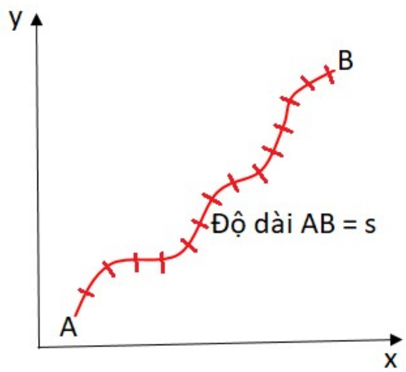
Bài toán dẫn đến định nghĩa tích phân đường loại 1

Tính khối lượng đoạn dây không đồng chất : $\rho = f(x, y)$.



Trường hợp đồng chất: $m = \rho . s$ ($\rho -$ khối lượng riêng, $s -$ độ dài dây).
Trường hợp không đồng chất: Chia nhỏ chiều dài dây $AB = \bigcup_{i=1}^{n} s_i$. Cho $n \to \infty$ để s_i là các đoạn dây đồng chất:

$$m_i = \rho_i . s_i = f\left(x_i, y_i\right).\Delta s_i \to m \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right).\Delta s_i$$

Khối lượng của đoạn dây:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right).\Delta s_i \qquad (*)$$

Định nghĩa. Nếu tồn tại giới hạn (*) và không phụ thuộc cách chọn điểm $\left(x_i, y_i\right)$ thì (*) gọi là tích phân đường loại 1 trên AB, ký hiệu:

$$I = \int_{AB} f\left(x, y\right) ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta s_i$$

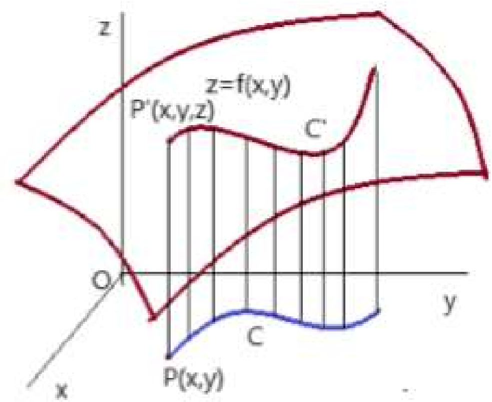
AB là đường cong lấy tích phân, hàm $f\left(x, y\right)$ khả tích trên AB.

Ý nghĩa của tích phân đường loại 1

Tích phân đường xuất hiện đầu thế kỷ 19 để giải quyết để giải quyết các vấn đề liên quan đến lĩnh vực cơ học lý thuyết, cơ học chất lỏng, điện từ trường trong vật lý, …

+ **Ý nghĩa hình học.** Xét đường cong C được xác định bởi phương trình $x = x(t),\ y = y(t)$ và hàm $z = f(x, y) \geq 0, \forall x, y \in C$.

Khi $P(x, y)$ di chuyển dọc theo C thì $P'(x, y, z)$ di chuyển dọc theo đường cong C' trên mặt $z = f(x, y)$.



Tích phân $\int\limits_C f(x,y)ds$ chính là diện tích của "hàng rào" tạo bởi C và C'.

Khi $f(x, y) = 1$ thì tích phân trên chính là chiều dài của C.

+ **Ý nghĩa vật lý.** Cho thanh cong C có mật độ khối lượng $\rho(x, y, z)$. Khối lượng của thanh chính là tích phân đường loại 1:

$$M = \int\limits_C \rho(x,y,z)ds$$

Các tính chất cơ bản

1) Từ định nghĩa trên thấy rằng tích phân đường loại 1 không phụ thuộc vào chiều của đường cong AB, nghĩa là:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds$$

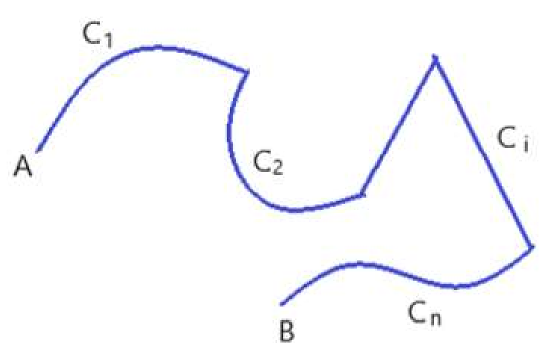
Tuy nhiên, cần lấy tích phân theo chiều tăng của biến.

2) Dễ dàng mở rộng định nghĩa tích phân đường đối với đường cong trong không gian.

3) Tích phân đường loại 1 có các tính chất giống tích phân xác định:

$$\int_C [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]ds = \alpha \int_C f(x,y)ds + \beta \int_C g(x,y)ds$$

$$\int_C f(x,y)ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(x,y)ds$$



Trong đó $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ với C_i là các cung trơn (hàm có đạo hàm liên tục trên cung).

Các công thức tính tích phân đường loại 1

Điều kiện khả tích. Nếu AB là đường cong trơn từng khúc và hàm $f(x,y)$ liên tục trên AB thì hàm $f(x,y)$ khả tích trên AB.

Xét tích phân:

$$I = \int_{AB} f(x,y)ds$$

1. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x), a \leq x \leq b$ thì:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$

2. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(y), c \leq y \leq d$ thì:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+(x'(y))^2}dy$$

3. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$ thì:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

Bằng cách tương tự, công thức tính tích phân cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên đường cong $\widehat{AB}$ trong không gian cho bởi: $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t_1 \leq t \leq t_2$

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt$$

4. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi), \varphi_1 \leq t \leq \varphi_2$ thì coi nó như là phương trình dưới dạng tham số, ta có:

$$ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi$$

$$\rightarrow \int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(r(\varphi) cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi$$

<u>Ví dụ</u>. Tính $I=\int_C x^3 ds$, C là cung parabol $y=\frac{x^2}{2},\left(0\le x\le 3\right)$

$$y=\frac{x^2}{2}\to y'=x\to ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+x^2}dx$$

$$\to I=\int_0^3 x^3\sqrt{1+x^2}dx$$

Đặt $\sqrt{1+x^2}=t\Rightarrow x^2=t^2-1\Rightarrow 2xdx=2tdt\Rightarrow xdx=tdt$.

Đổi cận tích phân:

$$x=0\Rightarrow t=1;x=3\Rightarrow t=\sqrt{10}$$

Tích phân trên trở thành:

$$I=\int_0^3 x^3\sqrt{1+x^2}dx=\int_1^{\sqrt{10}}\left(t^2-1\right)t^2dt=\int_1^{\sqrt{10}}\left(t^4-t^2\right)dt$$

$$=\left.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\right|_1^{\sqrt{10}}=\frac{50\sqrt{10}}{3}+\frac{2}{15}$$

Ví dụ. Tính $I = \int\limits_C 2yds$, C là cung parabol $x = y^2$, từ (0,0) đến (1,1)

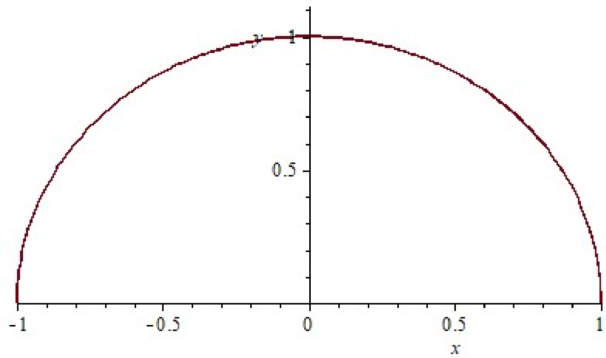
$$x = y^2 \to x' = 2y \to ds = \sqrt{1 + (x')^2}dy = \sqrt{1 + 4y^2}dy$$

$$\to I = \int\limits_0^1 2y\sqrt{1 + 4y^2}dy$$

Đặt $\sqrt{1 + 4y^2} = t \to dt = \dfrac{4y}{\sqrt{1 + 4y^2}}dy \to dy = \dfrac{t}{4y}dt$ dẫn đến:

$$I = \int\limits_1^{\sqrt{5}} 2y.t.\frac{t}{4y}dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{5}} t^2dt = \frac{1}{2}.\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\left(\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

Ví dụ. Tính $\int_C \left(2+x^2y\right)ds$, C là nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$



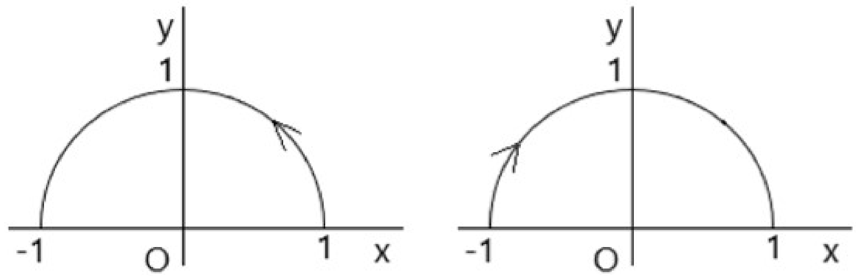
Đặt $x=r\cos t; y=r\sin t$. Vì $r=1$ nên phương trình tham số của C:

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, 0\le t\le \pi$$

$$ds=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt=\sqrt{\left(-\sin t\right)^2+\left(\cos t\right)^2}dt=dt$$

$$\to I=\int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt=\int_0^{\pi}\left(2+\cos^2 t.\sin t\right)dt=\frac{2}{3}+2\pi$$

Ví dụ. Tính $\int_C \left(2+x^3y\right)ds$ với C là nửa trên của vòng tròn đơn vị.



Phương trình tham số của C:

+ Nếu đặt $x=\cos t; y=\sin t; 0\le t\le \pi$ thì đường cong lấy tích phân di chuyển theo hướng mũi tên (hình a):

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2+\left(y_t^{'}\right)^2}dt=dt$$

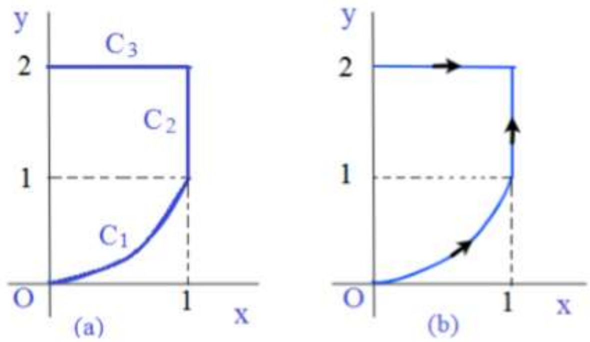
$$\Rightarrow \int_C\left(2+x^3y\right)ds=\int_0^{\pi}\left(2+\cos^3 t\sin t\right)dt=\left[2t-\frac{\cos^4 t}{4}\right]_0^{\pi}=2\pi$$

+ Nếu đặt $x=-\cos t; y=\sin t; 0\le t\le \pi$ thì đường cong lấy tích phân di chuyển theo hướng mũi tên (hình b):

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2+\left(y_t^{'}\right)^2}dt=dt$$

$$\Rightarrow \int_C\left(2+x^3y\right)ds=\int_0^{\pi}\left(2-\cos^3 t\sin t\right)dt=\left[2t+\frac{\cos^4 t}{4}\right]_0^{\pi}=2\pi$$

Ví dụ. Tính $\int_C 2xds$ với C bao gồm C_1: $y = x^2$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$ kết nối với C_2: đoạn thẳng từ $(1,1)$ đến $(1,2)$ và C_3: đoạn thẳng từ $(1,2)$ đến $(0,2)$.



$$\int_C 2xdx = \int_{C_1} 2xds + \int_{C_2} 2xds + \int_{C_3} 2xds$$

Trên C_1: $x = x; y = x^2 \to ds = \sqrt{1+(y')^2}dx = \sqrt{1+(2x)^2}dx$

$$\to \int_{C_1} 2xds = \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{6}\left(-1+5\sqrt{5}\right)$$

Trên C_2: $x = 1; y = y; 1 \le y \le 2 \to ds = \sqrt{1+(x')^2}dy = dy$

$$\to \int_{C_2} 2xds = \int_1^2 2.1dy = 2$$

Trên C_3: $x = x; y = 2; 0 \le x \le 1; ds = \sqrt{1+(y'(x))^2}dx = dx$

$$\to \int_{C_3} 2xds = \int_0^1 2xdx = 1$$

Ví dụ. Tính tích phân đường $I=\int\limits_L\left(x^2+y^2\right)ds$, L là biên của hình tam giác OAB với $O(0,0), A(1,1), B(-1,1)$.

Ta có:

$$I=\int\limits_L\left(x^2+y^2\right)ds=\int\limits_{OA}\left(x^2+y^2\right)ds+\int\limits_{BA}\left(x^2+y^2\right)ds+\int\limits_{BO}\left(x^2+y^2\right)ds$$

Trên OA:

$$y=x\rightarrow y'=1\rightarrow ds=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{2}dx$$

$$\rightarrow\int\limits_{OA}\left(x^2+y^2\right)ds=\sqrt{2}\int\limits_0^1 2x^2dx=2\sqrt{2}.\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Trên BA:

$$y=1\rightarrow y'=0\rightarrow ds=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=dx$$

$$\rightarrow\int\limits_{BA}\left(x^2+y^2\right)ds=\int\limits_{-1}^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^1=\frac{8}{3}$$

Trên BO:

$$y=-x\rightarrow y'=-1\rightarrow ds=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{2}dx$$

$$\rightarrow\int\limits_{OA}\left(x^2+y^2\right)ds=\sqrt{2}\int\limits_{-1}^0 2x^2dx=2\sqrt{2}.\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^0=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ví dụ. Tính $\int_C xyds$ với C là hình elip $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Đặt $x = 2cost; y = 3sint; t: 0 \to \frac{\pi}{2}$

Tích phân được tính:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t.3\sin t\sqrt{4\sin^2 t+9\cos^2 t}dt=\frac{38}{5}$$

Ví dụ. Tính $\int_C xyds$ với C là đường $x = y^2$ từ $A(0,0) \to B(4,2)$

$$I=\int_0^2 y^2.y\sqrt{(2y)^2+1}dy=\int_0^2 y^2.y.\sqrt{4y^2+1}dy$$

Đặt $\sqrt{4y^2+1}=t \Rightarrow t^2=4y^2+1 \Rightarrow 2tdt=8ydy \Rightarrow ydy=\dfrac{tdt}{4}$

$$\Rightarrow I=\int_1^{\sqrt{17}} \frac{t^2-1}{4}.t.\frac{tdt}{4}=\frac{1}{16}\int_1^{\sqrt{17}}\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{1}{16}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{17}}$$

Ví dụ. Tính $\int_C (xy-4z)ds$ với C là đoạn thẳng đi từ $P_1(1,1,0)$ đến $P_2(2,3,-2)$.

Trước hết ta cần lập phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm P_1, P_2. Véc tơ song song với đoạn thẳng P_1P_2 là:

$$\vec{T} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (1,2,-2)$$

Dẫn đến:

$$x = 1+t; y = 1+2t; z = -2t$$

$$\Rightarrow \int_C (xy-4z)ds = \int_0^1 \left[(1+t)(1+2t)+8t\right]\sqrt{1+4+4}dt$$

$$= 3\int_0^1 \left(1+11t+2t^2\right)dt = 3\left[t + \frac{11}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{43}{2}$$

Bài tập. Tính khối lượng của đường cong:

$$x=\cos t; y=\sqrt{2}\sin t; \frac{2\pi}{3}\le t\le\frac{5\pi}{6}$$

Biết mật độ của nó tại điểm (x,y) là $\rho(x,y)=|xy|$.

Khối lượng của đường cong được đưa ra bởi công thức:

$$m=\int_C \rho(x,y)ds=\sqrt{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}|\sin t\cos t|\sqrt{1+\cos^2 t}dt$$

$$=-\sqrt{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin t\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{1+\cos^2 t}dt\left(1+\cos^2 t\right)$$

$$\to m=\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{7\sqrt{7}-5\sqrt{5}}{8}$$

Bài tập. Tính khối lượng của đường đinh ốc:

$$x=\cos t; y=\sin t; z=t; 0\le t\le 2\pi$$

Biết mật độ của nó tại điểm (x,y,z) là $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$m=\int_C \rho(x,y,z)ds=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right]$$

Bài tập. Tính $\int_C \left(x^2+y^2\right)ds$, *C* là nửa đường $x^2+y^2=2x,\left(x\ge 1\right)$.

Đặt phương trình tham số của đường:

$$\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, -\frac{\pi}{2}\le t\le \frac{\pi}{2}$$

$$ds=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt=\sqrt{\left(-\sin t\right)^2+\left(\cos t\right)^2}dt=dt$$

$$\to I=\int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(1+\cos t\right)^2+\sin^2 t\right)dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2+2\cos t\right)dt=\left(2t+2\sin t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi+4$$

Bài tập. Tính $\int_C y^2 ds$, C là đường tròn có phương trình

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$$

$$x'(t) = a(1 - \cos t); y'(t) = a\sin t \to \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$\to I = \int_{AB} f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 .2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{256a^3}{15}$$

Bài tập. Tính $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, C là đường tròn có phương trình

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$$

$$x'(t) = at\cos t; y'(t) = at\sin t \to \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = at$$

$$\to I = \int_{AB} f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

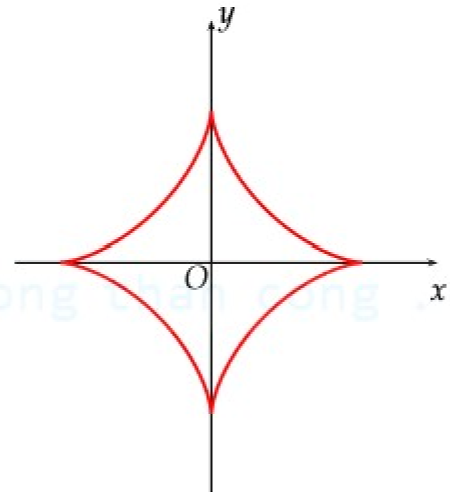
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left[(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right]}atdt = \frac{a^3}{3}\left(\sqrt{(1+4\pi)^3} - 1\right)$$

Bài tập. Tính tích phân đường:

$I = \int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds$, trong đó L là đường Astroid có phương trình:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, (a > 0)$$

Do tính chất của đường Astroid nhận các trục Ox, Oy làm trục đối xứng và hàm số dưới dấu tích phân không thay đổi khi ta đảo dấu 1 hoặc 2, hoặc cả 2 biến x, y.



$\rightarrow I = \int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds = 4\int\limits_{L_1} \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds$, L_1 là phần đường Astroid trong góc phần tư thứ nhất. Tham số hóa đường Astroid ta có:

$$x = a\cos^3 t; y = a\sin^3 t$$

$$\rightarrow I = \int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}} \left(\cos^4 t + \sin^4 t \right) 3a\sin t\cos t$$

$$= 12a^{\frac{7}{3}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^5 t\sin t + \sin^5 t\cos t \right) = 12a^{\frac{7}{3}} \left(-\frac{1}{6}\cos^6 t + \frac{1}{6}\sin^6 t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

- Giới hạn của hàm số.
- Tìm đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm số; ứng dụng của vi phân để thực hiện phép tính gần đúng; đạo hàm và vi phân cấp cao.
- Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học: phương trình tiếp tuyến- pháp tuyến của đường cong phẳng; phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong trong không gian; tiếp tuyến và tiếp diện của mặt cong.
- Tích phân hai lớp; ứng dụng của tích phân hai lớp trong hình học.
- Tích phân ba lớp; ứng dụng của tích phân hai lớp trong hình học.

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

Tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ dọc theo cung C được viết:

$$I = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Lưu ý:

- Tích phân đường loại hai phụ thuộc vào hướng của cung C. Nếu đổi chiều trên đường lấy tích phân thì tích phân đổi dấu.
- Có thể tách rời tích phân đường thành tổng các tích phân thành phần:

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_C P(x, y)dx + \int_C Q(x, y)dy$$

- Tích phân đường loại một có các tính chất giống như tích phân xác định.

CÁC CÔNG THỨC TÍNH TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2

1. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $x = a, x = b$ thì:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x) \right] dx$$

2. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(y)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $y = c, y = d$ thì:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_c^d \left[P\left(x(y), y\right).x'(y) + Q\left(x(y), y\right) \right] dy$$

3. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(t), y = y(t)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $t = t_1, t = t_2$ thì:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right).x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right).y'(t) \right] dt$$

Tương tự, tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ dọc theo cung C có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \le t \le b$, được viết:

$$I = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_a^b \left(P\left(x(t), y(t), z(t)\right).x'(t)dt + Q\left(x(t), y(t), z(t)\right).y'(t)dt + R\left(x(t), y(t), z(t)\right).z'(t)dt \right)$$

Bài tập 1. Tính $\int\limits_{AB} ydx + x^2dy$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $y = x^2$ từ $A(1,1)$ đến $B(0,0)$

Ta có:

$$y = x^2 \to dy = 2xdx$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y\left(x\right)\right) + Q\left(x, y\left(x\right)\right).y'\left(x\right) \right] dx$$

$$= \int\limits_1^0 \left(x^2 + x^2.2x\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4}\right)\Bigg|_1^0 = -\frac{5}{6}$$

Bài tập 2. Tính $\int\limits_{AB} 2ydx$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $x = y^3 + y$ từ $A(-2,-1)$ đến $B(2,1)$

Ta có:

$$x = y^3 + y \to dx = \left(3y^2 + 1\right)dy$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{c}^{d} \left[P\left(x\left(y\right), y\right).x'\left(y\right) + Q\left(x\left(y\right), y\right) \right] dy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} 2y\left(3y^2 + 1\right)dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(6y^3 + 2y\right)dy = \left(\frac{6y^4}{4} + \frac{2y^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0$$

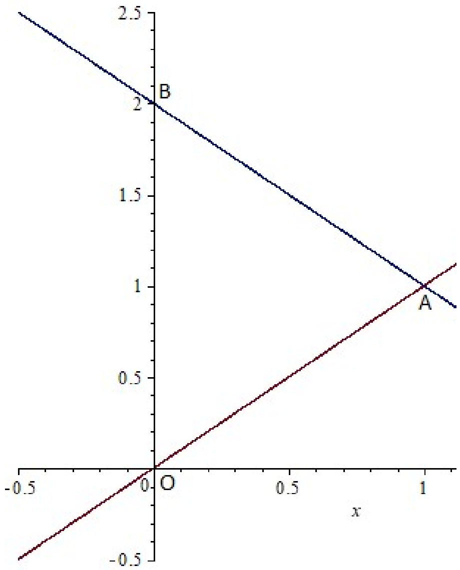
Bài tập 3. Tính $\int\limits_{AB}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(2xy-y^2\right)dy$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $y=x^2$ từ $A(1,1)$ đến $B(2,4)$

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int_a^b\left[P\left(x,y(x)\right)+Q\left(x,y(x)\right).y'(x)\right]dx$$

$$=\int_1^2\left(\left(x^2-2x^3\right)+\left(2x^3-x^4\right).2x\right)dx=\int_1^2\left(-2x^5+4x^4-2x^3+x^2\right)dx$$

$$=\left(-\frac{x^6}{3}+\frac{4x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=-\frac{41}{30}$$

Bài tập 4. Tính $I = \int\limits_{AB} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy$ trong đó $\widehat{AB}$ là biên của tam giác OAB, với $O(0,0)$; $A(1,1)$; $B(0,2)$ và ngược chiều kim đồng hồ.



$$I = \int\limits_{OA} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy$$
$$+ \int\limits_{AB} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy + \int\limits_{BO} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy$$

Sử dụng các công thức:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x)\right]dx$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_c^d \left[P\left(x(y), y\right).x'(y) + Q\left(x(y), y\right)\right]dy$$

Phương trình OA: $y = x$

$$\int\limits_{OA} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy = \int\limits_0^1 \left[\left(x^2 + 3x\right) + 2x.1\right]dx = \int\limits_0^1 (x$$

Phương trình AB: $y = 2 - x$

$$\int\limits_{AB} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy = \int\limits_0^1 \left[\left(x^2 + 3(2 - x)\right) + 2(2 - x).(-1)\right]dx = \int\limits_1^0 (\quad)dx = -\frac{11}{6}$$

Phương trình BO: $x = 0$

$$\int\limits_{BO} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy = \int\limits_2^0 \left[\left(0^2 + 3y\right).0 + 2y\right]dy = y^2\Big|_2^0 = -4$$

$$\frac{17}{6} - \frac{11}{6} - \frac{24}{6} = -\frac{18}{6} = -3$$

Bài tập 5. Tính $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, $ABCDA$ là đường gấp khúc qua các điểm $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(-1,-1)$

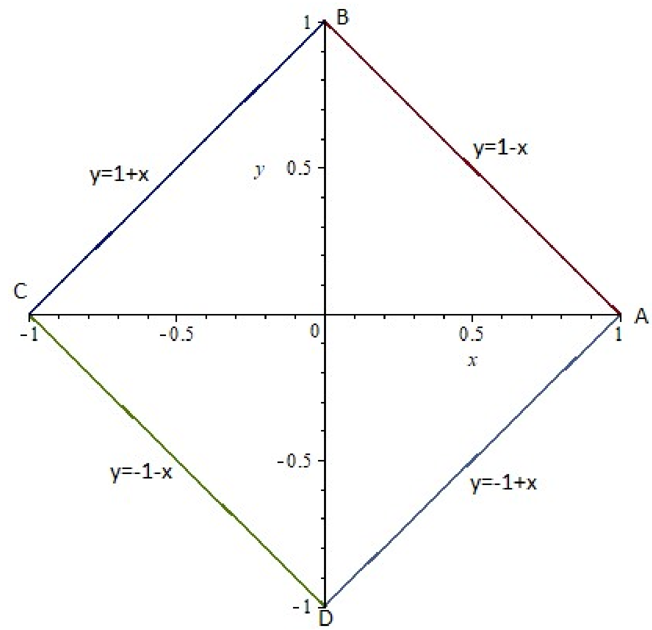
Xét các đoạn:

$$AB: y = 1 - x \to dx + dy = 0$$

$$BC: y = 1 + x \to dx = dy$$

$$CD: y = -1 - x \to dx + dy = 0$$

$$DA: y = -1 + x \to dx = dy$$



Ta có:

$$\int\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|a| + |b|} = \int\limits_{AB} \ldots + \int\limits_{BC} \ldots + \int\limits_{CD} \ldots + \int\limits_{DA} \ldots$$

$$= 0 + 2\int\limits_{BC} \frac{dx}{-(x - y)} + 0 + 2\int\limits_{DA} \frac{dx}{(x - y)}$$

$$= 2\int\limits_{0}^{-1} dx - 2\int\limits_{0}^{1} dx = -2$$

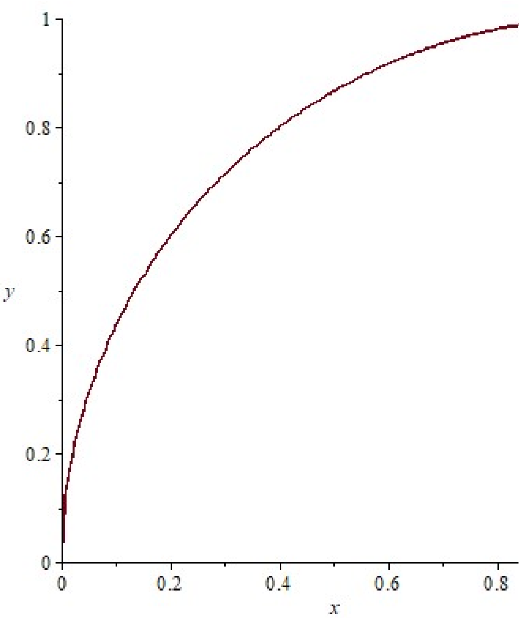
Bài tập 6. Tính $I = \int\limits_C ydx + xdy$, C là cung $x^2 + y^2 = 2x$ từ (0,0) đến (1,1) theo chiều kim đồng hồ.

Đặt $x = 1 + \cos t; y = \sin t$ dẫn đến:

$$dx = -\sin t dt; dy = \cos t dt; t : \pi \to \frac{\pi}{2}$$

Áp dụng công thức:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big[P\big(x(t), y(t)\big).x'(t) + Q\big(x(t),$$



$$\to I = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \big[-\sin t.\sin t + (1 + \cos t).\cos t \big] dt$$

$$= \int\limits_{\pi}^{\pi/2} (\cos t + \cos 2t)\, dt = \left(\sin t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_{\pi}^{\pi/2} =$$

Bài tập 7. Tính $\int\limits_{AB} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(2xy - y^2\right)dy$, trong đó $\widehat{AB}$ là đường cong $x = a(t - sint); y = a(1 - cost)$ theo chiều tăng của $t, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$.

Ta có:

$$dx = a\left(1 - \cos t\right)dt; dy = a \sin t dt$$

Sử dụng công thức:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right).x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right).y'(t) \right] dt$$

Dẫn đến:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \left[2a\left(t - \sin t\right) - a\left(1 - \cos t\right) \right] a\left(1 - \cos t\right) + a\left(t - \sin t\right).a \sin t \right\} dt$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left[\left(2t - 2\right) + \sin 2t + \left(t - 2\right)\sin t - \left(2t - 2\right)\cos t \right] dt$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left[\left(2t - 2\right) + t \sin t - 2t \cos t \right] dt = a^2\left(4\pi^2 - 6\pi\right)$$

Bài tập 8. Tính $\int\limits_{AB} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}dx+dy$ trong đó $x=t\sin\sqrt{t}; y=t\cos\sqrt{t}; 0\le t\le \frac{\pi^2}{4}$

Đặt $u=\sqrt{t}$ dẫn đến:

$$0\le u\le \frac{\pi}{2}$$

$$x=u^2\sin u \to x'(u)=2u\sin u+u^2\cos u$$

$$y=u^2\cos u \to y'(u)=2u\cos u-u^2\sin u$$

Công thức tích phân:

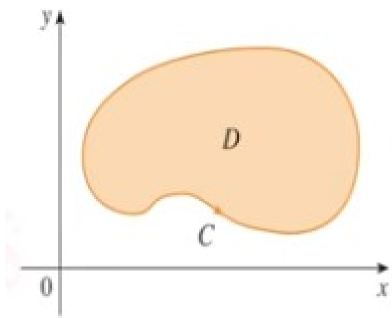
$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[P\left(x(u),y(u)\right).x'(u)+Q\left(x(u),y(u)\right).y'(u)\right]du$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left[\sqrt[4]{u^4\left(\cos^2 u+\sin^2 u\right)}.\left(2u\sin u+u^2\cos u\right)+2u\cos u-u^2\sin u\right]du$$

$$=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left[\frac{u}{2}.\left(2u\sin u+u^2\cos u\right)+2u\cos u-u^2\sin u\right]du=-\frac{3}{2}\pi^2+2$$

CÔNG THỨC GREEN

Chiều dương của đường cong kín. Đường cong kín C là biên của miền D. Chiều dương qui ước trên C là chiều sao cho nếu đi dọc theo C theo chiều này, thì miền D gần nhất sẽ nằm ở phía trái. Chiều ngược lại gọi là chiều âm.



Miền đơn liên. Miền D được gọi là miền đơn liên nếu các biên kín của D có thể co về thành một điểm $P \in D$ mà không bị các biên khác cản trở. Ngược lại, D được gọi là miền đa liên.

Biểu diễn của công thức Green. $D \in R^2$ là miền đơn liên, bị chặn bởi biên kín C với hướng dương. Nếu P, Q cùng các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên D, khi đó:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Nếu C có hướng âm thì:

$$\int_C Pdx + Qdy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Trong một số trường hợp, nếu C là đường cong không kín thì có thể bổ sung C để nhận được đường cong kín và áp dụng công thức hàm Green.

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, trong đó C là đường $x^2+y^2=R^2$

Tính trực tiếp. Đặt $x=R\cos\varphi; y=R\sin\varphi\ (0\le\varphi\le 2\pi)$, sử dụng công thức:

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[P\left(x(t),y(t)\right).x'(t)+Q\left(x(t),y(t)\right).y'(t)\right]dt$$

Dẫn đến:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(R^2\cos\varphi\sin\varphi+R\cos\varphi+R\sin\varphi\right)(-R\sin\varphi)+\left(R^2\cos\varphi\sin\varphi+R\cos\varphi-R\sin\varphi\right)(\right.$$

$$=\frac{R^3}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi\cos 2\varphi+\sin\varphi\cos 2\varphi)d\varphi=0$$

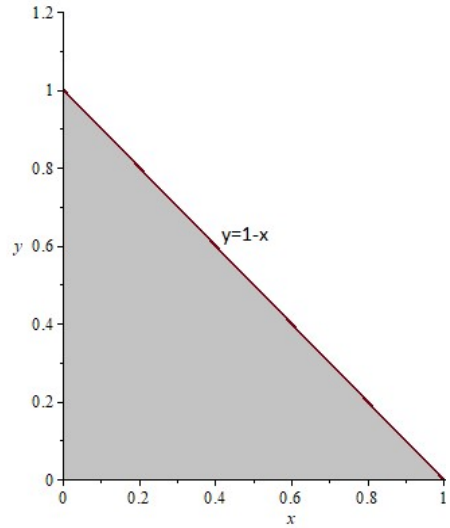
Sử dụng công thức Green.

$$\begin{cases} P(x,y)=xy+x+y\to\dfrac{\partial P}{\partial y}=x+1 \\ Q(x,y)=xy+x-y\to\dfrac{\partial Q}{\partial x}=y+1\end{cases}\to\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y-x$$

$$\to I=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}(y-x)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} ydxdy-\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} xdxdy=0$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C x^2dx+xydy$, trong đó C là biên tam giác tạo nên từ các đoạn thẳng nối từ (0,0) tới (1,0), từ (1,0) tới (0,1), và từ (0,1) tới (0,0)

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ Q(x,y) = xy \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y$$



Dẫn đến:

$I = \iint\limits_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_D ydxdy$, trong đó D là miền được xác định bởi: $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 - x$

$$\to I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} ydy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1 = -$$

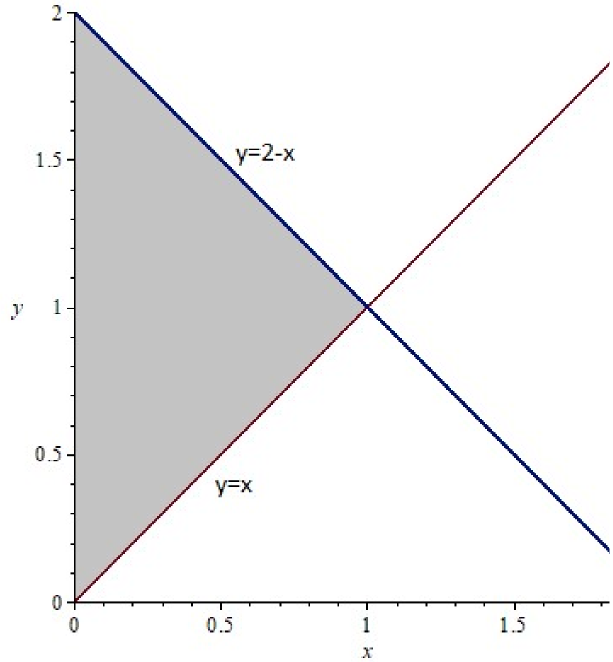
Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C (x^2 + 3y)dx + 2ydy$, trong đó C là biên tam giác tạo nên từ các đoạn thẳng nối từ (0,0) tới (1,1), từ (1,1) tới (0,2), và từ (0,2) tới (0,0) và ngược chiều kim đồng hồ.

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 + 3y \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3 \\ Q(x,y) = 2y \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Dẫn đến:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=-3\iint_D dxdy,$$

trong đó D là miền được xác định bởi: $0\le x\le 1; x\le y\le 2-x$

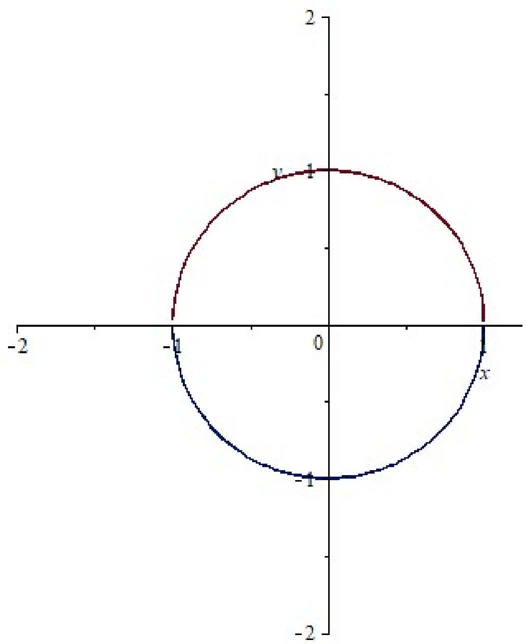


$$\rightarrow I=-3\int_0^1 dx\int_x^{2-x}dy=-3\int_0^1(2-2x)dx$$

$$=-6\int_0^1(1-x)dx=-6.\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=-3$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C \left(2x^3 - y^3\right)dx + \left(x^3 + y^3\right)dy$, trong đó C là đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} P(x,y) = 3x^3 - y^3 \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 \\ Q(x,y) = x^3 + y^3 \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} :$$



Dẫn đến:

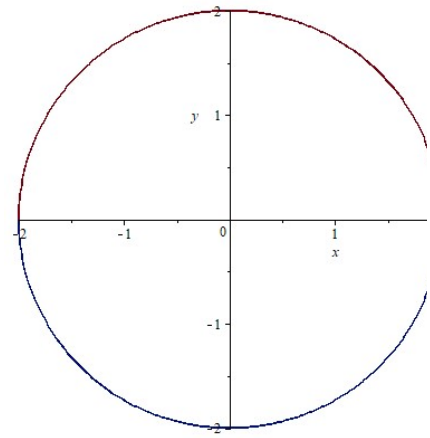
$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 3\left(x^2 + y^2\right)dx$$

Đặt $x = \cos\varphi; y = \sin\varphi \to J = r:$

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} 3\left(x^2 + y^2\right)dxdy = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = 3.2\pi.$$

Bài tập. Tính tích phân $I = \int\limits_C (xy + 4x + 5y)dx + \left(y^2 - 2x + \dfrac{x^2}{2}\right)dy$, trong đó C là đường $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{cases} P(x,y) = xy + 4x + 5y \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = x + 5 \\ Q(x,y) = y^2 - 2x + \dfrac{x^2}{2} \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2 + x \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} =$$



Dẫn đến:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} (-7)\,dxdy$$

Đặt $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi \to J = r:$

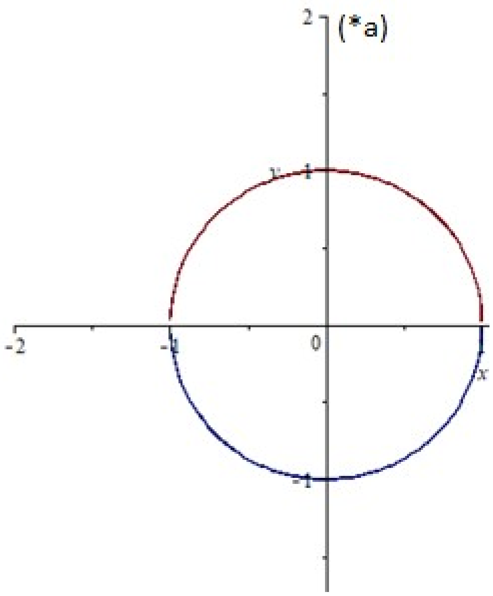
$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} (-7)\,dxdy = -7\int_0^2 rdr \int_0^{2\pi} d\varphi = -7.2\pi.\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^2 = -28$$

Bài tập. Tính tích phân

$I = \int_C \left(xy^4 + x^2 + y\cos xy\right)dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy$, trong đó C:

x=acosφ, $y = bsin\varphi$

$$\begin{cases} P(x,y) = xy^4 + x^2 + y\cos xy \\ Q(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy \end{cases} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x$$



Dẫn đến:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D \left(x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1\right)dx$$

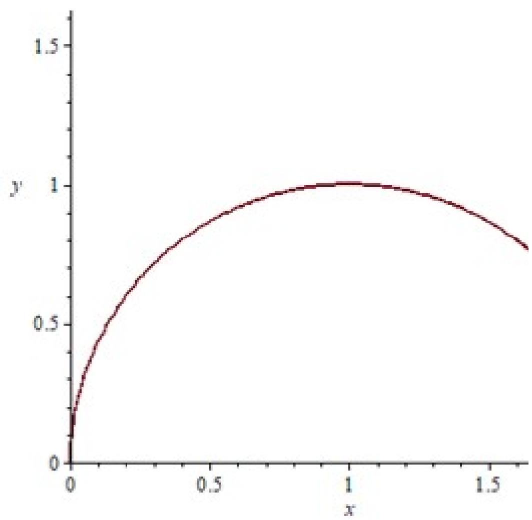
Đặt $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi \rightarrow J = r$:

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 4} (-7)dxdy = -7\int_0^2 rdr\int_0^{2\pi} d\varphi = -7.2\pi.\frac{r^2}{2}\Big|_0^2 =$$

Bài tập. Tính tích phân $\int_C (x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy$, trong đó C là nửa trên đường tròn $x^2+y^2=2x$ cùng chiều kim đồng hồ.

$$I=\int_{C\cup\overline{AO}}(x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy-\int_{\overline{AO}}(x-y)^2\,dx$$

$$=I_1-I_2$$



$$I_1=\int_{C\cup\overline{AO}}(x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial}\right.$$

$$=-\iint_D\big(2(x+y)+2(x-y)\big)dxdy=-4\iint_D xdxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực với $x=r\cos\varphi$:

$$I_1=-4\iint_D xdxdy=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\cos\varphi.rdr=-2\pi$$

Để tính I_2, sử dụng công thức ($y=0$):

$$\int_{AB}Pdx+Qdy=\int_a^b\Big[P\big(x,y(x)\big)+Q\big(x,y(x)\big).y'(x$$

$$\to I_2=\int_2^0\Big[(x-0)^2+(x+0)^2.0\Big]dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^0=-\frac{8}{3}$$

$$\to I=I_1-I_2=-2\pi+\frac{8}{3}$$

Bài tập. Tính tích phân $\int_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, trong đó C là đường $x^2+y^2=2x$

Sử dụng công thức Green:

$$\begin{cases} P(x,y)=xy+x+y \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=x+1 \\ Q(x,y)=xy+x-y \rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y+1 \end{cases} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y-x$$

Dẫn đến:

$$\rightarrow I=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}(y-x)dxdy$$

Đặt $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi$ **ta có: ???**

$$x^2+y^2=2x \rightarrow r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=2r\cos\varphi \rightarrow r=2\cos\varphi$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{r\cos\varphi} r$$

TÍCH PHÂN KHÔNG PHỤ THUỘC ĐƯỜNG