**关于锁具装箱的数学模型**

黄 宗 虎 李 波 李 春 福

(电子科技大学610054)

指 导 教 师 徐全智

**编者按** 本文首先利用组合计数的方法求得一批锁具的总数并按槽高和的奇偶性分类装 箱，说明团体顾客一次购买量不超过49箱时一定不会出现互开现象，作者试图利用图论的 Konig 定理证明方案的最优性，但在证明过程中，从奇类锁与偶类锁具的对称性并不能得到图 中所含有饱和 V;中每个顶点的匹配结论.最后，引进平均互开对数概念，用概率论方法简洁地 得到随机装箱时顾客的抱怨程度的量化结果.

整篇文章建模假设合理，综合运用多种学科工具，较园满完成题目的要求，并有一定的创 见.叙述简洁清楚，结构严谨是一篇较优秀的参赛论文.

**摘** **要** 本文建立了一个关于如何对一批弹子锁具进行装箱和标志的模型，

本文首先用组合数学的方法求得了一批锁具的总数为5880件，接着分析了能够互开的锁 具之间的特性，从而得到以下装箱方案：根据钥匙槽高度之和的不同奇偶性将锁具分类装箱.按 照这个方案，当购买量不超过49箱时，就可以保证一定不会出现互开的情形.文中用图论知识 证明了这个方案是最优的.本文从概率论的角度，引进平均互开对数 E(me), 衡量了按原方案 装箱时顾客的抱怨程度.并将本文的方案与原方案进行比较，得出新方案明显减少了顾客抱怨 程度的结论.

**一** **、问题的重述与分析**

某锁厂生产一种弹子锁具，每个锁具的钥匙有5个槽，令h;(i=1,2,3,4,5) 个槽的高度，则一批锁具应满足如下三个条件，

为钥匙第；

条件1对任意 一 种槽高排列h₁hzh₃h₄hs 有

h₁∈{1,2,3,4,5,6|(i=1,2,3,4,5)

条 件 2 对任意一种槽高排列h₁h₂h₃h₄hs, 至少有三个槽高互不相同.

条 件 3 对任意一种槽高排列h₁h₂h₃h₄hs, 有

lh;-h₁-1l≠5(i=2,3,4,5)

而同时满足下面两个条件的两个锁具可以互开，并把这两个锁具称为一个互开对： \*1.两个锁的钥匙有四个槽高度相同；

\*2.其余一个槽高度相差1.

锁厂销售部门原先在一批锁具中随机地取60个装为一箱出售，这样一来，成箱购买锁 具的顾客总抱怨购得的锁具有互开现象.

我们所关心的问题是：每一批锁具共有多少个，如何衡量随机装箱造成的团体顾客的抱 怨程度以及采取何种方案装箱来尽量避免团体顾客的抱怨.

由一批锁具中，互开对总数是确定的，但在随机装箱之后，对于每一箱而言，锁具互开现 象就不可避免地带有了随机性，因而可以用统计平均值定量地衡量随机装箱造成的团体顾

第i

锁

抱

现

本顾

客的抱怨程度.

为了能够提出一种方案来装箱和标志，以尽量避免团体顾客的抱怨，就需要找出能够互 开的锁具之间的特性，从而使能够互开的锁具分开装箱和标记.

**文中用到的符号及其说明**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 符号 | 说明 | 符号 | 说明 |
|  | 钥匙的第i个槽的高度 | ao(G) | 图G的最小覆盖中的顶点个数 |
|  |  | β₁ (G) | 图G的最大匹配中的边数 |
| D | 满足条件1但不满足条件2或条件3的  钥匙槽高度的排列方式的集合，称为 除去集 | B(G) | 图G的最大独立顶点集中的顶点个数 |
| D₁ (i=1, 2,3,4,5) | D的一个完全划分 | Ng(V₀) | 图G中V₀ 的邻集 |
| E | 一批锁具中平均每把锁具与其它锁具 所能组成的互开对数 | M | 图的最大匹配 |
| Ek | K箱锁具中平均每把锁具与其它锁具 所能组成的互开对数 | IVI | 集合V的元素个数 |
| m | 总互开对数 | sd | 互开对数 |
| E(mg) | K箱锁具中平均含有的互开对数 |  |  |
| S | 某锁具 |  |  |
| V | 锁具集合/顶点集合 |  |  |
| X | 互开锁具对的关系构成的边的集合 |  |  |
| G(V,X) | 由V和X组成的图 |  |  |
| P(G) | 图G的顶点个数 |  |  |

**二、模型假设**

1. 锁具厂在生产锁具过程中能够准确地知道钥匙的每个槽的高度.

2. 对于同一批中两个锁具，若二者相对应的5个槽的高度中有4个相同，且另一个槽的 高度差为1,则一定能互开.

**三、模型的建立及求解**

1. 确定一批锁具的总数

我们根据生产一批锁具的三个条件，用排列组合的知识对一批锁具的总数目进行求 解，其主要过程如下：

(1)根据条件1,钥匙槽高度的可能排列有6³=7776种

(2)受条件2和条件3的约束，实际制锁时还要除去一部分钥匙槽高度的排列方式，我 们称这些排列方式形成的集合为除去集 D.

(3)条件3可等价为钥匙槽高度排列方式中不能出现1和6相邻的情况. (4)对除去集 D 可进行如下划分：

中的元 92;1

令 D₁={h₁=h₂=h₃=h₄=hs D₂=|h,(i=1,2,3,4,5)

D₃=|h₁(i=1,2,3,4,5)

D₄={h₁(i=1,2,3,4,5)

D₅=|h₃ (i=1,2,3,4,5) 显然，D;(i=1,2,3,4,5)

且 D;∩D,=0(i,j=1,2,3,4,5

的排列};

中只有两个不同数的排列};

中有三个不同数且1和6相邻的排列| ;

中有四个不同数且1和6相邻的排列| ;

各不相同且1和6相邻的排列\;

是 D 的一个完全划分，即 D₁UD₂UD₃UD₄UD₅=D

且 i≠j) 我们分别求出了D,(i=1,2,3,4,5)

素个数(详细计算见附录1)如下：1D₁I=6;1D₂l=450;1D₃1=456;1D₄1=7

D₃ l=192(1D1 表示集合 D 中元素的个数)

综上， 一批锁具的总数为

7776- (6+456+792+192)=5880件

可装的箱数为



2. 装箱方案

(1)对锁具进行分类

当两个锁具相对应的5个槽的高度中有4个相同，另一个槽的高度差为1时，它们可以 互开.我们惊奇地发现了下面的规律：

**定理** 在一批锁具中，能够互开的两锁具的槽高排列h₁hzh₃h₄hs 和h²;h'zh'sh'₄h²s,

其各槽高度之和 和 ， 必然具有不同的奇偶性

因为互开的两个锁具有四个槽高度相同，仅有一个槽高度差1,那么高度之和H=

和 必为两个相邻的自然数，而两个相邻的自然数中，必有一个为奇数，另 一个为偶数.

根据定理，我们把锁具按钥匙槽高度之和 H 的奇偶分为两类，H 为奇数的属于奇类，H 为偶数的属于偶类.这样，能够互开的锁具一定分属于奇类和偶类，

(2)求解奇类和偶类中锁具的个数

对一个锁具的钥匙槽高度的排列h₁h₂h₃h₄hs, 我们用7分别减去每个高度h;(i=1,2,

3,4,5),形成另一个与其对偶的排列：(7- h₁)(7-h₂)(7-h₃)(7-h₄)(7-hs) 记原排列

的高皮和 ,新排列的高度和 

则有

H₀-H₁=35

为使上式成立，H₀ 、H₁中必有一个偶数和一个奇数.而每一个奇(偶)类中的排列必能 从偶(奇)类中找出与其对应的对偶排列，这种对偶关系是一一对应的.所以：



故奇类和偶类中的锁具数都为2940件.

(3)装箱和标记

基于以下讨论，我们可得到如下方案：

① 生产锁具过程中记录每个钥匙槽的高度，从而确定H 的奇偶性，将生产出来的锁具 分为奇类和偶类.

② 将奇类和偶类分别装为49箱并做“奇”和“偶”的标志.

这样，销售部门可以根据所做标记只选同类的箱子售给团体顾客.只要他们一次购买的 箱数不超过49箱(即2940个锁具),我们就可以保证他们的锁具不会有互开现象，他们也不 会抱怨了.

D

元

3. 对方案最优性的证明

我们用计算机对互开对总数进行穷举法计算(见附录2),得到在一批锁具中互开对总 数为22778对.

我们将锁具的互开关系用图表示出来.锁具集合用顶点集合V表示，如果两个锁具V;,

V,(i,j=1,2,…5880 且 i≠j) 能够互开，就用边X, 连接起来，所有 X, 组成边集合X, 用

这种方法得到的图 G₀ (V,X) 有5880个顶点和22778条边.

我们引用图论中的一些概念：

最大匹配 最小覆盖

最大独立顶点集 邻集 Ng(Vo) 二分图G(V₁,V₂,X)

以

最大匹配中的边数β₁(G) 最大覆盖中的顶点个数a₀(G)

最大独立顶点集中顶点个数P(G)

这些概念在一般图论理论书中可见到(可参见文献[1],[2]).

我们的目的是寻找图G₀ 中的最大独立顶点集，即不包含互开锁对的最大锁具集合，

**引理1** 二 分图G(V₁,V₂,X) 含有饱和 V₁ 的每个顶点的匹配的充要条件是对所有

V₀≤V₁,INo(V₀)l≥IV₀l(1V₀I 表示集合V₀ 中元素的个数. (1) (见[1])

另

**引** **理** **2** 在二分图G 中，最大匹配 M 的边数等于最小覆盖的顶点数a₀ (G).

**引** **理** **3** a₀(G)+β(G)=P(G). (见[1])

其中 P(G) 为图 G 的顶点总数.

H

对二分图G₀(V,X), 我们将奇(偶)类顶点集合定义为V₁(V₂) 得到 G₀(V₁,V₂,X). **定理** 二 分 图G₀(V₁,V₂,X) 的 V₁,V₂ 是它的两个最大独立顶点集。

证明：我们的图G₀(V,X), 对表示奇类锁具的顶点集合V₁, 由奇类锁具与偶类锁具的对 称性可知，G₀(V₁,V₂,X) 满足(1),即图G₀(V₁,V₂,X) 含有饱和V₁中每个顶点的匹配M.

,2, 列

又因为V₁ 中各顶点互不邻接，则

(由引理2得)

β(G₀)=P(G₀)-a₀(G₀)

(由引理3得)

能



即图G₀ 的最大独立顶点集中的顶点数不大于2940,而我们划分的独立集(奇类集和偶

类集)的顶点个数为2940,因此奇类集 V₁ 和偶类集 V₂ 是 G₀(V₁,V₂,X) 的两个最大独立

顶点集.定理得证.

所以，我们的方案可以使锁具不出现互开情况时购买量达到最大.这就证明了我们的方 案是最优的.

4. 定量分析顾客抱怨互开的程度

(1)对于随机装箱的方案

在一批锁具中，互开对总数为m=22778

对，则平均每个锁具与其它所有锁具能组成



对于任一个指定锁具S, 从其它5879把钥匙中任取一把，能打开该锁的概率是均等的. 这样，如果从另外5879个锁具中随意取出59个锁具与S 装成一箱，则在这一箱中能与S 组

成互开对的锁具个数平均有



平均含有的互开对数为



同理可以得知：k 箱锁具中，能与某一个锁具互开的锁具个数平均为

均含有的互开对数为



显然，E, 和E(mμ) 的大小反映了购买k 箱的顾客的抱怨程度，即E, 或E(m₁) 越大，顾 客抱怨程度越大.

**表1** **k=1,k** **=2和k=49** **的具体结果**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 箱数k | 1 | 2 | 49 |
| 含有的互开对数E(m) | 2.33 | 9.41 | 5693.5 |
| 能与某一锁具S互开的锁具数E, | 0.078 | 0.157 | 3.87 |

(2)对于奇偶分类装箱的方案

由前面的分析知，给箱子进行奇偶标志后再出售，只要顾客购买量k 不超过49箱，就可 以保证不出现互开的情况，顾客自然不会抱怨.当购买量k 超过49箱时，可以先从奇(偶)类 锁具中取出49箱，再从偶(奇)类锁具中任取k-49 箱出售给顾客，互开对显然只产生在49 箱奇(偶)类锁具与k-49 箱偶(奇)类锁具之间.此时，k 箱锁具中的平均互开对数为

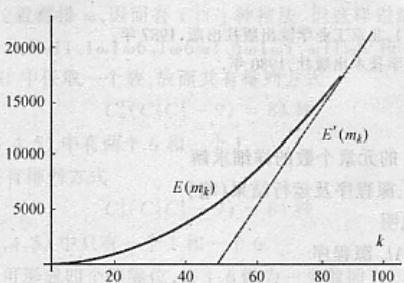


对比随意装箱的互开对数为



可知：

当 k≤49 时，E'(m₁)=0,E(mp)>0

此时顾客的抱怨被避免了；

虫立

*的方*

, 顾

当49<k<98 时 ，E(m₂)<E(m₂)

此时顾客的抱怨程度减少了，

我们在右面画出了 E'(mp) 和 E(m) 的比较图.

且成

的 .

S组

(3)在奇偶分类基础上再分类

对于某个锁具S, 一批中能与它互开的锁具个数sd 是一定的，那么sd 的范围是多大呢， 我们用穷举法利用计算机得到4≤sd≤10. 并且得到了对应于每个sd 的属于奇类的锁具个 数(见下面程序结果),由于奇偶的对称性，偶类也有同样的结果.

,平

程序运行结果如下

*Total:=5880*

odd:=2940

互开总对数： 互开对为3, 互开对为6, 互开对为9,

Even:2940

22778

0;互开对为 296;互开对为 744;互开对为

4,45;互开对为 5, 7 , 6 9 9 ; 互 开 对 为 8 , 10,150;互开对为11,

105;

901;

0;

我们设想在奇偶分类后，再对奇(偶)类按每个锁具的 sd 从小到大对锁具进行装箱，并 记以序号1,2,…,49.这样当团体顾客购买箱数k>49 时，取奇(偶)类49箱后剩下的k

箱在偶(奇)类中按序号从小到大取箱.使得在k 箱中互开总数尽量减少，这样必然更 重减小顾客的抱怨程度.

就可 ) 类 在49

**四、模型评价**

1. 本模型利用数的奇妙的奇偶性为制锁厂提供了一项很好的锁具装箱方案.此方案在

垂大范围内消除了锁具的互开现象，而且方案简单明了，施行方便.

2. 本模型综合运用了多种方法对问题进行求解.其中穷举法简单易懂，用计算机编程 解的运行时间仅几秒钟；而概率、图论、组合数学等方理论性较强，逻辑严密，而且易于为 家所接受.

3. 当锁具的种类变化时，即锁具的槽数和每个槽的可能高度的集合发生变化时，我们 前方案仍然适用，将我们的计算机程序稍作修改，就能很快得出一批锁具的总数和奇类、偶

类锁具的个数.

4. 我们的模型还能应用到其它类似性质的事物上，如对条形码的排列组合和识别分类 问题，只需将可能高度改为可能码数，槽数改为条形码的条数即可，

**参考文献**

[1]王朝瑞，《图论》(修订本),北京工业学院出版社出版，1987年.

[2]李慰萱，《图论》,湖南科学技术出版社，1980年.

**六、附录清单**

附 录 1 除去集 D 的元素个数的详细求解

附 录 2 程序框图、源程序及运行结果(略)

1. 程序说明

2.PASCAL 源程序

**附** **录** **1**

除去集 D,(i=1,2,3,4,5) 的元素个数的详细求解

1. 根据D₁ 的性质，h;(i=1,2,3,4,5) 都取同一个数，明显有 D₁ 个元素个灵敏为 C;=6 个

2. 根据D₂ 的性质，h₁(i=1,2,3,4,5) 中只有两个不同数o₁ 和 az, 我们进行如下考

虑，让每个h₁(i=1,2,3,4,5) 都可以任取w₁ 和u₂, 有2³种方式，但这样做又重复了D₁ 中

五个槽高均为a₁ 和五个槽高均为a₂ 的两种组合，因而须从2⁵ 中减去2,最后考虑到w₁,a₂ ∈11,2,3,4,5,6},可有 Cδ种取法，故而 D₂ 的元素个数为



3. 根 据D₃ 的性质，h₁(i=1,2,3,4,5) 中必有1和6,记另外一个与1和6不同的高度 数为 a, 我们考虑如下完全划分：

(a)h₁(i=1,2,3,4,5) 中三个1和一个6.

第一步，从h₁h₂h₃h₄hs 中选出了三个来安排1,有C3种方法，第二步，从剩余的两个槽 位中选一个来安排6,剩余最后一个位置自然要排o, 因而有PZC 种安排方法.但这样做纳 入了D 集中的两个元素111w6 和 6w111,须从安排方法中减去，又w 可以{2,3,4,51中任取 一数，故而共有排列方式

C!(2C}-2)=72 种

(b)h;(i=1,2,3,4,5) 中三个6和一个1.

与(a) 同理可知共有排列方式

C!2(C}-2)=72 种

(c)h₁(i=1,2,3,4,5) 中有两个1和两个6.

第一步从h₁h₂h₃h₄hs 中任选两上来排1,有 C} 种选法；第二步，从剩余三个位置中任 选两个安排6,剩下最后一个位置自然要排a, 因而有C}C}种排法.但这样做纳入D 集中的 两元素11w66 和66w11,须从排法中减去2.又u 可以{2,3,4,5|中任取一数，故而共有排列

考 中

类

,02

度

槽

纳

取

中任

中的

列

方式.

C|(C}C}-2)=112 种

(d)h₁(i=1,2,3,4,5) 中有两个1和一个6.

第一步，从h₁h₂h₃h₄hs 中选出二个安排1,有C}种方法，第二步，从剩余3个位置中选 一个排6,剩余的二个位置都排 o, 因而有 C}C}种排法.但这样做纳入了D 中的9个元素 11a6、11w6w、6aa11、w6a11、1alo6、1o6wl、6wla1、w11w6和 6wllw, 须从排法中减 去.又o 可以{2,3,4,5|中任取一个数，故而共有排列方式

C|(C}C}-9)=84 种

(e)h;(i=1,2,3,4,5) 中有两个6和一个1.

与(d) 同理可知共有排列方式

C(C³C|-9)=84 种

(f)h;(i=1,2,3,4,5) 中只有一个1和一个6.

这样考虑，三个w 可形成四个间隔位，将1,6做为一个数插入四个间隔位有C! 种方法， 这样得到的组合方式显然属于D₃, 同样可将6,1做为一个数插入四个间隔位，而w 可从{2, 3.4,5|中任取一数，故而共有排列

C|(P|P2)=32 种

综上所述，D₃ 集中元素的个数为

72+72+112+84+84+32 =456个

4. 根据 D₄ 的性质，h,(i=1,2,3,4,5) 中必有1和6,记另外两个与1和6不同而且相 互之间也不同的高度数为 wi、w₂,我们考虑如下完全划分：

(a)h;(i=1,2,3,4,5) 中有两个1和一个6.

与 3 -(d) 的情况相类比，现在的情况是w₁ ≠w₂ 且w₁,o₂ ∈{2,3,4,5}, 而前面的情况 是有两个相同的o 且w∈12,3,4,5}. 因而同理容易推知现在共有排列方式

C₁[P(C}C;-9)]=252 种

(b)h(i=1,2,3,4,5) 中有一个1和两个6.

同理，与3- (e) 的情况类比可知共有排列方式

C²[P²(C}C}-9)]=252 种

(c)h₁(i=1,2,3,4,5) 中只有一个1和一个6.

与 3 -(f) 的情况类比，现在的情况相当于原来的构成间隔位的方式增多了，可以是两 个≈;和一个w₂ 或两个w₂ 和一个a₁ 构成间隔位，它们都有C}C| 种方式，又o₁,o₂∈|2,

3.4,51,因而现在的情形下共有排列方式

C[C}C|(P|P})+C}C}(P|P)]=288 种

综上所述，D₄ 集中元素个数为

252+252+288 =792个

5. 根据D₃的性质，h₁(i=1,2,3,4,5) 中只有一个1和一个6,记其余三个与1和6不同的数 为=1a₂ 、o₃ ∈12,3,4,5|, 故有P 种构成间隔位的形成.由此可知 D₃ 集中元素的个数为

P(P|P2)=192 个.

**装箱与销售模型**

兰州铁道学院 刘 振 杨文青 何新宇

指导教师 俞 建 宁

**编者按** 本文较详细地讨论了装箱和连续销售问题，证明了从任一箱起顺次销售能保证 至少有35箱不会发生互开现象，进而用字典装箱可改进到42箱.这点是很有创见和特色的.

**假** **设**

1. 两把锁具对应的5个槽的高度中有4个对应相同，另一个槽的高度差为1时，两锁必 能互开，

**模型** **I(1)**

在考虑使团体顾客不再或减少抱怨的前提下、兼顾销售方便，我们拟采用连续数字作为

箱的编号，销售时按箱的编号连续销售.

设一批锁具中第 i 把钥匙从一端开始顺次各槽的高度值组成一个向量记为B;



其中m 为一批锁具中各钥匙槽的个数(本模型m =5).

从而可有如下结论：

结论1:若1B,l-1B;|≠1, 则第 i 把锁和第；把锁不能互开(证略).

由结论1得如下推论.

推论1:要使团体顾客不再或减少抱怨，必须使1B;I-1B,II=1 的两锁具装入编号相

距尽可能大的箱中.

推论2:模同为偶数的锁具间不能互开.

模同为奇数的锁具间不能互开.

模相等的锁具间不能互开.

由以上分析得到下面的装箱方案.

将模为偶数的锁装入前i 箱，模为奇数的锁装入后；箱(i+;=Y,Y 为总箱数，本题Y =98),且把模为偶数和奇数的锁具分别按模从小到大的顺序排列后，依次装箱.

记模为 IB;l 的所有锁具数为α(IB;1).

本文用计算机程序对不同IB,l 的 a 进行计算，结果如下：

2(8)=20,2(9)=50,2(10)=120,2(11)=162,2(12)=251,

2(13)=322,2(14)=405,2(15)=508,2(16)=-539,

2(17)=563,

2(18)=563,2(19)=539,2(20)508,2(21)=405,2(22)=322,

2(23)=251,2(24)=162,2(25)=120,2(26)=50,2(27)=20.

由统计数据及装箱方案可得表1:



**表1** **模型** **I(1) 的装箱方案**

必

为

相

Y

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B;  n  (编号) | 8 | 10 | | 12 | | 14 | | 16 | | 18 | | 20 | | 22 | | 24 | | 26 | 9 | 11 | | 13 | | 15 | | 17 | | 19 | | 21 | | 23 | | 25 | | 27 |
| a|B;I | 20 | 120 | | 251 | | 405 | | 539 | | 563 | | 508 | | 322 | | 162 | | 50 | 50 | 162 | | 322 | | 508 | | 563 | | 539 | | 405 | | 251 | | 120 | | 20 |
| 混合箱 | 1 | | 3 | | 7 | | 14 | | 23 | | 32 | | 41 | | 46 | | 49 | | 50 | | 53 | | 58 | | 67 | | 76 | | 85 | | 92 | | 96 | | 98 | |
| 顺次装箱(自然排序) |  | 2 | | 4  5  6 | | 8  9  10  11  12  13 | | 15  16  17  18  19  20  21  22 | | 24  25  26  27  28  29  30  31 | | 33  34  35  36  37  38  39  40 | | 42  43  44  45 | | 47  48 | | 51  52 | 54  55 | 59  60 | | 68  69  56  57 | | 77  78  61  62  63  64 | | 86  87  70  71  72  73  65  66 | | 93  94  79  80  81  82  74  75 | | 97  88  89  90  91  83  84 | | 95 | |  | |  |

对表1说明如下：

(1)表中第一行为上述装箱方案对应的模 IB;l 的排列，

(2)表中第二行为模为丨B;l 的锁具的介数.

(3)第三行以下为模为丨B₁1 的锁装入箱的对应编号.

s,若l锁具1B,l 与锁具|BI 能互开，记1B₁ | 所在箱与IB,| 所在箱在自然下的距离为

记M(S;) 为从任意箱处顺次连续拿取一定不会出现互开锁的最大箱数，则

M(S,)=min|S,|-1

据表1有：

S,=150,49,48,47,46,45,43,42,41,40,39,38,37,36}, M(Sj)=36-1=35.

据以上结果作购买量和出售方案对照表(表2),表2中曲线上各标值表示由该点对应 州籍号开始顺次连续购买， 一定不会出现互开锁的最大箱数.显然，保证一定不会出现互开 重的最大购买量为49箱.

表2使用说明：

(1)若购买箱数 N≤35 箱，可以从任一标号开始，顺次连续取.

(2)若购买箱数N=49 箱，只能从第1箱或第50箱或第98箱连续取.

(3)若购买35 <a≤N≤b<49 箱，(其中a,b 为表2上可取的标值范围的外限)

(i)当 b 位于a 点左边时，b 点取对应箱号的上限，a 点取对应箱号的下限. (m) 当 b 位于a 的右边时，b 取对应箱的下限，a 取对应箱的上限.

表2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 购买箱数 |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| |B; | 8 | 10 | | 12 | | 14 | | 16 | | 18 | | 20 | | 22 | | 24 | | 26 | 9 | 11 | | 13 | 15 | | 17 | | 19 | | 21 | | 23 | | 25 | | 27 |
| a|B₂ l | 20 | 120 | | 251 | | 405 | | 539 | | 563 | | 508 | | 322 | | 162 | | 50 | 50 | 162 | | 322 | 508 | | 563 | | 539 | | 405 | | 251 | | 120 | | 20 |
| 出 售 标 号 | 1 | | 3 | | 7 | | 14 | | 23 | | 32 | | 41 | | 46 | | 49 | | 50 | | 53 58 | | | 67 | | 76 | | 85 | | 92 | | 96 | | 98 | |
|  | 2 | | 4  6 | | 8  9  10  11  12  13 | | 15  16  17  18  19  20  21  22 | | 24  25  26  27  28  29  30  31 | | 33  34  35  36  37  38  39  40 | | 42  43  44  45 | | 47  48 | | 51  52 | 54  55 | 59  60 | | 68  69  56  57 | 77  78  61  62  63  64 | | 86 87 70 71 72 .73 65  66 | | 93  94  79  80 | | 97  88  89  90  91  83  84 | | 95 | |  | |  |
| 81  82  74  75 | |

**模型** **I(2)**

模型 I(1) 只考虑了不同 IB;l 之间的排序，没有考虑相同 lB;I 的锁具之间的排序. 因而装箱是方便的.但购买量并非最大.为了进一步增大从任一箱起的最大购买量，我们对 相同 IB;1 的锁具之间进行字典排序后，并依次按1,2,3,…,5880进行标记.

记IB₁l=(b{f),b)),…,b)

则 B,=(b?,b{P,…,b).

中的元素组成一个m 位数值为



m 位数值为：

*M₁=bP),b)…bg)*

结论2:M(Sg) 必然出现在1b()-b()1=1 的情形中.

证明：将|B;1 组成的有序向量记为T, 则

T=(8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,

9,11,13,15,17,19,21,23,25,27).

将其对应的有序向量集空间定义为 ZK, 则

ZK =({20},{120},{251|,{405|,1539},|563},{208},|322},

1162},{50|,150},{162|,|322},1508|,{563|,|539},

1405},{251|,{120|,{20}).

0

序 .

门对

在向量集空间ZK中，对 于 |B,l-|B,|1=1 的两个子向量集|aIB;| 和{a|B,|, 在

按字典排序的条件下，为了保证不互开，只有当首位数「b{P=b{?1=1 时向量所对应的锁

具编号才相距“最近”.

下面对向量集空间ZK 中的每一个子向量集|a|B,| 按首位数b{)=1,2,…,6 的大 小进行字典排序，由表2图象可知，只需在1B;I 为14 → 13,16~15,18~17,20 → 19,22 →21 这五种情况间进行分析，M(Sg) 必在其间，具体分析见表3.

分析表3,可得M(S₂)=42.7, 取下整为42.

也可用计算机进行全范围搜索求解，

将有序向量集空间中的各向量按1,2,3,…,5880标记以后，运用计算机依据前述的方 案进行搜索，求出各种可能情况下的最小距离M(S₄), 以该最小距离对应的向量数，标记号 差值.

运行结果为：

最小距离对应向量标号之差为2562.

相应向量128个，即互开锁具数为128把.

由 M(S₂)=2562/60=42.7, 取下整为42箱.

装箱方案：将字典排序后的有序向量集空间中的5880个向量按顺序提出来，排成一列. 然后将其对应锁具每60把一箱，依次装箱，并把各箱的1～98依次编号.

销售方案：出售时按箱编号顺次取出.显然.保证不互开的最小“最大购买量”为42~ 49.

若购买42箱.可以从任一箱开始顺次连续拿取，两模型都是在连续生产、循环销售的条 件下建立的.但模型 I(1) 和模型I(2) 相比，模型 I(1) 生产简单，装箱方便.模型I(2) 在保证不会出现互开锁的前提下，购买箱数由35箱增到42箱，可是在一定程度上增加了生 产，装箱的复杂度

表3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 项 英 | | 8 | 另 | 8 |  | 同 | S |  | 1 |  |  | R | 法 |  |  | 图 |  |  | S | 园 | 荡 |  |  |  | g | 2 |  | 8 | 品 | 8 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 44.72 |  |  |
| in |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 44 |  |  | 别 |
| 叶 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 44.28 |  |  |  |  |
| n |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 44 |  |  |  |  | 引 |
| c4 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 44.43 |  |  |  |  |  |  |
| 一 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 品 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 42.9 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| n |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 45.25 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 时 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 43.15 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 的 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 43.22 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| N |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 43.55 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | R |
| 一 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 国 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 42.70 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| m |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 42.80 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 112 |
| 寸 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 42 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 42 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 104 |
| N |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 43. |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 96 |
| 一 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 67 |
| 三 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 43.22 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 43.15 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 荡 |
| 时 |  |  |  |  |  |  |  |  | 43.05 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| m |  |  |  |  |  |  |  | 43.05 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 108 |
| N |  |  |  |  |  |  | 13.0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 106 |
| 一 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  | 44.28 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| n |  |  |  | 44.28 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 十 |  |  | 45.95 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 8 |
| m |  | 44.35 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 44.38 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| N |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 接 | 西 | 一 |  |  | 寸 |  |  |  |  |  | 寸 | n |  |  |  |  | 寸 |  | O | 一 | N |  | 寸 |  |  |  |  | m | 寸 |  |  | 构 |
|  | | | | | | 2 | | | | | | 上 | | | | | | 日 | | | | | |  | | | | | |

108

**关于不互开箱数上限的一个讨论**

魏明骏 于清娟 王振宇

(中国科学技术大学230026)

指导教师 程继新

**编者按** 本文讨论了锁具分箱问题中，顾客最多购买多少箱时不会出现互开现象的问题， 且给出了箱数的一个上限.虽然所得上限过大，但证明方法巧妙、简洁，具有启发性，特将有关部 分予以发表.

我们按槽高之和的奇偶性将锁具划分为A 、B 两个集合.容易证明，每个集合的锁具数

为顶集，当且仅当a 可以证明G(V,E)

为5880/2=2940个，A 和B 中的锁具可分别装49箱.以AUB=V

∈A,b∈B,a 与b可互开时，在顶a 与b间连一条边，得一图G(V,E).

为二分图，A 与B 为独立集.于是，不互开锁具箱数的下限为49.下面，我们证明不互开箱数 的上限为54.证明如下：

假设团体顾客购买了n 箱锁具而不互开，且n>54,n 箱锁具必分属于A、B 两个集合. 不妨设其中有n; 箱锁具，这些锁具的集合N₁CA, (可以证明N₁ ≠A) 和有 n₂ 箱锁具，这

些锁具的集合N₂CB. 令A-N₁=N₃,IN₃ l=n₃ ( 集 合N₃ 中的锁具装在n₃ 箱中),B

-N₂=N₄,IN₄1=n₄, 且n,n2,ng,n₄ 满足：

n₁+n₂=n,n₁+n₃=49,n₂+n₄=49 ([1)](#bookmark1)

数

n₃+n₄=98-(n₁+n₂)

n₁+n₂=n >54

于是

3

图

n3+n₄<44 (2)

由于n 箱锁具不互开，所以在G 中N₁UN₂ 为独立集；又N₁UN₃=A 为独立集，所

中的顶可能相邻.所以N₁

N, 中的顶只能与N₄ 中的顶相邻，而N₄ 中的顶则与N₁UN₃ 中顶的总度数 D₁ 与 N₄ 中顶的总度数 D₄ 满足：

*D₁≤D₄*

(3)

理

叫

3

云

创

D₂≤D₃,

量

D₁+D₂≤D₃+D₄

(4)

借助计算机可统计出G 中顶的总度数D=45556,

图

,再由(4)得

叫

D₃+D₄≥D/2=22778 (5) 借助计算机统计，我们还可以知道度数的精确分布(即不同度数各有多少锁具)如下：

R(1)=R(2)=R(3)=0,R(4).=90,R(5)=210,

R(6)=592,R(7)=1398,R(8)=1802,

R(9)=1488,R(10)=300

其中R(i) 表示 i 度顶的个数

由此，可求出43箱锁具能容纳的最大度数为22728;

44箱锁具能容纳的最大度数为23208.

于是

当 ng+n₄<44 时 ，D₃+D₄<22778 (6)

与(5)矛盾，由此证出n>54 不成立，即不互开锁具箱数的上限为54,证毕

**参考文献**

[1]王树禾编著,《图论及其算法》,中国科学技术大学出版社，1990.



确实，数学是决定性的相互交叉的学科。数学是取得全面进步的出发点。数学既是强有 力的洞察工具，又是科学的共同语言。我把她称为科学的“世界语”。(原文：Indeed, ·Mathematics is the ultimate cross-cutting discipline.It is the springboard for advances across the board.Mathematics is both a powerful tool for insight,and it's a common language for science,I refer it as the "Esperanto"of science. Rita Colwell (Director of NSF)(美国科学基 金会主任 Rita Colwell)

NSF Launches Major Initiative in Mathematics,Allyn Jackson,Notices of AMS, v.48(2001),no.2,190 -192.

**独立集最大性的讨论**

杨 琼、尹雪钰 李 程

(北京师范大学100875)

指 导 教 师 曾 文 艺

**编者按** 本部分将最优装箱问题转化为图论的二分图问题，用图论方法说明了S,T 分别 是两个极大无关集且 ISl=ITI=2940, 并借助计算机找到了一个匹配，其边数为2928,说明 了最大匹配边数≥2928,再利用Konig定理得出最大独立集个数≤2952<3000,从而得到文中 不能互开的最大箱数为49箱.

本部分思路清晰，行文流畅；但未能从理论上证明2940就是最大独立集数，只是用计算机 给出了2952这个上界.

三 采取我们的方案，团体顾客购买量不超过49箱，可以保证一定不会出现互开情 形 ，

我们分析如下：(注：S ={各位数字和为奇数的合格锁的集合}

T ={各位数字和为偶数的合格锁的集合})

将锁看成点，两个锁具互开则可看成两点之间存在一条边.则一批锁具构成顶点数为P =5880的简单图.由前所证，在同一S 或 T 集合中不会有互开关系，互开关系只会发生在S 中 点 与T 中点之间.由图论中二部图定义，这 P 个锁具构成二部图G =(S,T,E)

我们引入以下几个概念：(见[1]田丰等，《图与网络流理论》,科学出版社)

(1)边无关集：给定图G=(V,E), 若边集MCE 中任两条边都没有公共顶点，称 M 是 G 的边无关集；记最大边无关集的边数为β₁(G), 显然β₁(G)≤P/2([1]p.60)

(2)点无关集：对图G=(V,E), 若点集 I≤V 中任意两个点间都不存在边，称I 是最 大点无关集；包含点数最多的点无关集称为最大点无关集，其中点的个数记为β(G)([1]p.

n

再不加证明地引入以下几个定理：(其中ao(G) 为图的点覆盖数)

① 设 G=(S,T,E) 是二部图，则β₁(G)=a₀(G)([1]p.64)

②a₁(G)+β₀(G)=P(G)

易由①②得，对于二部图，β(G)+β(G)=P(G)(\*)

显然对于本题的二部图G=(S,T,E),S=T=2940, 而S,T 都是极大点无关集，即

基再往S 或 T 中增加集合外一点，则集合不再是无关集，于是β₀(G)≥2940 (\*\*)

另外，我们利用计算机程序(见算法)找出了一个边无关集，其中边数为2928,从而最大 无关数β₁ (G)≥2928, 由 ( \* ) 得

B(G)=P(G)-β₁(G)≤2952

综合(\*)得2940≤β₀ (G)≤2952, 这就是说明我们如从一批锁具中任取50箱，其锁数 3000>2952≥β(G), 其中必存在相关(可互开)的锁.

由前面的装箱办法，我们将 S 类中的2940把锁装成49箱，T 类中的2940把锁装成49

箱；从上面的分析可知我们提出的两个内部不互开的49箱的分类是最优的.团体顾客购买 不超过49箱，可以保证一定不会出现互开.

附

利用程序找尽量大的边无关集的计算步骤：

算法主要目的是找出尽可能多的匹配，从而提高β₁(G) 的下限，也即缩小了最大点无 关集个数β(G) 的上限.

①产生5880把合格锁，按数字特征(锁各位数字之和分组)

② 对每把锁求出与之互开的锁

③标记所有的锁为没有匹配(NoMate)

④从数字特征的8的组开始，在标记为NoMate 的锁中查找互开锁(与之互开的锁数字 特征必为9),找到后将两锁都标记为已匹配(HasMate)

⑤ 依次对特征为9-27的所有锁进行步骤④,若发现与某未匹配锁互开的锁都已匹 配，则产生一不可匹配的锁，直到所有锁都处理完.

程序运行后，给出2928对匹配点，即2928条无关的边，因此β(G)≥2928.



那么数学的“应用”是由什么组成的呢?在我看来它能描述如下，它的任务在于基于物 质世界某些对象的性态所遵从的一般规律，预言这些对象在给定条件下的行为。通过把物质 对象对应到认定能“表示”这些物质对象的数学对象以及把控制前者的规律对应到数学对 象之间的数学关系，就能构造所研究的情形的数学模型；这样，把原来的问题翻译为数学问 题，如果能以精确或近似方式求解此数学问题，就可以再把所得到的解翻译回去，从而“解” 出原先提出的问题。

《当代数学—为了人类心智的荣耀》—让·迪厄多内著,沈永欢译，上海教育出版社， pp.21 -22,1999

物 质 对

**抱怨程度模型**

无

字

匹

问

\*

顾 宗 良 党 京 卢 敦 陆

(合肥工业大学230009)

指导教师 周永务

**编者按** 在本次竞赛中，很大部分试卷中都用平均互开次数的数学期望值定义为抱怨程 度的度量.这自然就得出购买箱数越多，抱怨程度越大，这不太符合顾客的心理状态.本文认为 顾客抱怨程度与购买箱数成反比，与检验结果成指数关系，在定义抱怨程度函数上是很有特 色的.

**1.** **总体互开概率**

将一批5880个锁具两两比较，总的比较依次数为C₃, 其中能互开的次数可通过编程

证计算机统计出

两两比较次数总和为 TOTAL =C3s

两两比较中能互开的次数和为 HK =22778



通过Pa 我们可看出这批锁具的互开程度，并可衡量一批锁具的技术指标.若Pa 越小， 工开现象就越小，锁具的安全性越好.

2. **团体顾客购买若干箱时互开概率**

(1)根据总体概率分析估算

若抽取1箱，里面60个锁具两两比较次数为 C. 若认为每箱的互开率与一批总体互开

P₂ 相同，则互开次数的，数学期望 E₁=Ca·P=2.34.

设在C 次独立重复抽取事件中，互开次数ξ~B(C,P),P(i) 代表在C3=1770 次

发中出现 i 对互开现象的概率.

由二项分布的基本原理得：



(K=0,1,2,…,1770,P=0.132%)

上述分布律亦可用下表表示：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| K | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| P(K) | 0.096 | 0.226 | 0.264 | 0.205 | 0.120 | 0.056 |
| K | 6 | 7 | 8 | 9 | ≥10 |  |
| P(K) | 0.022 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | ≈0 |  |

来上表我们可以看出， 一箱内不存在互开的可能性是很小的，仅0.096,而出现两次互

开的概率最大.可见互开现象较严重，所以采用新的装箱、标志方法非常重要. 同理抽取二箱时，互开次数ξ~B(Cizo,P)

E₂=Czo·P=9.42

P=(ξ=K)=P(K)=CP(1-P)\*

作出的表格为：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| K | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| P(K) | 8E-5 | 0.00076 | 0.0036 | 0.011 | 0.026 | 0.050 | 0.078 |
| K | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| P(K) | 0.106 | 0.125 | 0.131 | 0.123 | 0.105 | 0.083 | 0.060 |
| K | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | ≥20 |
| P(K) | 0.041 | 0.025 | 0.015 | 0.0083 | 0.0043 | 0.0029 | 0.0021 |

对一般情况抽取n 箱时，互开次数ξ~B(C3.,P)

(2)随机抽样模拟

i) 在实际生活中， 一般顾客在大多数情况下，往往采取从已买的若干箱锁具中抽取若干 个锁具，检验统计后进行估计的方法，由此行出互开程度的大小.我们认为此种方法虽然在 理论上是合理的，但实际中的检验方法不可能满足估计量的评选标准，因为，即使取一箱，在 其中任取一对检验，也有C=1770 种可能，若取两箱，Ci2n 就更大，在实际中不可能.做到 与之可类比的检验次数，而取到任意一箱的种数也有 C 种，况且不同的人在一批锁具中 的不同箱子中，可能按照不同抽取方法，不同的抽取次数来抽样检验，故一般顾客采取的抽 样方法在估计中的置信程度、偏差程度、有效性、相合性等方面存在很大欠缺，为此我们采取 计算机随机抽样方法来模拟互开的概率情况

ii) 利用计算机模拟随机抽样，对此我们有多种方法：蒙特卡洛模拟中的迭代取中法移 位法、同余法.但考虑问题的实际情况，我们采用了线性同余法来模拟(见程序(略)).

我们基本方法如下：

从一批总体5880个中随机抽取60个组成一箱，箱内60个锁具两两比较，互开次数记为 N,N 的取值0,1,2,3,…,C.

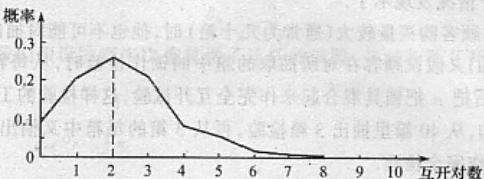
通过计算大量产生随机数，模拟抽取，并进行比较，对N 值取值为0,1,2,3,…的次数加

以分类统计，记为M₁(i=1,2,3…), 以 代表一箱内出现i 对的概率，则根据强 大数定律得：当随机抽样次数 M 充分大时，P(i) 趋向一批总体概率分布，

我们利用计算机模拟顾客购买一箱和两箱锁具的互开情况，计算结果如下表和图.

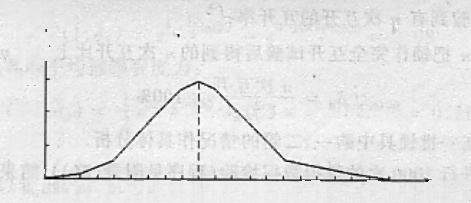
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 一 箱 | K₀ | K₁ | K₂ | K₃ | K₄ | Ks |
| 次 数 | 991 | 2300 | 2689 | 2173 | 1100 | 527 |
| 互开率 | 0.0991 | 0.2300 | 0.2689 | 0.2173 | 0.1100 | 0.0527 |
| 一 箱 | K₆ | K₇ | Ks | K₉ | K≥10 |  |
| 次 数 | 82 | 27 | 11 | 1 | 0 |  |
| 互开率 | 0.0082 | 0.0027 | 0.0110 | 0.000 | 0 |  |

干 在 在 到 中 抽 取 移 为 加 强



从图表可以看出，抽取一箱时互开时数为2的概率最大

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 二 箱 | K₀ | K₁ | K₂ | K₃ | K₄ | Ks | K₆ |
| 次 数 |  | 8 | 33 | 112 | 257 | 508 | 771 |
| 互开率 | 8E-5 | 0.0008 | 0.0033 | 0.0112 | 0.0257 | 0.0508 | 0.0771 |
| 二 箱 | K₇ | Kg | Kg | K₁₀ | K₁ | K₁₂ | K₁₃ |
| 次 数 | 1053 | 1254 | 1325 | 1212 | 1053 | 826 | 587 |
| 互开率 | 0.1053 | 0.1254 | 0.1325 | 0.1212 | 0.1053 | 0.0826 | 0.0587 |
| 二 箱 | K₁₄ | Kis | K1₆ | K | K₁ s | K1g | K≥20 |
| 次 数 | 424 | 236 | 157 | 87 | 45 | 29 | 23 |
| 互开率 | 0.0424 | 0.0236 | 0.0157 | 0.0087 | 0.0045 | 0.0029 | 0.0005 |



概率1

0.2

0.15

0.1

0.05

*1234567891011121314151617181920互开对数*

oL

从图可以看出，抽取二箱时，互开对数为9的概率最大

抱怨函数的构造：

抱怨函数的构造建立在以下假设的基础上.

1. 假设团体顾客在购买时，至多一次购买G 箱(G≤98), 且顾客从所购的G 箱中随机 曲取检验的箱数占其购买箱数的百分率g 与他所购买的箱数成二次关系.

即有： g=-aG²+bG+c (其中a、b、c为常数)

由于箱数必须为整数，故我们认为顾客抽取的检验指数符合J=INT(g×G+0.5) 的

规律 .

这是因为考虑到团体顾客购买后不可能象单个顾客购买几把或十几把可以完全检验所 领的互开次数.

例如：若想检验一箱锁中有几次互开，需检验C8=1770 次.

若检验二箱，则需 Ciz₀=7140 次

故此团体顾客购买后只能从中抽取一定数量的箱数来检验，且考虑到顾客的心理，当他 买箱数较少时，自然检验率较高，能发现几乎所有的互开情况，当购买数量大时，相对检验

率会减少，有的互开情况发现不了，

2. 由于当团体顾客购买量较大(通常为几十箱)时，他也不可能对抽出箱内的锁作完全 互开试验，因此，我们又假设顾客在对所抽取的箱中的锁作检验时，从每箱当中抽取相同数 量的锁具n 把，然后把n 把锁具混合起来作完全互开试验，这样检验的工作量不大，而又达 到了检验目的.例如，从40箱里抽出3箱检验，再从3箱的每箱中又抽出10把锁具混合起 来，对这30把锁具作完全检验.

显然，顾客的抱怨程度最主要一方面取决于他所购买的总数量，另方面取决于他作检验 的结果(即互开次数).并且从心理学的解度考虑，顾客更偏重于检验的结果.由此我们认为 顾客的抱怨程度与购买的总箱数成反比，与检验结果成e 的指数关系

由此，就可以定义出抱怨函数的表示为



其 中K₁,K₂ 为常数，其实际意义为：

K₁: 表示顾客购买箱数在整个抱怨程度中所占的比重

K₂: 表示检验到互开次数在整个抱怨程序中所点的比重.

其确定可分别依实际的用户而确定，

T:表示顾客购买的总箱数.

δ,:表示顾客检验到有η次互开的互开率.

即δ等于J×n 把锁作完全互开试验后得到的n 次互开比上J×n 把锁的所有组合

即 

下面我们针对在一批锁具中购一、二箱的情况作具体分析.

我们用计算机进行1000次的模拟数据检验(程序见附录(略)),结果见下表.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 互开次数n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ≥7 |
| 概率P。(%) | 13.7 | 26.9 | 28.6 | 17.9 | 8.7 | 2.9 | 0.9 | 0 |

n: 一箱中有n 次互开；P₂ :1000次检验下一箱中有 n 次互开的概率，

我们认为：

① 如果甲顾客购买箱数是乙顾客的两倍，而甲、乙检验到相同的δ,则甲的抱怨程度是 乙的两倍；

②如果仅购买一箱，由互开数大于7的为0次，故检验到的互开率为 时抱怨达

到极值设为100

由①,得到K₁=1,

由②,得到

则得到抱怨函数的具体表达式为

全 數 达 起

是 达

验

.为

合

对购买一箱者： 

为简便起见，我们假设顾客多次重复做了这样的试验，并对各种互开情况顾客均能检验 到，则平均互开率：





+5×0.029+6×0.009)=0.04

时于二箱的情况：







+5×0.029+6×0.009)=0.01

则购买一箱的顾客的平均抱怨程度为：



则买二箱的顾客的平均抱怨程度为：



时结果的解释：

由上述结果可以看出，购买一箱锁具的顾客的平均抱怨率明显高于购买两箱锁具的顾

事热平均抱怨率，这是与我们的一贯看法所吻合的.因为虽然在个别情况下购买两箱锁具的 事的抱怨率会高于购买一箱锁具的顾客的抱怨率，但顾客购买的数量越少，就越容易检验 基 中 的互开情况，而如果购买的数量较大，相对就不易检验出互开的情况，并且由于购买 箱数在一定程度上起了平衡顾客心理的作用，故上述的结果在数值上差别就不难理解

**关于顾客抱怨程度的定量描述**

喻 甫 祥 薛剑耿 林 东

(中国科学技术大学230026)

指 导 教 师 王树禾 徐俊明

**编者按** 本文在讨论锁具随机装箱情况(即原来的装箱方法)之下，顾客不满意程度的描 述时，首先引入了三个特征量：互开的“锁具对”的数目x, 能被某把其他锁具打开的锁具的个数 y, 必须报废的锁具的最小数目a. 通过计算机模拟求出了x 和y 的期望值.作者们在讨论一把锁 被 n 把其他锁具打开的问题中，证明了n≥3 的情况出现的概率很小，可以忽略.在此基础上给 出了抱怨程度的一个描述，并给出了改进的描述方法.虽然其中的一些问题还有待于进一步探 讨，仍不失为一种富有特色的考虑方法.

**1.** **分析和假设**

当锁具随机装箱后出售给团体顾客时，可能由于某些锁具互开而引起抱怨.我们设计概 率模型来定量地衡量团体顾客抱怨互开的程度.模型应该较好地反映出大多数时候团体顾 客抱怨互开的程度，而又能兼顾到极端情况，尽量使团体顾客抱怨程度极大而抱怨函数却极 小的情况很少出现.

假设团体顾客发现购买的锁具中有互开的情况时，会更换一些锁具以避免互开，我们称 这些被更换的锁具被报废.我们引入三个特征量：互开锁的“锁具对”的数目 x, 能被某把其 它锁具打开的锁具的个数y, 必须报废的锁具的最小数目a. 如果以每个锁具为顶点，能互 开的锁具之间用一条边相连，构造出一个图G, 那 么x 就 是G 的边数，y 就 是G 的非孤立顶 点数，a 就 是G 的点覆盖数.

另外，我们用五位数来代表锁具，各位数字分别与相应槽的高度相对应，按五位数的数 字和的奇偶性，把锁具分为奇锁具和偶锁具两大类，容易证明， 一批具有5880个，其中奇、偶 锁具各有2940个；不同的奇锁具之间不互开，不同的偶锁具之间也不互开，因此G 是一个二 分图.

**2.** **模型的设计**

抱怨程度与互开的锁具对数x, 能被其它某把锁具打开的锁具的个数 y 以及必须报废 的锁具的最小数目a 有关，

理论推导可以得到x 的期望值，在一箱中，由于边的总数为22778,可以得到x 的期望

值为 3.通过计算机模拟的方法可以得到x,y 的分布和数学期望

如当团体顾客的购买量为一箱时，x 和y 的数学期望分别为2.33和4.43;两箱时，则分别为 9.40和17.39.

称出现一个锁具能与其它两个锁具互开的情况为一个二分叉，能与其它三个锁具互开 的情况为三分叉，依次类推.在一箱锁具中，出现一个锁具被(至少三个)其它锁具打开的概

概顾极

门称

巴其

互

立顶

的数

、偶

个二

报废

期望

月望.

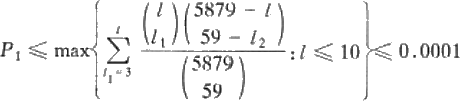
别为

互开

的 概

率po是相当小的，证明如下：(设一箱中一个给定锁具被至少三个其它锁具打开的概率为

*p₁)*



∴Po≤60p₁ ≤0.006

所以这种情况可以忽略不计.

在剩余的情况中，我们用函数2x+y 来衡量顾客抱怨的程度.若四个锁具能分为两对， 每对中两个锁具可以互开，不同对中的两个锁具不能互开，我们称之为情况 A; 同时我们用 情 况 B 来表示三个锁具形成一个二分叉.显然，情况 A 和情况B 都恰有两对互开的锁具，但 是情况 A 可能需要报废两个锁具，情况 B 一般只需要报废一个锁具.所以我们可以说情况 A 比情况B 更坏一些，在排除了三分叉和更多分叉的情况后，我们可以看出如果有一个锁具 能被另两个不同的锁具打开(即出现情况B), 则 2x+y 小于将这三把锁及另外某把锁A 的 情况且不影响其它锁具的互开关系时它的值，而且可以得出有n₁=2x-y 个锁具能被两个 不同的锁具打开，有n₂=2(y-x) 个锁具能被恰好一个其它的锁具打开，(n₁ 和n₂ 满足 2m₁+n₂=2x,n₁+n₂=y) 其它的锁具都不会被箱中任意别的锁具打开.这样当每增加一 对锁具能互相打开而不影响其它锁具的互开关系时2x+y 将增大.可见，2x+y 对 A 和 B 这两种情况给予了恰当的区分.由此可知2x+y 在绝大多数情况下比较好地描述了顾客的 不满意程度.根据计算机模拟的结果可得到2x+y 对A 和B 这两种情况给予了恰当的区分。 由此可知2x+y 在绝大多数情况下比较好地描述了顾客的不满意程度.根据计算机模拟的 结果可得到2x+y 的数学期望值是

E(2x+y)=2Ex+Ey=2×2.33+4.43 =9.09.

另外当箱数为二时，计算可得存在一个锁具被另外四个锁具打开的概率小于百分之 二，所以这种情况也可以忽略不计.这时2x+y 仍能比较好地反映顾客的不满意程度.此时 的数学期望值为

E(2x+y)=2Ex+Ey=2×9.40+17.39 =36.19.

为了更精确地描述顾客的不满意程度，我们引进新的参数y₁ 和 yz.y₁ 为能被箱中某个 另外的锁具的个数，y₂ 为能被箱中某个另外的锁具打开的偶锁具的个数.我们用u=yiy₂

表征顾客不满意程度.由一条变时，顾客的不满意程度也变大.容易看出u 很好的反映了这 种要求.另外我们可以考虑另一个参数a 为最少要报废的锁具数目(即顾客使用其它的锁具 可以做到任意两把锁具不可以互开).从经济的角度来看，a 十分精确地反映了顾客的不满 意程度.而且可以看出a 大 致 为min(y₁,y₂), 由 于y 的分布已由计算机模拟得出，而且x 的 分布用 possion 分布(λ=2.33)较好地逼近，所以u 中包含了相当多的a 信息量 . 由于 a 的 分布很难用数学方法或计算机模拟得到，而u 的分布在箱数不多时用计算机可以很快得到， 所以我们采用u 作为表征顾客不满意程度的量.

下面估算 u 中包含a 的信息量I(u,a) 与 a 的 熵 值H(a) 的比值(即u 反 映a 的程度): 当箱数为一时，由计算机模拟得到的c=min(y₁,y₂) 的分布(t=1000) 知 ：

P{a=0}=P(u=0)=0.102

0.224=P\u=1|≤P|a=1\≤P\u=1|+Plu=2}+0.01=0.274

所以

(1)

注：分三种情况

0.614≤P|a≥2}≤0.664

H(a)≥0.84



≤-0.0061ln0.006-0.049In0.049≤0.15



A) 存在一把锁可以被与它不同的三把锁打开.

B)O≤u≤20, 且不在A) 中 .

C)21≤u≤900, 且不在A)k

由此很容易看出熵值估计式的正确性.

由(1)式知道如果给定u, 则在大约百分之八十五以上的程度上决定了a, 所以我们取 u 作为表征量是十分合理的.

**3.** **模型的评价**

我们的模型对下述情况没有给出很好的描述：抱急函数较大但团体顾客因为实际需要 报废的锁具数并不多而不十分抱怨.这是一种“好”的情况(销售部门担心的是对团体顾客 抱怨互开的程度估计不足),这类情况里较多的出现二分叉、三分叉等，前面已指出这类情况 发生的概率很小.发生概率较大的是接近极坏的情况，二分叉、三分叉等出现较少，需要报废 的锁具数目与x 十分接近，此时y≈2x,2x+y≈4x,√y₁y₂≈z, 可见两种抱怨函数在多 数情况下是一致的.

在以上的讨论中，我们认为两个锁具只要满足互开时锁具对应槽的高度关系就能互开 的概率p=1, 事实上并不能保证它们一定能互开，即应有0<p<1, 若某个团体顾客购买 的锁具中存在 n 对满足互开时锁具对应槽的高度关系，如果认为每一对都有概率 p 的可能 互开，那么实际能互开的锁具的对数(数学期望)大约为 pn. 因此对生产厂家来说，通过提 高工艺水平来降低 p,可以降低团体顾客抱怨互开的程度

们取

需要

顾客

情况

报废

在多

互开

购买

可能

过提

**关于“锁具装箱”问题的评阅工作**

中国科学院系统科学研究所

项可凤

“锁具装箱”问题(B 题)送交评阅的试卷共58份，由于经过赛区筛选，卷子质量普遍较 好，绝大多数卷子都达到或超过组委会所提供的参考答案的要求.根据这样情况，我们评阅 小组认为凡是未达到参考答案要求，或文字表达极差的卷子，经评卷小组成员半数以上认 定，评卷组长确认，按未达到标准而被淘汰.这样，在阅卷第一阶段，就淘汰了17份卷子.评 卷的第二阶段要在余下的41份卷子中，评选出全国一等奖.对于一等奖，我们认为其内容上 必须超过参考答案要求，特别在下述几个方面，至少要在一、二个问题上有创见或特色：

1)不能互开锁具的最大数的论证

这是一个较难的理论问题.参考答案只要求按槽高之和的奇偶分成二类，各分装49箱， 2940把锁不能互开.但2940是否为不能互开的最大数呢?有少量卷子用图论方法给出讨 论或给出算法.我们认为，能在这个问题上给出论证本身就反映学生思考问题的严密性和解 决理论问题的能力，

2)关于装箱销售问题

在这个问题上，大多数卷子仅仅讨论了按槽高之和的奇偶标记分箱，可以保证团体顾客 购买不超过49箱时，不会出现互开问题.我们认为仅讨论到这一步还不够.在门市销售中， 实际的顾客流是序贯的.有少量卷子，讨论了序贯销售时，装箱的标记方法，按此方法，在连 续销售中，可以保证任意购买不超过42箱均不会出现互开问题，这样的讨论就更深入和符 合实际了，

3)关于顾客抱怨程度

这个问题灵活性较大，没有固定解答，学生有较大发挥余地，答案也是形形色色的.但大 部分卷子都用平均互开总对数，或它的单调增函数去定义抱怨程度.因此，购买箱数越多，抱 想程度越大.我们认为这样定义抱怨函数有一定不合理性.因为购买越多，自然互开概率越 大，这是顾客所意料中的，不应有太多的抱怨.顾客所不能容忍的是在购买少量锁具而出现 互开现象.因此，我们更欣赏把购买箱数作为一个因素考虑到抱怨函数中.理想的抱怨函数 应该是，开始随购买量增加而增加，到一定量后下降，这才更合情理.

4)在参赛的卷子中，普遍存在不重视文字表述问题.我们认为，入选一等奖的卷子，必须 文字叙述清楚、简练、流畅.

根据上述4条原则，经过评卷小组成员反复地横向比较， 一致同意确定15份优秀卷子， 作为全国一等奖提名.

最后，余下26份卷子都是至少有评卷小组成员半数以上同意入选的，自然就是全国二 等奖.在二等奖中，成绩跨度较大，这是因为数学建模竞赛和一般竞赛不同，它没有标准答 案，只能从横向比较中确定优劣.