ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
Hệ phương trình tuyến tính

Hà Minh Lam
hmlam@math.ac.vn

2021-2022

Tóm tắt

Thông tin chung

- **Thời lượng:** 15 tuần $\times$ (2h lý thuyết $+$ 2h bài tập)
- **Công thức điểm (dự kiến):**

$$\text{Điểm TB} = 0.4 \times (\text{kiểm tra, bài tập lớn}) + 0.6 \times \text{thi}$$

- **Giáo trình:**
  - Nguyễn Đình Trí. *Toán cao cấp.*
  - Larson, Edwards, Falvo. *Elementary linear algebra (6^{th} edition).*

Đại số tuyến tính?

Ứng dụng: Đại số tuyến tính (ĐSTT) được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, đặc biệt trong thời đại máy tính:

- Hình học: điểm, đường thẳng, mặt phẳng,...các phép biến hình (tịnh tiến, quay, vị tự,...); Giải tích: không gian các hàm; Phương trình vi phân ...

Đại số tuyến tính?

Ứng dụng: Đại số tuyến tính (ĐSTT) được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, đặc biệt trong thời đại máy tính:

- Hình học: điểm, đường thẳng, mặt phẳng,...các phép biến hình (tịnh tiến, quay, vị tự,...); Giải tích: không gian các hàm; Phương trình vi phân ...
- Kinh tế: Mô hình Input-Output của Leontief (Nobel Kinh tế 1973) cho phép nghiên cứu một cách hệ thống các giao dịch phức tạp giữa các ngành trong một nền kinh tế: *500 phương trình tuyến tính, 500 ẩn và giải cho mô hình rút gọn 42 phương trình 42 ẩn bằng máy MARK II, vài tháng lập trình, 56h chạy (1949)*

Đại số tuyến tính?

Ứng dụng: Đại số tuyến tính (ĐSTT) được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, đặc biệt trong thời đại máy tính:

- Hình học: điểm, đường thẳng, mặt phẳng,...các phép biến hình (tịnh tiến, quay, vị tự,...); Giải tích: không gian các hàm; Phương trình vi phân ...
- Kinh tế: Mô hình Input-Output của Leontief (Nobel Kinh tế 1973) cho phép nghiên cứu một cách hệ thống các giao dịch phức tạp giữa các ngành trong một nền kinh tế: *500 phương trình tuyến tính, 500 ẩn và giải cho mô hình rút gọn 42 phương trình 42 ẩn bằng máy MARK II, vài tháng lập trình, 56h chạy (1949)*
- Xã hội học: tìm ra các "thành viên chủ chốt" (key player) trong một mạng xã hội

Đại số tuyến tính?

Ứng dụng: Đại số tuyến tính (ĐSTT) được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, đặc biệt trong thời đại máy tính:

- Hình học: điểm, đường thẳng, mặt phẳng,...các phép biến hình (tịnh tiến, quay, vị tự,...); Giải tích: không gian các hàm; Phương trình vi phân ...
- Kinh tế: Mô hình Input-Output của Leontief (Nobel Kinh tế 1973) cho phép nghiên cứu một cách hệ thống các giao dịch phức tạp giữa các ngành trong một nền kinh tế: *500 phương trình tuyến tính, 500 ẩn và giải cho mô hình rút gọn 42 phương trình 42 ẩn bằng máy MARK II, vài tháng lập trình, 56h chạy (1949)*
- Xã hội học: tìm ra các "thành viên chủ chốt" (key player) trong một mạng xã hội
    - Bài toán tìm kiếm triệu đô của Google

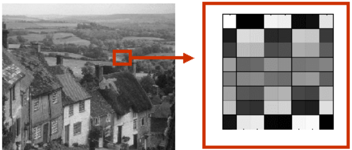
Đại số tuyến tính?

Ứng dụng: Đại số tuyến tính (ĐSTT) được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, đặc biệt trong thời đại máy tính:

- Hình học: điểm, đường thẳng, mặt phẳng,...các phép biến hình (tịnh tiến, quay, vị tự,...); Giải tích: không gian các hàm; Phương trình vi phân ...
- Kinh tế: Mô hình Input-Output của Leontief (Nobel Kinh tế 1973) cho phép nghiên cứu một cách hệ thống các giao dịch phức tạp giữa các ngành trong một nền kinh tế: *500 phương trình tuyến tính, 500 ẩn và giải cho mô hình rút gọn 42 phương trình 42 ẩn bằng máy MARK II, vài tháng lập trình, 56h chạy (1949)*
- Xã hội học: tìm ra các "thành viên chủ chốt" (key player) trong một mạng xã hội
    - Bài toán tìm kiếm triệu đô của Google
- Các ngành khoa học khác: mô phỏng các dữ liệu, hiện tượng và đưa ra được các phương pháp tính toán hiệu quả với các mô hình đó.

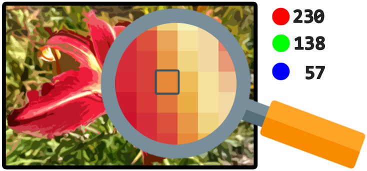
Ứng dụng trong Khoa học máy tính:

- mã hóa và xử lý ảnh



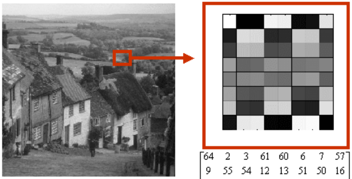
$$\begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 & 7 & 57 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 & 50 & 16 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 & 42 & 24 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 & 31 & 33 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 & 39 & 25 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 & 18 & 48 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 & 10 & 56 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 & 63 & 1 \end{bmatrix}$$

Images are comprised of pixels represented by numbers



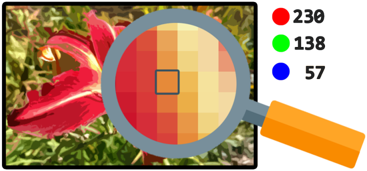
Ứng dụng trong Khoa học máy tính:

- mã hóa và xử lý ảnh



Images are comprised of pixels represented by numbers

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

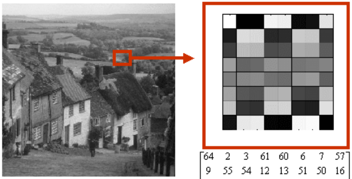


- mã hóa và xử lý âm thanh:

5	-6	9	-9	-5	-9	-5	5	-8	-5	-9	9	8	-5	-9	6	-2	-4	-9	-1	-1	-9	-3

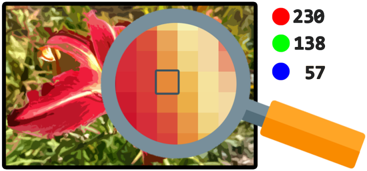
Ứng dụng trong Khoa học máy tính:

- mã hóa và xử lý ảnh



Images are comprised of pixels represented by numbers

$$\begin{bmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 & 7 & 57 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 & 50 & 16 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 & 42 & 24 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 & 31 & 33 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 & 39 & 25 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 & 18 & 48 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 & 10 & 56 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 & 63 & 1 \end{bmatrix}$$



- mã hóa và xử lý âm thanh:

5	-6	9	-9	-5	-9	-5	5	-8	-5	-9	9	8	-5	-9	6	-2	-4	-9	-1	-1	-9	-3

- Thuật toán SVD trong việc giảm chiều dữ liệu: giảm dung lượng ảnh, Netflix Prize for 1000000USD (2006),...

Đối tượng: Phương trình (hệ phương trình) tuyến tính:

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = c_1$$

$$b_1x_1 + ... + b_nx_n = c_2$$

Ánh xạ tuyến tính:

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto (a_1x_1 + ... + a_nx_n, b_1x_1 + ... + b_nx_n)$$

và các biểu diễn, tính chất của chúng qua các khái niệm *véc-tơ, ma trận*.

Đối tượng: Phương trình (hệ phương trình) tuyến tính:

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = c_1$$

$$b_1x_1 + ... + b_nx_n = c_2$$

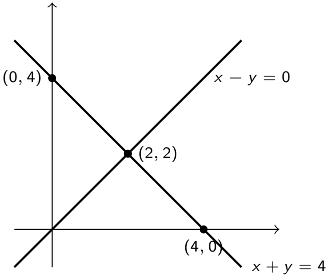
Ánh xạ tuyến tính:

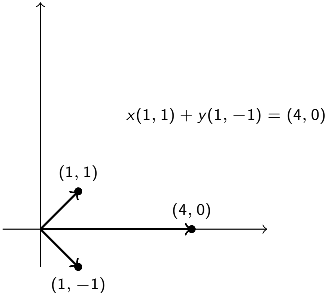
$$(x_1, ..., x_n) \mapsto (a_1x_1 + ... + a_nx_n, b_1x_1 + ... + b_nx_n)$$

và các biểu diễn, tính chất của chúng qua các khái niệm *véc-tơ, ma trận*.

$x + y = 4$

$x - y = 0$





Tóm tắt

Phương trình tuyến tính

Định nghĩa

- *Một* phương trình tuyến tính *(pttt) n ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n$ là một phương trình có dạng*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b\,, \tag{1}$$

ở đó các hệ số *a_i $(1 \leq i \leq n)$ và* hệ số tự do *b là các hằng số.*

Phương trình tuyến tính

Định nghĩa

- *Một* phương trình tuyến tính *(pttt) n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một phương trình có dạng*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b\,, \tag{1}$$

ở đó các hệ số *a_i $(1 \leq i \leq n)$ và* hệ số tự do *b là các hằng số.*

- *Một bộ n số $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sao cho*

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

được gọi là một nghiệm *của phương trình (1).*

Quiz:

Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải phương trình tuyến tính với các ẩn?

Quiz:

Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải phương trình tuyến tính với các ẩn?

1. $2x + 3y = 1$
2. $2(x + y) = 3(x - y) + 4$
3. $x(y - 1) = x + y$
4. $xsin2 + ycos3 = 7$

Quiz:

Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải phương trình tuyến tính với các ẩn?

1. $2x + 3y = 1$
2. $2(x + y) = 3(x - y) + 4$
3. $x(y - 1) = x + y$
4. $xsin2 + ycos3 = 7$

Đáp án: Phương trình 3.

Phương trình tuyến tính

1. $x_1 + x_2 = 1$

Phương trình tuyến tính

1. $x_1 + x_2 = 1$
   Giải x_1 theo x_2: $x_1 = 1 - x_2$; x_2 là *biến tự do*.

Phương trình tuyến tính

1. $x_1 + x_2 = 1$

   Giải x_1 theo x_2: $x_1 = 1 - x_2$; x_2 là *biến tự do*.

   Nghiệm *dạng tham số*: $x_1 = 1 - t, x_2 = t (t \in \mathbb{R})$.
   Tập nghiệm $S = \{(1 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Phương trình tuyến tính

1. $x_1 + x_2 = 1$

   Giải x_1 theo x_2: $x_1 = 1 - x_2$; x_2 là *biến tự do*.

   Nghiệm *dạng tham số*: $x_1 = 1 - t, x_2 = t (t \in \mathbb{R})$.
   Tập nghiệm $S = \{(1 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

2. $3x + 2y - z = 3$

Phương trình tuyến tính

1. $x_1 + x_2 = 1$

   Giải x_1 theo x_2: $x_1 = 1 - x_2$; x_2 là *biến tự do*.

   Nghiệm *dạng tham số*: $x_1 = 1 - t, x_2 = t (t \in \mathbb{R})$.
   Tập nghiệm $S = \{(1 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

2. $3x + 2y - z = 3$

   Giải x theo y và z: $x = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1$; y và z là các biến tự do.

Phương trình tuyến tính

1. $x_1 + x_2 = 1$

   Giải x_1 theo x_2: $x_1 = 1 - x_2$; x_2 là *biến tự do*.

   Nghiệm *dạng tham số*: $x_1 = 1 - t, x_2 = t (t \in \mathbb{R})$.
   Tập nghiệm $S = \{(1 - t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

2. $3x + 2y - z = 3$

   Giải x theo y và z: $x = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1$; y và z là các biến tự do.

   $S = \left\{(-\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}t + 1, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\right\}$.

Tóm tắt

Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

- *Một* hệ phương trình tuyến tính *(hệ pttt) m phương trình, n ẩn* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *là một hệ phương trình có dạng*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{2}$$

ở đó các hệ số a_{ij} *và* hệ số tự do b_i *($1 \le i \le m, 1 \le j \le n$) là các hằng số.*

Hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

- *Một* hệ phương trình tuyến tính *(hệ pttt) m phương trình, n ẩn* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là một hệ phương trình có dạng*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{2}$$

  ở đó các hệ số a_{ij} *và* hệ số tự do b_i $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ *là các hằng số.*

- *Một bộ n số* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *sao cho*

$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n = b_i$$

  với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$ *được gọi là một* nghiệm *của hệ (2).*

Số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Nghiệm duy nhất: $x = 2, y = 1$.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Nghiệm duy nhất: $x = 2, y = 1$.

$$\begin{cases} \quad x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Vô số nghiệm: $x = 3 - y, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Nghiệm duy nhất: $x = 2, y = 1$.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Vô số nghiệm: $x = 3 - y, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Vô nghiệm.

Số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Nghiệm duy nhất: $x=2, y=1$.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$$

Vô số nghiệm: $x=3-y, y\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x+y=1 \end{cases}$$

Vô nghiệm.

Định lý

Mọi hệ phương trình tuyến tính thỏa mãn đúng một trong ba điều sau:

1. *Hệ có nghiệm duy nhất.*
2. *Hệ có vô số nghiệm.*
3. *Hệ vô nghiệm.*

Tóm tắt

Hệ pttt dạng bậc thang

Ví dụ:

$$\begin{cases} x - 2y & +3z = 9, \\ -x + 3y & = -4, \\ 2x - 5y & +5z = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ z = 2 \end{cases}$$

Hệ pttt dạng bậc thang

Ví dụ:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ -x + 3y = -4, \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ z = 2 \end{cases}$$

Hệ thứ hai dễ giải hơn.

Hệ pttt dạng bậc thang

Ví dụ:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ -x + 3y = -4, \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ z = 2 \end{cases}$$

Hệ thứ hai dễ giải hơn.

Giải hệ thứ hai bằng cách thế từ dưới lên:

$$\begin{aligned} &z = 2 \\ &y = 5 - 3z = 5 - 3 \times 2 = -1 \\ &x = 9 + 2y - 3z = 9 + 2 \times (-1) - 3 \times 2 = 1\,. \end{aligned}$$

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Định nghĩa

Hai hệ pttt được gọi là tương đương *nếu chúng có cùng tập nghiệm.*

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Định nghĩa

Hai hệ pttt được gọi là tương đương *nếu chúng có cùng tập nghiệm.*

Chú ý: Hai hệ pttt vô nghiệm tương đương với nhau.

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Định nghĩa

Hai hệ pttt được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Chú ý: Hai hệ pttt vô nghiệm tương đương với nhau.

Định lý (Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng)

Các phép biến đổi sau biến một hệ pttt thành một hệ pttt tương đương với nó:

1. *Đổi chỗ hai phương trình.*
2. *Nhân (hai vế của) một phương trình với một số khác 0.*
3. *Cộng vào một phương trình một bội của một phương trình khác.*

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Ví dụ:

$$\begin{cases} x - 2y & +3z = 9, \\ -x + 3y & \quad\;\; = -4, \\ 2x - 5y & +5z = 17 \end{cases}$$

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Ví dụ:

$$\begin{cases} x - 2y & +3z = 9, \\ -x + 3y & = -4, \\ 2x - 5y & +5z = 17 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_2+pt_1} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \xrightarrow{pt_3-2pt_1} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_3+pt_2} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow{pt_3\times\frac{1}{2}} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ z = 2 \end{cases}$$

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Một hệ vô nghiệm:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 2x - y - 2z = 2, \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Một hệ vô nghiệm:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 2x - y - 2z = 2, \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_2 - 2\times pt_1} \begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 5y - 4z = 0, \\ x + 2y - 3z = 17 \end{cases} \xrightarrow{pt_3 - pt_1} \begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 5y - 4z = 0, \\ 5y - 4z = -2 \end{cases}$$

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Một hệ vô nghiệm:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 2x - y - 2z = 2, \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_2 - 2\times pt_1} \begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 5y - 4z = 0, \\ x + 2y - 3z = 17 \end{cases} \xrightarrow{pt_3 - pt_1} \begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 5y - 4z = 0, \\ 5y - 4z = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_3 - pt_2} \begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 5y - 4z = 0, \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Một hệ vô nghiệm:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 2x - y - 2z = 2, \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_2 - 2\times pt_1} \begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 5y - 4z = 0, \\ x + 2y - 3z = 17 \end{cases} \xrightarrow{pt_3 - pt_1} \begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 5y - 4z = 0, \\ 5y - 4z = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_3 - pt_2} \begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 5y - 4z = 0, \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Phương trình thứ ba vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Một hệ vô số nghiệm:

$$\begin{cases} \quad\;\; y - z = 0, \\ x \quad\;\; - 3z = -1, \\ -x + 3y \quad\;\; = 1 \end{cases}$$

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Một hệ vô số nghiệm:

$$\begin{cases} & y & -z & = 0, \\ x & & -3z & = -1, \\ -x & +3y & & = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_1 \leftrightarrow pt_2} \begin{cases} x & & -3z & = -1, \\ & y & -z & = 0, \\ -x & +3y & & = 1 \end{cases} \xrightarrow{pt_3 + pt_1} \begin{cases} x & & -3z & = -1, \\ & y & -z & = 0, \\ & 3y & -3z & = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_3 - 3 \times pt_2} \begin{cases} x & & -3z & = -1, \\ & y & -z & = 0, \\ & & 0 & = 0 \end{cases}$$

Các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng)

Một hệ vô số nghiệm:

$$\begin{cases} \quad\;\; y - z = 0, \\ x \qquad - 3z = -1, \\ -x + 3y \qquad = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_1 \leftrightarrow pt_2} \begin{cases} x \qquad - 3z = -1, \\ \quad\;\; y - z = 0, \\ -x + 3y \qquad = 1 \end{cases} \xrightarrow{pt_3 + pt_1} \begin{cases} x \qquad - 3z = -1, \\ \quad\;\; y - z = 0, \\ \quad 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{pt_3 - 3 \times pt_2} \begin{cases} x \qquad - 3z = -1, \\ \quad\;\; y - z = 0, \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

- Biến z là biến tự do: $z \in \mathbb{R}$.
- Biểu diễn x và y theo z: $x = 3z - 1, y = z$.

Hệ có vô số nghiệm: $S = \{(3t - 1, t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Tóm tắt

Ma trận

Định nghĩa

- *Một* ma trận *cỡ $m \times n$ là một bảng có m* hàng *và n* cột*:*

$$M = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  ở đó mỗi phần tử *a_{ij} là một số (phần tử thứ i, j).*
- *Nếu $m = n$, ma trận M được gọi là một* ma trận vuông *cấp n. Khi đó, các phần tử a_{ii} $(1 \le i \le n)$ tạo thành* đường chéo chính *của ma trận M.*

Ma trận

Ví dụ:

- $$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

  là một ma trận 2×4; $a_{13} = 3, a_{22} = 1$.

Ma trận

Ví dụ:

- $$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

  là một ma trận 2×4; $a_{13} = 3, a_{22} = 1$.

- $$N = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3/5} & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -\mathbf{3/5} \end{pmatrix}$$

  là một ma trận vuông cấp 3.

Ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

- Ma trận hệ số *của hệ (2) là ma trận*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ma trận hệ số mở rộng *(ma trận bổ sung, ma trận tăng) của hệ (2) là ma trận*

$$M' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Tóm tắt

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

Định nghĩa

- *Các phép biến đổi ma trận sau đây được gọi là các phép biến đổi sơ cấp theo hàng:*
  1. *Đổi chỗ hai hàng.*
  2. *Nhân một hàng với một số* khác 0*.*
  3. *Cộng vào một hàng một bội của một hàng khác.*

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

Định nghĩa

- *Các phép biến đổi ma trận sau đây được gọi là các phép biến đổi sơ cấp theo hàng:*
  1. *Đổi chỗ hai hàng.*
  2. *Nhân một hàng với một số* khác 0.
  3. *Cộng vào một hàng một bội của một hàng khác.*
- *Hai ma trận là tương đương theo hàng nếu một ma trận có thể được nhận từ ma trận kia bằng một số (hữu hạn) phép biến đổi sơ cấp theo hàng.*

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

Ví dụ:

$$\begin{cases} x \quad -2y \quad +3z = 9, \\ -x \quad +3y = -4, \\ 2x \quad -5y \quad +5z = 17 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

Ví dụ:

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = 9, \\ -x & +3y & & = -4, \\ 2x & -5y & +5z & = 17 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2+h_1} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

Ví dụ:

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = 9, \\ -x & +3y & & = -4, \\ 2x & -5y & +5z & = 17 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2+h_1} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\cdots} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ z = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

Ví dụ:

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = 9, \\ -x & +3y & & = -4, \\ 2x & -5y & +5z & = 17 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2+h_1} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\cdots} \begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ y + 3z = 5, \\ z = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Các phép biến đổi sơ cấp biến ma trận hệ số (mở rộng) của một hệ pttt thành ma trận hệ số (mở rộng) của một hệ pttt tương đương.

Ma trận bậc thang theo hàng

Định nghĩa

Một ma trận là ma trận bậc thang theo hàng *nếu:*

- *Các hàng bằng 0 (nếu có) nằm ở dưới cùng.*
- *Mỗi hàng khác 0 có phần tử khác 0 đầu tiên (tính từ bên trái) bằng 1 (gọi là* số 1 dẫn đầu*).*
- *Mọi số 1 dẫn đầu nằm ở bên trái các số 1 dẫn đầu ở dưới nó.*

Ma trận bậc thang theo hàng

Định nghĩa

Một ma trận là ma trận bậc thang theo hàng *nếu:*

- *Các hàng bằng 0 (nếu có) nằm ở dưới cùng.*
- *Mỗi hàng khác 0 có phần tử khác 0 đầu tiên (tính từ bên trái) bằng 1 (gọi là* số 1 dẫn đầu*).*
- *Mọi số 1 dẫn đầu nằm ở bên trái các số 1 dẫn đầu ở dưới nó.*

Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 3 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

Ma trận bậc thang theo hàng

Định nghĩa

Một ma trận là ma trận bậc thang theo hàng *nếu:*

- *Các hàng bằng 0 (nếu có) nằm ở dưới cùng.*
- *Mỗi hàng khác 0 có phần tử khác 0 đầu tiên (tính từ bên trái) bằng 1 (gọi là* số 1 dẫn đầu*).*
- *Mọi số 1 dẫn đầu nằm ở bên trái các số 1 dẫn đầu ở dưới nó.*

Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 3 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

Nhận xét: Tất cả các phần tử nằm bên dưới mỗi số 1 dẫn đầu đều bằng 0.

Ma trận bậc thang theo hàng

Định nghĩa

Một ma trận bậc thang theo hàng là thu gọn *nếu mọi phần tử bên trên mỗi số 1 dẫn đầu đều bằng 0.*
(Nói cách khác, nếu mọi số 1 dẫn đầu là phần tử khác 0 duy nhất trong cột của nó.)

Ma trận bậc thang theo hàng

Định nghĩa

Một ma trận bậc thang theo hàng là thu gọn *nếu mọi phần tử bên trên mỗi số 1 dẫn đầu đều bằng 0.*
(Nói cách khác, nếu mọi số 1 dẫn đầu là phần tử khác 0 duy nhất trong cột của nó.)

Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

Quiz:

Trong các hệ phương trình tuyến tính dưới đây, hệ nào có ma trận mở rộng có dạng bậc thang theo hàng thu gọn?

Quiz:

Trong các hệ phương trình tuyến tính dưới đây, hệ nào có ma trận mở rộng có dạng bậc thang theo hàng thu gọn?

$$\begin{cases} x + 3y + 17z = -11, \\ \qquad\quad y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 17z = -11, \\ \qquad\; -x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y \qquad\quad = -11, \\ \qquad\qquad\quad z = -1 \end{cases}$$

Quiz:

Trong các hệ phương trình tuyến tính dưới đây, hệ nào có ma trận mở rộng có dạng bậc thang theo hàng thu gọn?

$$\begin{cases} x + 3y + 17z = -11, \\ \qquad\quad y + 2z = 6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 17 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 3y + 17z = -11, \\ \qquad\quad -x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y \qquad = -11, \\ \qquad\qquad z = -1 \end{cases}$$

Quiz:

Trong các hệ phương trình tuyến tính dưới đây, hệ nào có ma trận mở rộng có dạng bậc thang theo hàng thu gọn?

$$\begin{cases} x + 3y + 17z = -11, \\ \qquad\quad y + 2z = 6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 17 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 3y + 17z = -11, \\ \qquad -x + y = 3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 17 & -11 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 3y \qquad = -11, \\ \qquad\qquad z = -1 \end{cases}$$

Quiz:

Trong các hệ phương trình tuyến tính dưới đây, hệ nào có ma trận mở rộng có dạng bậc thang theo hàng thu gọn?

$$\begin{cases} x + 3y + 17z = -11, \\ \qquad\quad y + 2z = 6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 17 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 3y + 17z = -11, \\ \qquad\; -x + y = 3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 17 & -11 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 3y \qquad = -11, \\ \qquad\qquad\; z = -1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Quiz:

Trong các hệ phương trình tuyến tính dưới đây, hệ nào có ma trận mở rộng có dạng bậc thang theo hàng thu gọn?

$$\begin{cases} x + 3y + 17z = -11, \\ y + 2z = 6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 17 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 3y + 17z = -11, \\ -x + y = 3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 17 & -11 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 3y = -11, \\ z = -1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Hệ thứ nhất có ma trận mở rộng dạng bậc thang theo hàng nhưng không thu gọn, hệ thứ ba có ma trận mở rộng dạng bậc thang theo hàng thu gọn.

Tóm tắt

Thuật toán khử Gauss

Giải hệ pttt bằng thuật toán khử Gauss:

1. Viết ma trận hệ số mở rộng của hệ pttt.
2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng, đưa về ma trận dạng bậc thang theo hàng tương đương.
3. Viết hệ pttt dạng bậc thang tương ứng và giải bằng phép thế ngược từ dưới lên.

Thuật toán khử Gauss

Ví dụ:

$$\begin{cases} & y & +z & -2t & = -3, \\ x & +2y & -z & & = 2, \\ 2x & +4y & +z & -3t & = -2, \\ x & -4y & -7z & -t & = -19 \end{cases}$$

Thuật toán khử Gauss

Ví dụ:

$$\begin{cases} \quad\;\; y + z - 2t = -3, \\ x + 2y - z = 2, \\ 2x + 4y + z - 3t = -2, \\ x - 4y - 7z - t = -19 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right)$$

Thuật toán khử Gauss

Ví dụ:

$$\begin{cases} \quad\quad y + z - 2t = -3, \\ x + 2y - z \quad\quad = 2, \\ 2x + 4y + z - 3t = -2, \\ x - 4y - 7z - t = -19 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right)$$

Cần khử các phần tử khác không dưới phần tử **1** dẫn đầu ở hàng thứ nhất:

$$\xrightarrow{h_3 - 2\times h_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right) \xrightarrow{h_4 - h_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array}\right)$$

Thuật toán khử Gauss

Ví dụ (tiếp):

Cần khử các phần tử khác không dưới phần tử **1** dẫn đầu ở hàng thứ hai:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array}\right) \xrightarrow{h_4+6\times h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right)$$

Thuật toán khử Gauss

Ví dụ (tiếp):

Cần khử các phần tử khác không dưới phần tử **1** dẫn đầu ở hàng thứ hai:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array}\right) \xrightarrow{h_4+6\times h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right)$$

Làm xuất hiện phần tử **1** dẫn đầu ở hàng thứ ba và hàng thứ tư:

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\times h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{13}\times h_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

Thuật toán khử Gauss

Ví dụ (tiếp):

Cần khử các phần tử khác không dưới phần tử **1** dẫn đầu ở hàng thứ hai:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array}\right) \xrightarrow{h_4+6\times h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right)$$

Làm xuất hiện phần tử **1** dẫn đầu ở hàng thứ ba và hàng thứ tư:

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\times h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{13}\times h_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

Ta đã đưa được ma trận hệ số mở rộng về dạng bậc thang. Tiếp theo ta sẽ giải hệ phương trình nhận ma trận dạng bậc thang này làm ma trận hệ số mở rộng.

Thuật toán khử Gauss

Ví dụ (tiếp):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ y + z - 2t = -3, \\ z - t = -2, \\ t = 3 \end{cases}$$

Giải bằng phép thế ngược:

$$\begin{aligned} & t = 3 \\ & z = t - 2 = 1 \\ & y = -z + 2t - 3 = 2 \\ & x = -2y + z + 2 = -1 \end{aligned}$$

Thuật toán khử Gauss

Ví dụ:

$$\begin{cases} x & -y & +2z & = 4, \\ x & & +z & = 6, \\ 2x & -3y & +5z & = 4, \\ 3x & +2y & -z & = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Thuật toán khử Gauss

Ví dụ:

$$\begin{cases} x & -y & +2z & = 4, \\ x & & +z & = 6, \\ 2x & -3y & +5z & = 4, \\ 3x & +2y & -z & = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{2} \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

Hàng 3 tương ứng với phương trình $0 = -2$, vô nghiệm!

Tóm tắt

Thuật toán Gauss-Jordan

Giải hệ pttt bằng thuật toán Gauss-Jordan:

1. Viết ma trận hệ số mở rộng của hệ pttt.
2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng, đưa về ma trận dạng bậc thang theo hàng tương đương.
3. Tiếp tục dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng, đưa về ma trận dạng bậc thang theo hàng *thu gọn* tương đương.

Thuật toán Gauss-Jordan

Ví dụ:

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = 9, \\ -x & +3y & & = -4, \\ 2x & -5y & +5z & = 17 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

Thuật toán Gauss-Jordan

Ví dụ:

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = 9, \\ -x & +3y & & = -4, \\ 2x & -5y & +5z & = 17 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

Đưa ma trận hệ số mở rộng về dạng bậc thang (như ví dụ trước):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

Thuật toán Gauss-Jordan

Ví dụ:

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = 9, \\ -x & +3y & & = -4, \\ 2x & -5y & +5z & = 17 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right)$$

Đưa ma trận hệ số mở rộng về dạng bậc thang (như ví dụ trước):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

Khử các phần tử khác 0 trên phần tử **1** dẫn đầu ở hàng 3:

$$\xrightarrow{h_1 - 3\times h_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 - 3\times h_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

Thuật toán Gauss-Jordan

Ví dụ (tiếp):

Khử các phần tử khác 0 trên phần tử **1** dẫn đầu ở hàng thứ hai:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1+2\times h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

Thuật toán Gauss-Jordan

Ví dụ (tiếp):
Khử các phần tử khác 0 trên phần tử **1** dẫn đầu ở hàng thứ hai:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1+2\times h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

Ma trận nhận được có dạng bậc thang theo hàng thu gọn.

Thuật toán Gauss-Jordan

Ví dụ (tiếp):
Khử các phần tử khác 0 trên phần tử **1** dẫn đầu ở hàng thứ hai:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1+2\times h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

Ma trận nhận được có dạng bậc thang theo hàng thu gọn.

Hệ có nghiệm duy nhất: $x = 1, y = -1, z = 2$.

Thuật toán Gauss-Jordan

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x & +4y & -2z & = 0, \\ 3x & +5y & & = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Thuật toán Gauss-Jordan

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x & +4y & -2z & = 0, \\ 3x & +5y & & = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \xrightarrow{h_2-3\times h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Thuật toán Gauss-Jordan

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x & +4y & -2z & = 0, \\ 3x & +5y & & = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \xrightarrow{h_2-3\times h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)\times h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 \end{array}\right) \qquad \xrightarrow{h_1-2\times h_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 5 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Biến z là biến tự do (cột tương ứng không có số 1 dẫn đầu).
Hệ có vô số nghiệm: $S = \{(2-5t, -1+3t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Tóm tắt

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa

Một hệ pttt là thuần nhất *nếu tất cả các hệ số tự do (vế phải) của nó đều bằng 0.*

Nhận xét: Mọi hệ pttt thuần nhất đều có ít nhất một nghiệm là $(0, 0, \ldots, 0)$ (gọi là *nghiệm tầm thường*).

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa

Một hệ pttt là thuần nhất *nếu tất cả các hệ số tự do (vế phải) của nó đều bằng 0.*

Nhận xét: Mọi hệ pttt thuần nhất đều có ít nhất một nghiệm là $(0, 0, \dots, 0)$ (gọi là *nghiệm tầm thường*).

Định lý

Mọi hệ pttt thuần nhất đều có nghiệm. Hơn nữa, nếu một hệ pttt thuần nhất có số phương trình ít hơn số ẩn thì hệ đó có vô số nghiệm.

Thuật ngữ tiếng Anh

linear equation:	pt tuyến tính
variable:	biến số (ẩn số)
coefficient:	hệ số
solution:	nghiệm
parametric representation:	biểu diễn tham số
parameter:	tham số
consistent (system):	(hệ) có nghiệm
inconsistent:	vô nghiệm
back-substitution:	thế ngược
Gaussian elimination:	phương pháp khử Gauss
(row-)equivalent:	tương đương (theo hàng)
(row-)echelon form:	dạng bậc thang (theo hàng)
homogeneous:	thuần nhất

Thuật ngữ tiếng Anh

matrix: ma trận

row: hàng

column: cột

subscript: chỉ số

size: cỡ

order: cấp

main diagonal: đường chéo chính

coefficient matrix: ma trận hệ số

augmented matrix: ma trận hệ số mở rộng

elementary row operation: biến đổi sơ cấp theo hàng

leading 1: phần tử 1 dẫn đầu

reduced row-echelon form: dạng bậc thang theo hàng thu gọn

trivial solution: nghiệm tầm thường