第 29 卷第 1 期　　数学的实践与认识　　Vol. 29 No. 1
1999 年 1 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan., 1999

多旅行商路线的几个问题*

俞文鮆

(上海华东理工大学应用数学研究所 200237)

摘　要　本文对 98B 题 (全国大学生数学建模竞赛) 的几个较为深入的问题进行讨论，包括：最小的 Hamilton 回路与最优旅行商路线的关系，目标函数的处理，最小组数问题. 特别，对于 98B 题第三小题，22 组是否为最小组数，我们给出了肯定的结论.

旅行商问题是运筹学中的一个典型问题，多旅行商问题是它的扩充，它可应用于车辆路线组织，作业调度等方面 [1]，全国大学生数学建模竞赛 98B 题正是这样一类问题. 一般来说，这类问题不存在好算法. 由于实际要求的不同，这类问题中的目标函数与约束条件又可以有多种形式，这样，结合具体问题的特殊性，进行较为深入的讨论，仍然是可能的.

本文对 98B 题的几个较为深入的问题进行讨论. 在 §1, 我们讨论无向图上最小 Hamilton 回路与最优旅行商路线的关系，指出二者何时相同、何时可能不相同的一些判断. 在 §2, 针对 98B 中的目标函数的处理，讨论如何将双目标化为单目标的问题，以及如何把点权化为边权的问题. 我们在 §3 讨论，在给定的时间下，如何确定最小组数的问题. 特别， 98B 题第三小题中，当给定时间限定为 6.4286(小时), 可断言 22 组是最小组数，也就是说， 21 组是不可行的，对此，我们在 §4 介绍了集合覆盖问题，在 §5 讨论了有关 98B 题第三小题的性质，最后在 §6 给出证明.

为节省篇幅，我们对 98B 题不再复述，因为在本期杂志的若干文章中均有叙述. 98B 题的图形亦略，但有关数据列在附录中，以保持本文的完整性.

§1　最小 Hamilton 回路与最优旅行商路线的关系

我们限于讨论无向图的情形.

给定一个连通图 $G=(V,E,w)$, 其中 V 为顶点集， E 为边集， w 为定义在 E 上的权 (非负). G 的一个 Hamilton 回路是顶点集上的一个循环排列 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\sigma_{n+1}$ $(\sigma_{n+1}=\sigma_1)$, 其中一切 $\sigma_i\sigma_{i+1}\in E$, $w(\sigma)$ 定义为 σ 上所有边权之和. 当 $w(\sigma)$ 达到最小， σ 称为最小 Hamilton 回路. G 的一个旅行商路线是顶点集 V 的可重复但不遗漏的一个循环排列，多旅行商路线则是顶点集 V 的可重复但总体上不遗漏的多个循环排列，其余有关概念类同于 Hamilton 回路.

对于 G 为完全图的情形，不难得到以下二个结论 [2].

结论 1　如果完全图 $G=(V,E,w)$ 的权不受限制，那么存在例子使得： G 的最小 Hamilton 回路不是 G 的最优旅行商路线.

结论 2　如果完全图 $G=(V,E,w)$ 的权满足三角形不等式：

$$\forall\, i,j,k\in V,\qquad w_{i,k}\le w_{i,j}+w_{j,k}, \tag{1.1}$$

那么 G 的最小 Hamilton 回路必是 G 的最优旅行商路线.

对于 G 为连通但不是完全图的情形，容易注意到： G 可能不存在 Hamilton 回路，这时也就不存在最小 Hamilton 回路；还可以想到： G 的最优旅行商路线可到完全图 G' 上去找，这个完全

* "优化理论与算法" 为国家自然科学基金资助项目.

图 $G'=(V,E',w')$, 其中边集 E' 包含 V 的一切点对，而 $w'_{i,j}$ 定义为 G 上顶点 i 与顶点 j 之间的距离 (最短路长度), 它必定满足三角形不等式.

结论 3 连通图 $G=(V,E,w)$ 所相应的完全图 $G'=(V,E',w')$ 的最小 Hamilton 回路 H' 必定给出 G 的最优旅行商路线，其中 H' 中的边用 G 中的最短路 (其二端点与该边的二端点相同) 来代替.

结论 3 具有直观解释，它可用反证法加以证明.

从 98B 题的竞赛答案来看，不少答卷提到上述结论 2 与结论 3, 但是在叙述结论 2 时，一些答卷未指明这一结论只适用于完全图，在叙述结论 3 时，一些答卷也未强调 G 与 G' 的差别. 这样，也就产生了一个疑问：结论 2 能否推广到非完全图呢？这时，相应于三角形不等式 (1.1) 的条件要变为：

对任 $(i,k)\in E$ 及从 i 至 k 的任一条路 P,

$$w_{i,k}\le\sum_{(j,l)\in P}w_{j,l}. \tag{1.2}$$

也就是说，对任 $(i,k)\in E$, $w_{i,k}$ 恰等于 $G=(V,E,w)$ 中顶点 i 与 k 之间的最短路长. 对于上述疑问的结论如下：

结论 4 有例子表明，即使 $G=(V,E,w)$ 满足 (1.2) 且存在 Hamilton 回路，但 G 的最小 Hamilton 回路不是 G 的最优旅行商路线.

证 如图 1, $G=(V,E,w)$, V 由 10 个顶点组成，而 E 由 13 条边组成，权 $w_{i,j}$ 分别标出在每一条边旁，其中 x 大于 1. 显然，对此图 G, (1.2) 是成立的. 图 G 有唯一的 Hamilton 回路 ABCDEFGHIJA, 其长度 (即最小的 Hamilton 回路长度) 为

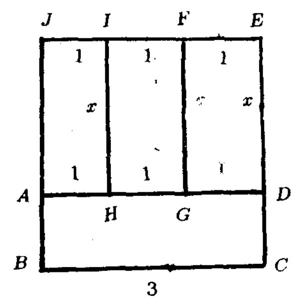

图 1

$$l_1=8+4x. \tag{1.3}$$

但图 G 的旅行商路线 ABAHGDCDEFIJA 的长度为

$$l_2=10+2x. \tag{1.4}$$

由于 $x>1$, 必有 $l_2<l_1$, 这样就得到了结论 4. 证毕

尚待研究的问题是，对满足 (1.2) 且存在 Hamilton 回路的图，再增加什么合理的条件，可保证 G 的最小 Hamilton 回路必是最优旅行商路线呢？

§2 关于目标函数的处理

在 98B 题第一小题中，要求设计三组 "总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线". 以 C_1,C_2,C_3 表示三组巡视路线的长度，上述要求可表示为如下双目标函数的优化：

$$\min(C_1+C_2+C_3).\qquad \min\left(\max_{1\le i\le 3}C_i-\min_{1\le i\le 3}C_i\right).$$

从问题的实际背景出发，可考虑替代为下列目标函数的优化：

$$\min\max_{1\le i\le 3}C_i. \tag{2.1}$$

它与上述双目标在含义上有一致的地方，但不尽相同.

在 98B 题第二小题中，容易确定最小组数为 4 (参见本文 §3). 在 98B 题中已将 35 个村编号为从 1 到 35, 现再将 17 个乡的字母编号依次改为从 36 至 52, 将县城编号为 53, 引入点权 (顶点上的权) 如下:

$$v_i = 35\,(1 \le i \le 35), \qquad v_i = 70\,(36 \le i \le 52), \qquad v_{53} = 0, \tag{2.2}$$

其中已将在村与乡的巡视时间依照汽车行驶速度 (35 公里 / 小时) 化成了公里数. 以 $G = (V, E, w)$ 表示 98B 题的图, 以 $G' = (V, E', w')$ 表示相应的完全图 (w' 表示任二点之间的距离), 以 H_1, H_2, H_3, H_4 表示 G' 上的 4 个旅行商路线, 其全体能覆盖 V, 且每个 H_i 均包含顶点 53(县城). 对 $i = 1, 2, 3, 4$, 令

$$C_i = \sum_{(j,k)\in H_i} w'_{j,k}, \qquad D_i = \sum_{j\in H_i} v_j.$$

类似于 (2.1), 对 98B 题第二小题, 可考虑 $G' = (V, E', w')$ 上下列目标函数的优化:

$$\min \max_{1\le i\le 4} (C_i + D_i). \tag{2.3}$$

但是, (2.3) 与 (2.1) 的区别是明显的, (2.1) 中的目标函数含有边权, 而 (2.3) 中的目标函数兼含边权与点权. 为了把 (2.3) 转换为与 (2.1) 相同的形式, 引入另一完全图 $G'' = (V, E', w'')$, 其中

$$\forall\,(j,k) \in E', \qquad w''_{j,k} = w'_{j,k} + \frac{1}{2}v_j + \frac{1}{2}v_k \tag{2.4}$$

易知, 边权 w'' 仍满足三角形不等式. 这样, 对 $i = 1, 2, 3, 4$, 令

$$C''_i = \sum_{(j,k)\in H_i} w''_{j,k},$$

利用 (2.4) 容易证明, 必成立 $C''_i = C_i + D_i$. 从而, 可以得到下列优化问题

$$\min \max_{1\le i\le 4} C''_i. \tag{2.5}$$

结论 5　$G' = (V, E', w')$ 上的优化问题 (2.3) 等价于 $G'' = (V, E', w'')$ 上的优化问题 (2.5), 其中权边 w'' 由 (2.4) 给出.

结论 5 的意义在于, G' 上的边权与点权都化成了 G'' 的边权, 从而使第二小题的问题与第一小题的问题 (2.1) 成为相同的形式 (只是组数不同), 它们可采用相同的近似算法来处理. 我们发现, 在 98B 题的个别答卷, 提到过把点权化为边权的思想, 但要把这一思想明确地形成一个结论, 还需联系到目标函数的具体形式, 以上讨论了单目标函数 $\max C_i$ 的情形, 对前述双目标的情形和下一节的最小组数问题, 讨论是类似的.

§3　最小组数问题

给定长度约束, 求解多旅行商路线的最小组数, 是一个有实际意义的重要问题. 98B 题中第二小题与第三小题均涉及这样的问题. 用 §2 中的记号, 它可以表示成如下形式. 给定一个连通图 $G = (V, E, w)$ (98B 题的相应数据见附录), 求相应的完全图 $G' = (V, E', w')$ 上多旅行商路线 H_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$, 使其全体能覆盖 V, 其每一个旅行商路线均含有顶点 53(县城), 且达到:

$$\min r, \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j\in H_i} v_j + \sum_{(j,l)\in H_i} w'_{j,l} \le L, \qquad (i = 1, 2, \cdots, r), \tag{3.2}$$

其中 v_j 为点权，L 为给定的长度上限.

一般来说，求解最小组数问题 (3.1)—(3.2)，或者说，要确定最小组数 r，包括二个方面，一方面，要构造 G' 的 r 个旅行商路线，满足相应的长度约束，另一方面，要证明 r 是组数的下界，即证明 $r-1$ 组是不可行的.

对 98B 第二小题来说，问题 (3.1)—(3.2) 中的长度上界 L 为 840 公里，相应的时间上界为 24 小时. 给出 4 组可行的旅行商路线是不困难的，多数答卷都能做到，但要证明 4 组是一个下界，不少答卷都做得不好，只有少数试卷给出了简洁的论证. 以下是一个这样的论证. 假如 3 组可行的旅行商路线能符合长度约束或相应的时间约束，由于从县城至所有点 (村或乡) 的距离的最大值为 $d=77.5$ (公里)，而 $2d$ 是 G 的多旅行商问题的一个简单下界，这样，由 (3.2) 可得:

$$3\cdot 840\geq\sum_{i=1}^{52}v_i+2d=69\times 35+155=2570,$$

便得矛盾.

对于一般的长度上界 L(相应的时间上界为 $T=L/35$)，最小组数问题 (3.1)—(3.2) 的解答会是相当困难的，计算量也会很大. 对 98B 第三小题来说，问题 (3.1)—(3.2) 中的长度上界 L 为 225 公里，它相当于时间上界 6.4286 小时. 很多答卷给出 23 组可行的旅行商路线，不少答卷给出 22 组可行的旅行商路线，但 22 组是否为最小组数呢？对此，未发现有一个答卷能够给出正确的论证. 当然，这与答卷时间有限也是有关的. 我们将在 §5 与 §6 中证明下列结论.

结论 6 当 $L=225$ 时，最小组数问题 (3.1)—(3.2) 具有下界 $r=22$.

§4 集合覆盖问题及其下界

为证明结论 6 做准备，我们在本节叙述集合覆盖问题的概念及关于下界的一个结论. 集合覆盖问题的提法如下:

给定集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个子集族 F，在 F 中寻找最小个数 (称最小覆盖数) 的子集族 $F'\subseteq F$，使得 N 的每一个元素至少属于 F' 中的一个子集.

在计算复杂性理论中，该问题是一个 NP 困难问题. 同时，对于一般情况，也很难得到什么结论. 为了得到有用的结论，我们对 N 与 F 的形式做出一些限制.

假设 1 对任何 $S\in F$，S 的子集亦属于 F.

假设 2 记 F_j 为子集族 F 中元素个数为 j 的那些子集组成的族，假设成立

$$F=F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4.$$

假设 3 设 $N=A\cup B$，记 $F_{j,l}$ 为子集族 F 中 A 元素个数为 j、B 元素个数为 l 的那些子集组成的族，假设成立

$$F_3=F_{3,0}\cup F_{2,1}\cup F_{1,2},\qquad F_4=F_{4,0}\cup F_{3,1}. \tag{4.1}$$

上述二个假设等价于

$$F_5=\emptyset,\qquad F_{0,3}=\emptyset,\qquad F_{2,2}=F_{1,3}=F_{0,4}=\emptyset.$$

这表明，比起 A 中的元素来说，B 中的元素的“权”较重，从而，F_3 中没有 3 元素皆属于 B 的三点子集，F_4 也有类似的性质.

结论 7 若 N 的子集族 F 满足假设 1-3，设 $|N|=n$，$|B|=b$，又 $F_{1,2}\cup F_{3,1}$ 的最大分离子集数为 q，则集合覆盖问题的最小覆盖数 r 满足:

$$r\geq\lceil(n+b-q)/4\rceil.$$

该结论的证明从略，有兴趣的读者可以自己研究.

该结论给出了最小覆盖数的一个下界，它特别适合于 $F_{1,2}$ 与 $F_{3,1}$ 所含子集个数较少的情形. 此外，在有关假设满足时，另有二个明显的下界 $\lceil n/4 \rceil$ 与 $\lceil b/2 \rceil$.

§5 合格组的一些性质

首先，简述一下 §2 中提到过的顶点编号. 顶点集 N 分为 A(村) 与 B(乡), 其中

$$A = \{1, 2, \cdots, 35\}, \qquad B = \{36, 37, \cdots, 52\}$$

与最小组数问题 (3.1)—(3.2) 相一致，根据 98B 第三小题的要求，我们引入下列定义.

定义 1 $N = A \cup B$ 的一个子集 S 称为合格组，如果

$$\sum_{j \in S} v_j + \mathrm{LTSP}(S \cup \{53\}) \le 225, \tag{5.1}$$

其中点权 v_i 由 (2.2) 给出， $\mathrm{LTSP}(\cdot)$ 表示这些点的旅行商路线的最优长度.

这样，每个合格组确定了一个可行的旅行商路线， 98B 题第三小题中的要求就是要确定寻找组数最少的合格组，使其全体能覆盖所有村与乡.

合格组的全体构成 N 的子集族 F. 如前，以 F_j 表点数为 j 的合格组的全体. 经过计算与分析，我们得到:

$$|F_1| = 52, \tag{5.2}$$

$$|F_2| = 795, \tag{5.3}$$

$$|F_3| = 1354, \tag{5.4}$$

$$|F_4| = 58, \tag{5.5}$$

$$|F_5| = 0, \tag{5.6}$$

现对上述诸式作简要的说明如下. (5.1) 右端 225(公里) 相当于时间上界 6.4286 小时，它恰是 $v_j + \mathrm{LTSP}(\{j, 53\})$ 对一切 j 的最大值，所以每一个点 (村或乡) 均是一个合格组，因此显然成立 (5.2). (5.3) 与 (5.4) 可通过穷举法算得. 为了较快地确定 F_4, 即确定一切 4 点合格组，可考虑 F_3 中哪些 3 点合格组可以扩充，例如，假如 3 点合格组 $\{i, j, k\}$ 能扩充为 4 点合格组，它至少应满足

$$\sum_{j \in S} v_j + \mathrm{LTSP}(S \cup \{53\}) \le 190,$$

即它至少有松弛量 35(公里), 相当于 1 小时. 同时，假如它扩充为 4 点合格组 $\{i, j, k, l\}$, 那么还应有 $\{i, j, l\} \in F_3$, $\{i, k, l\} \in F_3$, $\{j, k, l\} \in F_3$. 这样， 4 点合格组的候选者就少得多了，从而 F_4 可以较快地计算出来，便得 (5.5). 当然，以上 F_2, F_3, F_4 的计算都要借助于计算机来完成.

下面，我们证明 (5.6). 不然的话，设存在 5 点合格组 $S = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$. 由点权 (2.2) 及定义 1, S 中至多一个点为 B 的点 (乡). 假如 S 中确有一个点为 B 的点， S 中点权之和为 210, 于是对 $i = 1, 2, 3, 4, 5$, 有

$$w'(k_i, 53) \le \frac{1}{2}\mathrm{LTSP}(S \cup \{53\}) \le \frac{1}{2}(225 - 210) = 7.5, \tag{5.7}$$

其中 $w'(i,j)=w'_{i,j}$ 表示点 i 与点 j 之间的距离. 容易检验, 满足 (5.7) 的只有一个点 (点 1), 不可能有 5 个点, 便得矛盾. 假如 S 中所有点为 A 的点, S 中点权之和为 175, 于是对 $i=1,2,3,4,5$, 有

$$w'(k_i,53)\le\frac{1}{2}\mathrm{LTSP}(S\cup\{53\})\le\frac{1}{2}(225-175)=25. \tag{5.8}$$

同样, 对 $i,j=1,2,3,4,5$ $(i\neq j)$, 有

$$w'(k_i,k_j)\le\frac{1}{2}\mathrm{LTSP}(S\cup\{53\})\le 25. \tag{5.9}$$

容易检验, A 中点满足 (5.8) 的有 9 个, 其全体记为 $A^*=\{1,2,3,5,26,28,29,31,33\}$. 也容易检验, 只有 A^* 中的点 $k_i=1$, 存在 A^* 中其他四个点 k_j 能满足 (5.9). 但 (5.9) 要求这样的点 k_i 有 5 个, 所以亦得矛盾.

如前, 以 $F_{j,l}$ 表示 A 中点数为 j, B 中点数为 l 的合格组的全体. 用 (5.6) 的推理过程同样可证明

$$|F_{0,3}|=|F_{2,2}|=0, \tag{5.10}$$

从而更有 $F_{1,3}=F_{0,4}=\emptyset$. 由 (5.1) 所确定的合格组构成的子集族 F 满足假设 1, 是显然的. (5.6) 与 (5.11) 表明 F 满足假设 2—3. 根据计算, $F_{1,2}\cup F_{3,1}$ 包含下列 15 个合格组:

$$\begin{array}{lllll}
\{1,36,37\}, & \{1,36,38\}, & \{1,36,52\}, & \{1,37,38\}, & \{1,37,50\},\\
\{1,37,52\}, & \{1,38,50\}, & \{2,37,38\}, & \{2,38,39\}, & \{3,37,38\},\\
\{3,38,39\}, & \{29,50,52\}, & \{1,2,3,37\}, & \{1,2,3,38\}, & \{2,3,5,38\}.
\end{array}$$

由于上述 15 个合格组只涉及 11 个点, 而上述每个合格组为 3 点或 4 点, 所以 $F_{1,2}\cup F_{3,1}$ 至多有 3 个分离的合格组. 通过简单列举, 可知 $F_{1,2}\cup F_{3,1}$ 的最大分离合格组个数为

$$q=3. \tag{5.11}$$

§6 结论 6 的证明

由 $|N|=52$, $|b|=17$ 及 (5.11), 根据结论 7 可算得复盖 N 的最小组数的一个下界为 $\lceil(|N|+|B|-q)/4\rceil=\lceil 66/4\rceil=17$, 但它与结论 6 (22 组为下界) 相去甚远. 因此, 我们还要讨论子集族 F 的更多性质, 以发掘与利用覆盖 N 的合格组的结构.

以 $F_j(k)$ 表示 F_j 中含有点 k 的合格组的全体 (也是子集族), 类似地引入记号 $F_{j,l}(k)$. 对计算结果进行检验, 根据 $F_2(k)=\emptyset$ 等要求可以发现 N 的下列子集:

$$\begin{aligned}
B_1&=\{42,43,44\}, & A_1&=\{10,12,13,14,15,16\},\\
B_2&=\{41,45,46\}, & A_2&=\{8,9,11,17,18,19,22,24\}.
\end{aligned}$$

它们分别具有下列性质:

$$\begin{array}{llll}
\forall k\in B_1, & F_2(k)=\emptyset, & & \qquad (6.1)\\
\forall k\in A_1, & F_{1,1}(k)=\emptyset, & F_3(k)=\emptyset, & \qquad (6.2)\\
\forall k\in B_2, & F_{0,2}(k)=\emptyset, & F_3(k)=\emptyset, & \qquad (6.3)\\
\forall k\in A_2, & F_{1,2}(k)=F_{2,1}(k)=\emptyset, & F_{3,0}\neq\emptyset, \quad F_4(k)=\emptyset. & \qquad (6.4)
\end{array}$$

设 $T=\{S_1,S_2,\cdots,S_r\}$ 由 r 个合格组组成，它能覆盖点集 $N=A\cup B$. 由于满足假设 1, 可设不同合格组是互相分离的. 由性质 (6.1), T 必含有 3 个单点合格组，不妨设

$$S_1=\{42\},\qquad S_2=\{43\},\qquad S_3=\{44\}.$$

由性质 (6.2)—(6.3), 覆盖 $A_1\cup B_2$ 的必是两点合格组. 进一步，可以发现，二点均在 $A_1\cup B_2$ 中的二点合格组只有 4 个，更具体地说，有

$$F_2'=F_2\cap(A_1\cup B_2)^2=\big\{\{12,13\},\{13,14\},\{13,16\},\{15,16\}\big\}. \tag{6.5}$$

由 (6.5) 易知 F_2' 中分离的 2 点合格组至多有 2 个，因此只可能有以下三个情形:

情形 1 $|T\cap F_2'|=2$; **情形 2** $|T\cap F_2'|=1$; **情形 3** $|T\cap F_2'|=0$.

以情形 1 来分析，其它二情形的分析是类似的. 在情形 1, $T\cap F_2'$ 的二个 2 点合格组能覆盖 $A_1\cup B_2$ 中的 4 个点，T 必还有 5 个合格组覆盖 $A_1\cup B_2$ 的另外 5 个点. 由于 (6.2)-(6.3), 这 5 个合格组必定皆为 2 点合格组. 它们的全体亦覆盖 $A_1\cup B_2$ 之外的 5 个点 i_1,i_2,i_3,i_4,i_5, 且这 5 个点皆属于 A (即不能属于 B). 现不妨设覆盖 $A_1\cup B_2$ 的 7 个 2 点合格组为 $S_4,S_5,\cdots,S_{10}$, 且令

$$T_1=\{S_{11},S_{12},\cdots,S_r\}, \tag{6.6}$$
$$N_1=N\setminus(B_1\cup A_1\cup B_2\cup\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\}). \tag{6.7}$$

于是，T_1 覆盖 N_1. 经计算可检验如下性质: A_2 的任三点不能组成一个合格组，即

$$F_3\cap(A_2\times A_2\times A_2)=\emptyset. \tag{6.8}$$

由于 $|A_2|=8$, $A_2'=A_2\setminus\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\}$ 至少有 3 个点. 同时, (6.8) 保证这 3 个点至少属于二个合格组. 因此，不妨设 $i_6\in A_2'\cap S_{11}$, $i_7\in A_2'\cap S_{12}$. 由 (6.4), 可分以下情形:

情形 1.1 $|S_{11}|=|S_{12}|=3$; **情形 1.2** $|S_{11}|\le 2$ 或 $|S_{12}|\le 2$.

其实，情形 1.2 又可分成若干情形. 现只分析情形 1.1, 因其他情形亦类似. 分析的整个思路可参见图 2. 不妨设

$S_{11}=\{i_6,i_8,i_9\}\in F_{3,0}$, $S_{12}=\{i_7,i_{10},i_{11}\}\in F_{3,0}$.

接着 (6.6)—(6.7), 令

$T_2=T_1\setminus\{S_{11},S_{12}\}=\{S_{13},S_{14},\cdots,S_r\}$,

$N_2=N_1\setminus\{i_1,i_2,\cdots,i_{11}\}=A'\cup B'$,

其中 $A'\subset A$, $B'\subset B$. 实际上,

$A'=A\setminus(A_1\cup\{i_1,i_2,\cdots,i_{11}\})$,

$B'=B\setminus(B_1\cup B_2)$.

所以 $|A'|=35-17=18$,

$|B'|=17-6=11$,

$|N_2|=29$.

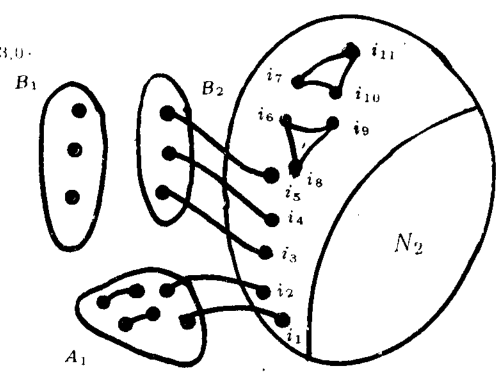

图 2

由于 T_2 覆盖 N_2, 根据结论 7 与 (5.10), 可得 T_2 中组数的下界如下:

$$r-12\ge\lceil(29+11-3)/4\rceil=\lceil 37/4\rceil=10.$$

所以 $r\ge 22$. 结论 6 证毕.

注 如果要校核上述证明中的计算是否正确，实际上不必要算出 F_2, F_3, F_4 的全部合格组 (见 (5.3)-(5.5)), 而只需校核对推理过程起作用的以下内容: (4.1), (5.11), (6.1)—(6.4) 以及 (6.8).

附 录

98B 题的图形所相应的图 $G=(V,E,w)$ 的有关数据如下，以备必要时可复算. $w(32,33)=19$ 不满足三角形不等式 (1.2)，该值被略去.

$w(53,1)=6$,	$w(53,2)=9.2$,	$w(53,38)=11.5$,	$w(53,48)=19.8$,
$w(53,50)=10.1$,	$w(53,52)=12.9$,	$w(1,36)=10.3$,	$w(1,37)=5.9$,
$w(1,38)=11.2$,	$w(2,3)=4.8$,	$w(2,5)=8.3$,	$w(3,38)=7.9$,
$w(3,39)=8.2$,	$w(4,8)=20.4$,	$w(4,39)=12.7$,	$w(5,6)=9.7$,
$w(5,39)=11.3$,	$w(5,48)=11.4$,	$w(6,7)=7.3$,	$w(6,47)=11.8$,
$w(6,48)=9.5$,	$w(7,39)=15.1$,	$w(7,49)=7.2$,	$w(7,47)=14.5$,
$w(8,40)=8$,	$w(9,40)=7.8$,	$w(9,41)=5.6$,	$w(10,41)=10.8$,
$w(11,40)=14.2$,	$w(11,42)=6.8$,	$w(11,45)=13.2$,	$w(12,41)=12.2$,
$w(12,42)=7.8$,	$w(12,43)=10.2$,	$w(13,14)=8.6$,	$w(13,42)=8.6$,
$w(13,44)=16.4$,	$w(13,45)=9.8$,	$w(14,15)=15$,	$w(14,43)=9.9$,
$w(15,44)=8.5$,	$w(16,17)=6.8$,	$w(16,44)=11.8$,	$w(17,22)=6.7$,
$w(17,46)=9.8$,	$w(18,44)=8.2$,	$w(18,45)=8.2$,	$w(18,46)=9.2$,
$w(19,20)=9.3$,	$w(19,45)=8.1$,	$w(19,46)=7.2$,	$w(20,21)=7.9$,
$w(20,25)=6.5$,	$w(20,47)=5.5$,	$w(21,23)=9.1$,	$w(21,25)=7.8$,
$w(21,46)=4.1$,	$w(22,23)=10$,	$w(22,46)=10.1$,	$w(23,24)=8.9$.
$w(23,49)=7.9$,	$w(24,27)=18.8$,	$w(24,49)=13.2$,	$w(25,48)=12$,
$w(25,49)=8.8$,	$w(26,27)=7.8$.	$w(26,49)=10.5$,	$w(26,50)=10.5$,
$w(27,28)=7.9$,	$w(28,50)=12.1$,	$w(28,51)=8.3$,	$w(29,50)=15.2$,
$w(29,51)=7.2$,	$w(29,52)=7.9$,	$w(30,32)=10.3$,	$w(30,51)=7.7$,
$w(31,32)=8.1$,	$w(31,33)=7.3$.	$w(31,52)=9.2$,	$w(32,35)=14.9$,
$w(33,35)=20.3$,	$w(33,36)=7.4$,	$w(34,35)=8.2$,	$w(34,36)=11.5$,
$w(34,37)=17.6$.	$w(36,37)=12.2$,	$w(36,52)=8.8$,	$w(37,38)=11$,
$w(44,45)=15.8$,	$w(48,49)=14.2$.		

参 考 文 献

[1] 杜端甫，运筹图论，北京航空航天大学出版社，北京，1994.

[2] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys, The Traveling Salesman Problem, Wileys, Chichester, 1995.

Some Problems on Multiple Traveling Salesman Routes

YU WEN-CI

(*East China University of Science and Technology, Shanghai* 200237)