Định thức

Hà Minh Lam
hmlam@math.ac.vn

2021 - 2022

Tóm tắt

Tóm tắt

Định thức của ma trận 2×2

Xét

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Định thức của ma trận 2×2

Xét

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Xét hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

khi $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Định thức của ma trận 2×2

Định nghĩa

Định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

được cho bởi công thức:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,.$$

Định thức của ma trận 2×2

Định nghĩa

Định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

được cho bởi công thức:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,.$$

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0\,.$

Định thức con và phần bù đại số

Cho ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})$. Định thức của A được định nghĩa một cách quy nạp theo n.

Định nghĩa

Định thức con *ứng với hàng i và cột j của A, ký hiệu M_{ij}, là định thức của ma trận thu được từ A bằng cách xóa đi hàng i và cột j.*

Phần bù đại số *ứng với hàng i và cột j của A là $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

Định thức con và phần bù đại số

Cho ma trận vuông cấp n: $A = (a_{ij})$. Định thức của A được định nghĩa một cách quy nạp theo n.

Định nghĩa

Định thức con *ứng với hàng i và cột j của A, ký hiệu M_{ij}, là định thức của ma trận thu được từ A bằng cách xóa đi hàng i và cột j.*

Phần bù đại số *ứng với hàng i và cột j của A là $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

Ví dụ: Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

và $C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 6$, $C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -3$.

Định thức con và phần bù đại số

Chú ý:

- Để định nghĩa định thức con của một ma trận vuông cấp n, ta đã thừa nhận rằng định thức của một ma trận vuông cấp $n-1$ đã được định nghĩa và tính được.

Định thức con và phần bù đại số

Chú ý:

- Để định nghĩa định thức con của một ma trận vuông cấp n, ta đã thừa nhận rằng định thức của một ma trận vuông cấp $n-1$ đã được định nghĩa và tính được.
- Nếu i và j cùng chẵn hoặc cùng lẻ thì $C_{ij} = M_{ij}$; nếu i và j khác tính chẵn lẻ thì $C_{ij} = -M_{ij}$.

Định thức của ma trận $n \times n$

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})$ *là ma trận vuông cấp n* $(n \geq 1)$. *Định thức của A, ký hiệu là* $\det(A)$ *hay* $|A|$, *được định nghĩa bằng quy nạp theo n như sau:*

- *Nếu* $n = 1$*:* $\det(A) = a_{11}$.
- *Nếu* $n \geq 2$*:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \cdots + a_{1n} C_{1n} .$$

Định thức của ma trận $n \times n$

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})$ *là ma trận vuông cấp* n $(n \geq 1)$*. Định thức của* A*, ký hiệu là* $\det(A)$ *hay* $|A|$*, được định nghĩa bằng quy nạp theo* n *như sau:*

- *Nếu* $n = 1$*:* $\det(A) = a_{11}$.
- *Nếu* $n \geq 2$*:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \cdots + a_{1n} C_{1n} .$$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Ta tính được $C_{11} = -1$, $C_{12} = 5$, $C_{13} = 4$.

Từ đó $\det(A) = 14$.

Định thức của ma trận $n \times n$

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})$ *là ma trận vuông cấp n* $(n \geq 1)$. *Định thức của A, ký hiệu là* $\det(A)$ *hay* $|A|$, *được định nghĩa bằng quy nạp theo n như sau:*

- *Nếu* $n = 1$*:* $\det(A) = a_{11}$.
- *Nếu* $n \geq 2$*:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \cdots + a_{1n} C_{1n} .$$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Ta tính được $C_{11} = -1$, $C_{12} = 5$, $C_{13} = 4$.
Từ đó $\det(A) = 14$.

Nhận xét: Trong Ví dụ trên, ta vẫn thu được định thức nếu "khai triển" theo một cột hoặc theo một hàng khác.

Tóm tắt

Khai triển Laplace

Định lý (Khai triển Laplace của định thức)

Cho $A = (a_{ij})$ *là một ma trận vuông cấp* n*. Với mọi hàng* i *và với mọi cột* j*, ta có:*

- *Khai triển Laplace theo hàng* i*:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in} \,.$$

- *Khai triển Laplace theo cột* j*:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj} \,.$$

Khai triển Laplace

Định lý (Khai triển Laplace của định thức)

Cho $A = (a_{ij})$ *là một ma trận vuông cấp* n*. Với mọi hàng* i *và với mọi cột* j*, ta có:*

- *Khai triển Laplace theo hàng* i*:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in} .$$

- *Khai triển Laplace theo cột* j*:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj} .$$

Nhận xét: Ta thường chọn khai triển theo một hàng hoặc cột có nhiều số 0 để giảm nhẹ việc tính toán.

Khai triển Laplace

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Khai triển Laplace

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Khai triển theo cột 3: $\det(A) = 3C_{13} = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times 13 = 39\,.$

Định thức của ma trận 3×3

Tính định thức của

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}?$$

Định thức của ma trận 3×3

Tính định thức của

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}?$$

Cách 1: Khai triển theo một hàng hoặc một cột nào đó.

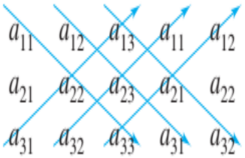
Định thức của ma trận 3×3

Tính định thức của

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ?$$

Cách 1: Khai triển theo một hàng hoặc một cột nào đó.

Cách 2:



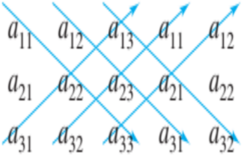
Định thức của ma trận 3×3

Tính định thức của

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ?$$

Cách 1: Khai triển theo một hàng hoặc một cột nào đó.

Cách 2:



$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \,. \end{aligned}$$

Định thức của ma trận tam giác

Ma trận tam giác:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\,, \quad \det(B) = b_{11}b_{22}\dots b_{nn}\,.$$

Định thức của ma trận tam giác

Ma trận tam giác:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ta có:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}, \quad \det(B) = b_{11}b_{22}\dots b_{nn}.$$

Đặc biệt: Ma trận đường chéo.

Tóm tắt

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Nếu tính định thức bằng khai triển Laplace: có thể phải tính tới $n!$ số hạng.

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Nếu tính định thức bằng khai triển Laplace: có thể phải tính tới $n!$ số hạng.

Ý tưởng hiệu quả hơn: đưa về ma trận tam giác.

Định lý

Cho A và B là các ma trận vuông cấp n. Giả sử B nhận được từ A bằng một phép biến đổi sơ cấp p. Các định thức của A và B liên hệ với nhau như sau:

1. *Nếu p là phép đổi chỗ hai hàng thì* $\det(B) = -\det(A)$;
2. *Nếu p là phép nhân một hàng với hằng số $c \neq 0$ thì* $\det(B) = c \det A$;
3. *Nếu p là phép cộng một hàng với bội của một hàng khác thì* $\det(B) = \det(A)$.

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_1 \leftrightarrow h_2)$$

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_1 \leftrightarrow h_2) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_2 - 2h_1)
\end{aligned}$$

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_1 \leftrightarrow h_2) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_2 - 2h_1) \\
&= 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (-1/7 \times h_2)
\end{aligned}$$

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_1 \leftrightarrow h_2) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_2 - 2h_1) \\
&= 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (-1/7 \times h_2) \\
&= 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (h_3 - h_2)
\end{aligned}$$

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_1 \leftrightarrow h_2) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_2 - 2h_1) \\
&= 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (-1/7 \times h_2) \\
&= 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (h_3 - h_2) \\
&= 7 \times (1 \times 1 \times (-1))
\end{aligned}$$

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_1 \leftrightarrow h_2) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (h_2 - 2h_1) \\
&= 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (-1/7 \times h_2) \\
&= 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (h_3 - h_2) \\
&= 7 \times (1 \times 1 \times (-1)) \\
&= -7\,.
\end{aligned}
$$

Tóm tắt

Các phép biến đổi sơ cấp theo cột

- Các khái niệm phép biến đổi sơ cấp theo cột, ma trận tương đương theo cột giống hệt như đối với hàng, trừ việc các tính toán được thực hiện trên cột thay vì hàng.
- Quan hệ giữa các phép biến đổi theo cột và định thức giống hệt giữa các phép biến đổi theo hàng và định thức.

Các phép biến đổi sơ cấp theo cột

- Các khái niệm phép biến đổi sơ cấp theo cột, ma trận tương đương theo cột giống hệt như đối với hàng, trừ việc các tính toán được thực hiện trên cột thay vì hàng.
- Quan hệ giữa các phép biến đổi theo cột và định thức giống hệt giữa các phép biến đổi theo hàng và định thức.

Ví dụ:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ 5 & -10 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} \quad (c_2 + 2c_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Tóm tắt

Điều kiện đủ để định thức bằng 0

Định lý

Một ma trận vuông A có định thức bằng 0 nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- *Có một hàng (hoặc cột) bằng 0;*
- *Có hai hàng (hoặc hai cột) bằng nhau;*
- *Có một hàng (hoặc cột) là một bội của một hàng (hoặc cột) khác*

Điều kiện đủ để định thức bằng 0

Định lý

Một ma trận vuông A có định thức bằng 0 nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- *Có một hàng (hoặc cột) bằng 0;*
- *Có hai hàng (hoặc hai cột) bằng nhau;*
- *Có một hàng (hoặc cột) là một bội của một hàng (hoặc cột) khác*

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 18 & 4 \end{vmatrix} \quad (h_2 - 2h_1).$$

Vì hàng 3 bằng -2 nhân với hàng 2 nên định thức bằng 0.

Tóm tắt

Định thức và phép nhân hai ma trận

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Định thức và phép nhân hai ma trận

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det(A) = -7\,, \det(B) = 11$.

Định thức và phép nhân hai ma trận

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det(A) = -7\,, \det(B) = 11$.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Định thức và phép nhân hai ma trận

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det(A) = -7\,, \det(B) = 11$.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = -77\,.$$

Định thức và phép nhân hai ma trận

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det(A) = -7\,, \det(B) = 11$.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = -77\,.$$

Định lý

Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Định thức và phép nhân hai ma trận

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det(A) = -7\,, \det(B) = 11$.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = -77\,.$$

Định lý

Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Nhận xét: định lý có thể được mở rộng cho tích của nhiều hơn 2 ma trận (vuông, cùng cấp).

Định thức và phép nhân với một số

Ví dụ:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Định thức và phép nhân với một số

Ví dụ:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(2A) = -56\,.$$

Định thức và phép nhân với một số

Ví dụ:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(2A) = -56\,.$$

Định lý

Nếu A là một ma trận vuông cấp n và c là một số thì

$$\det(cA) = c^n \det(A)\,.$$

Tóm tắt

Định thức và ma trận chuyển vị

Định lý

Nếu A là một ma trận vuông thì $\det(A^T) = \det(A)$.

Định thức và ma trận chuyển vị

Định lý

Nếu A là một ma trận vuông thì $\det(A^T) = \det(A)$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\det(A) = \det(A^T) = -6$.

Quiz:

1. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3. Biết rằng $|A| = 2, |B| = 3, |C| = 4$. Khi đó định thức của ma trận $2ABC^{-1}$ bằng bao nhiêu?

Quiz:

1. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3. Biết rằng $|A| = 2, |B| = 3, |C| = 4$. Khi đó định thức của ma trận $2ABC^{-1}$ bằng bao nhiêu?

   Đáp án: $|2ABC^{-1}| = (2^3)(2)(3)(1/4) = 12.$

Quiz:

1. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3. Biết rằng $|A| = 2, |B| = 3, |C| = 4$. Khi đó định thức của ma trận $2ABC^{-1}$ bằng bao nhiêu?

   Đáp án: $|2ABC^{-1}| = (2^3)(2)(3)(1/4) = 12.$

2. Cho
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 108 & 2\cos\frac{\pi}{4} & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 53 \\ 0 & 0 & 4 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Với giá trị nào của m để $|mA| = 1$?

Quiz:

1. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3. Biết rằng $|A| = 2, |B| = 3, |C| = 4$. Khi đó định thức của ma trận $2ABC^{-1}$ bằng bao nhiêu?

   Đáp án: $|2ABC^{-1}| = (2^3)(2)(3)(1/4) = 12.$

2. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 108 & 2\cos\frac{\pi}{4} & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 53 \\ 0 & 0 & 4 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Với giá trị nào của m để $|mA| = 1$?

   Đáp án: $|mA| = (m^4)4$

Quiz:

1. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3. Biết rằng $|A| = 2, |B| = 3, |C| = 4$. Khi đó định thức của ma trận $2ABC^{-1}$ bằng bao nhiêu?

   Đáp án: $|2ABC^{-1}| = (2^3)(2)(3)(1/4) = 12.$

2. Cho
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 108 & 2\cos\frac{\pi}{4} & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 53 \\ 0 & 0 & 4 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Với giá trị nào của m để $|mA| = 1$?

   Đáp án: $|mA| = (m^4)4 \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Tóm tắt

Định thức và tính khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông A là khả nghịch khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$.

Định thức và tính khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông A là khả nghịch khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh (ý chính):

- Giả sử A khả nghịch. Khi đó, vì $AA^{-1} = I_n$ nên $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Suy ra $\det(A) \neq 0$.

Định thức và tính khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông A là khả nghịch khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh (ý chính):

- Giả sử A khả nghịch. Khi đó, vì $AA^{-1} = I_n$ nên $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Suy ra $\det(A) \neq 0$.
- Giả sử $\det(A) \neq 0$. Giả sử B là một ma trận bậc thang thu gọn tương đương theo hàng với A. Vì $\det(A) \neq 0$ nên $\det(B) \neq 0$. Từ đó $B = I_n$. Như vậy A tương đương theo hàng với ma trận đơn vị. Suy ra A khả nghịch.

Định thức và tính khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông A là khả nghịch khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh (ý chính):

- Giả sử A khả nghịch. Khi đó, vì $AA^{-1} = I_n$ nên $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Suy ra $\det(A) \neq 0$.
- Giả sử $\det(A) \neq 0$. Giả sử B là một ma trận bậc thang thu gọn tương đương theo hàng với A. Vì $\det(A) \neq 0$ nên $\det(B) \neq 0$. Từ đó $B = I_n$. Như vậy A tương đương theo hàng với ma trận đơn vị. Suy ra A khả nghịch.

Định lý

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

Tổng hợp các điều kiện khả nghịch

Định lý

Cho A là một ma trận vuông cấp n. Các điều kiện sau là tương đương:

1. *A khả nghịch.*
2. *Hệ pttt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ có nghiệm duy nhất với mọi $\mathbf{b}$.*
3. *Hệ pttt $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ chỉ có nghiệm tầm thường.*
4. *A tương đương theo hàng với I_n.*
5. *A viết được thành tích của các ma trận sơ cấp.*
6. $\det(A) \neq 0$.

Quiz:

Tìm điều kiện cần và đủ của tham số m để hệ phương trình ẩn x và y dưới đây luôn có nghiệm với mọi giá trị của hệ số tự do a, b:

$$\begin{cases} mx & -2y & = a, \\ 4x & +m^2y & = b. \end{cases}$$

Quiz:

Tìm điều kiện cần và đủ của tham số m để hệ phương trình ẩn x và y dưới đây luôn có nghiệm với mọi giá trị của hệ số tự do a, b:

$$\begin{cases} mx & -2y & = a, \\ 4x & +m^2 y & = b. \end{cases}$$

Đáp án: Hệ trên luôn có nghiệm với mọi a, b khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} m & -2 \\ 4 & m^2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2.$$

Tóm tắt

Ma trận phụ hợp

Định nghĩa

Xét ma trận vuông $A = (a_{ij})$. Gọi C_{ij} là phần bù đại số của A tương ứng với hàng i và cột j.

Ma trận phụ hợp *của A, ký hiệu là $adj(A)$, được định nghĩa bởi:*

$$adj(A) = (C_{ij})^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ma trận phụ hợp

Định nghĩa

Xét ma trận vuông $A = (a_{ij})$. Gọi C_{ij} là phần bù đại số của A tương ứng với hàng i và cột j.
Ma trận phụ hợp *của A, ký hiệu là $adj(A)$, được định nghĩa bởi:*

$$adj(A) = (C_{ij})^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chú ý: Các phần bù đại số tương ứng với cùng một *hàng* của A tạo thành một *cột* của ma trận phụ hợp.

Ma trận phụ hợp

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ma trận phụ hợp

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = 4\,, C_{12} = 1\,, C_{13} = 2$$

$$C_{21} = 6\,, C_{22} = 0\,, C_{23} = 3$$

$$C_{31} = 7\,, C_{32} = 1\,, C_{33} = 2$$

Ma trận phụ hợp

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = 4\,, C_{12} = 1\,, C_{13} = 2$$

$$C_{21} = 6\,, C_{22} = 0\,, C_{23} = 3$$

$$C_{31} = 7\,, C_{32} = 1\,, C_{33} = 2$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ma trận phụ hợp

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = 4\,,\, C_{12} = 1\,,\, C_{13} = 2$$

$$C_{21} = 6\,,\, C_{22} = 0\,,\, C_{23} = 3$$

$$C_{31} = 7\,,\, C_{32} = 1\,,\, C_{33} = 2$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A.\text{adj}(A) = ?$$

Ma trận phụ hợp

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = 4\,, C_{12} = 1\,, C_{13} = 2$$

$$C_{21} = 6\,, C_{22} = 0\,, C_{23} = 3$$

$$C_{31} = 7\,, C_{32} = 1\,, C_{33} = 2$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A.\text{adj}(A) = 3I_3 = |A|I_3.$$

Ma trận phụ hợp

Định lý

Với mọi ma trận vuông A, $A.adj(A) = \det(A) I_n$.

Ma trận phụ hợp

Định lý

Với mọi ma trận vuông A, $A.adj(A) = \det(A) I_n$.

Hệ quả

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) .$$

Ma trận phụ hợp

Định lý

Với mọi ma trận vuông A, $A.adj(A) = \det(A) I_n$.

Hệ quả

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\,.$$

Câu hỏi:

Ma trận phụ hợp

Định lý

Với mọi ma trận vuông A, $A.adj(A) = \det(A) I_n$.

Hệ quả

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\,.$$

Câu hỏi:
$|adj(A)| = ?$

Ma trận phụ hợp

Định lý

Với mọi ma trận vuông A, $A.adj(A) = \det(A)I_n$.

Hệ quả

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\,.$$

Câu hỏi:

$|adj(A)| = |A|^{n-1}$.

Ma trận phụ hợp

Định lý

Với mọi ma trận vuông A, $A.adj(A) = \det(A) I_n$.

Hệ quả

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Câu hỏi:

$|adj(A)| = |A|^{n-1}$. $\qquad (adj(A))^{-1} = ?$

Ma trận phụ hợp

Định lý

Với mọi ma trận vuông A, $A.adj(A) = \det(A)I_n$.

Hệ quả

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\,.$$

Câu hỏi:

$|adj(A)| = |A|^{n-1}$. $\qquad (adj(A))^{-1} = \frac{A}{|A|}$.

Ma trận phụ hợp

Định lý

Với mọi ma trận vuông A, $A.adj(A) = \det(A)I_n$.

Hệ quả

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A)\,.$$

Câu hỏi:

$|adj(A)| = |A|^{n-1}$. $\quad (adj(A))^{-1} = \frac{A}{|A|}$. $\quad adj(adj(A)) = ?$

Ma trận phụ hợp

Định lý

Với mọi ma trận vuông A, $A.adj(A) = \det(A) I_n$.

Hệ quả

Nếu ma trận vuông A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\,.$$

Câu hỏi:

$|adj(A)| = |A|^{n-1}$. $\quad (adj(A))^{-1} = \frac{A}{|A|}$. $\quad adj(adj(A)) = |A|^{n-2}A$.

Ma trận phụ hợp

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ma trận phụ hợp

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ta biết A khả nghịch khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0$. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ma trận phụ hợp

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ta biết A khả nghịch khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0$. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Nhận xét: Phương pháp tính nghịch đảo này không hiệu quả cho n lớn.

Tóm tắt

Hệ 2 phương trình 2 ẩn

Xét hệ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Khi $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

Nếu gọi A_1 (A_2) là ma trận nhận được bằng cách thay cột 1 (cột 2) của A bằng vế phải thì nghiệm của hệ được viết lại thành:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}.$$

Quy tắc Cramer

Định lý

Xét hệ pttt n phương trình, n ẩn $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với A không suy biến. Khi đó nghiệm duy nhất của hệ được cho bởi

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

ở đó A_i là ma trận nhận được bằng cách thay cột i của A bằng cột hằng số.

Quy tắc Cramer

Định lý

Xét hệ pttt n phương trình, n ẩn $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với A không suy biến. Khi đó nghiệm duy nhất của hệ được cho bởi

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

ở đó A_i là ma trận nhận được bằng cách thay cột i của A bằng cột hằng số.

Nhận xét: Phương pháp này chỉ áp dụng được cho các hệ pttt "vuông", và cũng không hiệu quả trong thực hành.

Quy tắc Cramer

Định lý

Xét hệ pttt n phương trình, n ẩn $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với A không suy biến. Khi đó nghiệm duy nhất của hệ được cho bởi

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

ở đó A_i là ma trận nhận được bằng cách thay cột i của A bằng cột hằng số.

Nhận xét: Phương pháp này chỉ áp dụng được cho các hệ pttt "vuông", và cũng không hiệu quả trong thực hành.

Ví dụ:

$$\begin{cases} -x+ & 2y- & 3z & = 1 \\ 2x+ & & z & = 0 \\ 3x- & 4y+ & 4z & = 2 \end{cases}$$

Ví dụ (tiếp):

$$\begin{cases} -x+ & 2y- & 3z & = 1 \\ 2x+ & & z & = 0 \\ 3x- & 4y+ & 4z & = 2 \end{cases}$$

Ví dụ (tiếp):

$$\begin{cases} -x+ & 2y- & 3z & = 1 \\ 2x+ & & z & = 0 \\ 3x- & 4y+ & 4z & = 2 \end{cases} \qquad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

Ví dụ (tiếp):

$$\begin{cases} -x+ & 2y- & 3z & = 1 \\ 2x+ & & z & = 0 \\ 3x- & 4y+ & 4z & = 2 \end{cases} \qquad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{4}{5}.$$

Ví dụ (tiếp):

$$\begin{cases} -x+ & 2y- & 3z & = 1 \\ 2x+ & & z & = 0 \\ 3x- & 4y+ & 4z & = 2 \end{cases} \qquad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{4}{5}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(2)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (1)(-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{10} = -\frac{3}{2}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(2)(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{10} = -\frac{8}{5}.$$

Tóm tắt

Diện tích tam giác

Định lý

Diện tích của tam giác có 3 đỉnh $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *và* (x_3, y_3) *được cho bởi công thức:*

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ở đó dấu được chọn sao cho diện tích là một số dương.

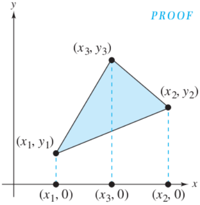
Diện tích tam giác

Định lý

Diện tích của tam giác có 3 đỉnh $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *và* (x_3, y_3) *được cho bởi công thức:*

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ở đó dấu được chọn sao cho diện tích là một số dương.



Hình: Larson et al., p. 164

Ví dụ: Tính diện tích tam giác có các đỉnh $(1, 0), (2, 2), (4, 3)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad \Longrightarrow s = \frac{3}{2}.$$

Điều kiện thẳng hàng

Định lý

Ba điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *và* (x_3, y_3) *thẳng hàng khi và chỉ khi*

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Điều kiện thẳng hàng

Định lý

Ba điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *và* (x_3, y_3) *thẳng hàng khi và chỉ khi*

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Chứng minh: Ba điểm thẳng hàng khi và chỉ khi diện tích "tam giác" tạo bởi chúng bằng 0.

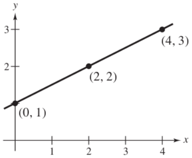
Điều kiện thẳng hàng

Định lý

Ba điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *và* (x_3, y_3) *thẳng hàng khi và chỉ khi*

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Chứng minh: Ba điểm thẳng hàng khi và chỉ khi diện tích "tam giác" tạo bởi chúng bằng 0.



Hình: Larson et al., p. 165

Ví dụ: Ba điểm $(0, 1)\,, (2, 2)\,, (4, 3)$ thẳng hàng vì

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Phương trình đường thẳng

Định lý

Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *được xác định bởi phương trình:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Phương trình đường thẳng

Định lý

Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *được xác định bởi phương trình:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ví dụ: Đường thẳng đi qua $(2, 4)$ và $(-1, 3)$ có phương trình

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

hay $x - 3y + 10 = 0$.

Thể tích tứ diện

Định lý

Thể tích của tứ diện có 4 đỉnh $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ *và* (x_4, y_4, z_4) *được cho bởi công thức:*

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

ở đó dấu được chọn sao cho diện tích là một số dương.

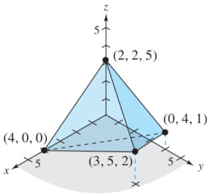
Thể tích tứ diện

Định lý

Thể tích của tứ diện có 4 đỉnh $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ *và* (x_4, y_4, z_4) *được cho bởi công thức:*

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

ở đó dấu được chọn sao cho diện tích là một số dương.



Điều kiện đồng phẳng và phương trình mặt phẳng

Định lý

Bốn điểm $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ *và* (x_4, y_4, z_4) *thuộc cùng một mặt phẳng khi và chỉ khi:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Định lý

Mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ *được xác định bởi phương trình:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$