第22卷 第7期
2005年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 22 No. 7
Dec. 2005

文章编号:1005-3085(2005)07-0092-09

DVD 租赁问题的模型设计及求解

王 成, 文 野, 俞寅涛

指导教师: 宋宝瑞

(上海交通大学电子信息与电气工程学院，上海 200240)

编者按: 本文有显著特色，问题二、三的通常解法是用 LINGO 软件求解 0-1 规划模型，本文另辟蹊径，成功地用网络流中的最小费用最大流方法，得到了令人满意的结果，体现了作者较强的创新意识和能力。

摘 要: 本文讨论了 DVD 在线租赁的服务供应商可能遇到的问题与其解决方案。模型 II 解决了在已知订单与各种 DVD 数量的情况下，如何分配 DVD 使得满意的人数最多，且总的满意度最大。模型 III 解决了在已知订单的情况下，在一定的满意率与总满意度最大的约束下，如何以最小的成本购买各种 DVD，并确定分配方案。模型 V 对原问题作了更深入的推广，解决了在 DVD 数量有限且租赁费用与租赁时间成正比的条件下如何选择性地出租 DVD 以获得最大收入的问题。本文所讨论的问题均为最优化问题，但是各题的约束条件均不相同。本文对各个问题建立不同的网络模型，经过严密的理论论证，并用统一的费用流算法在微机上实现，充分利用了网络流模型适用面广，结果精确，计算简单的优点，对 DVD 租赁的现实问题提供了高效的解决方案。

关键词: 数学模型；网络流；最小费用最大流

分类号: AMS(2000) 90C35 **中图分类号**: O221 **文献标识码**: A

1 问题背景

考虑如下的在线 DVD 租赁问题。顾客缴纳一定数量的月费成为会员，订购 DVD 租赁服务。会员对哪些 DVD 有兴趣，只要在线提交订单，网站就会通过快递的方式尽可能满足要求。会员提交的订单包括多张 DVD，这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的。网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发。每个会员每个月租赁次数不得超过2次，每次获得3张 DVD。会员看完3张 DVD 之后，只需要将 DVD 放进网站提供的信封里寄回（邮费由网站承担），就可以继续下次租赁。我们考虑以下问题。

2 问题一 DVD 碟片的选购数量问题

问题一中 DVD 碟片的选购数量讨论与其它几篇有类似之处，在这儿我们不再展开，而将本文的重点放在下面几个问题的解决中。

3 问题二 DVD 碟片的分配问题

3.1 问题的描述

给定各种 DVD 的数量，以及每个会员的订单和其对相应 DVD 的偏爱程度，求出如何分配这些 DVD，使得会员的满意度最大。

3.2 问题的分析

对于本问题，我们认为，所谓使会员获得最大满意度，即指在使得每个会员尽可能地租借到他在订单中预定的数种 DVD 中的三种的前提下，使得每个人对他借到的 DVD 的偏爱值总和最小（数值越小，表示偏爱程度越大）。

3.3 模型 II 的建立

我们采用网络流的模型来解决问题二。设加权有向图1中 $G=\{V,E\}$，V 中除两个特殊点 source 与 terminal 外，其余各点入度及出度均大于0；source 为源点，其入度为0，出度大于0；terminal 为汇点，其入度大于0，出度为0。且对于每一边 $e\in E$，均带有三个权值：容量 capacity$(e)(\geq 0)$，单位流量费用 cost(e)，流量 flow(e)。对于图 G 的各边，权值 capacity(e) 与 cost(e) 为既定的，flow(e) 为可变的，当以下三个性质被满足时(参见[1])，称 flow(e) 为网络 G 中的一个可行流：

性质1 $\forall e\in E$，有 $0\leqslant \mathrm{flow}(e)\leqslant \mathrm{capacity}(e)$。

性质2 $\forall v\in V$ 且 $v\neq \mathrm{source}, v\neq \mathrm{terminal}$，有

$$\sum_{e \text{ is in-side of } v} \mathrm{flow}(e)=\sum_{e \text{ is out-side of } v} \mathrm{flow}(e).$$

（性质2说明了对于每个中间节点，经过它的流量是守恒的。）

性质3

$$\sum_{e \text{ is in-side of terminal}} \mathrm{flow}(e)=\sum_{e \text{ is out-side of source}} \mathrm{flow}(e).$$

并记该网络的流量

$$\mathrm{flow}=\sum_{e \text{ is in-side of terminal}} \mathrm{flow}(e)=\sum_{e \text{ is out-side of source}} \mathrm{flow}(e)$$

对于一个既定的网络（capacity 与 cost 既定），其所有可行流中流量最大的流称为该网络的最大流，一个网络的最大流并不唯一，但是若 f 为最大流，f 的流量 flow(f) 是唯一的。同时，定义一个可行流的费用 $\mathrm{cost}=\sum_{e\in E}\mathrm{flow}(e)*\mathrm{cost}(e)$，若一个最大流的费用取到了所有最大流的费用的最小值，则称这个流为最小费用最大流。显然，最小费用最大流的前提是该流为最大流。

下面，我们将根据问题二的实际情况，构造一个网络。构造加权有向图 $G=\{V,E\}$ 中，点集 $V=\{\mathrm{source},C1,C2,\ldots,C1000,D1,D2,\ldots,D100,\mathrm{terminal}\}$，其中，$Ci(1\leq i\leq 1000)$ 代表第 i 个会员，$Dj(1\leq j\leq 100)$ 代表第 j 张 DVD 盘，source 为网络流的源点，terminal 为网络流的汇点。在 source 与所有的 Ci 之间添加有向边 $\langle \mathrm{source},Ci\rangle,(1\leq i\leq 1000)$，该边具有容量3，单位流量费用为0；在所有的 Dj 与 terminal 之间添加有向边 $\langle Dj,\mathrm{terminal}\rangle,(1\leq j\leq 100)$，该边的容量为第 j 种 DVD 的现有数量，单位流量费用为0；根据题目中订单，若第 i 个会员预订了第 j 种 DVD，则添加有向边 $\langle Ci,Dj\rangle$，该边的容量为1，单位流量费用为该会员对该种 DVD 的偏爱值。考虑到现实中，DVD 的个数为整数，我们规定图1中 G 所有边的流量为整数。因此，图1中 G 是一个整数流量的最小费用最大流模型。

3.4 模型有效性的论证

下面，我们将分几步论证，对于我们建立的图论模型，其最小费用最大流恰好表示了满足上述最大满意度定义的分配方案，而最小费用恰恰代表着最大满意度。

引理1 图1中 G 上的一个流，必然保证边 $<Ci,Dj>$ 的流量或为1，或为0。

证明 由于边 $<Ci,Dj>$ 的容量恰为1，而流量 flow 为小于 capacity 的整数，所以其上的流量或为0，或为1。

定理1　图1中 G 上的一个流，代表且仅代表一个可行的分配方案，且该方案中租赁的人次数为网络的流量。

证明　在图1中 G 的流中，当且仅当边 $<Ci,Dj>$ 的流量为1时，我们把第 j 种 DVD 租赁给第 i 个会员，这就是一种分配方案，且是唯一的。下面证明这种分配方案是可行的。因为所有以 Ci 为终点的边 $<\text{source},Ci>$ 容量均为3，由网络流性质2可得：对于任意 Dj，所有指向 Dj 且流量为1的边的个数不超过3条，这就保证了每个会员最多租赁到3张 DVD。同理，$<Ci,Dj>$ 的容量为1，保证了一个人不会租赁到2张相同的 DVD；$<Dj,\text{terminal}>$ 的容量为第 j 种 DVD 的数量，保证了每种 DVD 不会被租借给大于其现有数量的数目的会员。因此，这种根据流量得到的分配方案符合实际条件的约束，是可行的。而整个网络的流量 $F=\sum_{1\leqslant i\leqslant 1000}\text{flow}(<\text{source},Ci>)=\sum_{1\leqslant i\leqslant 1000}$ 第 i 个会员租赁的 DVD 的个数等于该方案中的租赁的人次数。

定理2　图1中 G 上的流与可行的分配方案是一一对应的。

证明　有定理1的保证，现只需证明一个可行的分配方案可用一个流来表示即可。对于一个可行的分配方案，若会员 i 拿到了他想要的第 j 种 DVD，我们将边 $<Ci,Dj>$ 的流量置为1。然后，我们将边 $<\text{source},Ci>$ 的流量置为从 Ci 出发且流量为1的边的个数，$<Dj,\text{terminal}>$ 的流量置为以 Dj 为终点且流量为1的边的个数，显然，这样得到的每条边 e 上的权值 $\text{flow}(e)$ 满足网络流的三条性质。显然，一个可行的分配方案可用上述唯一的流表示出来。

定理3　图1中 G 上的最大流，最大的满足了每个会员的租赁要求。

证明　用反证法。假设图1中 G 的最大流对应的分配方案中，共有 S 人次的租赁，那么由定理1，该流的流量为 S。若存在某种分配方案的租赁人次数为 T $(T>S)$，那么该方案对应的网络流流量应为 T，与流量为 S 的流是最大流矛盾。

定理4　图1中 G 上的最小费用最大流对应方案的满意度，符合前述最大满意度的定义

证明　最小费用最大流是最大流，由定理3，它所对应的方案满足了前述最大满意度定义中的前提。下面，只需证明这个流的费用即为偏爱值总和的最小值。由于图1 G 中单位流量费用不为0的边均为 $<Ci,Dj>$，而其流量或为1，或为0，因此该流的费用即为所有会员对其租赁到的 DVD 的偏爱值总和。由于该费用为最小，因此这个偏爱值也为最小。符合了前述最大满意度的定义。

3.5　问题的解决

确定了最小费用最大流的模型后，我们计算通过前述方法构造出的网络的最大流及最小费用，结果为 $\text{flow}=2992$，$\text{cost}=8191$，即所有会员租赁到 DVD 的总数为2992，在这个总数下偏爱度之和的最小值为8191。从计算结果可以看出，要满足每个会员都能得到预订的 DVD 中的3张（此时流量应为3000），在现有的各种 DVD 数量的制约下是不可能实现的，这是由定理3保证的。表1中列出了第1－30名会员所得到的 DVD。（正文着重模型的建立，详细算法见参考文献[1]，问题(3)同）

4　问题三 DVD 碟片的购入和分配问题

4.1　问题的描述

假设现有的 DVD 数量均为0，根据所有会员给出的订单，如何确定各种 DVD 购买的数量，以及如何分配这些 DVD，使得有95%以上的会员满意，并且满意度最大？

4.2　问题的分析

表 1: 前30名会员分配到的 DVD 种类

会员	1	2	3	4	5	6
DVD	8，41，98	6，44，62	32，50，80	7，18，41	11，66，68	19，53，66
会员	7	8	9	10	11	12
DVD	26，66，81	31，35，71	53，78，100	41，55，85	59，63，66	2，31，41
会员	13	14	15	16	17	18
DVD	21，78，96	23，52，89	13，52，85	10，84，97	47，51，67	41，60，78
会员	19	20	21	22	23	24
DVD	66，84，86	45，61，89	45，50，53	38，55，57	29，81，95	37，41，76
会员	25	26	27	28	29	30
DVD	69，81，9	22，68，95	50，58，78	8，34，82	26，30，55	37，62，98

对于问题三，我们定义：若某个会员在一个月中只租赁一次，并且租赁到了他想看得 DVD 中的三种；或者他在一个月中租赁了两次，每次都看到了想看的 DVD 中的三种，那么则称这个会员满意。我们购买 DVD 的策略是：在使得95%的会员满意的前提下，使得所有会员对其租赁到的 DVD 的偏爱值最小（该数值小表示满意度大。问题三中某个分配方案的满意度定义与问题二一样，因此，若某会员仅租赁到一种 DVD，则他并不满意，但他对该 DVD 的偏爱度仍然被计算在整个分配方案的满意度内），并且在这个偏爱值的最小值能够取到的前提下，使得购买的 DVD 的总张数最小（假设每种 DVD 单价一样，那么 DVD 的总张数最小表示成本最低）。这种策略即为在使得消费者尽可能满意的前提下，尽可能降低成本。在本文中，我们还将会讨论在成本有限制的前提下，如何使得会员尽可能满意。在这种策略下，我们的做法是：先假设每种 DVD 的数量均为无限多，然后我们寻求一种分配方案，使得95%的人满意，并且满意度最大。接着，在保证这个满意度的条件下，求出每种 DVD 最小的购买量。

由于该问题需要考虑60%的会员租赁两次的情况，而哪些会员会租赁两次并非既定的，而是一个概率考虑，因此，我们所要求的是在平均情况下，而非在最坏情况下满意度最大，并且成本最低。事实上，60%的会员租赁两次，在平均情况下可以等价于每个人能够租赁3*1.6张 DVD，且每种 DVD 的张数为其实际数量的1.6倍。由于我们事先并不知道哪些会员会租两次，出于统筹考虑，这里假设每个会员租赁两次的概率是一样的，即每个人都有60%的可能第二次租碟，这相当于每人平均一个月租 3*（1+60%）=4.8 张 DVD。同样，哪些碟一个月被利用两次也是未知的，不妨设每种 DVD 单月借出两次的概率是相同的，那么，由于有60%的 DVD 月内被回收，所以在不浪费的前提下，相当于每张碟每月被租出1.6次，即每种 DVD 的张数为其实际数量的1.6倍。

同时，我们的策略是使得95%的会员满意，出于公平原则，我们没理由特意抛弃5%的会员，所以，我们计算的依然应该是个平均值。这相当于 DVD 量为会员租借量的95%，计算时等价于每个会员少借5%的 DVD。

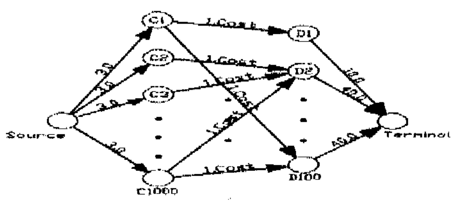

图1: 整数流量的最小费用最大流模型

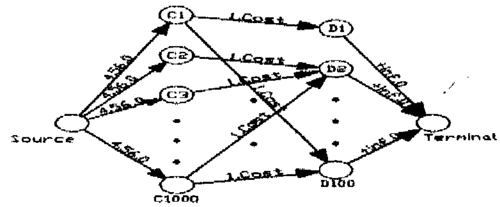

图2: 实数流量的网络流模型

4.4 模型 III 的建立

类似于问题二，我们建立图2中 $H=\{V,E\}$，$V=\{\text{source}, Ci_{1\le i\le 1000}, Dj_{1\le j\le 1000}, \text{terminal}\}$，$E1=\{<\text{source}, Ci> | 1\le i\le 1000\}$ $E2=\{<Ci,Dj> |$ 会员 Ci 在订单中预订了 DVD 盘片 $Dj\}$，$E3=\{<Dj,\text{terminal}> | 1\le j\le 100\}$，$E=E1\cup E2\cup E3$。置 $E1$ 中边的流量为 3*1.6*0.95，表示的是每个人最多可以借的 DVD 的个数；$E2$ 中边的容量为1，表示每个人对于同一张 DVD 最多只会租赁一次；$E3$ 中边的容量为 $+\infty$，表示当前各种 DVD 的数量均为无穷（即我们将先在成本不受限制的情况下求最大满意度）。置 $E1$ 及 $E3$ 中边的单位流量费用为0，$E2$ 中边的单位流量费用为相应的会员对于相应的 DVD 的偏爱程度。初始置图1中 G 的流量为0。这样，图2中 H 将是一个实数流量的网络流模型。在问题2的整数流模型中，边 $<Ci,Dj>$ 的流量 0、1 取值分别代表不租赁与租赁。而在当前问题中，边 $<Ci,Dj>$ 的取值表示了相应会员租赁相应 DVD 的次数的期望。由于一个会员不会租赁相同的 DVD 两次，所以这个期望是介于 $[0,1]$ 之间的实数，边 $<Ci,Dj>$ 的容量为1恰恰保证了这一点。

4.5 模型有效性的论证

实数流量的网络流模型将问题2的实际租赁次数（整数）拓展为租赁的期望数（实数），因此该网络流与实际分配方案的一一对应关系的证明与引理2、引理3的证明类似，不再赘述。下面，我们将分几步证明该模型能够有效地实现我们购买 DVD 的策略。

引理2 图2中 H 的最大流是满流。即源点出发的所有边的流量等于容量。

证明 $E1,E2,E3$ 分别为 G 的三个割集。其中 $E3$ 中边容量为 $+\infty$。考察题目提供的表2可以发现每个人至少预订了不少于5种的 DVD，即 $E2$ 中，每个点 Ci 发出的边的容量总和 ≥ 5。而 $E1$ 中边的容量为 $3*1.6*0.95<5$，故根据最大流最小割定理(参见[1])，最大流的情况将是最小割集 $E1$ 被充满。而 $E1$ 恰为以源点 source 为起点的边集，因此 H 的最大流即为满流。

定理5 图2中 H 的最大流能够在平均情况下满足60%的会员租赁两次，95%的会员满意的前提。

证明 根据引理2，由于 H 的最大流是满流，因此每个人在一个月中租借 DVD 的总次数的期望恰为 3*1.6*0.95，再根据前面论证的两个等价性，这个期望达到了平均情况下60%的会员租赁两次，95%的会员满意的前提。

定理6 图2中 H 的最小费用最大流在保证前述的前提下取到了最大满意度。

证明 前提的保证已经得到证明（定理2）。下面仅证明最小费用即为最小的偏爱度总和，即最大满意度。反证法。设 F 是最小费用最大流。假设存在一种方案保证了前述的前提，并且在期望上取得了更低的偏爱度，那么根据最小费用最大流与实际分配方案的一一对应，设该方案对应的最小费用最大流为 F'，其费用 $cost(F')<cost(F)$，那么与 F 是最小费用最大流矛盾。

证毕

定理7 在图2中 H 的最小费用最大流中，$E3$ 中的边上的流量等于相应的 DVD 被租赁的次数的期望。

证明 由于 $E2$ 中的边的流量表示相应的会员租用相应的 DVD 的次数的期望，根据网络流的性质2可以得到，$E3$ 中的边的流量表示相应的 DVD 被不同会员租借的总次数的期望。

4.6 问题的解决

确定了上述最小费用最大流的模型后，我们计算通过前述方法构造出的网络的最大流及最小费用，结果为 $flow = 4560, \mathrm{cost} = 12800$，即所有会员租赁到 DVD 的期望总数为4560，在这个总数下偏爱度之和的最小值为12800。此时，我们检查 $E3$ 中每条边的流量，这些流量等于相应的 DVD 被租赁的次数的期望（定理7），根据前文中两个等价的合理性的论证，将这个期望除以1.6可以得到每种 DVD 在平均情况下应该购买的数目。表2列出了部分数据。

表 2: 在指定的满意度条件下，每种 DVD 碟片至少购买的数量

DVD 编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
购买数量	23	30	31	31	26	29	29	30	30	27	30	27	27	31	25
DVD 编号	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
购买数量	34	28	30	29	35	33	28	33	25	29	32	27	21	24	32

当确定了每种 DVD 的购买量之后，我们可以将上述模型中 $E3$ 中边的容量设成相应 DVD 的数量，再对该网络求整数流量的最小费用，分析 $E2$ 中边的流量，即可得到 DVD 的分配方案。

5 问题四 DVD 租赁问题的进一步推广

5.1 问题的描述

若你是网站经营管理人员，你觉得在 DVD 的需求预测、购买和分配中还有哪些重要问题值得研究？请明确提出你的问题，并尝试建立相应的数学模型。提出如下两个问题：

1) 继续考虑表2，并假设表2中 DVD 的现有数量全部为0。若网站资金有限(定为40000元)，且假设每张 DVD 价格都是相同的(20元/张)，如果你是网站经营管理人员，如何决定每种 DVD 的购买量，以及如何对这些 DVD 进行分配，才能使一个月内95%的会员得到他想看的 DVD，并且满意度最大？

2) 假设每次每张 DVD 的租赁价格与该次租赁的时间成正比，或者说等于结束时间减去开始时间。而现在已经收到了许多订单，每张订单的形式为：要租赁哪种 DVD，租赁开始时间，租赁结束时间。而因为已有的每种 DVD 数量是有限的，所以不能满足所有的订单。现在要决定在可以满足的情况下，接受其中哪一些订单使得总收益最大。

5.2 第1个问题

本题与原问第三题有异曲同工之妙。第三题中，资金是无限的，也就是说 D 到 terminal 的容量是无穷。但是，本题中资金有限，因而要对模型 II 作一定的改变。

基本与模型 III 相同，仅仅加入一个 terminal' 结点作为汇点（图3），然后将 $<$ Terminal, Terminal$'$ $>$ 的容量定为可购买 DVD 的总量（40000/20*3200=2000），cost($<$ Terminal, Terminal$'$ $>$) $= 0$。下面证明此修改的合理性。

首先，借出 DVD 的总量不会大于3200。这是由于非源汇点的结点流入量等于流出量，所以 DVD 总借量不超过3200。其次，会员的满意度一定是最大的。这在模型 II 中已经被证明了。于是，经过这样修改后，我们得到了满足题目条件且最优的结果。

5.3 第2个问题

5.3.1 问题的分析与抽象

显然，只有同一种 DVD 的订单之间才有相互影响，所以可将本问题分为对每种 DVD 分别在该 DVD 订单的最大收益。然后将这些子问题的最大收益相加就是整个问题的最大收益了。于是问题就归结到：单对某种 DVD，在针对该 DVD 的订单中如何选取，使得在这种 DVD 数量能满足的情况下收益最大。从此开始，我们仅讨论针对单某一种 DVD 的问题。

设当前处理的那种 DVD 的可提供的数量为 K，可以把每张针对这种 DVD 的订单想像成一根在坐标轴上方的水平线段，线段的左坐标是租赁开始时间，线段的右坐标是租赁结束时间。问题就抽象为选取一些线段实现：

① 坐标轴的任意处被选取的线段覆盖的次数小于等于 K。

② 在满足①的条件下使选取线段的长度之和最大。

具体比如对某种DVD的有如下订单见表3：

表 3: 某种 DVD 的订单

租赁开始时间	租赁结束时间
1	5
1	5
2	8
5	9
7	10
7	12

而此种 DVD 最大的供应量为2。那么抽象成线段就如图4所示，其中加粗的线段即为满足条件下可选取的最优解，最大可获得17单位收益。

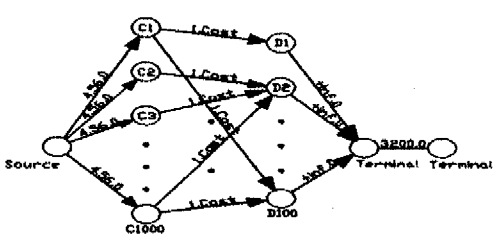

图3: 两个 Terminal 的网络流模型

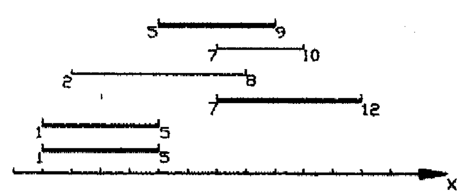

图4: 租赁时间区间示意图

5.3.2 模型 V 的建立与求解

对某种 DVD，设共有 n 张订单，第 i 张订单的开始时间为 Ai，结束时间为 $Bi(Ai \leq Bi)$，订单中所涉及到的时间最大为 M，最小为 m，该种 DVD 可供应数量为 K。我们可以构造这样一张带有容量上界的有向图5所示

① 第 i 天对应顶点 i，图初始时为空，顶点编号从 m 到 M，共有 $(M-m+1)$ 个；

② 对第 i 张订单 $(1\le i\le n)$，若当前图不存在有向边 $<Ai,Bi>$ 则添加有向边 $<Ai,Bi>$，其容量为1，单位流量费用为 $(Ai-Bi)$，否则将边 $<Ai,Bi>$ 的容量加1，单位流量费用不变；

③ 对任意 $i(m\le i\le M-1)$，添加有向边 $<i,i+1>$（注意如果已经存在一条从 i 到 $i+1$ 的有向边，这里仍旧再添加一条），该边对应的容量为正无穷大，单位流量费用为0；

④ 添加源点 S，添加有向边 $<S,m>$，其容量为 K，单位流量费用为0。

还是以上面的那组数据为例，那么构造出的图5，其中每条边所标示的前面数字为容量，后面的数字为单位流量费用。

下面将证明对以 S 为源点 (source)，M 为汇点 (terminal) 对此图求最小费用最大流，即能构造出满足要求的最优解。

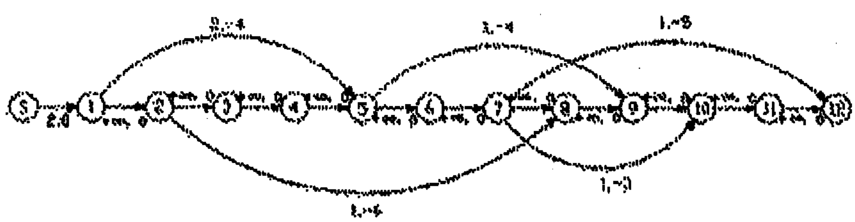

图5： 带有容量上界的有向图

5.3.3 模型的合理性

所有开始时间、结束时间相同的订单称为“同一类订单”，记 Num(x,y) 为开始时间是 x 结束时间是 y 的这一类订单的数量；E 表示构造出的图的边的集合；cost(x,y) 表示有向边 $<x,y>$ 的费用；capacity(x,y) 表示有向边 $<x,y>$ 的容量，flow(x,y) 表示对此图求最小费用最大流后流经有向边 $<x,y>$ 的实际流量。

显然，由前面的构造方法，知对一条容量不是 $+\infty$ 的有向边 $<x,y>$，其容量上界就等于 Num(x,y)。当按上述方法求最小费用最大流后，我们让此边 $<x,y>$ 的实际流量作为选取多少开始时间为 x，结束时间为 y 的订单。求出可行流的流量当然是小于等于边上容量上限的，即这个数值小于等于 Num(x,y)，说明只能在已有的订单中选取若干而对每一类订单的选取量不能大于已有的订单量，符合条件。其次，因为从 m 到 M 存在了一条容量全为 $+\infty$ 的路径（经过 $<m,m+1>,<m+1,m+2>$，$<M-1,M>$），所以从 S 到 M 的最大流一定恰等于 K，这样就保证了在任意节点 $x(m\le x\le M)$，从 x 流出的流量小于等于 K，换句话说也就是满足了在任一时刻至多提供 K 张 DVD 的限制。

5.3.4 模型及其算法的最优性

最后，由前面的构造方法，得此总费用为 cost $=\sum_{<x,y>\in E} f(x,y)*\text{cost}(x,y)$ 而对那些容

量为 $+\infty$ 的有向边，费用都是0，其他边 $<x,y>$ 的费用都是 $(x-y)$。所以

$$\begin{aligned}\text{cost} &= \sum_{<x,y>\in E,\text{capacity}(x,y)<+\infty} f(x,y)*\text{cost}(x,y)\\ &= \sum_{<x,y>\in E,\text{capacity}(x,y)<+\infty} f(x,y)*(x-y)\\ &= \text{每一类订单选取的数量}\times\text{该类订单的收益=总收益.}\end{aligned}$$

正因为是最大流而满足了题目的所有限制，而又因为是在达到最大流情况下的最小费用，也就是总收益的相反数最小，取一下相反数即得是总收益最大，最优性得证。所以这样构造出的图论模型取得最小费用最大流时的流量正对应了在满足题目限制的情况下一个最优的选取方案，而所得的最小费用的相反数就等于最大的收益。

6 模型的总结和推广

对于本文问题二所对应的一个标准的最小费用最大流的模型是显而易见的，但是对于上述的这个问题，看似与网络流风马牛不相及，但在我们透过问题的描述而分析清楚其本质后，通过巧妙的构造出一个图论模型，使得再一次将问题转化到了一个容易解决的最小费用最大流问题。可以想见，如果不用上述的网络流模型而采用最朴素的枚举法来枚举每份订单是否采纳，这样共有 2^n 种不同方法，然后对每种方法检查是否符合限制从而得出符合限制的最优解，算法的时间复杂度是指数级；而通过网络流模型的建立，问题就能在多项式复杂度的时间内高效地解决。

现在，网络流算法的理论研究已经非常成熟，随着低阶算法的提出，对于数千万节点的网络，计算机也可以在可行的时间内计算完成。因此，过去需要用连续模型来处理的问题，现在已经可以用这种离散模型更加精确地解决。

参考文献：

[1] Thomas H. Cormemn, Charles E. Leiserson. Introduction to Algorithms (Second Edtion)[M]. Massachusetts, U.S. The MIT Press, 2002

[2] 刘汝佳，黄亮. 算法艺术与信息学竞赛[M]. 北京：清华大学出版社，2004

[3] 吴文虎，王建德. 图论的算法与程序设计[M]. 北京：清华大学出版社，1997

Modeling and Solving Processes of the DVD Hire Problems

WANG Cheng, WEN Ye, YU Yin-tao

Advisor: SONG Bao-rui

(School of Electronic and Electric Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

Abstract: In this paper, we discuss the problems and their solutions of the online service of DVD disk hire. Using model 2, we find out the optimal distribution program of DVD disk to maximize the satisfaction level of customers, and using model 3, we also fine out the optimal distribution program of DVD disk to minimize the cost under the constraint conditions that a certain satisfaction rate must be reached. We use model 5 to extend the results to much more general cases.

We design different network flow models for above problems, which are problems of optimization with different constraint conditions, and use minimum cost maximum flow method to solve them by computer.

Keywords: mathematical model; network; minimum cost maximum flow