

最优捕鱼策略

唐 进 曾 宁 李 静

(中南工业大学, 长沙 410043)

指导教师: 刘新歌

编者按 该文对问题一的推导正确, 叙述简练, 得到的结果具有参考价值.

摘 要 社会经济生活中, 我们常遇到商业活动在一段时期内的最大收益问题, 如森林管理等. 这时, 我们不仅要考虑商业活动的当前经济效益, 还要考虑生态效益及由此产生的对整体经济效益的影响.

本文涉及的问题是渔业管理, 即对一固定的渔场, 在一段时间内, 如何实现最大的收益, 同时保证渔场能稳定生产. 我们的基本思路是: 考虑渔场生产过程中的两个相互制约的因素, 年捕捞能力和再生产能力, 从而确定最优管理策略. 我们用微分方程来描述渔场鱼群数量随时间变化的规律, 在此基础上确定整体效益为我们的目标函数, 以渔场生产的稳定性要求为约束条件, 分别对长期生产和固定期生产两种情况建立了规划模型.

在对长期生产模型的求解中, 我们利用约束条件将目标函数化为一元函数, 用计算机数值法确定近似的最优解. 而在对固定期生产模型求解中, 我们则构造一个整体效益函数, 综合考虑年捕捞能力和年再生产能力, 用计算机数值解法进行搜索逐年确定各年的最优策略, 从而得出五年的总最优策略.

最后, 我们对模型的稳定性进行定量的分析, 并对模型进行了检验, 确定模型较好地反映渔场最优捕鱼策略问题.

一、问题的重述

为了保护人类赖以生存的自然环境, 可再生资源 (如渔业、林业资源) 的开发必须适度. 一种合理、简化的策略是在实现可持续收获的前提下, 追求最大产量或最佳效益. 要求研究的问题是: 对某种鱼的最优捕捞策略.

1.1 鱼的情况: 假设这种鱼分 4 个年龄组: 1、2、3、4 龄鱼. 各年龄组每条鱼的平均重量分别为 5.07, 11.55, 17.86, 22.99(克); 各年龄组的鱼自然死亡率均为 0.8(1/年); 这种鱼为季节性集中产卵繁殖, 平均每条 4 龄鱼的产卵量为 1.109×10^5 (个), 3 龄鱼的产卵量为这个数的一半, 2 龄鱼和 1 龄鱼不产卵, 产卵和孵化期为每年的最后 4 个月; 卵孵化并成活为 1 龄鱼, 成活率 (1 龄鱼条数与产卵总量 n 之比) 为 $1.22 \times 10^{11} / (1.22 \times 10^{11} + n)$.

具体数据如下表

i	$m_i(g)$	$r(1/\text{年})$	$u_i(\text{个/条})$
1	5.07	0.8	0
2	11.55	0.8	0
3	17.86	0.8	0.5545×10^5
4	22.99	0.8	1.109×10^5

其中, i 表示 i 龄鱼, m_i 表示 i 龄鱼的质量, r 表示 i 龄鱼的自然死亡率, u_i 表示平均每条 i 龄鱼的产卵量.

该鱼的产卵和孵化期为每年的最后 4 个月, 卵孵化成活 1 龄鱼, 成活率 (1 龄鱼条数与产卵总量 n 之比) 为 $1.22 \times 10^{11} / (1.22 \times 10^{11} + n)$.

又渔业管理部门规定, 每年只允许在产卵孵化期前的 8 个月内进行捕捞作业. 如果每年投入的捕捞能力 (如渔船数、下网次数等) 固定不变, 这时单位时间捕捞量将与 i 成正比, 比例系数称捕捞强度系数 k_i . 通常使用 13mm 网眼的拉网, 这种网只能捕捞 3、4 龄鱼, 其两个捕捞强度系数之比为 $k_3 : k_4 = 0.42 : 1$, $k_1 = k_2 = 0$. 渔业上称这种方式为固定努力量捕捞.

1.2 问题

1) 建立数学模型分析如何实现可持续捕捞 (即每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼条数不变), 且在此前提下得到最高的年收获量 (捕捞总量).

2) 某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务 5 年, 合同要求 5 年后鱼群的生产能力不能受太大的破坏. 已知承包时各年龄组鱼群的数量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 如果仍用固定努力量的捕捞方式, 该公司采取怎样的策略才能使总收获量最高.

二、记号的约定

$x_i(t)$: i 龄鱼在 t 时刻的数量; (t 以年为单位, $i = 1, 2, 3, 4$)

p_i : i 龄鱼的捕捞; ($i = 3, 4$)

M : 捕捞总质量;

Q : 每年的产卵中能孵化成 1 龄鱼的数量;

N : 每年的产卵量.

三、模型的建立

由于鱼的数量随时间变化, 我们视 $x_i(t)$ 为连续函数, 它的变化与时间 t 、自然死亡率 r 、单位时间捕捞量 k_i 、卵的成活率有关.

基本假设

假设 I: 一年中, 鱼的产卵是集中在 8 月底一次性完成, 捕捞工作只在前 8 个月进行.

假设 II: 各龄鱼 (不包括 4 龄鱼) 只在年末瞬时才长大一岁. 鱼卵在年终才孵化完毕, 成为 1 龄鱼. 这样在计算产卵量时, 3、4 龄鱼的条数为 $t = 8/12$.

定义 单位死亡率

$$\frac{dx_i}{dt} = -rx_i, \quad r = 0.8,$$

单位时间捕捞量

$$\frac{dp_i}{dt} = k_i x_i, \quad k_3 : k_4 = 0.42 : 1, k_1 = k_2 = 0$$

则捕捞时

$$\frac{dp_i}{dt} = -(r + k_i)x_i,$$

对各龄鱼存在以下方程 (令 $k = k_4$, 则 $k_3 = 0.42k$)

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -0.8x_1, & t \in [0, 1], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -0.8x_2, & t \in [0, 1], \\ \begin{cases} \frac{dx_3(t)}{dt} = -(0.8 + 0.42k)x_3, & t \in [0, 8/12], \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = -0.8x_3, & t \in [8/12, 1], \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{dx_4(t)}{dt} = -(0.8 + k)x_4, & t \in [0.8/12, 1], \\ \frac{dx_4(t)}{dt} = -0.8x_4, & t \in [8/12, 1], \end{cases} \end{cases}$$

由此可解得

$$\begin{aligned} x_1(1) &= \exp(-0.8)x_1(0), \\ x_2(1) &= \exp(-0.8)x_2(0), \\ x_3(8/12) &= \exp(-(0.8 + 0.42k) \times 2/3)x_3(0), \\ x_4(8/12) &= \exp(-(0.8 + k) \times 2/3)x_4(0), \\ x_3(1) &= \exp(-(0.8 + 0.28k))x_3(0), \\ x_4(1) &= \exp(-(0.8 + 2k/3))x_4(0), \end{aligned}$$

收获量为

$$p_3 = \int_0^{\frac{8}{12}} 0.42kx_3(t)dt, \quad p_4 = \int_0^{\frac{8}{12}} x_4(t)dt,$$

要实现持续捕获, 即每年初, 各个年龄组鱼群数量不变, 同时须满足以下等式 (n 为卵量, u 为平均每条 4 龄鱼产卵量), 由此可建立模型 II

$$\begin{aligned} &\max(M), \\ &M = p_3m_3 + p_4m_4, \\ &\text{s.t.} \begin{cases} x_1(0) = Q, \\ x_2(0) = x_1(1), \\ x_3(0) = x_2(1), \\ x_4(0) = x_3(1) + x_4(1) \end{cases} \end{aligned}$$

其中

$$N = (1.109x_3/2 + 1.109x_4 \times 10^5), \quad Q = 1.22 \times 10^{11} \times N / (1.22 \times 10^{11} + N).$$

模型 II 的求解:

利用约束关系, 将 $x_1(0), \dots, x_4(0)$ 均用 K 来表示, 从而得出 M 关于 K 的一元函数

关系.

$$\begin{aligned}
 M &= m_3 \times p_3 + m_4 \times p_4, \\
 p_3 &= 0.42 \times k \times x_3(0) \times (1 - \exp(-0.8 + 0.42k) \times 2/3)) / (0.8 + 0.42k), \\
 p_4 &= k \times x_4(0) \times (1 - \exp(-(0.8 + k) \times 2/3)) / (0.8 + k), \\
 x_3(0) &= 0.2463 \times 10^{11} - 3.7504 \times 10^6 \times \exp(0.28k), \\
 &\quad \times (2.226 - \exp(-2 \times k/3)) / (2.226 + \exp(-2 \times k/3)), \\
 x_4(0) &= \exp(-0.28k) \times 10^{11} / (9.0272 - 4.0598 \times \exp(-2 \times k/3)), \\
 &\quad - 1.22 \times 10^6 / (0.7241 + 0.3252 \times \exp(-2 \times k/3)),
 \end{aligned}$$

用计算机搜索, 得出 K 的近似解. 计算结果为

$$\begin{aligned}
 \text{年最大收获量:} \quad M^*(0) &= 3.88685 \times 10^{11} \text{克} \\
 \text{最佳捕捞强度系数:} \quad K^* &= 17.7600 \text{克}
 \end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned}
 x_1^*(0) &= 1.193 \times 10^{11} \text{条}, & x_2^*(0) &= 5.360 \times 10^{10} \text{条}, \\
 x_3^*(0) &= 2.409 \times 10^{10} \text{条}, & x_4^*(0) &= 7.661 \times 10^7 \text{条}, \\
 Q^*(0) &= 1.193 \times 10^{11} \text{条}.
 \end{aligned}$$

四、模型的结果及实用性讨论

问题 (1) 的最优解

当 $K \in [0, 31.38]$ 时, 渔场可实现持续捕捞, 即满足了持续捕捞条件 $M \geq 0$. 在此前提下, 取得最优的捕捞系数, 3 龄鱼的捕捞系数为 7.4592, 4 龄鱼的捕捞系数为 17.76 年最大捕捞量为 3.88685×10^{11} (克).