Đề thi Kết thúc môn học, Học kỳ 2 năm học 2019-2020
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(*Thời gian làm bài: 120 phút*)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + (m^2+3)z = m \\ x \qquad + 2z = 0 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $m = 1$.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -3 & 0 \\ -9 & 1 & 3 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & -1 \\ p & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

trong đó p là tham số.

(a) Khi $p = 6$, hãy tính $det(A)$.

(b) Tìm tất cả các giá trị của p để $rank\,(A) < 4$.

Bài 3 (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x,y,z) = (x - 2z, 2x - y - 2z, -2x + 2y + z).$$

(a) Chứng minh T là ánh xạ tuyến tính.

(b) Tìm ma trận chuẩn tắc (chính tắc) của T.

(c) Tìm một cơ sở của không gian ảnh $\text{range}(T) = \text{im}(T)$.

(d) Véc-tơ $(1,2,3)$ có thuộc không gian ảnh $\text{range}(T) = \text{im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$ hay không? Vì sao?

Bài 4. (*2 điểm*) Xét hệ vec-tơ $B = \{(\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13}, 0), (0,1,0,0), (-\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}, 0), (0,0,0,1)\}$.

(a) Chứng minh rằng B là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}_4$ với tích vô hướng thông thường (tích chấm).

(b) Tìm tọa độ của vec-tơ $x = (2,3,4,-1)$ đối với cơ sở B.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Chứng minh $\lambda = 4$ là một giá trị riêng của A.

(b) Tìm một ma trận P khả nghịch và một ma trận đường chéo D (nếu có) sao cho $D = P^{-1}AP$.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 2

Bài 1. Ma trận (bổ sung) của hệ là

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & m^2+3 & m \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Thực hiện biến đổi sơ cấp hàng ta thu được

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & m^2-1 & m-1 \end{pmatrix}$$

(a) Khi $m = 1$, ma trận bổ sung của hệ có dạng hình thang là

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do vậy nghiệm của hệ là $x = -2t$, $y = -1$ và $z = t$ với $t \in \mathbb{R}$.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m:
Với $m \neq \pm 1$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất.
Với $m = -1$ thì hệ vô nghiệm
Với $m = 1$ thì hệ có vô số nghiệm.

Bài 2 a) Có thể chẳng hạn lấy hàng 2 trừ đi hàng 3 rồi khai triển theo cột 2. Kết quả: khi $p = 6$, $\det(A) = -1$.

b) Đưa về dạng bậc thang theo hàng:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3x+19 \end{pmatrix}$$

Các phép biến đổi:
(a) $R_1 + R2$
(b) $R_2 + 9 \times R_1; R_3 + 6 \times R_1; R_4 - x \times R_1$
(c) $R_2 - R_3$
(d) $R_3 - 2 \times R_2$
(e) $R_2 \leftrightarrow R_3$
(f) $R_3 - 3 \times R_2; R_4 + x \times R_2$
(g) $R_4 + 2 \times R_3$
Từ đó $rank\,(A) < 4$ nếu và chỉ nếu $-3x + 19 = 0$, hay $x = 19/3$.

Bài 3. a) [0.25 điểm] $\forall u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
T(u+v) = \;& T(u_1 + v_12, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\
&= \Big(u_1 + v_1 - 2(u_3 + v_3), 2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) - 2(u_3 + v_3), -2(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) + u_3 + v_3\Big) \\
&= (u_1 - 2u_3, 2u_1 - u_2 - 2u_3, -2u_1 + 2u_2 + u_3) + (v_1 - 2v_3, 2v_1 - v_2 - 2v_3, -2v_1 + 2v_2 + v_3) \\
&= T(u) + T(v),
\end{aligned}$$

[0.25 điểm] $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
T(ku) &= T(ku_1, k_u2, ku_3) \\
&= (ku_1 - 2ku_3, 2ku_1 - ku_2 - 2ku_3, -2ku_1 + 2ku_2 + ku_3) \\
&= k(u_1 - 2u_3, 2u_1 - u_2 - 2u_3, -2u_1 + 2u_2 + u_3) \\
&= kT(u).
\end{aligned}$$

b) [*0.5 điểm*] Ma trận chuẩn tắc của T là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c)[0.5 điểm] Qua phép biến đổi sơ cấp cột ta thu được

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nên Vậy $\{(1,2,-2),(0,-1,2),(0,0,1)\}$ là một cơ sở của $\mathrm{Im}(T)$.

d) [*0.5 điểm*] Do $\mathrm{Im}(T)$ có số chiều bằng 3 bằng số chiều của $\mathbb{R}^3$ và $\mathrm{Im}(T) \subset \mathbb{R}^3$, nên $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, nên $(1,2,3) \in \mathrm{Im}(T)$.

Bài 4. (a) Đặt $v_1 = (\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13}, 0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (-\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}, 0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$. Ta có

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i,j = 1,2,3,4, i \neq j$$

tức là $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là tập hợp các vec-tơ trực giao, do đó B độc lập tuyến tính. Vì B là tập hợp 4 vec-tơ độc lập tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}_4$ có số chiều là 4, nên B là một cơ sở của không gian này. Mặt khác, ta có

$$\|v_i\| = 1 \quad \forall i = 1,2,3,4$$

nên B là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}_4$.

(b) Theo công thức hệ số Fourier, ta có tọa độ của vec-tơ x trong cơ sở B là

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x \cdot v_1 \\ x \cdot v_2 \\ x \cdot v_3 \\ x \cdot v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{58}{13} \\ 3 \\ -\frac{4}{13} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bài 5. (a) Đa thức đặc trưng của A:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

Do đó $\lambda = 4$ là 1 giá trị riêng của A.

(b) Từ ý (1) ta thấy A có 2 giá trị riêng là -2 (bội 2) và 4.

Không gian con riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = -2$ là không gian nghiệm của hệ thuần nhất có ma trận hệ số:

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Giải hệ ta được

$$V_{-2}(A) = \{(s-t, s, t) | s, t \in R\}$$

Do đó $V_{-2}(A)$ có một cơ sở là $\{(1,1,0),\ (-1,0,1)\}$

Tương tự $V_4(A)$ có một cơ sở là $\{(1,1,2)\}$.

Đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, ta có chéo hóa của A:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$