Hạng của ma trận – Tọa độ và chuyển cơ cở

Hà Minh Lam
hmlam@math.ac.vn

2021-2022

Tóm tắt

Tóm tắt

Không gian hàng và không gian cột

Cho ma trận $A \in M_{m,n}$. Nhắc lại rằng mỗi cột của A có thể được đồng nhất với một vector của $\mathbb{R}^m$ và mỗi hàng của A có thể được đồng nhất với một vector của $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa

Không gian hàng *của ma trận A là không gian con của $\mathbb{R}^n$ sinh bởi các vector hàng của A.*
Không gian cột *của ma trận A là không gian con của $\mathbb{R}^m$ sinh bởi các vector cột của A.*

Không gian hàng của các ma trận tương đương

Định lý

Giả sử A và B là hai ma trận $m \times n$. Nếu A và B tương đương theo hàng với nhau thì không gian hàng của chúng trùng nhau.

Không gian hàng của các ma trận tương đương

Định lý

Giả sử A và B là hai ma trận $m \times n$. Nếu A và B tương đương theo hàng với nhau thì không gian hàng của chúng trùng nhau.

Chứng minh:

- Mỗi hàng của B là một tổ hợp tuyến tính của các hàng của A, nên thuộc không gian hàng của A. Do đó không gian hàng của B, sinh bởi các hàng của B, được chứa trong không gian hàng của A.

Không gian hàng của các ma trận tương đương

Định lý

Giả sử A và B là hai ma trận $m \times n$. Nếu A và B tương đương theo hàng với nhau thì không gian hàng của chúng trùng nhau.

Chứng minh:

- Mỗi hàng của B là một tổ hợp tuyến tính của các hàng của A, nên thuộc không gian hàng của A. Do đó không gian hàng của B, sinh bởi các hàng của B, được chứa trong không gian hàng của A.
- Một cách đối xứng, không gian hàng của A cũng nằm trong không gian hàng của B.

Không gian hàng của các ma trận tương đương

Định lý

Giả sử A và B là hai ma trận $m \times n$. Nếu A và B tương đương theo hàng với nhau thì không gian hàng của chúng trùng nhau.

Chứng minh:

- Mỗi hàng của B là một tổ hợp tuyến tính của các hàng của A, nên thuộc không gian hàng của A. Do đó không gian hàng của B, sinh bởi các hàng của B, được chứa trong không gian hàng của A.
- Một cách đối xứng, không gian hàng của A cũng nằm trong không gian hàng của B.

Hệ quả

Nếu hai ma trận A và B tương đương theo hàng và B là một ma trận dạng bậc thang theo hàng thì những hàng khác $\mathbf{0}$ của B tạo thành một cơ sở của không gian hàng của A.

Không gian hàng của các ma trận tương đương

Định lý

Giả sử A và B là hai ma trận $m \times n$. Nếu A và B tương đương theo hàng với nhau thì không gian hàng của chúng trùng nhau.

Chứng minh:

- Mỗi hàng của B là một tổ hợp tuyến tính của các hàng của A, nên thuộc không gian hàng của A. Do đó không gian hàng của B, sinh bởi các hàng của B, được chứa trong không gian hàng của A.
- Một cách đối xứng, không gian hàng của A cũng nằm trong không gian hàng của B.

Hệ quả

Nếu hai ma trận A và B tương đương theo hàng và B là một ma trận dạng bậc thang theo hàng thì những hàng khác $\mathbf{0}$ của B tạo thành một cơ sở của không gian hàng của A.

Chú ý: Các không gian cột của hai ma trận tương đương theo hàng không nhất thiết trùng nhau.

Không gian hàng của các ma trận tương đương

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó $\{(1,3,1,3),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ là một cơ sở của không gian hàng của A (và cũng là của B).

Không gian hàng của các ma trận tương đương

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó $\{(1,3,1,3),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ là một cơ sở của không gian hàng của A (và cũng là của B).

Tất cả các vector cột của A đều không nằm trong không gian cột của B (*vì sao?*), do đó hai ma trận có các không gian cột khác nhau.

Không gian hàng của các ma trận tương đương

Tìm cơ sở của một không gian con $W = span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ của $\mathbb{R}^n$:

- Lập ma trận $A \in M_{k,n}$ với mỗi hàng là một vector $\mathbf{v}_i$;
- Đưa về ma trận tương đương B dạng bậc thang theo hàng;
- Các hàng khác không của B tạo thành một cơ sở của W.

Không gian hàng của các ma trận tương đương

Tìm cơ sở của một không gian con $W = span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ của $\mathbb{R}^n$:

- Lập ma trận $A \in M_{k,n}$ với mỗi hàng là một vector $\mathbf{v}_i$;
- Đưa về ma trận tương đương B dạng bậc thang theo hàng;
- Các hàng khác không của B tạo thành một cơ sở của W.

Ví dụ: Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi $S = \{(-1, 2, 5), (3, 0, 3), (5, 1, 8)\}$.

Không gian hàng của các ma trận tương đương

Tìm cơ sở của một không gian con $W = span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ của $\mathbb{R}^n$:

- Lập ma trận $A \in M_{k,n}$ với mỗi hàng là một vector $\mathbf{v}_i$;
- Đưa về ma trận tương đương B dạng bậc thang theo hàng;
- Các hàng khác không của B tạo thành một cơ sở của W.

Ví dụ: Tìm một cơ sở của không gian sinh bởi $S = \{(-1, 2, 5), (3, 0, 3), (5, 1, 8)\}$.

Ma trận $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ tương đương theo hàng với ma trận $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
do đó một cơ sở của $span(S)$ là $\{(1, -2, -5), (0, 1, 3)\}$.

Tìm cơ sở của không gian cột

Cách 1: Không gian cột của A chính là không gian hàng của A^T.

Tìm cơ sở của không gian cột

Cách 1: Không gian cột của A chính là không gian hàng của A^T.

Cách 2: Nếu A và B tương đương theo hàng và B có dạng bậc thang thì các cột của A tương ứng với các cột có số 1 dẫn đầu của B tạo thành một cơ sở của không gian cột của A. (Ý tưởng: các phép biến đổi theo hàng không làm thay đổi tính độc lập tuyến tính / phụ thuộc tuyến tính của các cột.)

Tìm cơ sở của không gian cột

Cách 1: Không gian cột của A chính là không gian hàng của A^T.

Cách 2: Nếu A và B tương đương theo hàng và B có dạng bậc thang thì các cột của A tương ứng với các cột có số 1 dẫn đầu của B tạo thành một cơ sở của không gian cột của A. (Ý tưởng: các phép biến đổi theo hàng không làm thay đổi tính độc lập tuyến tính / phụ thuộc tuyến tính của các cột.)

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tìm cơ sở của không gian cột

Cách 1: Không gian cột của A chính là không gian hàng của A^T.

Cách 2: Nếu A và B tương đương theo hàng và B có dạng bậc thang thì các cột của A tương ứng với các cột có số 1 dẫn đầu của B tạo thành một cơ sở của không gian cột của A. (Ý tưởng: các phép biến đổi theo hàng không làm thay đổi tính độc lập tuyến tính / phụ thuộc tuyến tính của các cột.)

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & 1 & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & 6 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & -2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & -4 & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tìm cơ sở của không gian cột

Cách 1: Không gian cột của A chính là không gian hàng của A^T.

Cách 2: Nếu A và B tương đương theo hàng và B có dạng bậc thang thì các cột của A tương ứng với các cột có số 1 dẫn đầu của B tạo thành một cơ sở của không gian cột của A. (Ý tưởng: các phép biến đổi theo hàng không làm thay đổi tính độc lập tuyến tính / phụ thuộc tuyến tính của các cột.)

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & 1 & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & 6 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & -2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & -4 & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Một cơ sở của không gian cột của A là $\{(1, 0, -3, 3, 2), (3, 1, 0, 4, 0), (3, 0, -1, 1, -2)\}$.

Hạng của ma trận

Định lý

Không gian hàng và không gian cột của cùng một ma trận có cùng số chiều.

Định nghĩa

Số chiều của không gian hàng (và không gian cột) của ma trận A được gọi là hạng *của A và ký hiệu là* $\text{rank}(A)$.

Hạng của ma trận

Định lý

Không gian hàng và không gian cột của cùng một ma trận có cùng số chiều.

Định nghĩa

Số chiều của không gian hàng (và không gian cột) của ma trận A được gọi là hạng *của A và ký hiệu là* $rank(A)$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ tương đương theo hàng với } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

nên $rank(A) = 3$.

Tóm tắt

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ở đó $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n]^T$ và $\mathbf{0} = \mathbf{0}_m$.
Ký hiệu $N(A)$ là tập hợp nghiệm của hệ.

Định lý

Tập hợp nghiệm $N(A)$ của hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ là một không gian con của $\mathbb{R}^n$.

Chú ý: Ta sẽ gọi ngắn gọn $N(A)$ là *không gian nghiệm* của ma trận A.

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Ví dụ: Tìm không gian nghiệm của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Ví dụ: Tìm không gian nghiệm của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Đưa về dạng bậc thang thu gọn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tham số tự do tương ứng với cột 2 và cột 4, nghiệm tổng quát:

$$\mathbf{x} = (-2s - 3t, s, -t, t) = s(-2, 1, 0, 0) + t(-3, 0, -1, 1)$$

với $s, t \in \mathbb{R}$.
Do đó $N(A) = span\{(-2, 1, 0, 0), (-3, 0, -1, 1)\}$.

Định lý hạng của ma trận

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Nếu B là một ma trận bậc thang theo hàng tương đương với A thì:

- Số cột của B bằng số ẩn của hệ;
- Số cột có số 1 dẫn đầu bằng số hàng khác không, tức là bằng hạng của ma trận;
- Số cột không có số 1 dẫn đầu bằng số tham số tự do, tức là bằng số chiều của không gian nghiệm.

Định lý hạng của ma trận

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Nếu B là một ma trận bậc thang theo hàng tương đương với A thì:

- Số cột của B bằng số ẩn của hệ;
- Số cột có số 1 dẫn đầu bằng số hàng khác không, tức là bằng hạng của ma trận;
- Số cột không có số 1 dẫn đầu bằng số tham số tự do, tức là bằng số chiều của không gian nghiệm.

Do đó số ẩn của hệ = hạng của ma trận + số chiều của không gian nghiệm.

Định lý hạng của ma trận

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Nếu B là một ma trận bậc thang theo hàng tương đương với A thì:

- Số cột của B bằng số ẩn của hệ;
- Số cột có số 1 dẫn đầu bằng số hàng khác không, tức là bằng hạng của ma trận;
- Số cột không có số 1 dẫn đầu bằng số tham số tự do, tức là bằng số chiều của không gian nghiệm.

Do đó số ẩn của hệ = hạng của ma trận + số chiều của không gian nghiệm.

Định lý

Với mọi ma trận $A \in M_{m,n}$, rank$(A) + \dim(N(A)) = n$.

Định lý hạng của ma trận

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$.

Định lý hạng của ma trận

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Tìm hạng và số chiều của không gian nghiệm của A.

Định lý hạng của ma trận

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Tìm hạng và số chiều của không gian nghiệm của A.

   Đưa về dạng bậc thang theo hàng: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Từ đó $rank(A) = 3$, $\dim(N(A)) = 5 - 3 = 2$.

Định lý hạng của ma trận

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Tìm hạng và số chiều của không gian nghiệm của A.

   Đưa về dạng bậc thang theo hàng: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Từ đó $rank(A) = 3$, $\dim(N(A)) = 5 - 3 = 2$.

2. Tìm một cơ sở của không gian cột của A.

Định lý hạng của ma trận

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Tìm hạng và số chiều của không gian nghiệm của A.

   Đưa về dạng bậc thang theo hàng: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Từ đó $rank(A) = 3$, $\dim(N(A)) = 5 - 3 = 2$.

2. Tìm một cơ sở của không gian cột của A.

   Các cột $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ tạo thành một cơ sở của không gian cột của A.

Định lý hạng của ma trận

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Tìm hạng và số chiều của không gian nghiệm của A.
   Đưa về dạng bậc thang theo hàng: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Từ đó $rank(A) = 3$, $\dim(N(A)) = 5 - 3 = 2$.
2. Tìm một cơ sở của không gian cột của A.
   Các cột $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ tạo thành một cơ sở của không gian cột của A.
3. Viết cột 3 (của A) dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các cột còn lại.

Định lý hạng của ma trận

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Tìm hạng và số chiều của không gian nghiệm của A.
   Đưa về dạng bậc thang theo hàng: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Từ đó $rank(A) = 3$, $\dim(N(A)) = 5 - 3 = 2$.
2. Tìm một cơ sở của không gian cột của A.
   Các cột $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ tạo thành một cơ sở của không gian cột của A.
3. Viết cột 3 (của A) dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các cột còn lại.
   Trong ma trận B, $\mathbf{b}_3 = -2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2$, do đó trong A ta cũng có quan hệ tương tự: $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2$.

Hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ở đó $A \in M_{m,n}$ và $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ở đó $A \in M_{m,n}$ và $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Nhận xét: Nếu $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ thì tập hợp nghiệm của hệ *không* phải là một không gian vector.

Hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ở đó $A \in M_{m,n}$ và $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Nhận xét: Nếu $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ thì tập hợp nghiệm của hệ *không* phải là một không gian vector.

Định lý

Nếu $\mathbf{x}_p$ là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ thì mọi nghiệm của hệ đó có dạng $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, với $\mathbf{x}_h$ là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng.

Hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ở đó $A \in M_{m,n}$ và $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Nhận xét: Nếu $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ thì tập hợp nghiệm của hệ *không* phải là một không gian vector.

Định lý

Nếu $\mathbf{x}_p$ là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ thì mọi nghiệm của hệ đó có dạng $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, với $\mathbf{x}_h$ là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng.

Chứng minh: Nếu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ thì $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, do đó $\mathbf{x}_h = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ là một nghiệm của hệ thuần nhất tương ứng.

Hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

Ví dụ: Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & = & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 5x_4 & = & -9 \end{array}$$

Hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

Ví dụ: Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & = & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 5x_4 & = & -9 \end{array}$$

Đưa ma trận hệ số mở rộng về dạng bậc thang thu gọn:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & -9 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nghiệm tổng quát của hệ là

$$\mathbf{x} = (2s - t + 5, -s + 3t - 7, s, t) = s(2, -1, 1, 0) + t(-1, 3, 0, 1) + (5, -7, 0, 0)\,,$$

trong đó $\mathbf{x}_p = (5, -7, 0, 0)$ là một *nghiệm đặc biệt* và $s(2, -1, 1, 0) + t(-1, 3, 0, 1)$ là một nghiệm bất kỳ của hệ thuần nhất tương ứng.

Điều kiện có nghiệm của hệ không thuần nhất

Định lý

Hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *có nghiệm khi và chỉ khi* $\mathbf{b}$ *nằm trong không gian cột của* A.

Điều kiện có nghiệm của hệ không thuần nhất

Định lý

Hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *có nghiệm khi và chỉ khi* $\mathbf{b}$ *nằm trong không gian cột của* A.

Hệ quả

Hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *có nghiệm khi và chỉ khi* $rank(A) = rank([A|\mathbf{b}])$.

Tổng hợp các điều kiện khả nghịch

Định lý

Cho A là một ma trận vuông cấp n. Các điều kiện sau là tương đương:

1. *A khả nghịch.*
2. *Hệ pttt* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *có nghiệm duy nhất với mọi* $\mathbf{b}$.
3. *Hệ pttt* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *chỉ có nghiệm tầm thường.*
4. *A tương đương theo hàng với* I_n.
5. *A viết được thành tích của các ma trận sơ cấp.*
6. $\det(A) \neq 0$.
7. $rank(A) = n$.
8. *Các hàng của A độc lập tuyến tính.*
9. *Các cột của A độc lập tuyến tính.*

Tóm tắt

Tọa độ đối với một cơ sở

Định nghĩa

Cho không gian vector V với cơ sở $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Giả sử $\mathbf{x}$ là một vector bất kỳ của V và $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ là biểu diễn duy nhất của $\mathbf{x}$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của B. Khi đó vector

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

được gọi là tọa độ của $\mathbf{x}$ đối với cơ sở B.

Tọa độ đối với một cơ sở

Định nghĩa

Cho không gian vector V với cơ sở $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Giả sử $\mathbf{x}$ là một vector bất kỳ của V và $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ là biểu diễn duy nhất của $\mathbf{x}$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của B. Khi đó vector

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

được gọi là tọa độ của $\mathbf{x}$ đối với cơ sở B.

Nhận xét: Khi nói đến tọa độ, các cơ sở được hiểu là *có sắp thứ tự*.

Tọa độ trong $\mathbb{R}^n$

Ví dụ:

1. "Tọa độ thông thường" trong $\mathbb{R}^n$ là tọa độ đối với cơ sở chính tắc.

Tọa độ trong $\mathbb{R}^n$

Ví dụ:

1. "Tọa độ thông thường" trong $\mathbb{R}^n$ là tọa độ đối với cơ sở chính tắc.
2. Tìm tọa độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ biết $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ với $B = \{(1,0),(1,2)\}$.

Tọa độ trong $\mathbb{R}^n$

Ví dụ:

1. "Tọa độ thông thường" trong $\mathbb{R}^n$ là tọa độ đối với cơ sở chính tắc.
2. Tìm tọa độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ biết $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ với $B = \{(1,0),(1,2)\}$.

$$\mathbf{x} = 3(1,0) + 2(1,2) = (5,4).$$

Tọa độ trong $\mathbb{R}^n$

Ví dụ:

1. "Tọa độ thông thường" trong $\mathbb{R}^n$ là tọa độ đối với cơ sở chính tắc.
2. Tìm tọa độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ biết $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ với $B = \{(1,0),(1,2)\}$.
$$\mathbf{x} = 3(1,0) + 2(1,2) = (5,4)\,.$$
3. Tìm tọa độ của $\mathbf{x} = (1,2,-1)$ trong cơ sở $B = \{(1,0,1),(0,-1,2),(2,3,-5)\}$.

Tọa độ trong $\mathbb{R}^n$

Ví dụ:

1. "Tọa độ thông thường" trong $\mathbb{R}^n$ là tọa độ đối với cơ sở chính tắc.
2. Tìm tọa độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ biết $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ với $B = \{(1,0),(1,2)\}$.
$$\mathbf{x} = 3(1,0) + 2(1,2) = (5,4)\,.$$
3. Tìm tọa độ của $\mathbf{x} = (1,2,-1)$ trong cơ sở $B = \{(1,0,1),(0,-1,2),(2,3,-5)\}$.
Tọa độ của $\mathbf{x}$ trong B là nghiệm của $\mathbf{x} = x_1(1,0,1) + x_2(0,-1,2) + x_3(2,3,-5)$. Giải hệ phương trình tuyến tính tương ứng:
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$
ta được $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ là hai cơ sở của không gian vector V.

Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ là hai cơ sở của không gian vector V.

Vì B là một cơ sở nên mỗi vector của B' có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của B:

$$\mathbf{v}_j = a_{1,j}\mathbf{u}_1 + a_{2,j}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{n,j}\mathbf{u}_n \quad (1 \leq j \leq n)$$

Ma trận $P = (a_{i,j})$ được gọi là *ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B*.

Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ là hai cơ sở của không gian vector V.

Vì B là một cơ sở nên mỗi vector của B' có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của B:

$$\mathbf{v}_j = a_{1,j}\mathbf{u}_1 + a_{2,j}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{n,j}\mathbf{u}_n \quad (1 \leq j \leq n)$$

Ma trận $P = (a_{i,j})$ được gọi là *ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B*.

Sử dụng cách viết của phép nhân ma trận, ta có thể viết ngắn gọn:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)P\,,$$

hoặc gọn hơn nữa:

$$B' = BP\,.$$

Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ là hai cơ sở của không gian vector V.

Vì B là một cơ sở nên mỗi vector của B' có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của B:

$$\mathbf{v}_j = a_{1,j}\mathbf{u}_1 + a_{2,j}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{n,j}\mathbf{u}_n \quad (1 \leq j \leq n)$$

Ma trận $P = (a_{i,j})$ được gọi là *ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B*.

Sử dụng cách viết của phép nhân ma trận, ta có thể viết ngắn gọn:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)P\,,$$

hoặc gọn hơn nữa:

$$B' = BP\,.$$

Chú ý: Trong tài liệu tiếng Việt, ma trận P được định nghĩa như trên được gọi là ma trận chuyển *từ cơ sở B sang cơ sở B'*, tức là ngược với tiếng Anh. Chúng ta thống nhất sử dụng định nghĩa tiếng Anh (công thức giống nhau, tên gọi ngược nhau).

Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

Định lý

Nếu P là ma trận chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B thì với mọi $\mathbf{x} \in V$:

$$[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'} \, .$$

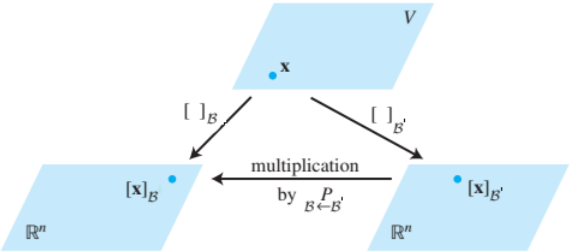
Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

Định lý

Nếu P là ma trận chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B thì với mọi $\mathbf{x} \in V$:

$$[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'} .$$

Chứng minh: Sử dụng cách viết của phép nhân ma trận, ta có: $\mathbf{x} = B'[\mathbf{x}]_{B'}$.
Thay $B' = BP$ vào, ta được $\mathbf{x} = BP[\mathbf{x}]_{B'}$, suy ra $P[\mathbf{x}]_{B'}$ là tọa độ của $\mathbf{x}$ trong cơ sở B.
Do tọa độ là duy nhất nên $P[\mathbf{x}]_{B'} = [\mathbf{x}]_B$.



Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

Ví dụ: Cho B là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $B' = \{(1,0,1),(0,-1,2),(2,3,-5)\}$. Cho $\mathbf{x} = (1,2,-1)$. Tính $[\mathbf{x}]_{B'}$.

Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

Ví dụ: Cho B là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $B' = \{(1,0,1),(0,-1,2),(2,3,-5)\}$. Cho $\mathbf{x} = (1,2,-1)$. Tính $[\mathbf{x}]_{B'}$.

Ma trận chuyển từ B' sang B là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Do B là cở sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ nên $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Theo công thức chuyển cơ sở, $[\mathbf{x}]_{B'}$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $P[\mathbf{x}]_{B'} = [\mathbf{x}]_B$. Thay số và giải, ta được

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nghịch đảo của ma trận chuyển cơ sở

Định lý

Nếu P là ma trận chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B thì:

- *P khả nghịch.*
- *P^{-1} là ma trận chuyển từ B sang B'.*

Nghịch đảo của ma trận chuyển cơ sở

Định lý

Nếu P là ma trận chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B thì:

- *P khả nghịch.*
- *P^{-1} là ma trận chuyển từ B sang B'.*

Chứng minh: Gọi Q là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.
Xét một vector $\mathbf{x}$ bất kỳ của V. Ta có:

$$[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'} \text{ và } [\mathbf{x}]_{B'} = Q[\mathbf{x}]_B \,.$$

Suy ra $[\mathbf{x}]_B = PQ[\mathbf{x}]_B$.

Điều này đúng với mọi $\mathbf{x} \in V$, nghĩa là $PQ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ với mọi $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, suy ra $PQ = I_n$ (bài tập: vì sao?).

Tìm ma trận chuyển cơ sở trong $\mathbb{R}^n$

Các bước tìm ma trận chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B:

1. Đồng nhất mỗi cơ sở với một ma trận có các vector cột là các vector trong cơ sở.
2. Dùng phương pháp Gauss - Jordan: $[B \mid B'] \rightsquigarrow [I \mid P]$.

Định lý

Ma trận P tìm được theo phương pháp trên là ma trận chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B.

Tìm ma trận chuyển cơ sở trong $\mathbb{R}^n$

Các bước tìm ma trận chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B:

1. Đồng nhất mỗi cơ sở với một ma trận có các vector cột là các vector trong cơ sở.
2. Dùng phương pháp Gauss - Jordan: $[B \mid B'] \rightsquigarrow [I \mid P]$.

Định lý

Ma trận P tìm được theo phương pháp trên là ma trận chuyển từ cơ sở B' sang cơ sở B.

Nhận xét:

- Nếu B là cơ sở chính tắc thì $B = I$, do đó $P = B'$.
- Nếu B' là cơ sở chính tắc thì $B' = I$, do đó $P = B^{-1}$.

Quiz:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho cơ sở chính tắc $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, và cơ sở $B = \{\mathbf{v}_1 = (1,1,0), \mathbf{v}_2 = (0,-1,1), \mathbf{v}_3 = (1,2,3)\}$. Cho vector $\mathbf{u} = (3,7,0)$. Gọi a, b, c là các tọa độ của vector $\mathbf{u}$ đối với cơ sở B. Khi đó a, b, c thỏa mãn đẳng thức nào dưới đây?

1. $a - b + c = 0$
2. $2a - 3b + c = 0$
3. $a + b + c = 0$
4. $a - b - c = 0.$

Quiz:

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho cơ sở chính tắc $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, và cơ sở $B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 2, 3)\}$. Cho vector $\mathbf{u} = (3, 7, 0)$. Gọi a, b, c là các tọa độ của vector $\mathbf{u}$ đối với cơ sở B. Khi đó a, b, c thỏa mãn đẳng thức nào dưới đây?

1. $a - b + c = 0$
2. $2a - 3b + c = 0$
3. $a + b + c = 0$
4. $a - b - c = 0.$

Đáp án: Ta có $a + b + c = 0$ vì a, b, c thỏa mãn

$$\begin{cases} a \qquad + c = 3 \\ a - b + 2c = 7 \\ \qquad b + 3c = 0 \end{cases}$$

Quiz:

Cho V là một không gian con của $\mathbb{R}^3$ có cơ sở là $B = \{(1,1,1),(1,0,1)\}$ và cho vector $\mathbf{u} = (3,1,3)$ nằm trong V. Ma trận tọa độ của $\mathbf{u}$ đối với cơ sở B là

1. $[x]_B = (1\ 2)^T$
2. $[x]_B = (1\ 2\ 0)^T$
3. $[x]_B = (1\ 2\ 0)$
4. $[x]_B = (1\ 2)$.

Quiz:

Cho V là một không gian con của $\mathbb{R}^3$ có cơ sở là $B = \{(1,1,1),(1,0,1)\}$ và cho vector $\mathbf{u} = (3,1,3)$ nằm trong V. Ma trận tọa độ của $\mathbf{u}$ đối với cơ sở B là

1. $[x]_B = (1\ 2)^T$
2. $[x]_B = (1\ 2\ 0)^T$
3. $[x]_B = (1\ 2\ 0)$
4. $[x]_B = (1\ 2)$.

Đáp án: $[x]_B = (1\ 2)^T$.