Chéo hóa và chéo hóa trực giao

Hà Minh Lam
hmlam@math.ac.vn

2021-2022

Tóm tắt

1. Chéo hóa ma trận vuông
   - Ma trận chéo hóa được
   - Điều kiện chéo hóa được
2. Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng
   - Chéo hóa ma trận đối xứng
   - Ma trận trực giao
   - Chéo hóa trực giao

Tóm tắt

Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là chéo hóa được *nếu nó đồng dạng với một ma trận đường chéo. Nói cách khác, tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo.*

Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là chéo hóa được *nếu nó đồng dạng với một ma trận đường chéo. Nói cách khác, tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo.*

Ví dụ: Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ chéo hóa được vì với

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

thì $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Tóm tắt

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Nhận xét:

- Hai ma trận vuông đồng dạng thì có cùng các giá trị riêng.

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Nhận xét:

- Hai ma trận vuông đồng dạng thì có cùng các giá trị riêng.
- Ma trận tam giác (đặc biệt: ma trận đường chéo) cấp n có n giá trị riêng (tính cả bội).

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Nhận xét:

- Hai ma trận vuông đồng dạng thì có cùng các giá trị riêng.
- Ma trận tam giác (đặc biệt: ma trận đường chéo) cấp n có n giá trị riêng (tính cả bội).

Mệnh đề

Nếu ma trận vuông A cấp n là chéo hóa được thì nó có n giá trị riêng tính cả bội.

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Nhận xét:

- Hai ma trận vuông đồng dạng thì có cùng các giá trị riêng.
- Ma trận tam giác (đặc biệt: ma trận đường chéo) cấp n có n giá trị riêng (tính cả bội).

Mệnh đề

Nếu ma trận vuông A cấp n là chéo hóa được thì nó có n giá trị riêng tính cả bội.

Chú ý: Điều ngược lại chưa chắc đúng.

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Nhận xét:

- Hai ma trận vuông đồng dạng thì có cùng các giá trị riêng.
- Ma trận tam giác (đặc biệt: ma trận đường chéo) cấp n có n giá trị riêng (tính cả bội).

Mệnh đề

Nếu ma trận vuông A cấp n là chéo hóa được thì nó có n giá trị riêng tính cả bội.

Chú ý: Điều ngược lại chưa chắc đúng.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ có giá trị riêng $\lambda = 1$ bội 2 nhưng A không chéo hóa được.

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Giả sử A chéo hóa được: $P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Giả sử A chéo hóa được: $P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Ký hiệu $\mathbf{p}_i$ là vector cột thứ i của P. Ta có:

$$A\,[\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \ldots\ \mathbf{p}_n] = AP = PD = [\lambda_1\mathbf{p}_1\ \lambda_2\mathbf{p}_2\ \ldots\ \lambda_n\mathbf{p}_n]$$

Suy ra $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$. Các vector $\mathbf{p}_i$ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm toàn các vector riêng của A.

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Giả sử A chéo hóa được: $P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Ký hiệu $\mathbf{p}_i$ là vector cột thứ i của P. Ta có:

$$A\,[\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \ldots\ \mathbf{p}_n] = AP = PD = [\lambda_1\mathbf{p}_1\ \lambda_2\mathbf{p}_2\ \ldots\ \lambda_n\mathbf{p}_n]$$

Suy ra $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$. Các vector $\mathbf{p}_i$ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm toàn các vector riêng của A.

Định lý

Ma trận A chéo hóa được khi và chỉ khi nó có n vector riêng độc lập tuyến tính.

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Giả sử A chéo hóa được: $P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Ký hiệu $\mathbf{p}_i$ là vector cột thứ i của P. Ta có:

$$A\,[\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \ldots \ \mathbf{p}_n] = AP = PD = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \ \lambda_2\mathbf{p}_2 \ \ldots \ \lambda_n\mathbf{p}_n]$$

Suy ra $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$. Các vector $\mathbf{p}_i$ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm toàn các vector riêng của A.

Định lý

Ma trận A chéo hóa được khi và chỉ khi nó có n vector riêng độc lập tuyến tính.

Định lý

Nếu A có n giá trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Ví dụ: Chéo hóa $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Ví dụ: Chéo hóa $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Đa thức đặc trưng: $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

$(2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_1 = [-1\ 0\ 1]^T$

$(-2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_2 = [1\ \ -1\ 4]^T$

$(3I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_3 = [-1\ 1\ 1]^T$

Giá trị riêng của ma trận chéo hóa được

Ví dụ: Chéo hóa $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Đa thức đặc trưng: $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

$(2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_1 = [-1\ 0\ 1]^T$
$(-2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_2 = [1\ -1\ 4]^T$
$(3I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_3 = [-1\ 1\ 1]^T$

Đặt $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, ta có $P^{-1}AP = diag(2, -2, 3)$.

Tóm tắt

Giá trị riêng của ma trận đối xứng

Cho A là một ma trận đối xứng cấp n: $A = A^T$.

Định lý

Cho A là một ma trận đối xứng. Khi đó các khẳng định sau là đúng:

1. *A chéo hóa được.*
2. *Tất cả các giá trị riêng của A là thực.*
3. *Nếu λ là một giá trị riêng bội k của A thì không gian con riêng của A ứng với λ có số chiều là k (nghĩa là A có k vector riêng độc lập tuyến tính ứng với λ).*

Giá trị riêng của ma trận đối xứng

Ví dụ:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ chéo hóa được với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Giá trị riêng của ma trận đối xứng

Ví dụ:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ chéo hóa được với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ có $\det(\lambda I - A_2) = (\lambda+1)^2(\lambda-3)^2$.

   Với $\lambda_1 = -1$, có 2 vector riêng độc lập tuyến tính

   $$\mathbf{u}_1 = [1\ 1\ 0\ 0]^T, \mathbf{u}_2 = [0\ 0\ 1\ 1]^T.$$

   Với $\lambda_2 = 3$, có 2 vector riêng độc lập tuyến tính

   $$\mathbf{u}_3 = [1\ -1\ 0\ 0]^T, \mathbf{u}_4 = [0\ 0\ 1\ -1]^T.$$

Tóm tắt

Ma trận trực giao

Định nghĩa

Ma trận vuông P được gọi là trực giao *nếu nó khả nghịch và $P^{-1} = P^T$.*

Ma trận trực giao

Định nghĩa

Ma trận vuông P được gọi là trực giao nếu nó khả nghịch và $P^{-1} = P^T$.

Nhận xét:

- Ma trận P là trực giao khi và chỉ khi $PP^T = P^T P = I$.

Ma trận trực giao

Định nghĩa

Ma trận vuông P được gọi là trực giao *nếu nó khả nghịch và $P^{-1} = P^T$.*

Nhận xét:

- Ma trận P là trực giao khi và chỉ khi $PP^T = P^TP = I$.
- Ma trận P là trực giao khi và chỉ khi P^T là trực giao.

Ma trận trực giao

Định nghĩa

Ma trận vuông P được gọi là trực giao *nếu nó khả nghịch và $P^{-1} = P^T$.*

Nhận xét:

- Ma trận P là trực giao khi và chỉ khi $PP^T = P^TP = I$.
- Ma trận P là trực giao khi và chỉ khi P^T là trực giao.

Ví dụ:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Nhận biết ma trận trực giao

Định lý

Ma trận vuông P là trực giao khi và chỉ khi các vector cột (hàng) của nó tạo thành một hệ trực chuẩn.

Tóm tắt

1. Chéo hóa ma trận vuông
   - Ma trận chéo hóa được
   - Điều kiện chéo hóa được
2. Chéo hóa trực giao ma trận đối xứng
   - Chéo hóa ma trận đối xứng
   - Ma trận trực giao
   - Chéo hóa trực giao

Vector riêng của ma trận đối xứng

Định lý

Giả sử A là một ma trận đối xứng. Giả sử λ_1, λ_2 *là hai giá trị riêng khác nhau của A và* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ *tương ứng là vector riêng của* λ_1, λ_2. *Khi đó* $\mathbf{x}_1$ *và* $\mathbf{x}_2$ *vuông góc (trực giao) với nhau.*

Vector riêng của ma trận đối xứng

Định lý

Giả sử A là một ma trận đối xứng. Giả sử λ_1, λ_2 là hai giá trị riêng khác nhau của A và $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ tương ứng là vector riêng của λ_1, λ_2. Khi đó $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ vuông góc (trực giao) với nhau.

Chứng minh:

- $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$.

Vector riêng của ma trận đối xứng

Định lý

Giả sử A là một ma trận đối xứng. Giả sử λ_1, λ_2 là hai giá trị riêng khác nhau của A và $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ tương ứng là vector riêng của λ_1 , λ_2. Khi đó $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ vuông góc (trực giao) với nhau.

Chứng minh:

- $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$.
- $\lambda_1 < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 >= \lambda_1\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 = (A\mathbf{x}_1)^T\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T A^T\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T(\lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_2\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 = \lambda_2 < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 >$.

Vector riêng của ma trận đối xứng

Định lý

Giả sử A là một ma trận đối xứng. Giả sử λ_1, λ_2 là hai giá trị riêng khác nhau của A và $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ tương ứng là vector riêng của λ_1 , λ_2. Khi đó $\mathbf{x}_1$ và $\mathbf{x}_2$ vuông góc (trực giao) với nhau.

Chứng minh:

- $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2$.
- $\lambda_1 < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 >= \lambda_1 \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 = (A\mathbf{x}_1)^T \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T A^T \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T(\lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_2 \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 = \lambda_2 < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 >$.
- $(\lambda_1 - \lambda_2) < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 >= 0$, mà $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, nên $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 >= 0$.

Chéo hóa trực giao

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là chéo hóa trực giao được *nếu tồn tại một ma trận trực giao P cấp n sao cho $P^{-1}AP = P^{T}AP$ là một ma trận đường chéo.*

Chéo hóa trực giao

Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là chéo hóa trực giao được *nếu tồn tại một ma trận trực giao P cấp n sao cho $P^{-1}AP = P^{T}AP$ là một ma trận đường chéo.*

Định lý

Ma trận vuông A cấp n là chéo hóa trực giao được và có n giá trị riêng thực khi và chỉ khi A là một ma trận đối xứng.

Phương pháp chéo hóa trực giao

Ý tưởng: Tìm một cơ sở trực chuẩn gồm các vector riêng.

Phương pháp chéo hóa trực giao

Ý tưởng: Tìm một cơ sở trực chuẩn gồm các vector riêng.

Các bước thực hiện:

1. Giải phương trình đặc trưng để tìm các giá trị riêng (tính cả bội).
2. Với mỗi giá trị riêng, tìm một cơ sở của không gian con riêng tương ứng rồi trực chuẩn hóa bằng Gram-Schmidt.
3. Tạo ma trận P với các *cột* là các vector riêng trực chuẩn tìm được.

Ví dụ chéo hóa trực giao

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ chéo hóa trực giao

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 3)(\lambda - 2) \implies$ có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = -3\,, \lambda_2 = 2$.

Ví dụ chéo hóa trực giao

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 3)(\lambda - 2) \implies$ có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = -3\,, \lambda_2 = 2.$

Với $\lambda_1 = -3$ tìm được $\mathbf{u}_1 = [-2\ 1]^T$, chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_1 = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T$.

Với $\lambda_2 = 2$ tìm được $\mathbf{u}_2 = [1\ 2]^T$, chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right]^T$.

Ví dụ chéo hóa trực giao

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 3)(\lambda - 2) \implies$ có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = -3\,, \lambda_2 = 2$.

Với $\lambda_1 = -3$ tìm được $\mathbf{u}_1 = [-2\ 1]^T$, chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_1 = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right]^T$.

Với $\lambda_2 = 2$ tìm được $\mathbf{u}_2 = [1\ 2]^T$, chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right]^T$.

Từ đó $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ và $P^TAP = diag(-3, 2)$.

Ví dụ chéo hóa trực giao

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ chéo hóa trực giao

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 6)(\lambda - 3)^2 \implies$ có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = -6\,, \lambda_2 = 3$ (bội 2).

Ví dụ chéo hóa trực giao

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 6)(\lambda - 3)^2 \implies$ có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = -6\,, \lambda_2 = 3$ (bội 2).

Với $\lambda_1 = -6$ tìm được $\mathbf{u}_1 = [1\ -2\ 2]^T$, chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_1 = \left[\frac{1}{3}\ \ -\frac{2}{3}\ \ \frac{2}{3}\right]^T$.

Với $\lambda_2 = 3$ tìm được $\mathbf{u}_2 = [2\ 1\ 0]^T$ và $\mathbf{u}_3 = [-2\ 0\ 1]^T$, trực chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}\ \ \frac{1}{\sqrt{5}}\ \ 0\right]^T$ và $\mathbf{v}_3 = \left[-\frac{2}{3\sqrt{5}}\ \ \frac{4}{3\sqrt{5}}\ \ \frac{5}{3\sqrt{5}}\right]^T$.

Ví dụ chéo hóa trực giao

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 6)(\lambda - 3)^2 \implies$ có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = -6\,, \lambda_2 = 3$ (bội 2).

Với $\lambda_1 = -6$ tìm được $\mathbf{u}_1 = [1\ \ -2\ 2]^T$, chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_1 = \left[\frac{1}{3}\ \ -\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\right]^T$.

Với $\lambda_2 = 3$ tìm được $\mathbf{u}_2 = [2\ 1\ 0]^T$ và $\mathbf{u}_3 = [-2\ 0\ 1]^T$, trực chuẩn hóa thành $\mathbf{v}_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\ 0\right]^T$ và $\mathbf{v}_3 = \left[-\frac{2}{3\sqrt{5}}\ \frac{4}{3\sqrt{5}}\ \frac{5}{3\sqrt{5}}\right]^T$.

Từ đó $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ và $P^TAP = diag(-6, 3, 3)$.

Quiz

1) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm một ma trận trực giao P và một ma trận đường chéo D sao cho $A = P^T DP$.

Quiz

1) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm một ma trận trực giao P và một ma trận đường chéo D sao cho $A = P^T DP$.

Đáp án:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quiz

2) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm một ma trận khả nghịch P và một ma trận đường chéo D sao cho $D = P^{-1}AP$.

Quiz

2) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm một ma trận khả nghịch P và một ma trận đường chéo D sao cho $D = P^{-1}AP$.

Đáp án:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$