# 持续高产捕鱼策略

杜小勇　张艳凰　郝建国

(国防科技大学，长沙 410073)

指导教师：吴　翊

**编者按**　文章将 0.8 理解为平均死亡率，即 $\frac{N(0)-N(365)}{N(0)} = 0.8$ 或 $\frac{N(365)}{N(0)} = 0.2$，再用 $N(365) = N(0)(1-r)^{365}$ 求出日死亡率 $r = 0.00439971$. 在此基础上建立制约各龄鱼数量的微分方程和连结条件. 从而得到各龄鱼数量的递推公式. 对给定的捕捞系数，用迭代法求得稳定解，然后用直接搜索法寻最得优捕捞强度系数和相应的最大持续捕捞年产量 6.45 万吨. 模型和计算都是正确的. 但若将 0.8/ 年理解为瞬时死亡率更加正确，此时，相应的日死亡率要小一半左右.

**摘　要**　本文基于鳀鱼产卵、孵化的突变性和死亡、被捕捞的连续性的假设，建立了鳀鱼生态系统的微分 — 差分模型. 用数值模拟方法，分析了在各种捕捞强度下系统的稳定状态，并最终利用类似 Leslie 矩阵的方法检验了此时确为种群不变的稳定状态. 在此基础上，对问题 1)，通过对 [0,1] 区间所有满足保持稳定状态捕捞强度系数 $p$ 的搜索，得出使得年产量最高的最优值 $p = 0.037$，对应的年产量为 6.44455 万吨. 对于问题 2) 分别讨论了 5 年中 $p$ 不变和每年 $p$ 发生变化的两种情况，用逐步求精的搜索法分别求解，得出两种情况下各自的最优策略，其产量分别为 49.0575 万吨和 49.6284 万吨. 本文还进一步考虑了模型的改进，并讨论了以保证最大利润为目标的可持续捕捞策略. 数值计算表明我们的模型是相当令人满意的.

## 一、问题的重述

人类与自然界密切相关，随着人类的发展，自然资源不断地被人类开发. 科学技术日新月异，以及受短期经济利益的驱使，许多自然资源都受到掠夺式开发，使得自然资源日益减少，即使是有些可再生资源也未能逃脱此厄运. 于是，在渔业捕捞上如何制定捕捞方式这一问题就应运而生. 采用何种捕捞方式，才能既保证鱼群的持续稳定发展而不至于枯竭，又要能提供最大数额的产量，是渔业管理中的一个重要问题.

我们现在面临对鳀鱼的捕捞策略，设

C1. 鱼群按年龄分为四组，称为 1 龄，$\cdots$,4 龄鱼，平均体重分别为 5.07, 11,55, 17.86, 22.99 (克), 各组自然死亡率均为 0.8/ 年；

C2. 捕鱼期只能在每年的前 8 个月，后四个月为鳀鱼的集中产卵孵化期，平均每条 4 龄鱼产卵 $1.109 \times 10^5$(个), 3 龄鱼产卵为其一半，卵孵化后成 1 龄鱼，成活率为 $1.22 \times 10^{11}/(1.22 \times 10^{11} + n)$, $n$ 为产卵总量；

C3. 捕鱼采用固定努力量方式，即单位时间捕鱼量与该年龄的鱼总数成正比，比例系数为捕捞强度系数，捕捞只能捕到 3 龄鱼和 4 龄鱼，其捕捞强度系数比为 0.42 : 1.

现在问题如下：

1) 如何实现可持续捕捞，即每年年初各年龄组鱼的数目保持稳定，以及在稳定状态下，采用何种捕捞强度能使年捕获量最大.

2) 渔业公司承包该鱼 5 年的捕捞业务，开始鱼群分布已知 (各年龄组数目分别为：

122, 29.7, 10.1, 3.29($\times 10^9$ 条)), 该公司应如何决策才能获得最大捕捞总量而不太损害鱼群生产能力.

## 二、模型假设及说明

假设：

H1. 鱼群死亡和捕捞为连续过程；

H2. 鱼在第一年 9 月初集中产卵并在后四个月孵化，来年初成为 1 龄鱼；

H3. 每到第二年初，第一年的 1 、2 、3 龄鱼各增一岁，但 4 龄鱼退出鱼群系统；

H4. 平均每条鱼的产卵是理解为对所有鱼的平均，故在计算总产卵时，不考虑雌雄区别；

说明：

A1. C1 中，各组鱼年平均死亡率为 0.8/ 年，折合为日均死亡率为 $1-\sqrt[365]{0.2}=0.0043991$/ 日；

A2. H3 中，由文 [2] 介绍，鳀鱼寿命一般为 3 年，故认为 4 龄鱼到年末便自然死亡.

## 三、问题的分析

本系统具有如下特点：

1. 鳀鱼的产卵量大，死亡率高，在这两个因素下，使得在一般条件下 1 龄鱼数目较稳定. 事实上，第 $t+1$ 年 1 龄鱼产生的数目为

$$
\begin{aligned}
N_1(t+1) &= n\times 存活率 = \frac{1.22\times 10^{11}\times n}{1.22\times 10^{11}+n} \\
&= 1.22\times 10^{11}\Big/\left(1+\frac{1.22\times 10^{11}}{n}\right) = 1.22\times 10^{11}\left(1-\frac{1.22\times 10^{11}}{n}\right)
\end{aligned}
$$

由于 $n \gg 1.22\times 10^{11}$, 故当 $n$ 变动 (亦即 $N_3(T), N_4(T)$ 变动) 时，(甚至变动一个数量级), $N_t(t+1)$ 反应并不敏感，从种群延续的观点看，鳀鱼对于捕捞量是有一定适应力的.

2. 从目前的捕捞方式可知，当年捕鱼产量只由 3 、 4 龄鱼决定， 1 、 2 龄鱼不受捕捞影响，这也保证了种群的延续.

3. 当捕捞强度系数发生变化时，鱼群中各年龄组的鱼的数目会发生变化，即产量会发生变化，鉴于 1 、2 特点，在一定捕捞强度范围内，鱼群会趋于新的稳定点，形成一种持续捕捞的局面，但不同稳定点产量不一致.

4. 注意到在无捕捞时， $N_1(t)\to 1.22\times 10^{11} (t\to\infty), N_2(t)=0.2N_1(t), N_3(t)=0.04\times N_1(t), N_4(t)=0.008N_1(t)$, 这种年龄组分布我们称为自然状态.

## 四、符号说明

$N_i(t,s)$：第 $t$ 年第 $s$ 天 $i$ 龄鱼的数目， $i=1,2,3,4; s=1,2,\cdots,365$;

$p$：4 龄鱼的捕捞强度系数；

$r$：日均死亡率；

$g$：每年 4 龄鱼产卵量；

$n$：每年 3 、 4 龄鱼产量总量；

$NS$：达到最大持续捕捞量时 $i$ 龄鱼数目；

$MS_i$：自然状态时 $i$ 龄鱼数；

Total：5 年合同期内最大总捕捞量；

其它要用的记号文中另行说明.

## 五、模型建立及求解

(一) 系统描述

根据条件假设，在前 8 个月鱼群受到一定强度的捕捞，同时还存在自然死亡，我们把这两个因素视为连续过程，捕捞时由于鱼网的因素，只能捕到 3 龄鱼和 4 龄鱼，其捕捞强度系数之比为 0.42:1. 在第 9 个月的前几天，所有 3 龄鱼和 4 龄鱼一次性产卵，然后卵进入四个月的孵化期，到年末时孵化完成，一部分成为 1 龄鱼，同时各鱼还存在自然死亡. 到期末孵化的卵和当年 4 龄鱼在年末时退出鱼群系数. 当然，鱼产卵也是有一段时间的，但为了简化模型，不计这一时间. 通过对鱼群系统的分析，我们得到一组微分方程，在一年内

$$\frac{dN_1(t,s)}{ds} = -rN_1(t,s), \qquad 0 \le s \le 365,$$

$$\frac{dN_2(t,s)}{ds} = -rN_2(t,s), \qquad 0 \le s \le 365$$

$$\frac{dN_3(t,s)}{ds} = \begin{cases} -rN_3(t,s) - 0.42pN_3(t,s), & 0 \le s \le 243, \\ -rN_3(t,s), & 243 \le s \le 365 \end{cases}$$

$$\frac{dN_4(t,s)}{ds} = \begin{cases} -rN_4(t,s) - pN_3(t,s), & 0 \le s \le 243, \\ -rN_3(t,s), & 243 \le s \le 365. \end{cases}$$

对于这类可分离变量的微分方程，我们容易得到它的解

$$N_1(t,s) = N_1(t,0)e^{-rs}, \qquad 0 \le s \le 365,$$

$$N_2(t,s) = N_2(t,0)e^{-rs}, \qquad 0 \le s \le 365,$$

$$N_3(t,s) = \begin{cases} N_3(t,0)e^{-(r+0.42p)s}, & 0 \le s \le 243, \\ N_3(t,0)e^{-0.42p\times 243 - rs}, & 243 \le s \le 365. \end{cases}$$

$$N_4(t,s) = \begin{cases} N_4(t,0)e^{-(r+p)s}, & 0 \le s \le 243, \\ N_4(t,0)e^{-p\times 243 - rs}, & 243 \le s \le 365, \end{cases}$$

根据各年之间的转化关系，该方程组还应满足一系列边界条件，即

$$N_1(t,0) = \frac{n \times 1.22 \times 10^{11}}{n + 1.22 \times 10^{11}}, \qquad n = [N_3(t-1.243)/2 + N_4(t-1.243)] \times g),$$

$$N_2(t,0) = N_1(t-1,365),$$

$$N_3(t,0) = N_2(t-1,365),$$

$$N_4(t,0) = N_3(t-1,365).$$

在可持续捕捞的情况下，每年年初时各组鱼的数目保持不变，因此分析鱼群的稳定性时需要各年年初鱼群分布的定量描述及它们之间的关系，因此我们考查这两组方程组之间的联系并且得到

$$N_1(t,0) = f_{t-1}e^{-(r+0.42p)\times 243}N_3(t-1,0)/2 + f_{t-1}e^{-(r+p)\times 243}N_4(t-1,0)$$

$$f_{t-1} = \frac{g \times 1.22 \times 10^{11}}{1.22 \times 10^{11} + g \times [e^{-(r+0.42p)\times 243}N_3(t-1,0)/2 + e^{-(r+p)\times a243}N_4(t-1,0)]}$$

$$N_2(t,0) = N_1(t-1,0)e^{365r}$$

$$N_3(t,0) = N_2(t-1,0)e^{-365r}$$

$$N_4(t,0) = N_3(t-1,0)e^{-243\times 0.42p - 365r}.$$

为了直观显示，我们把它写成矩阵形式.

$$N(t)=A(t-1)N(t-1),$$

其中

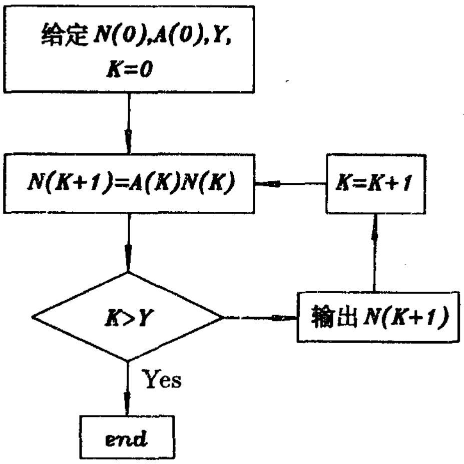
$$N(t)=(N_1(t,0),N_2(t,0),N_3(t,0),N_4(t,0)),$$

$$\begin{aligned}N(t-1)=(N_1(t-1,0),\quad & N_2(t-1,0),\\ N_3(t-1,0),\quad & N_4(t-1,0))\end{aligned}$$

$$A(t-1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}f_{t-1}e^{-(r+0.42p)\times 243} & f_{t-1}e^{-(r+p)\times 243}\\ e^{-365r} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{-365r} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-243\times 0.42p-365r} & 0\end{bmatrix}$$

(二) 问题求解

**问题 I** 由问题得到矩阵 $A(t-1)$, 形似 Leslie 矩阵 [1], 但并非一个常数矩阵，对其特征根及特征向量作出定量分析较为困难，为此，我们根据每年年初各组鱼数目的转化关系编写了 C 语言程序，用它能对一定初值和捕捞强度下各年初的鱼群分布作出了动态模拟. 其模拟过程如下：($Y$ : 需要模拟的年数； $A(0)$ : 初始转移矩阵 $N(0)$ : 分布初值)

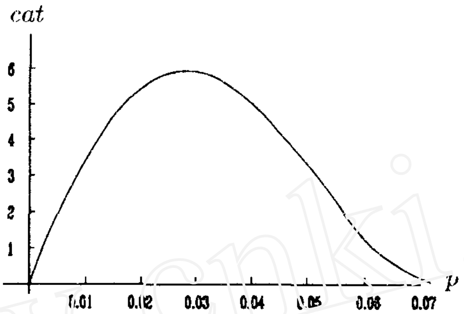



对模拟的结果进行观察，容易得到鱼群的稳定分布 (因为 $Y$ 可变) 及稳定时的年份. 设稳定状态下 3 、4 龄鱼数目分别为 $N_3, N_4$, 那么我们可计算出该稳态下的年捕捞量 gain($p$) :

$$\text{gain}(p)=17.86\times\left(\int_0^{243}N_3e^{-(r+0.42p)t}\times 0.42p\,dt\right)+22.99\times\left(\int_0^{243}N_4e^{-(r+p)t}\times p\,dt\right)$$

运用搜索算法可以得到捕获量最大值. 我们设置初值 $N(0)=(122\times 10^9, 29.7\times 10^9, 10.1\times 10^9, 3.29\times 10^9)$, 在 [0, 1] 区间上用搜索算法，得到最大可持续捕恢量.

$\max[\text{gain}(p)]=6.44455$ 万吨, 此时, $p^*=0.03700$(1/ 天). 此时鱼群分布为 $(NS_1, NS_2, NS_3, NS_4)=(1.15056\times 10^{11}, 2.309929\times 10^{10}, 4.063498\times 10^9, 2.13120\times 10^7)$ 我们取 [0, 0.01] 区间上不同 $p$ 值所对应的稳定状态下持续捕捞量，并利用 Mathematica 制图如下：




可看出 $p$ 的极大值即为最大值，不会出现多峰现象.

问题 II :

• 分析：由渔业公司承包期为 5 年，且要求在固定努力量的捕捞方式下使得五年后的渔场的生产能力不受太大破坏，我们对固定努力量捕捞方式有两种理解：

方法 A：认为五年期捕捞强度系数 $p$ 为不同一值；

方法 B：认为五年期各年 $p$ 值不同，记第 $i$ 年的捕捞强度系数为 $p_i$.

我们分析了本题所给的数据，发现 2 、 3 、 4 龄鱼的数量即使在自然条件下都无法达到，故认定这种鱼的年龄分布是由某种异常的自然原因引起的，是一种不稳定状态. 今后无论捕捞量如何少，都不可能维持原有鱼群各年龄组的数目. 因此我们理解所谓生产能力不受太大破坏是指对于一种稳定状态而言. 在本题中即取问题 I 中可获得最大捕捞量的状态.

• 求解：

记第 $i$ 年捕获量为 $Cat_i, i=1,2,3,4,5$. 根据题意，我们的目的是求五年期内最大的捕捞总量，目标函数： $\text{Total} = \max \Sigma Cat_i$;

$$\text{s.t} \quad N_i(6,0) \geq NS_i. \qquad i=1,2,3,4.$$

对于方法 A, 我们假设 $p_i \equiv p, \quad i=1,2,3,4,5$.

利用一维搜索法，在 [0.1] 区间上对 $p_i$ 进行搜索，可直接得到 Total 的最大值：$\text{Total} = 49.06$万吨，此时$p = 0.037$

对于方法 B, 因为 $p_i(i=1,2,3,4,5)$ 各不相同，若在 [0,1] 区间上直接利用五维搜索则速度慢，精度低，于是我们先进行数据合理分析，确定出 $p_i$ 可能的范围值，在这小范围内进行逐步求精搜索，先在小区间求出最优解，再在最优解附近求出更优解，所以我们需要解决的主要问题是缩小搜索范围，并提高结果精度.

下面我们来寻求 $p_i$ 的大致范围

为了估计 $p_i$ 的范围，我们首先注意到 $N_1[i+1,0]$ 的数目满足如下定理.

**定理** 在本题所给数据下，设第 $t$ 年的捕捞强度系数为 $p$. 若 $N_1(t+1,0) < NS_1 \times 0.9 (t=1,2,3,4)$, 则这种捕捞方式一定不是最优的.

证明：由于在情况 A 中我们已在 $p_i \equiv p$ 条件下求出了一个满足不破坏生产能力的最大可行解，其捕获量为 gain= 49,06 万吨. 当不限制 $p_i$ 的值时，必有大量捕获量 Total≥ gain.

现在由 $N_1(t+1,0) < NS_1 \times 0.9$ 则

$$N_2(t+2,0) < NS_1 \times 0.9 \times 0.2 = 1..1506 \times 10^{11} \times 0.9 \times 0.2 = 2.07 \times 10^{11} < NS_2$$
$$N_3(t+3,0) < NS_1 \times 0.9 \times 0.2 \times 0.2 = 4.14 \times 10^9 < NS_3$$

所以当 $N_1(5,0) < NS_1 \times 0.9$ 与 $N_1(4,0) < NS_1 \times 0.9$ 将造成 $N_2(6,0) < NS_2$ 与 $NS_3(6,0) < NS_3$, 由约束条件可知这是不可行的，它将使 5 年后生产能力遭到破坏.

现在论若 $N_1(2,0) < NS_1 \times 0.9$ 则这五年的捕获量依次为

$$C_{at_1} \le 25.6023, \quad C_{at_2} \le 10.6, \quad c_{at_3} \le 5.27,$$

为保证生产能力不遭到破坏

$$C_{at_4} \le 3, \quad C_{at_5} \le 2,$$

得 Total= $\Sigma C_{at_i} < 49$ 万吨，同理可证，当 $N_1(3,0) < NS_1 \times 0.9$ 时， Total $< 49$ 万吨，因此当 $N_1(2,0) < NS_1 \times 0.9$ 或 $N_1(3,0) < NS_1 \times 0.9$ 则不能获得最优解. 所以可知对于 $N_1(i,0).(i = 1,2,3,4,5)$ 在寻求优化解时均不可能小于 $NS_1 \times 0.9$, 故有

$$N_1(i,0) > NS_1 \times 0.9 > 1.10 \times 10^{11}$$

由于 $p_i$ 的变化将影响第 $i+1$ 年的 1 龄鱼的数目，所以我们可利用此年 1 龄鱼的数目来确定上一年的捕捞强度系数的范围.

第一年最大值已由题目给出，同时我们经分析可知，若 2 、 3 、 4 龄鱼大于其自然稳定值则不仅不会使下一年 1 龄鱼数目有显著变化，而且使超出稳定值的 3 、 4 龄鱼会因自然死亡而影响最优值. 因为第 2 、 3 、 4 龄鱼最大不超过其自然稳定值，所以我们取第 2 、 3 、 4 龄鱼的最大值就为其自然稳定值，利用下述两个方程，取不同的 $p_i$ 值求解对应 $N_1(i+1,0)$ 的值.

$$\begin{aligned} N_{34}(i,244) =& N_3(i,0) \times e^{-(r+0.42p)\times 243}/2 + N_4(i,0) \times e^{-(r+p)\times 243} \\ N_1(i,+1,0) =& N_{34}(i,244) \times 1.109 \times 10^5 \times 1.22 \times 10^{11}/(1.22 \times 10^{11} \\ & + N_{34}(i,244) \times 1.109 \times 10^5, \qquad i = 2,3,4,5 \end{aligned}$$

其中 $N_{34}(i,244)$ 为第 $i$ 年 9 月初下卵的 4 令鱼数日 (并将两条 3 龄鱼并为一条 4 龄鱼处理), 我们利用 Mathematica 中数值求根法得到如下数据：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | 0.1 | 0.08 | 0.05 |
| $N_{34}(1,244)$ | 64056.8 | 493231 | $1.05442 \times 10^7$ |
| $P_1$ | 0.03 | 0.01 | 0.005 |
| $N_{34}(1,244)$ | $8.19138 \times 10^7$ | $7.24225 \times 10^8$ | $1.3759 \times 10^9$ |
| $P_1$ | 0.1 | 0.08 | 0.05 |
| $N_1(2,0)$ | $6.71301 \times 10^9$ | $3.77665 \times 10^{10}$ | $1.10474 \times 10^{11}$ |
| $P_1$ | 0.03 | 0.01 | 0.005 |
| $N_1(2,0)$ | $1.20383 \times 10^{11}$ | $1.21815 \times 10^{11}$ | $1.21903 \times 10^{11}$ |
| $P_1$ | 0.1 | 0.08 | 0.005 |
| $N_{34}(i,244)$ | 31141.4 | 239785 | $5.125 \times 10^6$ |
| $P_i$ | 0.03 | 0.01 | 0.005 |
| $N_{34}(i,244)$ | $3.96789 \times 10^7$ | $3.33529 \times 10^{11}$ | $6.06359 \times 10^9$ |
| $P_i$ | 0.1 | 0.08 | 0.05 |
| $N_i(i+1,0)$ | $3.3585 \times 10^9$ | $2.18332 \times 10^{10}$ | $1.0844 \times 10^{11}$ |
| $P_i$ | 0.03 | 0.01 | 0.005 |
| $N_i(i+1,0)$ | $1.18709 \times 10^{11}$ | $1.21591 \times 10^{11}$ | $1.29778 \times 10^{11}$ |

由上表数据根据 $p_i$ 与 $N_1(i+1,0)$ 的单调递减关系：

$$1.0 \times 10^{11} < N_1(2,0) < ms_1 = 1.21886 \times 10^{11}$$

可知 $0.005 < p_1 < 0.008$, 又由 $N(i,0) > 1.10087 \times 10^{11}$, 可知 $p_i < 0.05\ i = 2,3,4,5$. 于是我们在区间 $0.005 < p_1 < 0.08$ 与 $0 < p_i < 0.05(i = 2,3,4,5)$ 内进行逐步求精搜索，这明显提高了 $p_i$ 的精度，进而提高了 Total 的精度.

编程搬搬得到如下数值：

| Total2 — $4.96284 \times 10^{11}$ | |
|---|---|
| $p_1 = 0.0500$ | $Cat_1 = 2.18348 \times 10^{11}$ |
| $p_2 = 0.0412$ | $Cat_2 = 8.47038 \times 10^{10}$ |
| $p_3 = 0.0374$ | $Cat_3 = 6.84201 \times 10^{10}$ |
| $p_4 = 0.0362$ | $Cat_4 = 6.15639 \times 10^{10}$ |
| $p_5 = 0.0366$ | $Cat_5 = 6.32479 \times 10^{10}$ |

因减少了搬搬范围，此程序在奔腾 90—585 上运行时间为 42 秒.

## 六、模型检验分析

(1) 本模型得到一个递推关系，当稳定后，递推式中前述的转移矩阵 $A(t)$ 也近似成为一个常数矩阵，即近似地有

$$N(0) = AN(0),$$

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{bmatrix}$$

易见 $\lambda = 1$ 是 $A$ 的一个特征值，稳定状态下各组鱼数目即对应 $\lambda$ 的特征向量. 当 $\lambda = 1$ 时表明该群体不增也不减. 而 $\lambda = 1$ 的等价形式就是 [1]

$$R = b_1 + b_2 s_1 + b_3 s_1 s_2 + b_4 s_1 s_2 s_3 = 1$$

下面我们用本模型模拟的结果来验证. 取初值 $N(0) = (122 \times 10^9, 29.7 \times 10^9, 10.1 \times 10^9, 3.29 \times 10^9)$, $p = 0.05$, 并由计算机模拟结果得到矩阵

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24.8234 & 0.043195 \\ 0.20071 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.20071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00122001 & 0 \end{bmatrix}$$

经计算知 $R = 1$, 这就从一方面验证了此时的状态确为种群不变的稳定状态，从而我们的模型是合理的，基本符合实际.

(2) 从问题 II 的结果来看，由于 Total1 与 Total2 的结果相差很小，所以实际上第一年的捕捞强度太大 (撒网次数太多) 不仅难以找到那么多捕捞工具，而且在 $p > 0.02$ 的范围内改变 $p$ 的值，每年捕捞量将不会受到很大影响，所以从经济效益出发，宁愿采取持续捕捞方式，进而验证了问题 I 的求解最优性，同时从结果看出第一年大力捕捞，而以后每年都相差不大，正说明了我们分析所讲的所给的数据的特殊性.

## 七、模型的评价

1. 本模型在建模过程中，对鳀鱼产卵、孵化、死亡等过程做了合理的简化，建立了微分—差分模型，建模简单、清晰，有一定普遍意义.

2. 在计算中，合理使用确定范围和逐渐求精的搜索方法，使计算简便、精确，计算结果经检验分析是正确的，由此得到的结论合理可信.

3. 提出的模型改进方案及关于极大利润可持续捕捞问题，有一定实际意义.

4. 不足之处是由于缺乏某些必要的专业知识和数据，使得讨论无法更深入进行.

## 八、模型改进

方样之一：

鳀鱼具有周期迴游性，如果能获得这方面的较详细的资料，我们就可不必在捕捞期内均衡捕捞而可在某些特定时期进行集中捕捞，增大此时的捕捞努力量，可能会获得更高的经济效益.

方向之二：

对于捕捞公司来说，它关心的不只是一年能捕多少鱼，还有其经济效益，而且这常常是主要的. 公司获得的利润不仅与年产量有关，还与市场价格、成本投入有关. 成本投入与捕获强度系数成正比，而最终收入折合成不变价格与贴现率当时的价格有关 (贴现率是指因通货膨胀而引起纸币的一定的贬值).

设每年的贴现率为 $w, c1, c2$ 分别为鱼和捕鱼成本的当时价格指数，五年内价格为一定值，则有目标函数为

$$eam = \Sigma w^{i-1} \times (c1 \times Cat_i - c2 \times P \times 10^6)$$

取 $w = 0.98, c1 : c2 = 1000 : 50$, 鱼的价格为 1000 美元 / 吨. 见如下表

| $eam = 1.00352 \times 10^7$ | |
|---|---|
| $p_1 = 0.0125$ | $cat_1 = 14.3757$ |
| $p_2 = 0.0038$ | $cat_2 = 2.69467$ |
| $p_3 = 0.0038$ | $cat_3 = 2.53926$ |
| $p_4 = 0.0038$ | $cat_4 = 2.40448$ |
| $p_5 = 0.0026$ | $cat_5 = 1.4759$ |

$Cat_i$ 的单位为万吨.

从数据分析可得由于减去了支出金额，捕捞强度系数降低不少，原因是当 $p_i$ 在大于某值的范围内变化时，捕捞数量的变化不敏感.

## 参 考 文 献

[1] 姜启源，数学模型 (第二版), 高等教育出版社，北京.
[2] Г. B. 尼科里斯基，分门鱼类学，高等教育出版社，北京， 1958.
[3] 叶其孝，大学生数学建模竞赛辅导教材，湖南教育出版社，长沙， 1993.