制动器试验台的控制方法分析

摘要

本文根据角动量守恒，能量守恒，角动量定律等原则，针对车辆制动器涉及检测的模拟试验中提出的六个问题建立了以下模型。

模型一：等效转动惯量模型---- $I=mR^2$；

求得问题 1 的等效的转动惯量：$I=51.9989kg*m^2$

模型二：环形钢体转动惯量模型---- $J=\frac{1}{2}m(R_2^2+R_1^2)$

求得三个飞轮的转动惯量为：30.0083，60.0166，120.0032 $kg*m^2$；可以组成 8 种机械惯量（见 6 页）；对于问题 1 中的等效转动惯量，需要电动机补偿的惯量分别为 11.9906kg$*m^2$和-18.0177 kg$*m^2$

模型三：驱动电流能量补偿模型

$$\begin{cases} M_{差}(t_{x+1}-t_x)=J_{机}[\omega(t_{x+1})-\omega(t_x)] \\ \int_{t_x}^{t_{x+1}}\frac{I_t}{1.5}\omega(t_x)*dt=\Delta E[\omega(t_x),\omega(t_{x+1})] \end{cases} \qquad (x=0,1,\cdots,n-1)$$

应用拉格朗日中值定理求得所需的驱动电流$I=174.798A$

模型四：能量误差评价模型

能量误差：$W=\frac{1}{2}mv_{初}^2-\frac{1}{2}mv_{末}^2-\frac{1}{2}J_{机}\omega_{末}^2+\frac{1}{2}J_{机}\omega_{末}^2-\sum_{i=1}^{n}M_x\Delta t_x\omega_x$

解得$W=2833.3390J$；相对误差 $\eta=5.8\%$，**评价结果为此方法一般。**

模型五：给定时间段电流值的控制方法模型

方法一、平均能量补偿法：$\int_{t_x}^{t_{x+1}}[-FR+\frac{i(t)}{1.5}]dt=J_{机}\omega(t_{x+1})-J_{机}\omega(t_x)$

方法二、递增渐稳补偿法：

$\Delta E'=\Delta E_1+\Delta E_2$ 　　评论方法见 10 页

模型六：模型五的改进模型

$$\int_{t_x}^{t_{x+1}}\frac{i(t)}{1.5}\omega(t)dt=\Delta E[\omega(t_x),\omega(t_{x+1})]$$

$\Delta E'=\Delta E_1+\Delta E_2$

关键词：角动量定理　　能量守恒定理　　中值定理

1、问题的重述

汽车的行车制动器（以下简称制动器）联接在车轮上，它的作用是在行驶时使车辆减速或者停止。制动器的设计是车辆设计中最重要的环节之一，直接影响着人身和车辆的安全。为了检测制动器的综合性能，需要在各种不同情况下进行大量路试。但是，车辆设计阶段无法路试，只能在专门的制动器试验台上对所设计的路试进行模拟试验。

模拟试验的原则是试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致。试验台工作时，电动机拖动主轴和飞轮旋转，达到与设定的车速相当的转速(模拟实验中，可认为主轴的角速度与车轮的角速度始终一致)后电动机断电同时施加制动，当满足设定的结束条件时就称为完成一次制动。

本题中假设试验台采用的电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比（本题中比例系数取为 1.5 A/N·m）。

评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小，本题中的能量误差是指所设计的路试时的制动器与相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差。

现在要求运用数学建模的思想解答以下问题：

1. 设车辆单个前轮的滚动半径为 0.286 m，制动时承受的载荷为 6230 N，求等效的转动惯量。
2. 飞轮组由 3 个外直径 1 m、内直径 0.2 m 的环形钢制飞轮组成，厚度分别为 0.0392 m、0.0784 m、0.1568 m，钢材密度为 7810 kg/m^3，基础惯量为 10 $kg·m^2$，问可以组成哪些机械惯量？设电动机能补偿的能量相应的惯量的范围为 [-30, 30] $kg·m^2$，对于问题 1 中得到的等效的转动惯量，需要用电动机补偿多大的惯量？
3. 建立电动机驱动电流依赖于可观测量的数学模型。

在问题 1 和问题 2 的条件下，假设制动减速度为常数，初始速度为 50 km/h，制动 5.0 秒后车速为零，计算驱动电流。

4. 对于与所设计的路试等效的转动惯量为 48 $kg·m^2$，机械惯量为 35 $kg·m^2$，主轴初转速为 514 转/分钟，末转速为 257 转/分钟，时间步长为 10 ms 的情况，用某种控制方法试验得到的数据见附表。请对该方法执行的结果进行评价。
5. 按照第 3 问导出的数学模型，给出根据前一个时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩，设计本时间段电流值的计算机控制方法，并对该方法进行评价。
6. 第 5 问给出的控制方法是否有不足之处？如果有，请重新设计一个尽量完善的计算机控制方法，并作评价。

2、问题的背景

随着经济的发展全球拥有汽车的人越来越多人们的出行也越来越方便，但随之而来的也很多。例如，环境污染、能量的损耗等问题。就目前而言汽车所带给我们最大的威胁就是安全问题。近几年我国的车祸发生率成上升趋势，所以怎样提高汽车的性能成为汽车生产商的关键问题。其中首先要提高的就是汽车的刹车性能。

3、问题分析

（一）问题的性质

本文主要研究的是汽车制动器试验台的控制方法分析问题。我们需要解决的关键问题是电动机驱动电流的补偿问题。

（二）解决问题的难点和关键

1.如何找出电动机的驱动电流变化规律；

2.如何确立驱动电流与机械惯量之间的关系；

3.怎样使所设计的路试时的制动器与相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差尽量的小；

4.如何设计电流值的计算机控制方法。

（三）解决问题的思路

问题（1）：等效转动惯量

根据线速度与角速度的物理关系和能量守恒定律可求得等效转动惯量。

问题（2）：组合的机械惯量和电动机补偿的惯量

组合的机械惯量可根据圆柱质量体积公式和钢体转动惯量（圆筒沿几何轴转）的公式求得。因为在制动过程中，电动机是在一定规律的电流控制下参与工作，补偿由于机械惯量不足而缺少的能量，所以电动机补偿的惯量等于问题（1）中得到的等效转动惯量减去机械惯量。

问题（3）：建立电动机驱动电流依赖于可观测量的数学模型

在相等时间间隔内电机的扭矩与转动扭矩之间满足角动量守恒，与之相对应的能量也守恒，电惯量的补偿等于等效惯量与机械惯量之差，则对应的能量也满足类似关系，在计算中运用拉格朗日中值定理和定积分来计算驱动电流。

问题（4）：能量误差评价模型

评价控制方法好坏的重要标准是能量误差的大小，这个误差应该等于需要由电流补偿的能量与电流实际补偿能量之差，如果它们之差越小，那么说明该控制方法越合理。

4、名词解释与合理假设

名词的解释

电惯量：由驱动电流提供的转动惯量。

合理假设

1. 假设路试时轮胎与地面的摩擦力为无穷大；
2. 假设主轴的角速度与车轮的角速度始终一致；
3. 假设不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差。

5、符号说明

符号	符号说明
R	车前轮滚动半径
I	等效转动惯量
V	车轮滚动线速度
ω	车轮滚动角速度
G	车轮载荷
m	单个车轮承受荷载的等效质量
g	重力加速度
R_2	飞轮外半径
R_1	飞轮内半径
m_i	不同厚度飞轮的质量
J_0	基础惯量
J_i	不同厚度飞轮的机械惯量
$J_{\Delta i}$	电机补偿的机械惯量
h_i	飞轮的厚度
ρ	飞轮的密度
i(t)	驱动电流随时间变化的函数关系式
$\omega(t_x)$	不同时刻之间飞轮的线速度
k	驱动电流增量变化率
t_k	时间间隔
$J_{等}$	不同状态下等效惯量
$J_{机}$	不同状态下的机械惯量

i（t）	驱动电流与时间变化的函数关系式
$M_{总}$	电机驱动的扭矩和制动扭矩
$M_{制}$	制动扭矩
$M_{电}$	电机驱动的扭矩
F	飞轮滚动时产生离心力
$\omega_{初}$，$\omega_{末}$	初始角速度，末角速度
Δt	时间改变量

6、模型建立与求解

(一). 问题（1）

等效转动惯量模型---- $I=mR^2$

由$G=mg$

车辆单个轮子滚动线速度：$v=R*\omega$

根据能量守恒定律：$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}I\omega^2$

得等效的转动惯量模型:$I=mR^2$

其中　R=0.286m　　G=2630N

求得$m=\frac{6230}{9.8}=635.7143kg$

∵R=0.286m

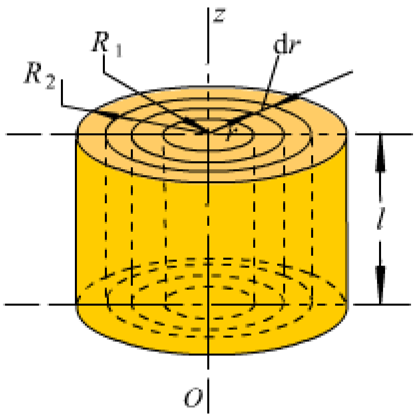
∴ 等效的转动惯量 I=$635.7143*(0.286)^2=51.9989kg*m^2$

(二). 问题（2）

环形钢体转动惯量模型---- $J=\frac{1}{2}m(R_2^2+R_1^2)$

证明如下：

如图所示，一质量为 *m*、长为 *l* 的均质空心圆柱体（即圆筒），其内，外半径分别为R_1和R_2，试求对几何轴 *Oz* 的转动惯量。



解：在半径 *r*（$R_1 < r < R_2$）处，取一薄圆柱壳形状的质元，其长为 *l*，半径为 *r*，厚度为 d*r*。设筒体的密度为ρ，则该质元的质量为

$$dm = \rho\, dv = \rho\,(2\pi r dr) l$$

所以圆筒对几何轴 *oz* 的转动惯量

$$J = \int_{R_1}^{R_2} r^2 dm = 2\pi l \int_{R_1}^{R_2} \rho\, r^3 dr \qquad ①$$

由于筒体是均质的，ρ 为恒量，因此

$$J = 2\pi l \rho \int_{R_1}^{R_2} \rho\, r^3 dr = \frac{\pi l \rho}{2}(R_2^4 - R_1^4) \qquad ②$$

圆筒的体积$\pi(R_2^2 - R_1^2)l$与其密度ρ之乘积，就是整个圆筒的质量 *m*，即

$$m = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)l \qquad ③$$

将式③代入式②，于是得圆筒对 *oz* 轴的转动惯量为

$$J = \frac{1}{2}m(R_2^2 + R_1^2) \qquad ④$$

证毕。
圆柱体质量公式：

$$m = \pi l \rho\, r^2$$

已知：$R_2 = 0.5m \quad R_1 = 0.1m \quad \rho = 7810kg/m^3$

$l_1 = 0.0392m \quad l_2 = 0.0784m \quad l_3 = 0.1568m$

可求得：

$m_1 = \pi l_1 * \rho * (R_2^2 - R_1^2)$ =230.8332kg

$m_2 = \pi l_2 * \rho * (R_2^2 - R_1^2)$ =461.6663kg

$m_3 = \pi l_3 * \rho * (R_2^2 - R_1^2)$ =923.3327kg

$J_1 = \frac{m_1}{2}(R_2^2 + R_1^2)$ =30.0083kg$* m^2$

$J_2 = \frac{m_2}{2}(R_2^2 + R_1^2)$ =60.0166kg$* m^2$

$J_3 = \frac{m_3}{2}(R_2^2 + R_1^2) = 120.0032kg* m^2$

所以我们所求的机械惯量可列成下表：

机械惯量的组成方式	机械惯量（kg$* m^2$）
J_0	10
$J_0 + J_1$	40.0083
$J_0 + J_2$	70.0166
$J_0 + J_3$	130.0332
$J_0 + J_1 + J_2$	100.0249
$J_0 + J_1 + J_3$	160.0415
$J_0 + J_2 + J_3$	190.0498
$J_0 + J_1 + J_2 + J_3$	220.0581

因为电动机所能补偿的能量相应的惯量的范围为［-30, 30］kg・m^2，由问题（1）解出的答案等效的转动惯量为$51.9989kg * m^2$，所以飞轮组机械惯量的范围为【21.9989，81.9989】，所以符合范围的飞轮组组合为$J_0 + J_1$和$J_0 + J_2$。

设电动机补偿的惯量$J_{\Delta i}$

$\because J_0 + J_1 + J_{\Delta 1} = 51.9989kg* m^2$

$J_0 + J_2 + J_{\Delta 2} = 51.9989kg* m^2$

$\therefore\ J_{\Delta 1}=11.9906kg*m^2$

$J_{\Delta 2}=-18.0177kg*m^2$

需要电动机补偿的惯量分别为 $11.9906kg*m^2$ 和 $-18.0177\ kg*m^2$

问题（3）驱动电流能量补偿模型

在理想状态下，从 t_x 到 t_{x+1} 时间间隔内电机转动产生的补偿扭矩 $M_{电}$ 与制动器制动扭矩 $M_{制}$ 一起产生的矢量和 $M_{总}$，涉及到基本公式如下：

（1）将驱动电流转化为扭矩： $i_{(t)}=kM;\ \therefore M=\frac{i_{(t)}}{k}$

所产生的功率为 $\frac{i_{(t)}}{k}*\omega_{(t)}$

所产生的能量为 $\frac{i_{(t)}}{k}*\omega_{(t)}*\Delta t$

在理想状态下建立离散模型一：

从 t_x 到 t_{x+1} 时间间隔内内的角动量定律可得：

$$M_{总}\left(t_{x+1}-t_x\right)=J_{机}\left[\omega\left(t_{x+1}\right)-\omega\left(t_x\right)\right] \tag{3.1}$$

$$\int_{t_x}^{t_{x+1}}\frac{i\ (t)}{1.5}\omega(t)dt=\Delta E\ \left[\omega\left(t_x\right),\omega\left(t_{x+1}\right)\right] \tag{3.2}$$

（x=0， 1， 2， 3， …， n-1，）

电惯量是在某一时间间隔内的等效惯量与机械惯量之差，所以由此我们可以根据等效惯量与 t_x 时刻到 t_{x+1} 时刻内机械惯量之间的差值来计算所需要补偿的电惯量，t_x **时刻到** t_{x+1} **时刻，实际消耗能量与机械消耗能量之差为** ΔE:

$\Delta E[\omega\left(t_x\right),\omega\left(t_{x+1}\right)]=$

$$\frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_{x+1})-$$

$$\frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_x)-$$

$$[\frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_{x+1})-$$

$$\frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_x)]$$

（3.3）

(x=0，1，2，3，…，n-1)

对（3.2）（3.3）式简化：得

驱动电流能量补偿模型

$$i(t)=1.5\frac{M_{差}}{J_{机}}\left(J_{等}-J_{机}\right) \quad (3.4)$$

那么由（3. 2）(3.4)式组成驱动电流能量补偿模型二

在从t_x到t_{x+1}时间间隔内的扭矩总和为：

$$M_{差}=M_{制}+M_{电}=M_{制}+\frac{i(t)}{1.5} \quad (3.5)$$

将（3.5）代入（3.4）中可得建立模型三：

$$i(t)=1.5\frac{M_{制}-\frac{i(t)}{1.5}}{J_{机}}\left(J_{等}-J_{机}\right)=\frac{1.5M_{制}\left(\frac{J_{等}}{J_{机}}-1\right)}{\frac{J_{等}}{J_{机}}} \quad (3.6)$$

为求$M_{差}$根据角动量守恒和能量守恒定律建立模型四：

在理想状态下从t_x到t_{x+1}时间间隔内电机转动产生的补偿扭矩与飞轮组和主轴之间垂直于轴心的离心力 F 产生的力矩平衡，

所以由角动量守恒定律得$-mFR=m\frac{i(t)}{1.5}$

在t_x到t_{x+1}时间间隔内的角动量总和为：

$M_{总}=M_{制}+M_{电}=mFR+m\frac{f(t)}{1.6}=0$，

即$-FR+\frac{f(t)}{1.6}=0$

电机补偿的能量

$$\int_{t_x}^{t_{x+1}}[-FR+\frac{f(t)}{1.6}]dt=J_{机}\omega(t_{x+1})-J_{机}\omega(t_x) \tag{3.7}$$

两边求导得

$$-FR+\frac{f_t}{1.6}=J_{机}\omega'(t) \tag{3.8}$$

$$\Delta E[\omega(t_x),\omega(t_{x+1})]=\int_{t_x}^{t_{x+1}}\frac{f(t)}{1.6}\omega(t)\,dt \tag{3.9}$$

由（3.8）（3.9）得:

$$FR=\frac{\Delta E[\omega(t_x),\omega(t_{x+1})]-\frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_{x+1})+\frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_x)}{\int_{t_x}^{t_{x+1}}\omega(t)\,dt} \tag{3.10}$$

$$M_{制}=FR \tag{3.11}$$

问题（3）的求解与结果

求 FR：由问题一和问题二求解出的答案作为已知条件如下:

$V_{初}=50km/h=\frac{125}{9}m/s$　　$V_{末}=0$ 由此可得加速度 $a=-\frac{25}{9}m/s^2$

$V(t)=\omega(t)R$　　$\omega_{t_x}=\omega_{初}=\frac{48.5625rad}{s}$　　$\omega(t_{x+1})=0$

$$V(t) = V_{初} + at \qquad \omega(t)=\frac{V_{初}+at}{R}=48.56-9.71t$$

$$\Delta E[\omega(t_x),\omega(t_{x+1})] = -14149.8984J$$

将数据代入(3.10)可得：FR=271.9080N*m

由(3.4)何(3.5)模型求解结果为：i(t)=174.8883A

（四）能量误差评价模型

1）路试时制动器所消耗的动能：

$$\frac{1}{2}mv_{初}^2 - \frac{1}{2}mv_{末}^2$$

2）试验测试时制动器所消耗的能量：

$$\frac{1}{2}J_{机}\omega_{初}^2 - \frac{1}{2}J_{机}\omega_{末}^2 + \sum_{i=0}^{n}(M_i * \Delta t_i * \omega_i)$$

3） 能量误差：

$$W = \frac{1}{2}mv_{初}^2 - \frac{1}{2}mv_{末}^2 - \frac{1}{2}J_{机}\omega_{末}^2 + \frac{1}{2}J_{机}\omega_{末}^2 - \sum_{i=1}^{n}M_i\Delta t_i\omega_i$$

上式即为能量误差的数学评价模型，上式中的$M(i)$表示的是仅由驱动电流产生的扭矩。

由题意得

$$\frac{1}{2}J_{机}\omega_{初}^2 - \frac{1}{2}J_{机}\omega_{末}^2 + \sum_{i=0}^{n}(M_i * \Delta t_i * \omega_i) = \sum_{i=1}^{n}N_i\Delta t_i\omega_i$$

下面我们代入具体数据进行计算，然后给出评价结果。

$$\frac{1}{2}mv_{初}^2 = \frac{1}{2}J_{等}\omega_{初}^2; \qquad \frac{1}{2}mv_{末}^2 = \frac{1}{2}J_{等}\omega_{末}^2;$$

由题中所给条件，主轴初转速为 514 转/分钟，末转速为 257 转/分钟

$$\therefore \omega_{初}=\frac{514}{60}\times 2\pi=53.826\mathrm{rad/s}\ ，$$

$$\omega_{末}=\frac{257}{60}\times 2\pi=26.913\mathrm{rad/s}\ ；$$

$\Delta t_i=10\mathrm{ms}=0.01\mathrm{s}$，$N_i$、$\omega_i$的数值见附表，利用 MATLAB 软件编程对求和

$\sum_{i=1}^{n} N_i\,\Delta t_i\,\omega_i$，得$\sum_{i=1}^{n} N_i\,\Delta t_i\,\omega_i=49266.95\mathrm{J}$

又$\because J_{等}=48\mathrm{Kg}\cdot\mathrm{m}^2$，$J_{机}=35\mathrm{Kg}\cdot\mathrm{m}^2$

将上述数据代入能量误差函数中，解得$W=2883.3390\mathrm{J}$。

相对误差$\eta=\frac{W}{\sum_{i=1}^{n} N_i\Delta t_i\omega_i}*100\%=5.85\%$

根据η的大小，指定下表的评价标准

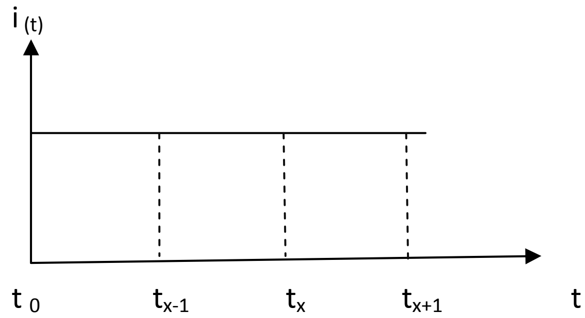
η的范围	控制方法的优劣程度
$0\%\le\eta<1\%$	极好
$1\%\le\eta<3\%$	好
$3\%\le\eta<10\%$	一般
$\eta>10\%$	很差

由上述误差值可见，该方法的优点是能够给出具体数据，而且计算方法较为简单，不足之处在于由此控制方法得到的数据所计算出的能量误差函数误差较大。

通过计算相对误差η=5.85%，所以控制方法一般。

（五）驱动电流控制制动模型

1、能量平均补偿模型：



建立此模型所运用的是方法 1：能量平均补偿法

$$\int_{t_x}^{t_{x+1}}\left[-FR+\frac{i(t)}{1.5}\right]dt = J_{机}\omega(t_{x+1}) - J_{机}\omega(t_x)$$

$$\Delta E[\omega(t_x),\omega(t_{x+1})]$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_{x+1}) -$$

$$\frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_x) -$$

$$[\frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_{x+1}) -$$

$$\frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_x)]$$

x=0，1，2，3，…，n-1

对上式两边求导可得：

$$-FR+\frac{i_t}{1.5}=J_{机}\omega'(t)$$

对于方程两边同时乘上$\omega(t)$可得

$$\therefore\ -FR\omega(t)+\frac{i(t)}{1.5}\omega(t)=J_{机}\omega(t)\ \omega'(t)$$

再积分得，$-FR\int_{t}^{t+\Delta t}\omega(t)dt+\int_{t}^{t+\Delta t}\frac{i(t)}{1.5}\omega(t)dt=\frac{1}{2}J_{机}\omega^{2}(t+\Delta t)-\frac{1}{2}J_{机}\omega^{2}(t)$

$$FR=\frac{\frac{1}{2}J_{机}\omega^{2}(t_{x+1})-\frac{1}{2}J_{机}\omega^{2}(t_{x})-J_{机}\omega^{2}(t_{x-1})+J_{机}\omega^{2}(t_{x})}{\int_{t_x}^{t_{x+1}}\omega(t)dt}$$

在$[t_x, t_{x+1}]$时间间隔内能量损耗的为

$\Delta E[\omega(t_x), \omega(t_{x+1})]$

可以根据观测到电机平均补偿能量产生的瞬时转速来确定离心力 F 产生的扭矩，因此在匀减速运动中，此扭矩是一个确定的常数。

在$(t-\Delta t, t)$时刻，由此还可以观测到总扭矩$M_{总}(t-\Delta t)$的大小，则电流产生的扭矩 $\frac{i(t-\Delta t)}{1.5}=M_{总}(t-\Delta t)-FR$

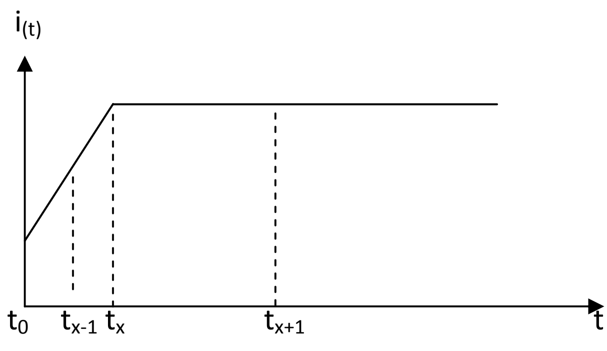
即 $i(t-\Delta t)=1.5[M_{总}(t-\Delta t)-FR]$

在平均补偿电流时，下一时刻电流值就等于前一时刻电流值，即

$$i(t)=i(t-\Delta t)$$

2、实际状态下的递增渐稳能量补偿模型

如下图所示，驱动电流达到某一值附近后，电流补偿量是波动的。



电流补偿能量的方式是在（t_x, t_{x+1}）时间内实际补偿的能量$\Delta E'$应该是（t_x, t_{x+1}）时间间隔内理论上需要补偿的能量ΔE_1和（t_x, t_{x+1}）时间段内需要修正的能量ΔE_2之和，即

$$\Delta E' = \Delta E_1 + \Delta E_2$$

由（3.3）得，

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_{x-1}) - \frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_x) - [\frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_{x-1}) - \frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_x)]$$

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_x) - \frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_0) - \left[\frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_x) - \frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_0)\right]$$

$$+\sum_{x=1}^{x}\omega(t_x)\Delta t_x$$

对于ΔE_1的计算，可以通过观测t_{x-1}和t_x时刻的瞬时转速，在给定$J_{等}$和$J_{机}$的条件下，计算出ΔE_1的值。

t_x时刻的瞬时扭矩 $M(t_x)$是一个可观测的量，可由

$$FR = \frac{\frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_0)+\frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_x)}{\int_{t_0}^{t_x}\omega(t)\,dt}$$

在已知条件$J_{等}$和$J_{机}$，可以根据观测t_0，t_x**时刻**的瞬时转速可以计算出FR的值，从而可以根据公式$\frac{I(t_x)}{1.5} = M(t_x) - FR$计算出电流产生的扭矩，最后可得$\Delta E_2$的值。

$$\Delta E' = \Delta E_1 + \Delta E_2$$

因此可以确定$\Delta E'$的值。

在（t_x, t_{x+1}）时间间隔内对驱动电流产生的扭矩$\frac{i(t)}{1.5}$进行积分，

可得$\Delta E' = \int_{t_x}^{t_{x+1}} \omega(t)\,dt$

依据此式可以算出（t_x, t_{x+1}）时间间隔内的驱动电流大小。

在理想状态下可以得到在(t_0, t)时刻内路试时所消耗的能量为：

$$\frac{1}{2}mv_{初}^2 - \frac{1}{2}mv_{末}^2$$

由$i(t)$所补偿的能量为：

$$\int_{t_x}^{t_{x+1}} \omega(t)\,dt$$

由此建立的模型函数 ：$\Delta G = \frac{1}{2}mV_{初}^2 - \frac{1}{2}mV_{末}^2 - \int_{t_x}^{t_{x+1}} \omega(t)\,dt$

此模型函数的数值理论上约等于 0。

在理想状态下驱动电流$i(t)$是一个常数，因此在理论上我们所观测到的瞬时扭矩$M(t)$也是一个常数，根据式$M(t) = \frac{i(t)}{1.5}$，我们可以得出结论，在前一时间段内观测到的瞬时扭矩$M(t-\Delta t)$数值上，本时间段的电流值

$$i_{(t)} = 1.5M(t-\Delta t)$$

优点：1. 能根据损失能量的多少随时来补充来补充能量，确保了每时每刻的能量的一致性

2. 方法简单，原理清晰，便于理解与应用。

缺点：1. 需要测量大量数据，花费时间较多，不利于提高生产效率；

2. 其所产生的累积误差大，容易给车辆带来安全隐患；

3. 调整电流过于频繁，机器难以控制；

4.调整电流较小，难以实现。

（六）驱动电流控制制动改进模型

将时间分割为 n 个断点，使其构成等比数列，即 2，2^2，…，2^n…

所以$a^n = 2^n$;

由模型五可知： $\Delta E_1 = \frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_{x-1}) - \frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_x) - [\frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_{x-1}) - \frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_x)]$

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_x) - \frac{1}{2}J_{等}\omega^2(t_0) - \left[\frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_x) - \frac{1}{2}J_{机}\omega^2(t_0)\right]$$

$$+\sum_{x=1}^{x}\omega(t_x)\Delta t_x$$

$$\Delta E' = \Delta E_1 + \Delta E_2$$

计算可知：

$i_{(t)} = 1.5M(t - 2^t)$

经过改进后减少了测量数据，大大的节约了测量时间，电流值变化较大易控制，电流补偿能够迅速达到要求值。但它所存在的问题是对于任何时间 t，能量的统一性差。

7、模型的推广

从此题的模型中我们可以看出汽车制动器试验台的控制方法的关键就是对电动机补偿电流的控制方法，文中我们分别给出了三种不同的方法，汽车制造商可根据自己的实际问题去选择，以便更好的解决汽车制动的问题，从而减少车祸的发生。

参考文献

[1]上海交大物理教研室，大学物理学,上海：交通大学出版社，2006 年 1 月
[2] 林雪松等，MATLAB7.0 应用集锦，北京：机械工业出版社，2005 年

[3] 吴建国，数学建模，北京：中国水利水电出版社，2005。