

具有仿射不变性的几何结构在相机定位中的应用

摘要

本文采用小孔成像的模型研究相机成像问题。基于靶平面上的点与像平面上的点一一对应,本文研究了几种几何结构。发现靶平面上两个圆的内公切线交点与两个圆心共线这种几何结构仿射到像平面上依然成立,即两个圆心和内公切线交点在像平面上的3个像点共线,并证明了这一结论。

本文提出一种运用0-1矩阵求公切线的算法,但在实际操作时采用作图法。运用作图法可以在像平面上确定两个椭圆的内公切线交点,该交点为靶平面上两个圆的内公切线交点在像平面上所成的像。靶平面上5个圆可以确定10个内公切线交点,这样用作图法就可以确定靶平面上10个内公切线交点在像平面上的10个像点。

在像平面上建立坐标,每个靶平面上的圆心的像用两个未知量表示,共有10个未知量。根据已证明的结论可知,对于每个内公切线交点在像平面上的像点,都有相对应的两个圆心的像点与之共线,就可以得到共线所满足的方程。10个内公切线交点的像点对应10个2次方程,10个未知量就可求出。靶平面上的圆心的像就可以确定。本文采用牛顿迭代法对2次方程组进行求解。并研究了解的稳定性。

为了得到两部固定相机的相对位置,建立了2个像平面坐标系、2个相机坐标系和1个三维世界坐标系。本文采用最小二乘法确定相机坐标系与三维世界坐标系的关系。在具体算法中,并没有利用所求出来的靶平面上圆心以及它的像点的坐标求解,而是采用10个内公切线交点及其像点的坐标求解,这是因为圆心的像点是由内公切线交点的像点求出的,误差更大。分别确定2个相机坐标系与三维世界坐标系的关系之后,就可以确定2个相机坐标系之间的关系。

最后,本文对模型进行了分析,对一些方法的精度进行了讨论。

关键词

相机定位 仿射不变性 内公切线交点

1 问题分析

双目定位是用两部相机给物体拍照来定位。对于物体上的一个特征点，用两部不同位置的照相机拍照，就获得该点在两个像平面上的坐标。如果知道两部相机的相对位置，就可以知道该特征点的具体位置。因此，要实现双目定位，首先需要确定两部相机的相对位置。

解决该问题的一种实际做法是：在物平面上画若干个圆，圆心为特征点，同时用两部相机照相。本文需要解决两个重要问题：如何寻找靶标上圆的圆心在像平面上的像点位置？如果知道圆心在两个像平面上的像点位置，怎样利用这两组像点的几何关系得到这两部相机的相对位置？

1.1 下面考虑如何寻找靶标上圆的圆心在像平面上的像点位置。

数码相机的成像原理是凸透镜成像。靶标上的一个点经过凸透镜成像，该点的像在像平面上有可能为一点，也有可能为一个小区域。一般情况下，靶标与像平面就不能建立一一对应，成像就比较复杂。为了便于研究，可以先考虑小孔成像。在小孔成像这种情况下，靶标与像平面可以建立一一对应。

小孔成像是一种简单的一一映射，靶标上的圆是标准的几何图形，靶标上有若干种几何结构，例如点与圆，直线与圆。如果能够找到一种在小孔成像过程中不发生变化的几何结构，就有可能在该几何结构的基础上寻找到点与像点之间的对应。因此，寻找在小孔成像过程中不发生变化的几何结构是解决问题的关键。

1.2 如何确定两部固定相机的相对位置

要确定两部固定相机的相对位置，需要建立两个相机的三维坐标系的联系。如果在空间中还有一个坐标系，并且该坐标系可以分别与两个相机的三维坐标系建立联系，那么就可以得到两个相机的三维坐标系的联系。

2 模型假设

- 1) 靶平面上的点与像平面上的点一一对应。
- 2) 靶标的像的边缘是光滑的闭曲线。

3 符号说明

A_{ij} 椭圆 i 和椭圆 j 的内公切线交点

O_i 圆 i 上的圆心在像平面上的像点

4 公切线模型的建立与求解

4.1 具有仿射不变性的几何结构

在小孔成像中，根据模型假设，只考虑靶平面上的点与像平面上的点一一对

应的情形（如图 1）。在靶平面上有多种几何结构，例如直线与直线相交，直线与圆相切。那些在小孔成像过程中不发生变化的几何结构称为具有仿射不变性的几何结构。通过观察与分析，本文提出了四种具有仿射不变性的几何结构。定理 1，2，3，4 描述了这 4 种几何结构。

其中，定理 4 表明：靶平面上两个圆的内公切线交点与两个圆心共线这种几何结构仿射到像平面上依然成立，即两个圆心和内公切线交点在像平面上的 3 个像点共线。

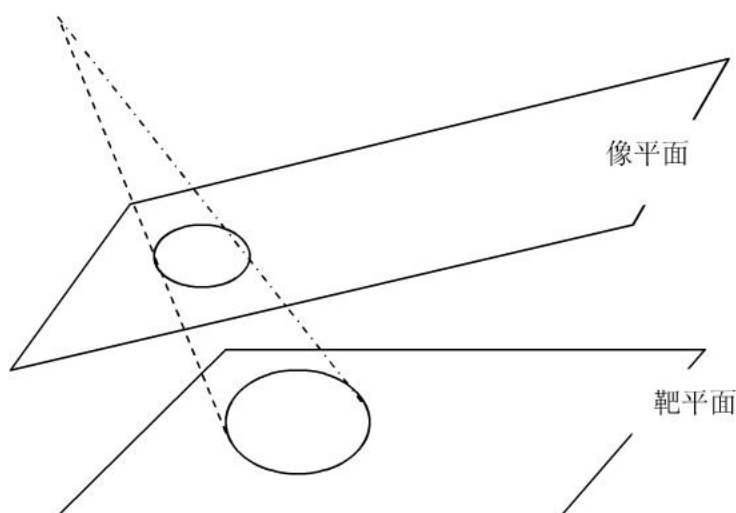


图 1

定理 1 靶平面上的一条直线在像平面上的像仍为一条直线。（如图 2）

定理 2 如果靶平面上的直线 l_1 和 l_2 交于 O 点，那么在像平面上， l_1 、 l_2 的像 l'_1 、 l'_2 交于 O' 点， O' 为 O 的像。（如图 3）

定理 3 如果靶平面上直线 l 和圆 O 相切于 A 点，那么在像平面上， l 和圆 O 的像 l' 、圆 O' 切于 A' 点， A' 为 A 的像。（如图 4）

定理 4 如果靶平面上直线 l_1 、 l_2 为圆 O_1 圆 O_2 的内公切线，直线 l_1 、 l_2 交于 A ，那么在像平面上， l'_1 、 l'_2 为圆 O'_1 、圆 O'_2 的内公切线， A 在像平面上的像 A' 为 l'_1 、 l'_2 的交点，且 A' 、 O'_1 、 O'_2 共线。（ l'_1 、 l'_2 为 l_1 、 l_2 的像，圆 O'_1 、圆 O'_2 为圆 O_1 、圆 O_2 的像）。（如图 5）

定理 1、2、3、4 的证明如下：

1) 靶平面 S_1 上两点 A 、 B 确定一条直线, 面 $ABQ \cap$ 面 $S_2 =$ 直线 $A'B'$,

直线 AB 上任意一点 C , 直线 $QC \subset$ 面 $ABQ \Rightarrow$ 直线 $QC \cap$ 面 $S_2 \subset$ 面 $ABQ \cap$ 面 S_2

\Rightarrow 直线 $QC \cap$ 面 $S_2 \subset$ 直线 $A'B'$

即 C 在像平面 S_2 上的像在直线 $A'B'$ 上, 如图 2 所示

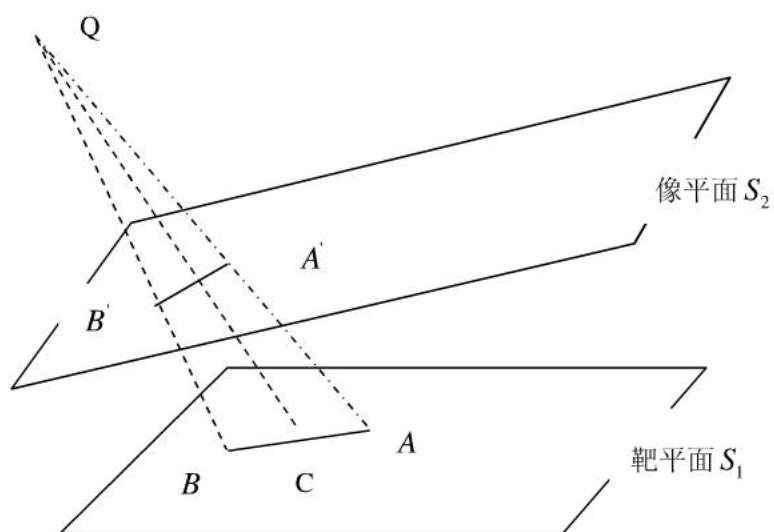


图 2 定理 1 的证明

2) 直线 l_1 和 l_2 交于 O 点 $\Rightarrow O \in l_1$

l_1 的像为 l_1' , O' 为 O 的像, 由定理 1, 得到 $O' \in l_1'$

同理 $O' \in l_2'$

因此 $O' \in l_1' \cap l_2'$

即 l_1' 、 l_2' 交于 O' , 如图 3 所示:

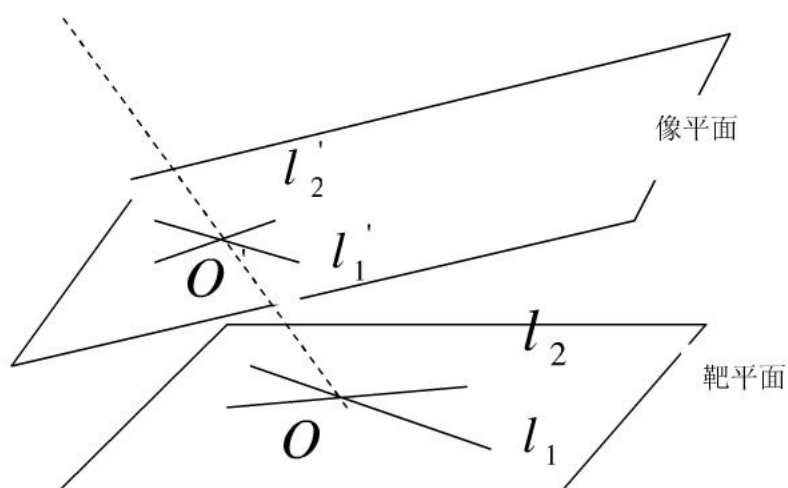


图 3 定理 2 的证明

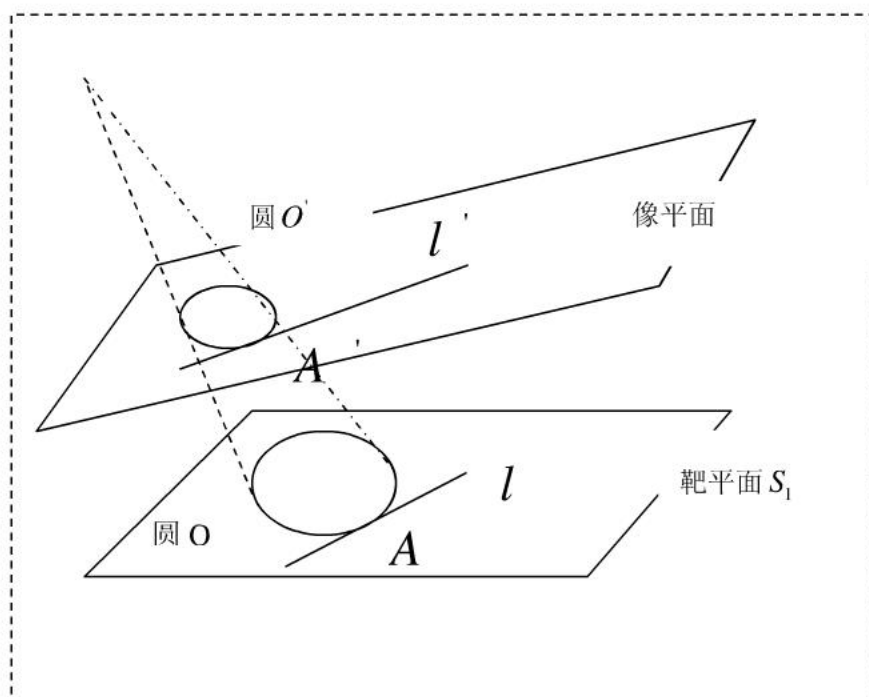


图 4 定理 3 的证明

$$3) A \in \text{圆 } O, A \in l \Rightarrow A' \in \text{圆 } O', A' \in l'$$

因此 A' 为圆 O' 和直线 l' 的公共点

假设圆 O' 和直线 l' 另有一公共点 B' , B' 在面 S_1 中的像为 B

同理可得 B 为圆 O 和直线 l 的公共点, 即 B 与 A 重合

那么 A' , B' 在面 S_1 中的像为 A , 与“靶平面上的点与像平面上的点一一对

应”矛盾，因此圆 O' 和直线 l' 仅有一公共点 A'

因此，直线 l' 、圆 O' 切于 A' 点，如图4所示：

4) 直线 l_1 、 l_2 为圆 O_1 、圆 O_2 的内公切线，由定理3可知： l'_1 、 l'_2 为圆 O'_1 、圆 O'_2 的内公切线

A 直线 l_1 、 l_2 的交点，由定理2可知 A' 为 l'_1 、 l'_2 的交点

在靶平面 S_1 上， A 、 O_1 、 O_2 共线，由定理1可知 A' 、 O'_1 、 O'_2 共线，如图5所示：

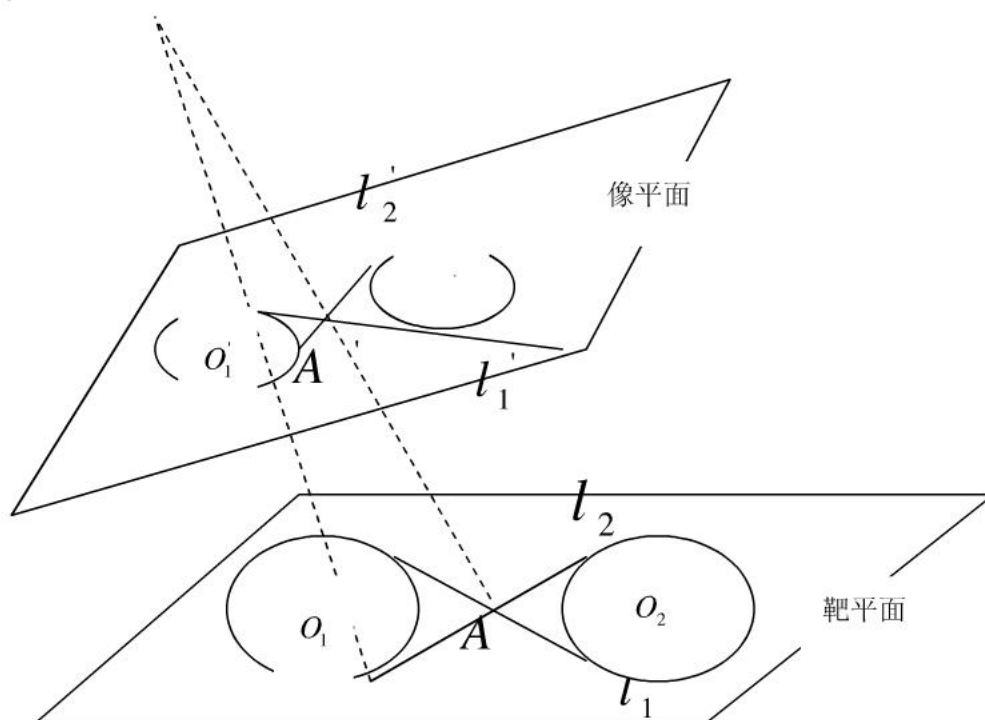


图5 定理4的证明

4.2 公切线模型的建立

考虑一般情况，在靶平面上取5个圆，经过小孔成像，在像平面上获得5个椭圆，分别用1、2、3、4、5表示。

靶平面上任意两个圆之间有1个内公切线交点，5个圆对应10个内公切线交点，像平面上5个椭圆也对应10个内公切线交点。根据定理4可知，像平面上的10个公切线交点与靶平面上的10个公切线交点一一对应。用 A_{ij} 表示椭圆 i

和椭圆 j 的内公切线交点（如图6）。下面的工作有两部分：在像平面上确定10个内公切线交点的坐标；运用这10个内公切线交点确定圆心在像平面上的像。

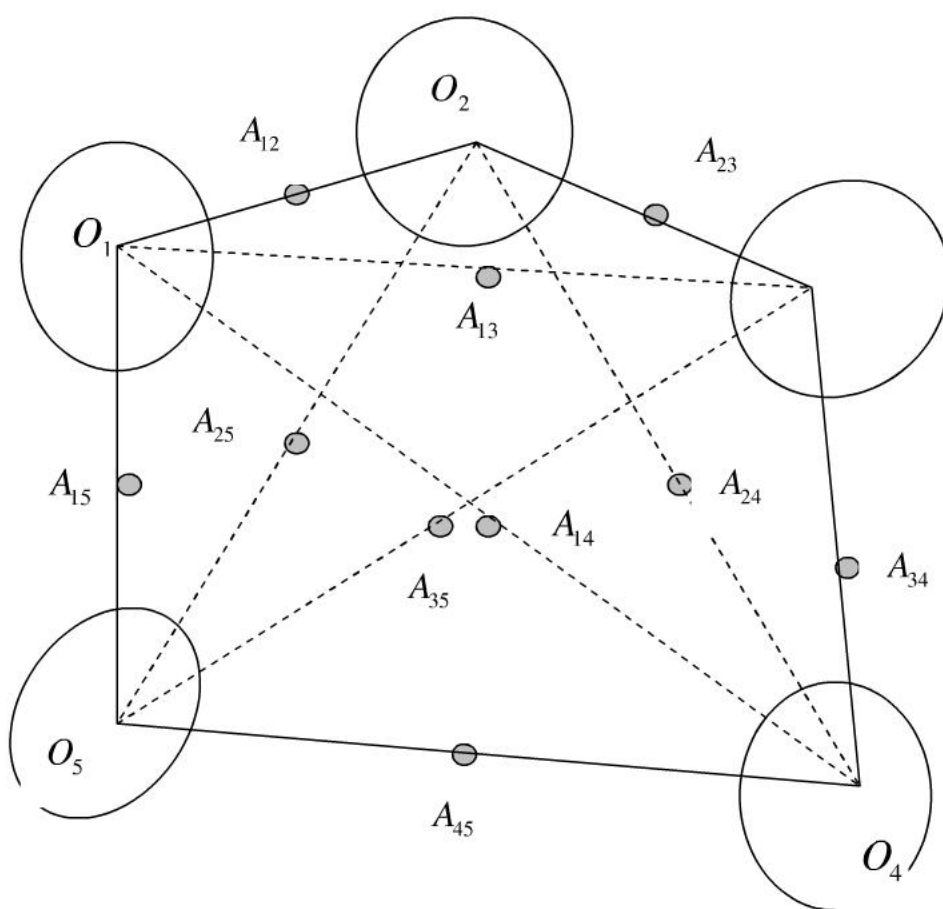


图 6

1) 运用椭圆的内公切点确定圆心在像平面上的像

如果在像平面上确定 10 个内公切线交点 A_{ij} 的坐标 (a_{ij}, b_{ij}) ，就可以运用内公切线交点确定圆心在像平面上的像，方法如下：

靶平面上的圆 1、2、3、4、5 的圆心在像平面上的像分别在椭圆 1、2、3、4、5 上，令圆心在像平面上的像点为 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 、 O_5 。考虑 O_i 、 O_j ，由定理 4 可知， O_i 、 O_j 与 $A_{ij}(a_{ij}, b_{ij})$ 共线。（如图 6）设 O_i 在像平面上的坐标为 (x_i, y_i) ，则 (x_i, y_i) 满足：

$$\frac{y_i - b_{ij}}{x_i - a_{ij}} = \frac{y_j - b_{ij}}{x_j - a_{ij}} \quad (1)$$

即

$$(y_i - b_{ij})(x_j - a_{ij}) - (y_j - b_{ij})(x_i - a_{ij}) = 0 \quad (2)$$

其中 $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j$ 。

因此，该方程组共有 10 个 2 次方程，10 个未知量。求解该方程组就可确定 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 、 O_5 在像平面的位置。

2) 确定椭圆内公切线交点坐标的算法

为了确定椭圆内公切线交点，本文建立了一种在像平面图像上确定切线的算法。在仅有黑白两色的图像上，一个像素只能储存黑或白其中的一种信息，令空白（白色）为 1，图像（黑色）为 0，像平面的就可表示为 0-1 矩阵。（如图 7）

1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0

图 7

取该平面上任意一点 $C(i,j)$ ，

$$CC(i+1, j) + C(i-1, j) + C(i, j+1) + C(i, j-1)(i, j) = \begin{cases} 1, \text{该点为空白} \\ 0, \text{该点为图像} \end{cases}$$

当 $C(i+1, j) + C(i-1, j) + C(i, j+1) + C(i, j-1)$ 取值为 1, 2 或 3 时， $C(i,j)$ 边缘

点；当 $C(i+1, j) + C(i-1, j) + C(i, j+1) + C(i, j-1)$ 取值为 4 时， $C(i,j)$ 为内点。

接下来需要解决的是如何通过边缘点寻找图像的切线。本文规定，只经过一个椭圆的两个边缘点的并且没有经过椭圆内点的直线为切线。

这样就可以得到一个椭圆的所有切线，一条线为两个椭圆的切线时，就为这两个椭圆的公切线。

4.3 公切线模型的求解

对于题中所给的标靶图像，利用作图法即可很轻易的得到公切线交点坐标。在像平面上任意 2 个椭圆之间做 2 条内公切线，就可获取内公切线交点。在实际操作中，直接将像图打印出来，用尺子作内公切线，得到内公切线交点。在像平面上建立坐标系（如图 8），即可获得内公切线交点的坐标。

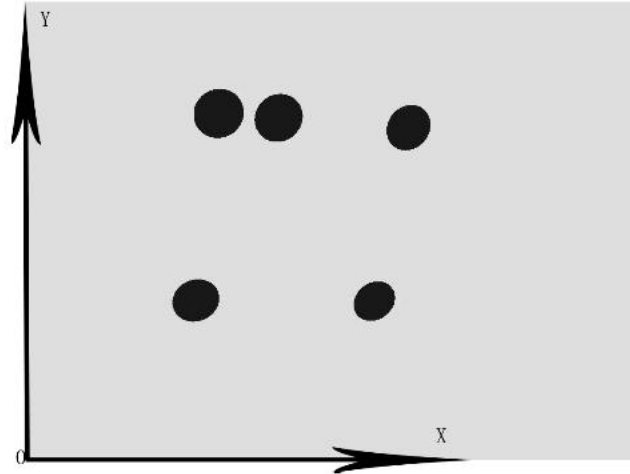


图 8

运用作图法，获得像平面上椭圆内公切线交点 A_{ij} 的坐标为：

单位：mm

椭圆	1	2	3	4	5
1	-	(99,152)	(129.7,149)	(122.5,108)	(80.8,109.5)
2	(99,152)	-	(141.5,148.5)	(134.6,108)	(93.5,110)
3	(129.7,149)	(141.5,148.5)	-	(162,107)	(123,109)
4	(122.5,108)	(134.6,108)	(162,107)	-	(116,70)
5	(80.8,109.5)	(93.5,110)	(123,109)	(116,70)	-

将这组数据代入方程组 (2)，5 个点 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 、 O_5 的坐标为 10 个未知量。牛顿迭代法是求解非线性方程组的常用方法（见文献【1】），在 MATLAB 软件中调用牛顿迭代法求解方程组，结果如下：

圆心在像平面中的像	x (mm)	y (mm)
O_1	75.3	152.8
O_2	101.8	151.9
O_3	160.0	146.9
O_4	161.9	68.7
O_5	85.7	70.8

4.4 求切线的改进算法——灰度算法

由于计算机储存图片是以像素为单位的，像素是计算机储存图片的最小单位。如果该像素单位正好是图像的边界，则该像素里应该一部分为图像，一部分为空白，如下图所示：

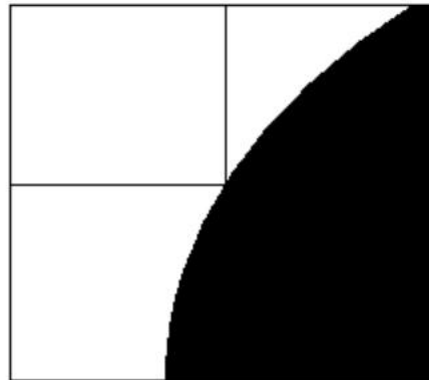


图 9

但由于计算机中，像素仅能储存颜色信息，所以上图中的情形在像素中是不会存在的。在灰度位图中，像上图中半充满的像素将会呈现灰色，且灰度与黑、白的面积比例相关，实际情况是如下图这样：



图 10

图像灰度的大小可以表达出黑、白面积所占的比例，颜色越浅，该像素大小中实际图形的空白区域就越多。计算机灰度位图的灰度，是由一个从 0 到 255 的数字来表征的，且纯黑为 0，纯白为 255。

如令灰度为 H ， $H=[0,255]$ ，可以定义灰度分数：

$$h = \frac{255 - H}{255}$$

如果一条切线切过某个边缘点所在的像素，则在这个像素大小内，它对这个像素单元正方形里有个截面积，且这个截面积在像素单元总面积中占的分数应该等于该像素的灰度分数，如下图所示：

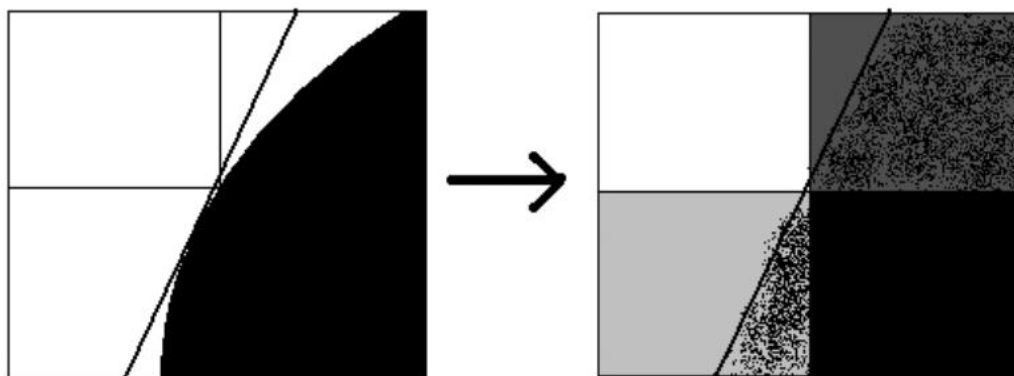


图 11

我们可以取每个像素单元格的左上角为该点的位置坐标，以此建立直线方程，有了直线方程和像素单元格大小，就可以建立直线方程与直线截单元格面积的关系。这样，只要已知临近两个像素单元格的灰度，就可以确定一条切线。

该方法会比前面所利用的 0-1 矩阵法和作图法更精确，但对原图像的精确度有着较高的要求，一是图像边缘要清晰，以使界面附近的像素灰度有意义；二是图像分辨率要高，图像必须包含足够多的像素，否则很难在各个方向上都得到切线。

5 确定两部相机的相对位置

5.1 相机坐标系与三维世界坐标系的关系

1) 标定点在空间坐标系的坐标与图像平面坐标系坐标之间的对应关系

由照相的几何对应关系,建立三维世界坐标系(x_w, y_w, z_w)、相机坐标(x, y, z)及图像平面坐标系(X, Y)。如图 12 所示，相机坐标中心点在 O 点(光学中心), z 轴与光轴重合。图像坐标为中心在 O' 点(光轴 z 与图像平面的交点)平行于 x, y 轴的图像坐标系。 (X_u, Y_u) 是相机标定的图像坐标。

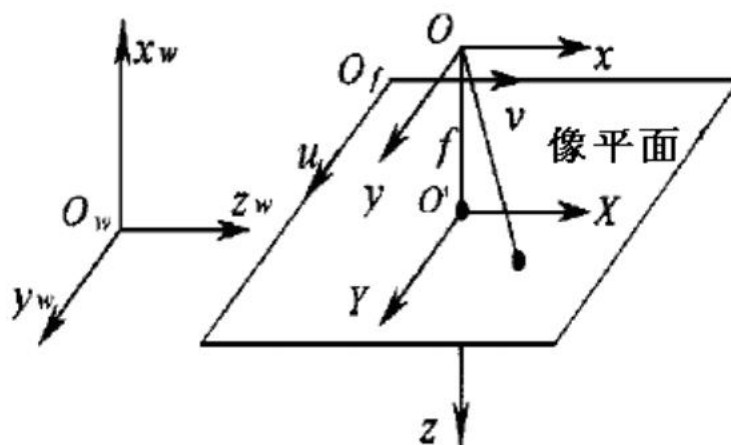


图 12

空间坐标系与相机坐标变换关系为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} + T \quad (3)$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \varphi - \sin \phi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \phi \sin \varphi - \sin \phi \cos \theta \cos \varphi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \varphi + \cos \phi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \phi \sin \varphi + \cos \phi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

R 为 3×3 的正交变换阵（见文献【2】）； $T = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^T$ 为 3×1 的平移矢量。小孔成像模型下的投影变换为：

$$\begin{aligned} X_u &= f \cdot \frac{x}{z} \\ Y_u &= f \cdot \frac{y}{z} \end{aligned} \quad (4)$$

式中： f 为有效焦距。

2) 最小二乘法求 R, T, f

由（4）可知， X_u, Y_u 都是关于 $t_x, t_y, t_z, \theta, \phi, \varphi, f$ 的函数。根据 4.3 可以获得 10 个内公切线交点 (x_w, y_w, z_w) ，以及 10 个内公切线交点的像点 (X_u, Y_u) ，用最小二乘法即可求解 $t_x, t_y, t_z, \theta, \phi, \varphi, f$ 。代入（3）就得到相机坐标系与三维世界坐标系的关系。

5.2 两个相机坐标系的关系

在 5.1 的基础上增加一部相机，产生一个新的相机坐标系 (x', y', z') ，该坐标系与三维世界坐标系的关系如下：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R' \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} + T' \quad (5)$$

由（3）和（5）可以得到相机坐标系 (x, y, z) 和新的相机坐标系 (x', y', z') 之间的关系：

$$R^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - R^{-1}T = R'^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - R'^{-1}T' \quad (6)$$

$$\text{即, } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R'R^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - R'R^{-1}T + T' \quad (7)$$

6 模型评价

6.1 模型精度

本文所采用的确定圆心在像平面上的像的方法是建立在具有仿射不变性的几何结构基础上的。具体分为两步。第一步，在像平面上寻找两个椭圆之间的内公切线交点；第二步，运用两个椭圆之间的内公切线交点的坐标联立方程求解。

第一步的工作与精度有很大的关系。在本文里，提到了三种确定内公切点交点的方法，下面对这三种方法进行讨论。

1. 作图法。这是一种简单易行的方法，对精度产生影响的主要是测量误差。
2. 0-1 矩阵法。这种方法讲图像转化成 0-1 矩阵，通过对矩阵的操作来求解切线方程，算法具有一定的普遍性，可适应较为复杂的标靶图像。
3. 灰度算法。该算法突破了像素大小的限制，对像素内的空间也进行操作，是一种基于理想像图的理想算法。它的精度是最高的，但对图像要求也是最高的，要求图像的分辨率很高，并且能精确的表现边缘部分的灰度。

6.2 模型稳定性

此处要讨论的是 4.2.1 中模型在利用 MATLAB 进行计算时的稳定性。在求解这个非线性方程组的时候，本文利用的是 MATLAB 中的 fsolve 函数进行求解。该函数使用牛顿迭代法搜索方程组的解。迭代法需要一个初值来开始计算，这个初值的改变对结果影响的大小可以反映出方程组的稳定性。

改变一下初值，看方程组的解有何变化。

椭圆	1	2	3	4	5
初值 1	(86,153)	(112,151)	(169,146)	(155,69.5)	(76 70.5)
解	(75.3,152.8)	(101.8,152)	(160,146.9)	(161.9,68.7)	(85.7,70.8)

将初值 x, y 坐标均加上 20mm，代入求解

椭圆	1	2	3	4	5
初值 2	(106,173)	(132,171)	(189,166)	(175,89.5)	(96,90.5)
解	(75.3,152.8)	(101.8,152)	(160,146.9)	(161.9,68.7)	(85.7,70.8)

可见，解没有变化。

将初值改为一些随机的点，再求解：

椭圆	1	2	3	4	5
初值 3	(19.6,129)	(60.6, 178)	(156,12.1)	(107,35)	(15.4,83)
解	(75.3,152.8)	(101.8,152)	(160,146.9)	(161.9,68.7)	(85.7,70.8)
初值 4	(10.6,125)	(169,191)	(119,35.4)	(138,95)	(129,168)
解	(102,113)	(102,113)	(102,113)	(102,113)	(102,113)

上面两组随机数，第一组（初值 3）得到了与前面一样的解，另一组（初值 4）却得到了无意义的解。可见该方程组虽然稳定性较强，但还是会因为初值和真实解差距太大而无法收敛到真实解。

7 参考文献

【1】 邓建中 刘之行 ， 计算方法，西安交通大学出版社，180~186 页，2000 年。

【2】 陈志杰，高等代数与解析几何（上），高等教育出版社，361~364 页，2000 年。