

## 空洞探测

邹建光, 刘丹娟, 曾德刚  
指导老师: 罗文华 胡星航

(岳阳师范学院, 岳阳 414006)

**编者按:** 本文用排除法求解, 给出两个方案, 方案一以未通过空洞的波源与接收器连线为依据, 方案二定义一种几何平均值为依据, 并逐次计算, 简单可行, 有启发意义

**摘要:** 本文给出了两个方案: 方案一基于对数据的分析, 采用连线方法, 用较小的计算量找出了空洞的位置及洞径. 方案二通过对洞径求几何平均值确定空洞的位置

### 1 问题的提出(略)

### 2 基本假设

1. 假设对弹性波传播时间的测量值存在测量误差
2. 假设问题给出的所有测量数据均为可供分析用的可靠数据, 即除测量误差外, 不存在错误数据
3. 若某路径上弹性波传播时间的实际测量值与该路径上无空洞时弹性波传播时间的理论计算值之差在测量误差范围内, 则该路径上无空洞分布

### 3 符号说明

$L_{i,j}$ —— $PQ_j$  或  $RS_j$  路径的长度;  $\alpha_{i,j}$ —— $PQ_j$  连线上测得的空洞的总长度;  $\beta_{i,j}$ —— $RS_j$  连线上测得的空洞的总长度;  $A_{m,n}$ ——36 个方格区域中的  $m,n$  区 (见图 2);  $d_{m,n}$ ——方块  $A_{m,n}$  中的空洞的洞径;  $\alpha_{i,j}^{(m,n)}$ ——连接  $P_i, Q_j$  两点且通过方格  $A_{m,n}$  的波束线上的空洞总长度;  $\beta_{i,j}^{(m,n)}$ ——连接  $R_i, S_j$  两点且通过方格  $A_{m,n}$  的波束线上的空洞总长度  $i, j = 1, \dots, 7; m, n = 1, \dots, 6$

### 4 对测量数据的初步分析

已知均匀平板的尺寸为 240(米)  $\times$  240(米), 弹性波在介质和空气中的传播速度分别为 2880(米/秒) 和 320(米/秒), 如果介质中无空洞, 则弹性波从  $P_i$  到  $Q_i$  或从  $R_i$  到  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) 的传播时间应为  $t = 240(\text{米}) \div 2880(\text{米/秒}) = 0.0833(\text{秒})$

通过对表中给出的测量时间的分析发现, 弹性波从  $P_i$  到  $Q_i$  或从  $R_i$  到  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) 的测量时间从  $t_{1,7} = 0.0583(\text{秒})$  到  $t_{7,7} = 0.1024(\text{秒})$  不等, 与理论计算值 0.0833 秒不符, 最大偏差为:  $t = 0.0833(\text{秒}) - 0.0583(\text{秒}) = 0.025(\text{秒})$

**结论 1** 显然, 实际测量值不应小于弹性波在纯介质中传播时的理论计算值, 故根据基本假设 1、2, 此  $t$  应视为弹性波传播时间的测量值的最大误差

结论 2 以  $t$  乘以弹性波在空气中的传播速度, 得  $320 \times t = 8$  (米). 可见, 由于测量误差的限制, 只能探测到沿传播方向上洞径大于 8 米的空洞

结论 3 根据上述数据分析及假设 3 可知, 所有  $PQ_i$  或  $RS_i$  连线上均无空洞分布, 空洞仅可能分布于由诸  $PQ_i$  连线及  $RS_i$  连线所划分的 36 个方格区域中

## 5 空洞位置的确定

### 方案一:

仔细分析测量时间数据, 发现有一特征: 数据并不密集变化, 即  $t_{i,j}$  和  $\tau_{i,j}$  不存在从 0.1024 秒到 0.1768 秒范围内的测量值 因  $0.1402(\text{秒}) - 0.0833(\text{秒}) \leq t$ , 故可认为凡是传播时间不大于 0.1042 秒的弹性波均在无空洞的路径上传播 在平板上将此类  $t_{i,j}$  和  $\tau_{i,j}$  对应的收发点用直线连接, 得到图 1.

依  $PQ_i$  和  $RS_i$  连线 ( $i=1, 2, \dots, 7$ ) 将平板划分为 36 个方格区域  $A_{mn}$  ( $m, n=1, \dots, 6$ ). 为判断各  $A_{mn}$  区域是否有空洞存在, 根据基本假设 3, 并考虑到前述的结论 2, 提出如下判断准则: 图 1 中凡有 1 条以上连线通过的方块区域均无空洞存在 据此可知, 仅有 8 个方格区域可能存在空洞

下面估算各空洞的大小 根据弹性波从  $P_i$  到  $Q_i$  的传播速度, 可写出下列计算弹性波传播时间的方程:

$$\frac{L_{i,j} - \alpha_{i,j}}{2880} + \frac{\alpha_{i,j}}{320} = t_{i,j} \quad (1)$$

$$\frac{L_{i,j} - \beta_{i,j}}{2880} + \frac{\beta_{i,j}}{320} = \tau_{i,j} \quad (2)$$

$$\text{式中} \quad L_{i,j} = 40 \sqrt{(j-i)^2 + 6^2} \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, 7) \quad (3)$$

将方程 (2) 分别应用于直线  $RS_6$  和  $RS_5$ :

$$\begin{aligned} RS_6 \text{ 直线: } \beta_{5,6} &= (\tau_{5,6} - \frac{L_{5,6}}{2880}) \times 360 \\ &= (0.1874 - 0.0844) \times 360 \\ &= 37.7(\text{米}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RS_5 \text{ 直线: } \beta_{6,5} &= (\tau_{6,5} - \frac{L_{6,5}}{2880}) \times 360 \\ &= 43.7(\text{米}) \end{aligned}$$

即直线  $RS_6$  或  $RS_5$  通过的区域的空洞总长约为 40 米左右, 由图 1 及前述判断准则知, 除  $A_{25}$  以外,  $A_{15}, A_{35}, A_{45}, A_{55}, A_{65}$  均有连线通过, 可见仅在方格  $A_{25}$  中存在空洞, 洞径  $d_{25}$  约为 40 米, 同理可推出  $d_{53}$  约为 40 米,  $d_{44}$  约为 36 米

类似地, 设  $PQ_j$  连线或  $RS_j$  连线 ( $i=j$ ) 通过区域  $A_{mn}$ , 且测得  $A_{mn}$  的洞径为  $d_{mn}$ , 则有:

$$RS_4 \text{ 直线与 } RS_5 \text{ 直线: } d_{34} + d_{44} = \frac{87+87}{2} \quad (4)$$

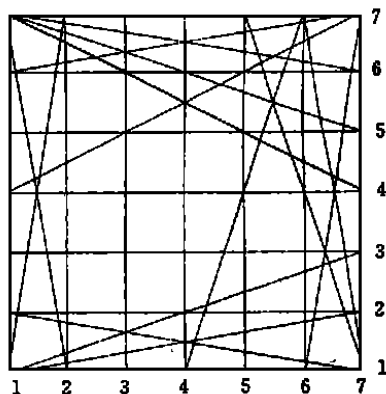


图 1

$$P_2Q_3 \text{ 直线与 } P_3Q_2 \text{ 直线: } d_{22} + d_{23} + d_{25} = \frac{128+118}{2} \quad (5)$$

$$P_3Q_4 \text{ 直线与 } P_4Q_3 \text{ 直线: } d_{32} + d_{33} + d_{34} = \frac{119+115}{2} \quad (6)$$

$$R_2S_3 \text{ 直线与 } R_3S_2 \text{ 直线: } d_{22} + d_{32} = \frac{72+85}{2} \quad (7)$$

$$P_1Q_7 \text{ 直线与 } R_1S_7 \text{ 直线: } d_{22} + d_{33} + d_{44} = \frac{161+163}{2 \times \sqrt{2}} \quad (8)$$

方程式(8)右端除以 $\sqrt{2}$ 是考虑到 $P_1Q_7$ 直线与 $R_1S_7$ 直线均以对角线方式通过方格区域

解方程组(4)一(8)可得 $A_{23}$ 、 $A_{32}$ 、 $A_{23}$ 、 $A_{33}$ 和 $A_{34}$ 的洞径均在40(米)左右 计算结果中出现 $d_{mn}$ 大于方格线度的情况应归结于测量误差, 据此可认定上述8个区域中均存在空洞, 如图2中阴影区域所示

### 方案二:

建立一个6行×6列的方阵 $A$ , 其元素为 $a_{mn}$ , 为使 $a_{mn}$ 约比例于所在区域中空洞的洞径, 定义 $a_{mn}$ 的值为:

$$a_{mn} = \left[ \frac{1}{z_{i,j}} \alpha_{i,j}^{(mn)} \cdot \frac{1}{z_{l,k}} \beta_{l,k}^{(mn)} \right]^{\frac{1}{h}} \quad (9)$$

式中 $h$ 为各 $\alpha_{i,j}^{(mn)}$ 和 $\beta_{l,k}^{(mn)}$ 的个数之和,  $z_{i,j}$ 为波束线 $ij$ 上可能具有空洞的区域的个数, 按此定义, 各 $a_{mn}$ 为0的区域对应于无空洞的区域

$a_{mn}$ 的数值可依据下述方式分步计算:

1. 首先计算相邻波束线 $PQ_j$ 和 $R_kS_l$ ( $i-j = \pm 1, k-l = \pm 1$ )上的空洞总长对 $a_{mn}$ 的平均贡献值(几何平均值), 以 $a_{mn}^{(1)}$ 表示, 此时取 $z_{i,j} = 6$ , 得计算通式为:

$$a_{mn}^{(1)} = \frac{1}{6} (\alpha_{n,m+1} \cdot \alpha_{n+1,m} \cdot \beta_{n+1,n} \cdot \beta_{n,n+1})^{\frac{1}{4}} \quad (10)$$

计算表明, 经取整后的矩阵为:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 11 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 16 & 20 & 17 & 11 & 0 \\ 0 & 16 & 20 & 17 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见周边的小方格内无空洞, 空洞仅可能分布于中间的16个小方格中

2. 计算次相邻波束线 $PQ_j$ 和 $R_kS_l$ ( $i-j = \pm 2, k-l = \pm 2$ )上的空洞总长对 $a_{mn}$ 的平均贡献值, 以 $a_{mn}^{(2)}$ 表示 考虑到1中的结论及方程(9), 实际只须计算对应于中间的16个方格的 $a_{mn}^{(2)}$ , 故取 $z_{i,j} = 4$ , 得计算通式为:

$$= \frac{1}{4} (\alpha_{n,m+2} \cdot \alpha_{n+1,m-1} \cdot \beta_{n+2,n} \cdot \beta_{n+1,n-1})^{\frac{1}{4}} \quad (m = 2, 3, n = 2, 3)$$

$A_{16}$	$A_{26}$	$A_{36}$	$A_{46}$	$A_{56}$	$A_{66}$
$A_{15}$	$A_{25}$	$A_{35}$	$A_{45}$	$A_{55}$	$A_{65}$
$A_{14}$	$A_{24}$	$A_{34}$	$A_{44}$	$A_{54}$	$A_{64}$
$A_{13}$	$A_{23}$	$A_{33}$	$A_{43}$	$A_{53}$	$A_{63}$
$A_{12}$	$A_{22}$	$A_{32}$	$A_{42}$	$A_{52}$	$A_{62}$
$A_{11}$	$A_{21}$	$A_{31}$	$A_{41}$	$A_{51}$	$A_{61}$
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7

图2

$$a_{mn}^{(2)} = \frac{1}{4} (\alpha_{n,m+2} \cdot \alpha_{n+1,m-1} \cdot \beta_{n-1,n+1} \cdot \beta_{n+2,n})^{\frac{1}{4}} \quad (m = 4, 5, n = 2, 3)$$

余者类推 计算可得:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 17 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 28 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 26 & 28 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 依同法可计算出波束线  $PQ_j$  和  $RS_l (i-j = \pm 3, k-l = \pm 3)$  上的空洞总长对  $a_{mn}$  的平均贡献值  $a_{mn}^{(3)}$ , 得到矩阵:

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 17 & 9 & 0 \\ 0 & 13 & 16 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 19 & 15 & 14 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对  $A^{(4)}, A^{(5)}, A^{(6)}$  的计算可依法施行, 此处从略

4 矩阵  $A$  各元素的值可依下式确定:

$$a_{mn} = \left( \sum_{i=1}^6 a_{mn}^{(i)} \right)^{\frac{1}{6}}$$

由此得矩阵  $A$  为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 25 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 18 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上述矩阵中仅有 8 个元素不为零, 表明这些区域中有空洞存在, 各非零元素对应的空洞位置与图 2 中的阴影区域一一对应

## 6 对减少波源和接受器问题的讨论

有两点理由, 说明只根据由  $P_i$  发出的弹性波到达  $Q_j$  的时间  $t_{i,j} (i, j = 1, \dots, 7)$  是不能确定空洞的位置的:

理由 1: 如果存在平行于  $AB$  连线方向的若干个空洞, 其总长接近 240 米, 且空洞的洞径在沿垂直于  $AB$  的方向上接近相等, 则因这些洞引起的、由各  $P_i$  发出的弹性波到达所对应接受器的时间延迟都近似相同, 此时便不能确定空洞存在的上下位置

理由 2: 过  $P_2, P_3, P_4$  分别作  $P_1Q_7, P_2Q_7, P_3Q_7$  连线的垂线, 高分别为  $h_1, h_2, h_3$ , 如图 3

$$h_1 = 40 \times \sin(\pi/4) = 28.3 \text{ (米)}$$

$$h_2 = 40 \times \sin Q_7 P_2 P_3$$

$$h_3 = 40 \times \sin Q_7 P_3 P_4$$

因  $Q_7 P_3 P_4 > Q_7 P_2 P_3 > \frac{\pi}{4}$ , 所以  $h_3 > h_2 > h_1 > 28 \text{ (米)}$ . 同理有  $h_3 > h_4 > h_5 > 28 \text{ (米)}$ , 即在波源附近存在直径大于 28 米的空间区域, 这些空间区域是仪器的精度可以探测到但却因减少波源和接受器的个数而使波束线无法达到的死区, 如在这些区域中有空洞存在, 则将被漏测

由对称性分析, 在接受器附近也存在类似的情况

在  $PQ_1$  直线和  $P_7 Q_7$  直线中点附近 20 米的地方, 也是仪器测量的死区, 如果存在空洞, 也无法探测到, 所以仅靠纵向探测装置是不行的

要想保证确定空洞的位置, 可分别在  $R_1 R_2$  的中点,  $R_4$  点和  $R_6 R_7$  的中点各设置 1 个波源,  $CD$  边对等地安放了 3 个接受器, 由作图法可知, 如此既可解决理由 1 中提出的困难, 又能消除  $AB$  边和  $CD$  边附近的死区, 按此设置使波源和接受器减少 4 对

## 7 对模型的评价和改进

本文的方案 1 采用连线方法, 将空洞可能存在的区域用图标示出来, 然后通过简单计算确定空洞的位置及近似的洞径, 模型直观, 计算简单

方案 2 先将任一波束线上测得的空洞总长平均分配给所经过的各方格区域, 而后对每一方格区域所分配的诸平均洞长再求几何平均值, 作为空洞存在与否的判据, 所依赖的假设少, 结果合理可信

但两方案均依赖于平板的分区, 若空洞的分布跨越多个方格区域, 则应寻求更为普遍的模式与算法

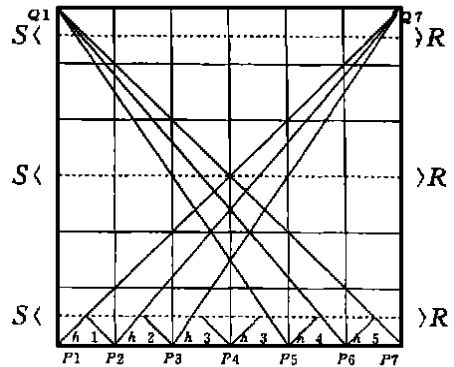


图 3

## Exploring Cavity

ZOU Jian-guang, LU Dan-juan, ZENG De-gang

(Yueyang Normal University, Yueyang 414006)

**Abstract** Two schemes were proposed in this paper. The method of connecting two points with straight line was adopted in the first scheme based on data analysis, the position of cavities being found with smaller calculation amount. By calculating geometrical average value of cavity size, the position of cavities was found in the second scheme.