ 个像元, 用 (i, j) 表示像元 $(i, j = 1, 2, \dots, N)$, 每个像元单位长为 τ , 设测量线穿过一个小空洞像元, 延长一个时间单位数. X_{ij} 表示 (i, j) 空洞像元变量.

设测量线为 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_L$, 由于测量线通过像元的角度不同, 长度不一样, 即

$$a_{ijl} = \begin{cases} S_x/S, & \text{第 } l \text{ 条线通过 } (i, j) \text{ 像元;} \\ 0, & \text{第 } l \text{ 条线不通过 } (i, j) \text{ 像元} \end{cases}$$

设 b_l 为第 L 条线的测量时间换算后的时间单位数, 则应有如下关系式:

$$a_{ijl} \bullet X_{ij} = b_l (l = 1, 2, \dots, L).$$

5 模型求解

(1) 求解问题

我们采用最小二乘法求解该问题:

$$\min_l \left(a_{ijl}X_{ij} - b_l \right)^2 (l = 1, 2, \dots, L)$$

如果空洞强度 X_{ij} 接近于零, 则表示没有空洞; 反之, 如果 X_{ij} 接近于 1, 则表示有空洞
采用 SAS 编程, 得到如下结果:

0	0	0	0	0.01410	0
0	0.8789	0	0	0	0
0.06944	0.0012	0.8950	0.861745	0	0
0.04675	0.8447	0.8391	0.048862	0.822708	0.03541
0	0.8895	0.9139	0	0.011109	0
0	0	0	0	0	0

从以上数据看出, X_{ij} 比较大, 表示空洞像元; X_{ij} 接近于 0 的, 表示非空洞像元

如果以 A 点所在像元为 (1, 1), 则 B 点 (6, 1), C 点 (6, 6), D 点为 (1, 6), 则以下的坐标点均为空洞像元 (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 3). 通过对数据的验证, 在一定的误差内, 这些空洞像元符合要求

(2) 求解问题 2

(a) 对只设置一边波源后定位判断

通过对空洞像元位置的分析, 只通过一侧的波源, 不可能得出所要结果

(b) 减少波探测器的方法

对某一具体平面内的空洞像元定位判断, 我们可以减少波源和接收器 因为 $M = N * N$ 是可变的, 假设在某一固定边长的矩形平面上放置 $(2N - 1)$ 个波源和 $(2N - 1)$ 个接收器, 若减少一对探测器, 再进行等距放置, 不影响空洞的定位, 但精度降低 我们若进行不等距设置, 将所建模型稍加修改, 同样能确定空洞像元的位置

例如, 减少 P3, P6, Q2, Q4, R3, R5, S2, S4 后, 用 SAS 编程求解, 得

0	0	0	0	0	0
0	0.9056	0.0125	0	0	0
0.0504	0	0.8767	0.9314	0.0125	0.0269
0.0821	0.8969	0.8182	0.0396	0.7845	0.0352
0	0.8539	0.8534	0	0	0
0	0.0367	0	0	0	0

经比较, 两组结果相近, 说明能够减少波源和接收器

6 对模型的评价

本文所阐述的模型是以探测山体空洞为目标, 广泛地应用于对山体、坝体、隧洞等某些内部空洞定位问题 2 的解答, 拓宽了本模型的应用范围 对于特殊的坝体、山体等, 利用本模型的不等距设置波源和接收器, 同样能测出空洞的位置, 因而具有很强的实用性

参考文献:

- [1] 南京地区工科院校数学协会建模工业数学讨论班 数学建模与实验 河海大学出版社, 1996
- [2] 朱道元 数学建模精品案例 东南大学出版社, 1999
- [3] 中国数学协会 数学的实践与认识 1998
- [4] 庄天戈 CT 原理与算法 上海交通大学出版社, 1992

The Optimization Solution Method in Survey of the Vacant Hole

L IAN Xiang-hua, YANG Sheng-ming, Q I N Kun

(Nanjing Normal University, Nanjing 210097)

Abstract In this paper, we discuss the position problem of the vacant hole in survey for mountain, land, tunnel and so on. By simplification, cutting a piece of plane domain, we establish the model on the system of linear equation. We solved completely the position problem of the vacant hole.

空洞探测问题及有关情况

关 信, 韩洁平

(东北电力学院, 吉林 132012)

摘要: 本文对 2000 网易杯全国大学生数学建模竞赛(大专组)D 题的背景、模型、算法及评阅情况作了简单介绍

1 题目产生的背景

本题目来源于吉林丰满水电站水库大坝的检测与维修

这种类型的大坝每隔一定时间就需进行较全面的维修 为此, 首先就要对坝的内部结