Cực trị tuyệt đối và cực trị địa phương

Cho hàm $f: D \subset R^2 \rightarrow$R. Gọi $M_0(x_0, y_0) \in D$ và $B(M_0, \delta) \in D$ là 2 điểm lân cận.

1) Hàm $f(x, y)$ có giá trị cực đại tuyệt đối tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in D$$

2) Hàm $f(x, y)$ có giá trị cực tiểu tuyệt đối tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu:

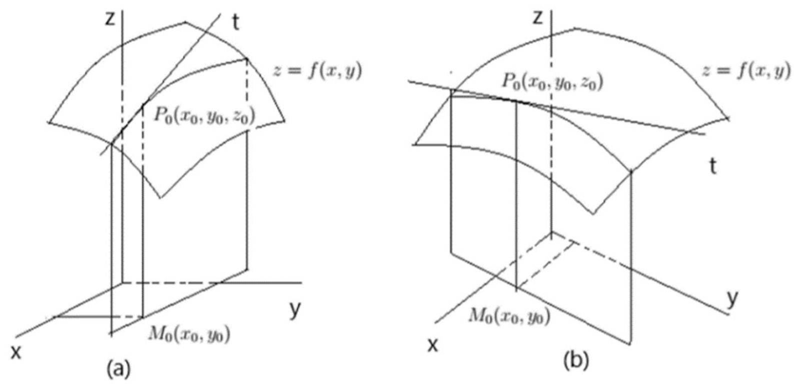
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in D$$

3) Hàm $f(x, y)$ có giá trị cực đại tương đối (cực đại địa phương) tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu nó đạt cực đại tuyệt đối trong lân cận $B(M_0, \delta)$ và f(x_0, y_0) được gọi là giá trị cực đại tương đối của hàm f tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

4) Hàm $f(x, y)$ có giá trị cực tiểu tương đối (cực tiểu địa phương) tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu nó đạt cực tiểu tuyệt đối trong lân cận $B(M_0, \delta)$ và f(x_0, y_0) được gọi là giá trị cực tiểu tương đối của hàm f tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Khi hàm $f(x, y)$ đạt cực đại hay cực tiểu tại M_0 thì được gọi chung là hàm f đạt cực trị tại M_0.

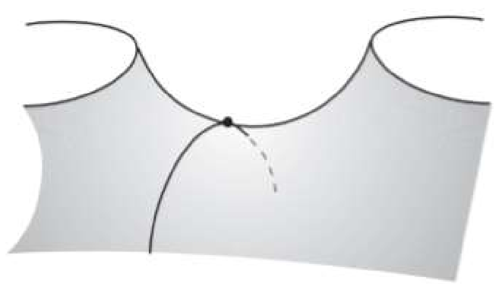
Định lý. Nếu hàm $f(x,y)$ đạt cực trị địa phương tại $M_0(x_0,y_0)$ và giả sử hàm $f(x,y)$ có đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0)$ thì các đạo hàm riêng đó phải bằng 0.



Ý nghĩa hình học của định lý trên là nếu hàm $f(x,y)$ có cực trị địa phương tại $M_0(x_0,y_0)$ thì mặt phẳng tiếp tuyến với mặt $f(x,y)$ tại $M_0(x_0,y_0)$ nằm ngang.

Điểm $M_0(x_0,y_0)$ nói trên được gọi là điểm dừng (stationary point) hoặc điểm tới hạn (critical point).

Điểm dừng trở thành điểm yên ngựa (saddle point) khi lân cận $B(M_0,\delta)$ luôn chứa những điểm (x,y) sao cho $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ và những điểm khác $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.



Điểm yên ngựa tiêu biểu

Phương pháp tìm cực trị địa phương

Định lý *(điều kiện cần)*: Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ mà tại đó hàm số đạt cực trị thì:

$$f_x^{'}(x_0, y_0) = 0; f_y^{'}(x_0, y_0) = 0 \;\; (*)$$

Các điểm thỏa mãn (*) được gọi là các điểm dừng hoặc điểm tới hạn.

Định lý *(điều kiện đủ)*: Giả sử điểm $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của hàm số $z = f(x, y)$ và hàm số đó có các đạo hàm riêng đến cấp hai:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}; B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}; C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$$

- $\Delta = B^2 - A.C > 0$: hàm số không có cực trị (có điểm yên ngựa tại M_0).
- $\Delta = B^2 - A.C = 0$: không kết luận về bản chất của hàm số tại M_0.
- $\Delta = B^2 - A.C < 0$: hàm số đạt cực đại tại M_0 nếu $A < 0$ và đạt cực tiểu tại M_0 nếu $A > 0$.

Phương pháp này gọi là phương pháp ma trận Hesse (Hessian):

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx}^{"} & f_{xy}^{"} \\ f_{yx}^{"} & f_{yy}^{"} \end{pmatrix}$$

Định thức của ma trận Hesse:

$$\det(\mathbf{H}) = \begin{vmatrix} f_{xx}^{"} & f_{xy}^{"} \\ f_{yx}^{"} & f_{yy}^{"} \end{vmatrix} = f_{xx}^{"} f_{yy}^{"} - \left(f_{xy}^{"}\right)^2$$

Bài tập. Tìm cực trị của hàm số: $z = xy\ln(x^2 + y^2)$

Hàm số xác định $\forall(x, y) \in R^2\backslash(0,0)$. Tính:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{y}\ln(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)+\frac{2\mathrm{x}^2\mathrm{y}}{x^2+y^2} = 0; \frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{x}\ln(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)+\frac{2\mathrm{xy}^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0; \frac{\partial z}{\partial y}=0 \rightarrow M_1(1,0), M_2(-1,0), M_3(0,1), M_4(0,-1)$$

$$M_5\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right), M_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right), M_7\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), M_8\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$$

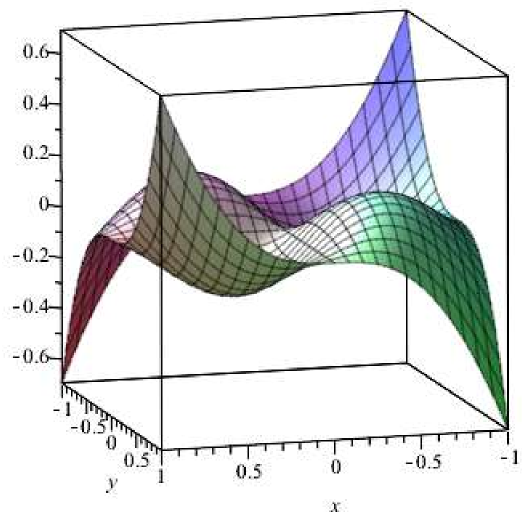
$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{6xy}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6xy}{x^2+y^2} - \frac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \ln\left(x^2+y^2\right) + 2 - \frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Tại M_1, M_2, M_3, M_4 có $A = 0, C = 0, B = 2$, dẫn đến $B^2 - AC = 4 > 0$, vì vậy các điểm này không phải là các điểm cực trị.

Tại M_5, M_8 có $B = 1, A = C = 2 > 0, B^2 - A.C = -3 < 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $M_5, M_8 \rightarrow z_{min} = z(M_5) = z(M_8) = -\frac{1}{2e}$.

Tại M_6, M_7 có $B = 1, A = C = -2 < 0, B^2 - A.C = -3 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $M_6, M_7 \rightarrow z_{max} = z(M_6) = z(M_7) = \frac{1}{2e}$.



0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-1
-0.5
0
0.5
1
y
0.5
0
-0.5
-1
x

Bài tập. Tìm cực trị của hàm số:

$$a)z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 1 = 0; \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1; y = 1$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

$$B^2 - AC = 1 - 4 = -3 < 0; A = 2 > 0 \Rightarrow z_{\min} = z(-1,1) = ?$$

$$b)z = x + y - x.e^y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - e^y = 0; \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - x.e^y = 0 \Rightarrow x = 1; y = 0$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -1$$

$$B^2 - AC = 1 + 0 = 1 > 0 \Rightarrow diem\, yen\, ngua$$

$$c)z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

$$d)z = x^2 + y^2 - e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2x.e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0; \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2y.e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0 \Rightarrow x = 0; y = 0$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 + 2.e^{-\left(x^2+y^2\right)} + 2x(-2x)e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 4$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x(-2y).e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 + 2.e^{-\left(x^2+y^2\right)} + 2y(-2y).e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 4$$

$$B^2 - A.C = -16 < 0; A = 4 > 0 \Rightarrow z_{\min} = z(0,0) = -1$$

Cực trị có điều kiện, nhân tử Lagrange

Bài toán. Tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$

+ Trường hợp 1: Nếu từ $\varphi(x, y) = 0$ có thể rút ra được $x = g(y)$ hoặc $y = h(x)$ thì thay vào $z = f(x, y)$ ta được hàm một biến, từ đó tìm cực trị của hàm một biến.

+ Trường hợp 2. Nếu từ $\varphi(x, y) = 0$ không thể rút ra được $x = g(y)$ hoặc $y = h(x)$ thì ta lập hàm Lagrange:

$$F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

Xét điều kiện cần của cực trị: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$

Điều kiện đủ: - Nếu $d^2F\big|_{(M_0, \lambda_0)} > 0 \to$ hàm số đạt cực tiểu tại $M_0(x_0, y_0)$

- Nếu $d^2F\big|_{(M_0, \lambda_0)} < 0 \to$ hàm số đạt cực đại tại $M_0(x_0, y_0)$

Bài tập. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$ sử dụng phương pháp xét dấu đạo hàm và chiều biến thiên của hàm số.

$$y = \frac{5-2x}{3} \Rightarrow f(x,y) = f(x) = \frac{x(5-2x)}{3} = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x$$

Bài tập. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$ sử dụng phương pháp hàm nhân tử Lagrange.

$$F(x,y) = xy + \lambda(2x+3y-5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda = 0; \frac{\partial F}{\partial y} = x + 3\lambda = 0; 2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 = 2dxdy$$

$$2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 2dx = -3dy \Rightarrow dy = -\frac{2}{3}dx$$

$$\Rightarrow d^2F = -\frac{4}{3}dx^2 \le 0 \Rightarrow z_{\max} = z\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$$

Bài tập. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ với điều kiện $(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$

Lập hàm nhân tử Lagrange: $F = 1 - x^2 - y^2 + \lambda\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1\right]$

Tìm điểm dừng từ hệ:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = -2x + 2\lambda(x-1) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y + 2\lambda(y-1) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

Dẫn đến 2 điểm dừng:

$M_1\left(\lambda = 1 + \sqrt{2}; x = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}; y = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $M_2\left(\lambda = 1 - \sqrt{2}; x = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}; y = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Tính vi phân toàn phần cấp 2:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2 + 2\lambda; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2 + 2\lambda$$

$$\to d^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 = -2(1-\lambda)dx^2 - 2(1-\lambda)dy^2 \quad (*)$$

Xét $M_1\left(\lambda = 1+\sqrt{2}; x = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}; y = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, thay $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ vào (*) dẫn đến:

$$d^2F = -2\left(1-1-\sqrt{2}\right)dx^2 - 2\left(1-1-\sqrt{2}\right)dy^2 = 2\left(\sqrt{2}\right)dx^2 + 2\left(\sqrt{2}\right)dy^2 = 2\sqrt{2}\left(dx^2 + dy^2\right) \geq 0$$

Do đó hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $M_1\left(x = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}; y = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ với điều kiện đã cho và đạt giá trị $f_{min} = -2(1 + \sqrt{2})$.

Xét $M_2\left(\lambda = 1-\sqrt{2}; x = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}; y = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, thay vào (*) dẫn đến:

$$d^2F = -2\left(1-1+\sqrt{2}\right)dx^2 - 2\left(1-1+\sqrt{2}\right)dy^2 = -2\left(\sqrt{2}\right)dx^2 - 2\left(\sqrt{2}\right)dy^2 = -2\sqrt{2}\left(dx^2 + dy^2\right) \leq 0$$

Do đó hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm $M_2\left(x = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}; y = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ với điều kiện đã cho và đạt giá trị $f_{max} = -2(1 - \sqrt{2})$.

Bài tập. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = y^2 + 10x$ với điều kiện $2y^2 - 5x^2 = 12$.

Bài tập. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 2x + 9y + 1$ với điều kiện $x^2 + 3y^2 = 31$.

$$+)\, f\left(x,y\right)=y^2+10x;2y^2-5x^2=12$$
$$F=y^2+10x+\lambda\left(12+5x^2-2y^2\right)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}=10+10\lambda x=0;\frac{\partial F}{\partial y}=2y-4\lambda y=0;2y^2-5x^2=12$$
$$\Rightarrow x=-2;y=\pm 4;\lambda=\frac{1}{2};M_1\left(-2,4,\frac{1}{2}\right);M_2\left(-2,-4,\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=10\lambda;\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0;\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2-4\lambda$$
$$\Rightarrow d^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2=10\lambda dx^2+\left(2-4\lambda\right)dy^2=5dx^2\geq 0$$

$$+)\, f\left(x,y\right)=2x+9y+1;x^2+3y^2=31$$
$$F=2x+9y+1+\lambda\left(x^2+3y^2-31\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2+2\lambda x=0;\frac{\partial F}{\partial y}=9+6\lambda y=0;x^2+3y^2=31$$
$$M_1\left(-2,-3,\frac{1}{2}\right);M_2\left(2,3,-\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda;\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0;\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=6\lambda$$
$$\Rightarrow d^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2=2\lambda dx^2+6\lambda dy^2=2\lambda\left(dx^2+3dy^2\right)$$

Bài tập. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ với điều kiện $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Lập hàm nhân tử Lagrange: $F = x^2 + y^2 - xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

Tìm điểm dừng từ hệ: $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x - y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(1+\lambda)x = 0 \\ 2(1+\lambda)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Nhận thấy: $x \neq 0; y \neq 0 \rightarrow 2(1+\lambda) = \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y} \rightarrow x^2 = y^2$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$$

$a) x = y = \pm\dfrac{1}{2} \rightarrow 2(1+\lambda) = 1 \rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2}$

$b) x = -y = \pm\dfrac{1}{2} \rightarrow 2(1+\lambda) = -1 \rightarrow \lambda = -\dfrac{3}{2}$

Vì thế cần xét 4 điểm tới hạn:

$$+) \lambda = -\frac{1}{2} : M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+) \lambda = -\frac{3}{2} : M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Tính vi phân toàn phần cấp 2:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 + 2\lambda; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -1; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 + 2\lambda$$

$$\Rightarrow d^2F(x, y) = (2 + 2\lambda)dx^2 - 2dxdy + (2 + 2\lambda)dy^2$$

+) Xét M_1, M_2 có $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$d^2F(x, y) = dx^2 - 2dxdy + dy^2 = (dx - dy)^2 \geq 0$$

Vì vậy M_1, M_2 là 2 điểm cực tiểu, đạt giá trị $f_{min} = 1/2$.

+) Xét M_3, M_4 có $\lambda = -\frac{3}{2}$:

$$d^2F(x, y) = -dx^2 - 2dxdy - dy^2 = -(dx + dy)^2 \leq 0$$

Vì vậy M_3, M_4 là 2 điểm cực đại, đạt giá trị $f_{max} = 3/2$.

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong miền kín

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $z = f(x, y)$ trong miền kín $D⊂R$, ta làm như sau:

- Tìm các điểm nghi ngờ (tới hạn) trong miền D (cực trị địa phương);
- Tìm các điểm nghi ngờ (tới hạn) trên biên Γ của miền D (cực trị có điều kiện, điều kiện chính là phương trình biên Γ);
- Tính giá trị tại các điểm nghi ngờ trong D và trên Γ, so sánh giá trị lớn nhất, bé nhất.

Bài tập. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm $z = x^2 - y^2$ trong miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 4$

Hàm $z = x^2 - y^2$ liên tục $\forall(x, y) \in R^2$. Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

Vậy chỉ có điểm gốc tọa độ (0,0) là điểm tới hạn nằm trong miền D.

Xét giá trị của z trên biên của miền D (tức là trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$:

$$y^2 = 4 - x^2 \to z = 2x^2 - 4$$

Trong $-2 \leq x \leq 2$, z đạt giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \pm 2$ và đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi x=0. So sánh với giá trị của z tại điểm tới hạn (0,0) ta thấy rằng hàm số z đạt giá trị lớn nhất bằng 4 tại (-2,0) và (2,0), đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 tại (0,-2) và (0,2).