最优捕鱼模型

刘国玲　　屈华波　　郑群英

(武汉汽车工业大学，武汉 630044)

指导教师：彭斯俊

编者按　本文利用微分方程建立了鱼群演变规律的模型. 根据题意作者作了些补充假设，并根据假设导出在持续捕获前提下，年捕鱼量的公式，并且确定出最佳捕捞努力量及最佳捕鱼量. 本文不足之处：建立的微分方程 (3) 只能适应一年的前 8 个月，在后 4 个月应是另一个方程.

摘　要　本文就渔场捕鱼策略问题建立了一个决策优化模型. 该模型既考虑了鱼群变化的年内连续性，又考虑到年间离散性，在保证“持续捕捞”的前提条件下，使渔获量达到最大.

在分析过程中，我们拓宽了鱼群“死亡率”的含义. 它包括“自然死亡率”和由于捕捞而引起的“死亡率”两个方面，我们把后者定义为“捕捞死亡率”，这种处理方法给我们解决实际问题带来了极大的方便.

依据群体指数衰减规律，我们提出了实现可持续捕获的条件，得到一个比较稳定的捕捞强度系数，并通过计算机模拟验证.

模型的重要结论是：达到年收获量最高的捕捞强度系数 F 为 17，收获量为 3.87×10^8 千克 / 年，渔业公司在 5 年内的最高总收获量为 1.59×10^9 千克.

1.　问题的假设

1. 本年产的卵孵化成活后在下年年初都成为 1 龄鱼，对于上年存活下来的 4 龄鱼仍视为 4 龄鱼，且忽略其体重的变化.

2. 捕捞不会对各龄鱼的自然死亡发生影响.

3. 不考虑实际环境的突变而导致鱼群死亡率的变化.

4. 忽略单个鱼的体重在一年中的增长，只考虑平均体重.

5. 在打捞过程中忽略其它鱼种的存在对打捞的影响.

6. 渔场内鱼的分布均匀，打捞量只与下网次数与鱼群总数有关，而与下网地点无关.

7. 渔场与外水域隔离，因此不会由于外水域的同种鱼迁移而导致渔场内该种鱼的数量发生改变.

2. 符号的约定

M : 自然死亡率；　　Z : 鱼群总死亡率；

q_i : 捕捞强度系数，(i=3,4), F 捕捞努力量；

$N_i(t)$: $(i = 1,2,3,4)$: 第 i 年龄组在时刻 t 的 1 鱼群数目；

L : 表示一年中后四月份死亡的 3 、 4 龄鱼占九月初该龄鱼数量上的百分比.

3. 问题的分析

一、鱼群的基本动态特征进行分析

由于我们已经假设该渔场不会有同种外来鱼的迁移补充，那么渔场内各年龄组鱼的总数目在一年内都是递减的．其减少的原因有二个：

1. 各年龄组鱼的自然死亡；

2. 由于捕捞所引起的“死亡”(捕捞引起鱼条数目的减少)．

在此基础上我们来分析鱼群数目动态变化的情况．

$$\frac{dN_i(t)}{dt}=-(q_iF+M)N_i(t),\qquad i=3,4 \tag{1}$$

$$\frac{dN_i(t)}{dt}=-M\cdot N_i(t),\qquad i=1,2 \tag{2}$$

其中 $q_3=0.42, q_4=1$，捕捞与自然死亡有一个相同的效果 — 使渔场的鱼群条数减少，因此从这方面讲捕捞强度系数又可称为“捕捞死亡率”，捕捞死亡率与自然死亡率之和称为总死亡率．

二、各龄鱼的条数在各年中的变化情况分析．

首先，我们可设在起始各年的年初各龄鱼的条数为 $N_1(0), N_2(0), N_3(0), N_4(0)$．则在该年的任何时刻 t, $N_1(t), N_2(t), N_3(t), N_4(t)$．满足微分方程 (1) 、 (2) 式，由此得到

$$\begin{aligned} N_1(t)&=N_1(0)e^{-M\frac{t}{12}}, & 0\le t\le 12,\\ N_2(t)&=N_2(0)e^{-M\frac{t}{12}}, & 0\le t\le 12, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} N_3(t)&=\begin{cases} N_3(0)e^{-(M+0.42F)t/12}, & 0\le t\le 8,\\ N_3(0)e^{-(M+0.42F8)/12}, & 8\le t\le 12, \end{cases}\\ N_4(t)&=\begin{cases} N_4(0)e^{-(M+F)t/12}, & 0\le t\le 8,\\ N_3(0)e^{-(M+8F)/12}, & 8\le t\le 12. \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

从以上各年龄组的鱼群数表达式可以看出，t 时刻某年龄组的鱼群数只与时间 t, 捕捞努力量 F, 自然死亡率 M 及各个初始值有关，其中会发生变化的只有 F, 因而我们可以控制捕捞努力量 F, 来确定一些有关捕鱼的策略，诸如最大渔获量问题，可持续捕捞问题．

再根据假设 2, 在年与年交接之处各年龄组鱼的数目和比重将发生突变，即 1 龄鱼变成 2 龄鱼、 2 龄鱼变成 3 、 3 龄鱼变成 4 龄鱼、幸存的 4 龄鱼仍旧为 4 龄鱼，每年中的 3 、 4 龄鱼在 9—12 月份产卵并孵化成 1 龄鱼．

3 、 4 龄鱼在 9—12 月份有一部分会在产卵前死亡，我们估计进入 9 月份以后有 88.3% 的 3 、 4 龄鱼产卵，其推理过程如下：

根据前面的符号约定， L 可表示成

$$\begin{aligned} L&=\frac{N_i(9)-N_i(12)}{N_i(9)}\times 100\%=1-\frac{N_i(0)\cdot e^{-M\frac{12}{12}--F\frac{8}{12}}}{N_i(0)\cdot e^{-M\frac{8}{12}--F\frac{8}{12}}}\\ L&=1-e^{-M\frac{12-8}{12}}=1-e^{-M\frac{1}{3}}=1-e^{0.8\times 1/3}=23.4\% \end{aligned} \tag{5}$$

在这 23.4% 的死亡比中，假定其中的一半即 11.7% 的鱼是产卵之前死亡的，这样我们就可以认为有 1 − 11.7% = 88.3% 的鱼在后四个月中会产卵并孵化，而剩下的 11.7% 的鱼自然死亡而不产卵．

现在，我们完成了对鱼群动态情况的描述，并得到一组表达式反映各年龄鱼的条数在一年内的连续变化，并说明了前后两年各龄鱼的递变情况.

4. 模型建立

可持续捕捞的条件及其最大收获量的确定：

从经济效益出发，渔业公司总希望捕的鱼越多越好. 但是，任何渔场的渔业资源总是有限的，过分捕捞必将导致资源的枯竭，因此，我们不能只重短期效益. 为了维护生态平衡，我们在可持续捕捞的条件下求最大的收获量.

在上述前提下，我们推导出年收获量的数学表达式：

在一年内，3、4 龄鱼的减少量包括由自然原因引起的死亡量 D 和捕捞量 C. 从 t_2 到 t_1 这段时间内 3、4 龄鱼的减少量为

$$E(t_1,t_2) == [N_3(t_1)+N_4(t_1)]-[N_3(t_2)+N_4(t_2)] \tag{6}$$

渔获量为

$$C(t_1,t_2)=\frac{q_3F}{Z_3}[N_3(t_1)-N_3(t_2)]+\frac{q_4F}{Z_4}[N_4(t_1)-N_4(t_2)] \tag{7}$$

自然死亡量

$$D(t_1,t_2)=\frac{M}{Z_3}[N_3(t_1)-N_3(t_2)]+\frac{M}{Z_4}[N_4(t_1)-N_4(t_2)] \tag{8}$$

这里 Z_3, Z_4 分别表示 3、4 龄鱼的总死亡率，$Z_i=q_iF+M, (i=3,4)$. 显然

$$E=C+D$$

将鱼在一年内的衰减方程有

$$N_i(t_2)=N_i(t_1)e^{-Z_i(t_2-t_1)}, \qquad i=3,4$$

代入 (7) 式得

$$C(t_1,t_2)=\sum_{i=3}^{4}\frac{F_1}{Z_1}N_i(t_1)[1-e^{-Z_i(t_2-t_1)}]$$

可持续捕捞意味着每年开始捕获时渔场中各年龄组的鱼群条数不变，即实现可持续捕获应满足的约束条件，可以用数学表达描述.

$$\begin{cases} C(t_1,t_2)=\frac{q_3F}{Z_3}[N_3(t_1)-N_3(t_2)]+\frac{q_4F}{Z_4}[N_4(t_1)-N_4(t_2)] \\ N_2(0)=N_1(0)e^{-0.8} \\ N_3(0)=N_2(0)e^{-0.8} \\ N_4(0)=N_3(0)e^{-0.8-.042F\times 8/12}+N_4(0)e^{-0.8-F\times 8/12} \\ N_1(0)=1.22\times 10^{11}\cdot n/(1/22\times 10^{11}+n) \\ n=1.109\times 10^5/2\cdot N_3(0)e^{-(0.8+0.42F)\times 8/12}\times 88.3\% \\ \quad +1.109\times 10^5\cdot N_4(0)e^{-(0.8+F)\times 8/12}\times 88.3\% \end{cases}$$

由上述的六个方程组成的方程组可以推导出

$$\left.\begin{array}{l} N_2(0)e^{-0.8}N_1(0)=0.449N_1(0) \\ N_3(0)=e^{-0.8}N_2(0)=0.449N_2(0) \end{array}\right\} \Longrightarrow N_1(0):N_2(0)=N_3(0)=1:0.449:0.202.$$

这表明在可持续捕获条件下, 1 龄鱼、 2 龄鱼、 3 龄鱼的数目比是确定的, 我们消去 $N_3(0)$ 可得 $N_4(0)$ 与 F 的关系, 记为 $N_4(0) = Q(F)$. 它的含义表明一个捕捞努力量, 就对应一个 4 龄鱼数量. 初一看, 似乎不尽合理, 但是, 我们进一步分析会发现: $N_1(0), N_2(0), N_3(0)$ 与 $N_4(0)$ 都有函数关系, 分别记为

$$N_1(0) = F_1(0)), \quad N_2(0) = F_2(N_4(0)), N_3(0) = F_3(N_4(0))$$

也就是说对于 1 个给定的捕捞努力量 F, 必将对应到 1 个给定的可持捕捞状态, 但是, 这不同的可持续捕捞状态, 有不同的年总收获量, 其中, 有一个年总收获量是最大的, 我们通过数学件包 MATHMATIC 得到, 在

$$N_1(0) = 1.195 \times 10^{11}, \qquad N_2(0) = 5.37 \times 10^{10}$$
$$N_3(0) = 2.410 \times 10^{10}, \qquad N_4(0) = 9.29 \times 10$$

时, 年收获量最大, 最大的年收获量 $C = 3.87 \times 10^{11}$ 克, 此时 $F = 17$.

这样, 我们就知道了对于一个给定的初始条件 $N_1(0), N_2(0), N_3(0)$ 与 $N_4(0)$, 我们应通过控制捕捞努力量 F, 使之达到最大的可持续捕获状态. 其具体过程如下: 如果 $N_3(0) > 2.06 \times 10^8$ 条, 则我们就按 $F = 17$ 进行捕捞, 这样渔场就会自动达到可持续捕获状态; 否则我们在第一年就不捕捞, 这样由实际经验可知第二年的 4 龄鱼数量会增加, 那么, 再判断条件 $N_3(0) > 2.06 \times 10^8$ 是否满足, 如此循环下去, 最终会达到可持续捕捞的最高收获量.

5. 模型稳定性分析

由于实际情况的千变万化, 因此我们得到的数据和假定的在实际操作中总存在着微小的误差, 因此一个好的模型绝不能由这些微小变动而导致结果的较大改变.

为了对我们所做的模型进行比较全面的测试, 同时考虑到实际情况, 我们自己设定一些合理的初始条件, 利用计算机进行模型检验, 得出既满足可持续捕捞条件又尽可能使渔获量最大的一系列捕捞努力量 F.