Các khái niệm cơ bản

Phương trình vi phân (PTVP) là phương trình có dạng:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Trong đó x là biến độc lập, $y = y(x)$ là ẩn hàm cần tìm và nhất thiết phải có sự tham gia của đạo hàm (cấp nào đó) của ẩn.

Nếu ẩn hàm cần tìm là hàm ẩn nhiều biến (xuất hiện các đạo hàm riêng) thì PTVP gọi là phương trình đạo hàm riêng. PTVP với ẩn hàm là hàm một biến được gọi là PTVP thường.

PTVP cấp n, trong đó n là cấp lớn nhất của đạo hàm của ẩn xuất hiện trong phương trình.

PTVP được gọi là tuyến tính nếu trong phương trình chỉ chứa các số hạng bậc một của $y, y', y'', .., y^{(n)}$.

Giải PTVP là tìm tập hợp các hàm y thỏa mãn PTVP trong khoảng (a,b) nào đó. Lúc này hàm $y(x)$ được gọi là nghiệm của PTVP trong (a,b). Nếu $y(x)$ chỉ thỏa mãn PTVP tại một vài điểm cá biệt thì đó không phải là nghiệm của PTVP.

Ví dụ. $y=x^2$ không là nghiệm của PTVP $xy'+x^2=3x$ do chỉ thỏa mãn tại $x=0, x=1$.

Trong khi $y=\dfrac{2x^4}{7}+\dfrac{1}{x^3}$ là nghiệm của PTVP $xy'+3y=2x^4$ vì ta tính đạo hàm:

$$y'=\frac{8x^3}{7}-\frac{3}{x^4}$$

Và thay vào luôn thỏa mãn PTVP.

Để giải PTVP, dùng phép tính tích phân dẫn đến nghiệm có dạng tổng quát:

$$y=f\left(x,C_1,C_2,...,C_n\right)$$
$$F\left(x,y,C_1,C_2,...,C_n\right)=0$$

Cho $C_1,C_2,...,C_n$ là các hằng số, dẫn đến các nghiệm riêng:

$$y=f\left(x,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0\right)$$
$$F\left(x,y,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0\right)=0$$

Bài toán Cauchy. Đối với phương trình vi phân cấp một, bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện ban đầu cho trước được gọi là bài toán Cauchy:

$$y'=f\left(x,y\right), y\left(x_0\right)=y_0$$

Các phương trình khuyết

1) Phương trình khuyết y: là những phương trình có dạng $F\left(x, y'\right)=0$

+) Nếu giải được $y'=\dfrac{dy}{dx}=f\left(x\right) \Rightarrow y=\int f\left(x\right)dx$

+) Nếu giải được $x=f\left(y'\right)$ thì đặt $y'=\dfrac{dy}{dx}=t$, $x=f\left(t\right)$:

$$\Rightarrow x=f\left(t\right) \Rightarrow dx=f'\left(t\right)dt, dy=tdx=tf'\left(t\right)dt$$

Tích phân cả 2 vế nhận được nghiệm dạng tham số:

$$x=f\left(t\right), y=\int tf'\left(t\right)dt=tf\left(t\right)-\int f\left(t\right)dt$$

+) Nếu giải được $\begin{cases} x=f\left(t\right) \\ y'=g\left(t\right) \end{cases}$ thì ta có:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{f'\left(t\right)dt}=g\left(t\right)$$

Và dẫn đến:

$$\begin{cases} x=f\left(t\right) \\ y=\int g\left(t\right)f'\left(t\right)dt \end{cases}$$

2) Phương trình khuyết x: là những phương trình có dạng $F\left(y, y'\right)=0$

+) Nếu giải được $y'=f\left(y\right)$ thì ta có:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(x\right) \Rightarrow y=\int \frac{1}{f\left(x\right)}dx$$

+) Nếu giải được $y=f\left(y'\right)$ thì đặt:

$$y'=t \Rightarrow y=f\left(t\right), dy=f'\left(t\right)dt=y'dx=tdx$$

Dẫn đến:

$$x=\int \frac{f'(t)}{t}dt, y=f\left(t\right)$$

+) Nếu giải được $y=f\left(t\right), y'=g\left(t\right)$ thì:

$$dy=f'\left(t\right)dt=g\left(t\right)dx \Rightarrow dx=\frac{f'\left(t\right)dt}{g\left(t\right)}x$$

Tích phân cả hai vế nhận được nghiệm dưới dạng tham số:

$$x=\int \frac{f'(t)}{g\left(t\right)}dt, y=f\left(t\right)$$

Phương trình vi phân cấp 1 có biến số phân ly (tách biến)

Phương trình vi phân có biến số phân ly hay còn gọi là phương trình tách biến là phương trình vi phân cấp 1 có dạng như sau:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Nếu $g(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Suy ra tích phân tổng quát:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Nếu $g(y) = 0$ có nghiệm $y = b$ thì $y = b$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ. Giải phương trình $y' = x\left(1+y^2\right)$

Do $1+y^2 \geq 1$ nên chia cả 2 vế cho $1+y^2$:

$$\frac{dy}{dx} = x\left(1+y^2\right) \to \frac{dy}{1+y^2} = xdx$$

Suy ra tích phân tổng quát:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int xdx + C \to \arctan y = \frac{x^2}{2} + C$$

Ví dụ. Giải phương trình $\dfrac{dy}{1+y^2} + \dfrac{dx}{1+x^2} = 0$

Ta có:

$$\frac{dy}{1+y^2} = -\frac{dx}{1+x^2}$$

Lấy tích phân cả 2 vế:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = -\int \frac{dx}{1+x^2} + C$$

$$\to \arctan\left(y\right) + \arctan(x) = C$$

Ví dụ. Cho PTVP $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+2x-5}{y^2}$

a. Tìm nghiệm tổng quát

b. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0)=2$

a. Điều kiện $y \neq 0$

$$y^2dy=\left(x^2+2x-5\right)dx \Rightarrow \frac{y^3}{3}=\frac{x^3}{3}+x^2-5x+C^*$$

$$\Rightarrow y=\sqrt[3]{x^3+3x^2-15x+C}, C=3C^*$$

b. Với điều kiện ban đầu dẫn đến $\sqrt[3]{C}=2 \Rightarrow C=8$

Vậy nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu là: $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2-15x+8}$

Bài tập. Giải PTVP $x\left(1+x^2\right)dy-\left(1+y^2\right)dx=0$

Công thức trên có thể viết dưới dạng:

$$\frac{dy}{1+y^2}-\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}=0$$

Lấy tích phân 2 vế dẫn đến:

$$\int\frac{dy}{1+y^2}-\int\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}=C$$

$$\to \arctan(y)-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|=C$$

Bài tập. Giải PTVP: $\left[4y+\ln\left(1+y^2\right)\right]dy=\left(e^{-2x}+2x^3\right)dx$

Lấy tích phân cả 2 vế: $\int\left[4y+\ln\left(1+y^2\right)\right]dy=\int\left(e^{-2x}+2x^3\right)dx$

$$\Rightarrow 2y^2+\int\ln\left(1+y^2\right)dy=-\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{x^4}{2}+C$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần:

$$u=\ln\left(1+y^2\right),du=\frac{2y}{1+y^2},dv=1\Rightarrow v=y$$

$$\Rightarrow\int\ln\left(1+y^2\right)dy=y\ln\left(1+y^2\right)-\int\frac{2y^2}{1+y^2}dy$$

$$=y\ln\left(1+y^2\right)-2\int\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)dy=y\ln\left(1+y^2\right)-2y+2\arctan y$$

Dẫn đến nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:

$$2y^2 + y\ln\left(1+y^2\right) - 2y + 2\arctan y == -\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{x^4}{2} + C$$

Phương trình vi phân cấp 1 đẳng cấp

Phương trình vi phân cấp 1 đẳng cấp có dạng: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Để tìm nghiệm, đặt $u = \frac{y}{x} \to y = ux$, lấy đạo hàm 2 vế theo x:

$$y' = u + u'x = f(u)$$

Phương trình trên trở thành dạng có biến phân ly:

$$f(u) - u = x\frac{du}{dx}$$

Nếu $f(u) - u \neq 0 \to \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$ dẫn đến tích phân tổng quát:

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Ví dụ. Giải PTVP $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

Đặt $u = \frac{y}{x} \to y = ux$ và $y' = u + u'x = u + e^{u}$, suy ra:

$$u'x = e^{u} \to x\frac{du}{dx} = e^{u} \to e^{-u}du = \frac{dx}{x}$$

Tích phân 2 vế ta có:

$$C - e^{-u} = \ln x$$

$$\to C = \ln x + e^{-u} = \ln x + e^{-\frac{y}{x}}$$

Ví dụ. Giải PTVP $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Đặt $u = \frac{y}{x} \to y = ux$ và $y' = u + u'x = u + \frac{1}{u}$, suy ra:

$$u'x = \frac{1}{u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \Rightarrow udu = \frac{dx}{x}$$

Tích phân 2 vế dẫn đến nghiệm tổng quát của PTVP:

$$\frac{u^2}{2} = \ln Cx \Rightarrow \frac{y^2}{2x^2} = \ln Cx \Rightarrow y = \pm x\sqrt{2\ln Cx}$$

Bài tập. Giải PTVP $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\left(x-y\right)}{x^2}$

$$\frac{y\left(x-y\right)}{x^2}=\frac{\text{yx}}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Đặt $u=\dfrac{y}{x}\to y=ux$ và $y'=u+u'x=u-u^2$, suy ra:

$$u'x=-u^2\Rightarrow x\frac{du}{dx}=-u^2\Rightarrow -\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$$

Tích phân 2 vế dẫn đến nghiệm tổng quát của PTVP:

$$\frac{1}{u}=\ln Cx\Rightarrow \frac{x}{y}=\ln Cx\Rightarrow y=\frac{x}{\ln Cx},Cx>0,Cx\neq 1$$

Bài tập. Giải PTVP $y-xy'=y\ln\dfrac{x}{y}$

Chia cả 2 vế cho $x\to\dfrac{y}{x}-y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{x}{y}\to y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$.

Đặt $u=\dfrac{y}{x}\to y=ux$ và $y'=u+u'x$, suy ra:

$$u+u'x=u+u\ln u\to u'x=u\ln u\to\frac{du}{dx}x=u\ln u\to\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}$$

Tích phân cả 2 vế ta có:

$$\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x} + C \to \ln\left|\ln|u|\right| = \ln|x| + \ln C$$

$$\to \ln\left|\frac{\ln|u|}{x}\right| = \ln C \to \ln|u| = C|x| \to u = e^{C_1 x} \to y = xe^{C_1 x}$$

Bài tập. Giải PTVP: $xdy - ydx = ydy, y\left(-1\right) = 1$

Ta có: $xdy - ydx = ydy \to \left(x - y\right)dy = ydx \to y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-y} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$

Đặt $u = \frac{y}{x} \to y = ux$ và $y' = u + u'x$, suy ra:

$$u + u'x = \frac{u}{1-u} \to \frac{du}{dx}x = \frac{u}{1-u} - u = \frac{u^2}{1-u}$$

$$\to \frac{\left(1-u\right)du}{u^2} = \frac{dx}{x} \to \int \frac{\left(1-u\right)du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\to -\frac{1}{u} - \ln|u| = \ln|x| - C \to \frac{1}{u} + \ln|xu| = C \to x = y\left(C - \ln|y|\right)$$

Kết hợp điều kiện $y(-1) = 1$ dẫn đến: $-1 = 1.\left(C - \ln|1|\right) \to C = -1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -y\left(1 + \ln|y|\right)$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 (không thuần nhất) là phương trình mà biểu thức là tuyến tính đối với ẩn và đạo hàm của nó. Dạng tổng quát là:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm xác định trên khoảng (a, b) nào đó. Nếu $q(x) = 0$, ta nhận được phương trình tuyến tính cấp 1 thuần nhất:

$$y' + p(x)y = 0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất y_1 cộng với nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất y_2 tìm được bằng phương pháp biến thiên hằng số đối với y_1.

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx = y_1 + y_2$$

Công thức thường được áp dụng:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \to e^{\ln x} = x^{\ln e} = x; e^{3\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^3 = x^3$$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Nhân cả 2 vế với $e^{\int p(x)dx}$:

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Hoặc: $$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Lấy tích phân cả 2 vế:

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y' - \frac{y}{x} = x^2$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx = y_1 + y_2$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \to e^{\ln x} = x^{\ln e} = x; e^{3\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^3 = x^3$$

Ta có:

$$p(x) = -\frac{1}{x} \to \int p(x)dx = -\int \frac{1}{x} dx; q(x) = x^2$$

Dẫn đến nghiệm tổng quát:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx = y_1 + y_2$$

$$\Rightarrow y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right) = x\left(C + \int x dx\right) = x\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y'+2y=x^3e^{-2x}$. Tìm nghiệm thỏa mãn $y(0)=1$.

Ta có: $p(x)=2;q(x)=x^3e^{-2x}$, thay thế vào dạng nghiệm của PTVP tuyến tính cấp 1, dẫn đến nghiệm tổng quát của PTVP:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

$$\Rightarrow y=e^{-2\int dx}\left[\int x^3e^{-2x}e^{2\int dx}dx+C\right]=e^{-2x}\left[\int x^3e^{-2x}e^{2x}dx+C\right]=e^{-2x}\left[\frac{x^4}{4}+C\right]$$

Nghiệm của bài toán Cauchy:

$$y(0)=C=1\Rightarrow y=e^{-2x}\left[\frac{x^4}{4}+1\right]$$

Bài tập. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $\left(x^2+1\right)y'+4xy=3$

Chia cả 2 vế cho $x^2 \neq 1$:

$$y'+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{3}{x^2+1}$$

$$p(x)=\frac{4x}{x^2+1}\to\int\frac{4x}{x^2+1}dx=2\ln\left(x^2+1\right);q(x)=\frac{3}{x^2+1}$$

$$\to y=e^{-2\ln\left(x^2+1\right)}\left[\int\frac{3}{x^2+1}e^{2\ln\left(x^2+1\right)}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\left[\int\frac{3}{x^2+1}\left(x^2+1\right)^2dx+C\right]=\frac{x^3+3x+C}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Bài tập. Tìm nghiệm của PTVP $y' + 3xy = x$ đi qua điểm $(0,4)$.

Ta có:

$$p(x) = 3x \to \int p(x)dx = \frac{3x^2}{2}; q(x) = x$$

Dẫn đến nghiệm tổng quát:

$$y = e^{-\frac{3x^2}{2}}\left(\int xe^{\frac{3x^2}{2}}dx + C\right) = e^{-\frac{3x^2}{2}}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{3x^2}{2}} + C\right) = \frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3x^2}{2}}$$

Thay $x = 0, y = 4$ vào đẳng thức trên, ta tìm được $C = \frac{11}{3}$ dẫn đến nghiệm riêng cần tìm là:

$$y = \frac{1}{3} + \frac{11}{3}e^{-\frac{3x^2}{2}}$$

Phương trình Bernoulli

$$y' + p(x)y = y^{\alpha}g(x) \qquad (*)$$

Trong đó α là một số thực nào đó.

+ $\alpha = 1; \alpha = 0$: phương trình trở thành phương trình tuyến tính.

+ $\alpha \neq 1; \alpha \neq 0$: đặt $z = y^{1-\alpha} \rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

Chia cả 2 vế của (*) cho y^{α} và thay $z = y^{1-\alpha}; z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ vào (*):

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\frac{y}{y^{\alpha}} = \frac{y^{\alpha}}{y^{\alpha}}g(x) \rightarrow \frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = g(x)$$

Dẫn đến phương trình vi phân tuyến tính theo z:

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)g(x)$$

Chú ý: *phải xét riêng trường hợp $y = 0$ trước khi chia 2 vế cho y^{α} để tránh làm mất nghiệm này.*

Ví dụ. Giải phương trình $y'+\dfrac{y}{x}=x^2y^4$, $y \neq 0$.

Đây là phương trình Bernoulli có $\alpha = 4$. Chia cả 2 vế cho y^4:

$$y^{-4}y'+\frac{y^{-3}}{x}=x^2 \qquad (*)$$

Đặt $z = y^{-3} \to z'=-3y^{-4}y'$, thay vào phương trình (*) ta có:

$$-\frac{z'}{3}+\frac{z}{x}=x^2 \to z'-3\frac{z}{x}=-3x^2$$

Đây là PTVP tuyến tính cấp 1 theo z nên có nghiệm tổng quát là:

$$z=e^{\int\frac{3}{x}dx}\left(C-3\int e^{-\int\frac{3}{x}dx}x^2dx\right) \to z=Cx^3-3x^3\ln x \to \frac{1}{y^3}=Cx^3-3x^3\ln x$$

Ví dụ. Giải phương trình $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$

Đây là phương trình Bernoulli có $\alpha=\frac{1}{2}$ và $y=0$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Giả sử $y\neq 0$, đặt $z=\sqrt{y}$, khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất:

$$\rightarrow z'=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'=\frac{1}{2}\frac{y'}{\sqrt{y}}\rightarrow\frac{y'}{\sqrt{y}}=2z'$$

Chia cả 2 vế cho $y^{\frac{1}{2}}$ ta nhận được: $x\frac{y'}{\sqrt{y}}-4\frac{y}{\sqrt{y}}=x^2\sqrt{y}\rightarrow 2xz'-4z=x^2$

Chia cả 2 vế cho $2x$ ta nhận được: $z'-\frac{2z}{x}=\frac{2}{x}$

Giải phương trình này, tìm được nghiệm:

$$z=x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)\rightarrow y=x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2$$

Bài tập. Giải phương trình $xy'+y=y^2\ln x, y(1)=1$

Chia cả 2 vế cho $x\rightarrow y'+\frac{1}{x}y=\frac{\ln x}{x}.y^2$ đây là phương trình Bernoulli có $\alpha=2$. Chia cả 2 vế cho y^2 ta nhận được: $y'y^{-2}+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{\ln x}{x}$

Đặt $z=y^{-1}\to z'=-y^{-2}y'$ phương trình trên trở thành: $-z'+\frac{1}{x}z=\frac{\ln x}{x}$

Giải phương trình này, tìm được nghiệm:

$$z=x\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C\right)=\ln x+1+Cx$$

Thay thế điều kiện $y(1)=1$ vào ta có:

$$z(1)=\frac{1}{y(1)}=1=\ln(1)+1+C.1\to C=0$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $z=\ln x+1\to y=\frac{1}{\ln x+1}$

Bài tập. Giải phương trình $y'+\frac{2x}{1+x^2}y+(2x+1)^2y^3=0$.

Đây là phương trình Bernoulli có $\alpha=4$. Xét $y\neq 0$, Chia cả 2 vế cho y^3:

$$y^{-3}y'+\frac{2x}{1+x^2}y^{-2}=-(2x+1)^2 \qquad (*)$$

Đặt $z=y^{-2}\to z'=-2y^{-3}y'$, nhân cả 2 vế với -2 và thay vào phương trình (*) ta có:

$$u'-\frac{4x}{1+x^2}u=2(2x+1)^2$$

+ C1: sử dụng công thức nghiệm $\Rightarrow u=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$

+ C2: Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số.

Giải phương trình thuần nhất:

$$u' - \frac{4x}{1+x^2}u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{4x}{1+x^2}dx \Rightarrow u = C\left(x^2+1\right)^2 \qquad (**)$$

Rõ ràng, $u = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình ứng với $C = 0$.

Để tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất, ta giả sử $C = C(x)$ sao cho nghiệm (**) thỏa mãn phương trình không thuần nhất. Thay (**) cùng đạo hàm của nó vào phương trình không thuần nhất:

$$u = C\left(x^2+1\right)^2 \Rightarrow u' = C'\left(x^2+1\right)^2 + 4x\left(x^2+1\right)C$$

$$C'\left(x^2+1\right)^2 + 4x\left(x^2+1\right)C - \frac{4x}{1+x^2}.C\left(x^2+1\right)^2 = 2\left(2x+1\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx}\left(x^2+1\right) = 2\left(2x+1\right)^2$$

$$\Rightarrow C = \int \frac{2\left(2x+1\right)^2}{x^2+1}dx = 8x - 6\arctan x + 4\ln\left(4\left(x^2+1\right)\right) + 4$$

Vậy nghiệm tổng quát của PTVP:

$$u = \frac{1}{y^2} = \left(1+x^2\right)^2\left[8x - 6\arctan x + 4\ln\left(4\left(x^2+1\right)\right) + 4 + K\right]$$

Phương trình vi phân toàn phần

PTVP dạng: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (*) được gọi là PTVP toàn phần nếu vế trái của nó là vi phân toàn phần của hàm nào đó, nghĩa là tồn tại hàm $U(x,y)$ sao cho:

$$dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình (*) là PTVP toàn phần là: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Khi đó hàm $U(x,y)$ có thể tìm dưới dạng:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$$

Hay: $$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$$

Trong đó (x_0,y_0) là điểm tùy ý mà P,Q liên tục.

Ví dụ. Giải phương trình $\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(x^2y+y^3\right)dy=0$

Ta có: $$P(x,y)=x^3+xy^2;Q(x,y)=x^2y+y^3$$

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy,\forall(x,y)$$

Hệ thức này chứng tỏ phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần với hàm $U(x,y)$ có thể chọn tại $x_0=y_0=0$:

$$U(x,y)=\int_0^x\left(x^3+xy^2\right)dx+\int_0^y\left(0.y+y^3\right)dy$$

$$\rightarrow U(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C_1$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=4C_1=C^2\rightarrow x^2+y^2=C,C>0$$

Ví dụ. Giải phương trình $\left(4xy^2+y\right)dx+\left(4x^2y+x\right)dy=0$

Ta có:

$$P\left(x,y\right)=4xy^2+y;Q\left(x,y\right)=4x^2y+x$$

$$\to\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=8xy,\forall\left(x,y\right)$$

Hệ thức này chứng tỏ phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần với hàm $U(x,y)$ có thể chọn tại $x_0=y_0=0$:

$$U\left(x,y\right)=\int_0^x\left(4xy^2+y\right)dx+\int_0^y\left(4.0.y+x\right)dy$$

$$\to U\left(x,y\right)=2x^2y^2+xy=C$$