Đề thi Kết thúc môn học, Hè 2017
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m

$$\begin{cases} mx_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0, \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0. \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên khi $m = 1$.
(b) Tìm m để hệ phương trình trên có vô số nghiệm.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Tính $det(A)$.
(b) A có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm A^{-1}.

Bài 3. (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(u) = \frac{< u, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 + \frac{< u, v_2 >}{< v_2, v_2 >} v_2,$$

trong đó $v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 0)$.

(a) Tìm ma trận của T trong các cơ sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$.
(b) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker(T)$.

Bài 4. (*2 điểm*) Tìm hình chiếu của vector $\mathbf{w} = (1, 2, 3, 4)$ lên không gian con S của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hai vector cột $\mathbf{v}_1$ va $\mathbf{v}_2$ của ma trận A, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm các giá trị riêng và các không gian riêng tương ứng của A.
(b) Tìm một ma trận trực giao P (nếu có) sao cho $P^T AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu và các thiết bị điện tử! Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 2

Bài 1. Ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} m & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2m-7 \end{bmatrix}$$

(a) Với $m = 1$, $det(A) \neq 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1 &= 0, \\ x_2 &= 0, \\ x_3 &= 0. \end{cases}$$

(b) Hệ phương trình có vô số nghiệm khi $det(A) = -2m - 7 = 0$, tức là $m = -7/2$.

Bài 2. (a) $det(A) = -1$.

(b) A khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Bài 3. (a) Cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^3$ là :$\{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$.
Ta có:

$$T(u_1) = (1,0,0), T(u_2) = T(u_3) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Vậy ma trận của T trong các cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(b) Biến đổi tương đương theo hàng ta có:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vậy không gian hạch của T là:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0, x_2 + x_3 = 0\} = \{(0, -p, p) | p \in \mathbb{R}\} = = \{p(0, -1, 1) | p \in \mathbb{R}\}. \tag{2}$$

Vậy một cơ sở của $\ker(T)$ là $B = \{(0, -1, 1)\}$.

Bài 4. Chuẩn hóa các vector $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$, ta nhận được

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}.$$

ta có

$$\begin{aligned}\text{proj}_S\mathbf{v} &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2\\ &= 5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + 2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\\ &= (\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2})\end{aligned}$$

Bài 5. (a) Đa thức đặc trưng của ma trận A là

$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = det\begin{pmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{pmatrix} = (\lambda-5)^2(\lambda-1) \tag{3}$$

Từ (3) ta thấy các giá trị riêng của A là: $\lambda_1 = 5$ (bội 2), $\lambda_2 = 1$ (bội 1).
$\lambda_1 = 5$: Xét hệ

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Giải hệ (4) ta được

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t\\ t\\ s\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Do đó không gian riêng tương ứng với $\lambda_1 = 5$ là

$$V_5(A) = span(\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\})$$

$\lambda_2 = 1$: Xét hệ

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Giải hệ (5) ta được

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Do đó không gian riêng tương ứng với $\lambda_2 = 1$ là: $V_1(A) = span(\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\})$.

(b) $v_1 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ và $v_2 = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ là 2 vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 5$. Dễ thấy $< v_1, v_2 >= 0$. Chuẩn hóa:

$$p_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},$$

$$p_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ là một vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$.

Chuẩn hóa:

$$p_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Khi đó P trực giao và

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$