Không gian Euclid

Hà Minh Lam
hmlam@math.ac.vn

2021-2022

Tóm tắt

Tóm tắt

1. Khoảng cách và góc trong $\mathbb{R}^n$
   - Khoảng cách trong $\mathbb{R}^n$
   - Tích vô hướng và góc trong $\mathbb{R}^n$
   - Bất đẳng thức tam giác và định lý Pythagoras
2. Không gian Euclid
   - Không gian có tích vô hướng
   - Khoảng cách và góc trong không gian có tích vô hướng
   - Phép chiếu vuông góc

Độ dài của vector trong $\mathbb{R}^n$

Trong hình học giải tích, độ dài của các vector trong $\mathbb{R}^2$ và trong $\mathbb{R}^3$ được cho bởi định lý Pythagoras:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \quad \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Độ dài của vector trong $\mathbb{R}^n$

Trong hình học giải tích, độ dài của các vector trong $\mathbb{R}^2$ và trong $\mathbb{R}^3$ được cho bởi định lý Pythagoras:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \quad \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Định nghĩa

Độ dài *hay* chuẩn *của một vector* $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *được định nghĩa bởi:*

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Độ dài của vector trong $\mathbb{R}^n$

Trong hình học giải tích, độ dài của các vector trong $\mathbb{R}^2$ và trong $\mathbb{R}^3$ được cho bởi định lý Pythagoras:

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}\,; \quad \|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Định nghĩa

Độ dài *hay* chuẩn *của một vector* $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *được định nghĩa bởi:*

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Ví dụ: Độ dài của vector $\mathbf{v} = (0, -2, 1, 4, -2)$ trong $\mathbb{R}^5$ là

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2 + 4^2 + (-2)^2} = 5\,.$$

Độ dài của vector trong $\mathbb{R}^n$

Trong hình học giải tích, độ dài của các vector trong $\mathbb{R}^2$ và trong $\mathbb{R}^3$ được cho bởi định lý Pythagoras:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \quad \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Định nghĩa

Độ dài *hay* chuẩn *của một vector* $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *được định nghĩa bởi:*

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Ví dụ: Độ dài của vector $\mathbf{v} = (0, -2, 1, 4, -2)$ trong $\mathbb{R}^5$ là

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2 + 4^2 + (-2)^2} = 5\,.$$

Nhận xét:

- Mọi vector có độ dài không âm: $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{v}\| \geq 0$.
- Vector $\mathbf{0}$ là vector duy nhất có độ dài 0: $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Phương của vector

Định nghĩa

Hai vector khác không $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *trong* $\mathbb{R}^n$ *là* cùng phương *nếu tồn tại* $c \in \mathbb{R}$ *sao cho* $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$*. Hơn nữa, nếu* $c > 0$ *thì* $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *là* cùng hướng*, nếu* $c < 0$ *thì* $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *là* ngược hướng*.*

Phương của vector

Định nghĩa

Hai vector khác không $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *trong* $\mathbb{R}^n$ *là* cùng phương *nếu tồn tại* $c \in \mathbb{R}$ *sao cho* $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$. *Hơn nữa, nếu* $c > 0$ *thì* $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *là* cùng hướng, *nếu* $c < 0$ *thì* $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *là* ngược hướng.

Định lý

Với mọi vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *và với mọi số* $c \in \mathbb{R}$, $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$.

Phương của vector

Định nghĩa

Hai vector khác không $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *trong* $\mathbb{R}^n$ *là* cùng phương *nếu tồn tại* $c \in \mathbb{R}$ *sao cho* $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$*. Hơn nữa, nếu* $c > 0$ *thì* $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *là* cùng hướng*, nếu* $c < 0$ *thì* $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *là* ngược hướng.

Định lý

Với mọi vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *và với mọi số* $c \in \mathbb{R}$, $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$.

Định lý

Nếu $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ *và* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *thì* $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ *là một vector đơn vị và cùng hướng với* $\mathbf{v}$.

Phương của vector

Định nghĩa

Hai vector khác không $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *trong* $\mathbb{R}^n$ *là* cùng phương *nếu tồn tại* $c \in \mathbb{R}$ *sao cho* $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$. *Hơn nữa, nếu* $c > 0$ *thì* $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *là* cùng hướng, *nếu* $c < 0$ *thì* $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *là* ngược hướng.

Định lý

Với mọi vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *và với mọi số* $c \in \mathbb{R}$, $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$.

Định lý

Nếu $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ *và* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *thì* $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ *là một vector đơn vị và cùng hướng với* $\mathbf{v}$.

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^3$, xét $\mathbf{v} = (3, -1, 2)$. Ta có $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{14}$. Vector đơn vị cùng hướng với $\mathbf{v}$ là $\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$.

Khoảng cách giữa hai vector

Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai vector **u** *và* **v** *trong* $\mathbb{R}^n$ *được định nghĩa bởi:*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Khoảng cách giữa hai vector

Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai vector $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *trong* $\mathbb{R}^n$ *được định nghĩa bởi:*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Ví dụ: Khoảng cách giữa $\mathbf{u} = (0, 2, 2)$ và $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ (trong $\mathbb{R}^3$) là $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|(0, 2, 2) - (2, 0, 1)\| = \|(-2, 2, 1)\| = 3.$

Định lý

Với mọi vector $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*:*

1. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0.$
2. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{v}.$
3. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$

Tóm tắt

1. Khoảng cách và góc trong $\mathbb{R}^n$
   - Khoảng cách trong $\mathbb{R}^n$
   - Tích vô hướng và góc trong $\mathbb{R}^n$
   - Bất đẳng thức tam giác và định lý Pythagoras
2. Không gian Euclid
   - Không gian có tích vô hướng
   - Khoảng cách và góc trong không gian có tích vô hướng
   - Phép chiếu vuông góc

Tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Tích vô hướng *hay* tích chấm *của hai vector* $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *và* $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *được định nghĩa bởi*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \, .$$

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^4$, xét $\mathbf{u} = (1, 2, 0, -3)$ và $\mathbf{v} = (3, -2, 4, 2)$. Ta có $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7$.

Định lý

Với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *và với mọi* $c \in \mathbb{R}$*:*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
3. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$.
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$.

Tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^2$, xét $\mathbf{u} = (2, -2), \mathbf{v} = (5, 8), \mathbf{w} = (-4, 3)$.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -6$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -14$.
2. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = -6\mathbf{w} = (-24, 18)$.
3. $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v}) = 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = -12$.
4. $\|w\| = \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} = 5$.
5. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - 2\mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 22$.

Góc trong $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Góc *giữa hai vector khác không* **u** *và* **v** *trong* $\mathbb{R}^n$ *là góc* θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ *thỏa mãn*

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|}\,.$$

Nhận xét:

- Trong $\mathbb{R}^2$, công thức trên chính là *định lý cosine* trong tam giác.
- Để định nghĩa là có nghĩa, ta cần có

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|} \leq 1\,.$$

Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Định lý

Với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\|$.

Chứng minh:

- Nếu $\mathbf{u} = \mathbf{0}$: hiển nhiên.
- Nếu $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, xét $f(t) = \|t\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$ với $t \in R$.

  Ta có $f(t) \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

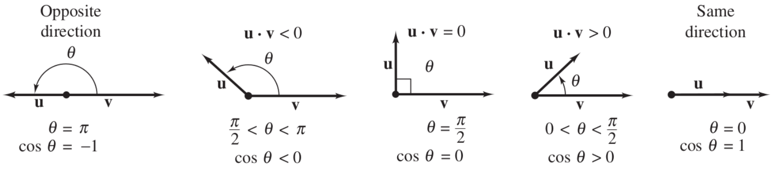
  Mặt khác, $f(t) = (t\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (t\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 t^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})t + \|\mathbf{v}\|^2$ là một đa thức bậc 2 theo t, nên $f(t) \geq 0$ khi và chỉ khi $\Delta' \leq 0$, tức là $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \; \|\mathbf{v}\|^2 \leq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi:

- $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ hoặc $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- hoặc tồn tại t sao cho $t\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, tức là $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$ cùng phương.

Góc nhọn, góc tù và dấu của tích vô hướng

Từ định nghĩa, $\cos\theta$ và $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ luôn cùng dấu với nhau.



Hình: Larson et al., p. 286

Vector vuông góc trong $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Hai vector $\mathbf{u}$ *và* $\mathbf{v}$ *trong* $\mathbb{R}^n$ *được gọi là* vuông góc *hay* trực giao *với nhau nếu* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Chú ý:

- Định nghĩa trên sử dụng tích vô hướng chứ không sử dụng góc.
- Vector $\mathbf{0}$ vuông góc với mọi vector, mặc dù góc giữa vector $\mathbf{0}$ và một vector khác không xác định.

Ví dụ:

- Các vector trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ đôi một vuông góc với nhau.
- Hai vector $\mathbf{u} = (3, 2, -1, 4)$ và $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 0)$ trong $\mathbb{R}^4$ vuông góc với nhau.
- Xét $\mathbf{u} = (2, 1)$. Một vector $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$ vuông góc với $\mathbf{u}$ khi và chỉ khi $2x_1 + x_2 = 0$. Từ đó tập hợp các vector vuông góc với $\mathbf{u}$ là $\{(t, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

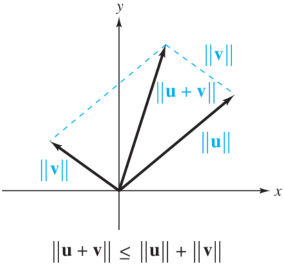
Tóm tắt

1. Khoảng cách và góc trong $\mathbb{R}^n$
   - Khoảng cách trong $\mathbb{R}^n$
   - Tích vô hướng và góc trong $\mathbb{R}^n$
   - Bất đẳng thức tam giác và định lý Pythagoras
2. Không gian Euclid
   - Không gian có tích vô hướng
   - Khoảng cách và góc trong không gian có tích vô hướng
   - Phép chiếu vuông góc

Bất đẳng thức tam giác

Định lý

Với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.



Hình: Larson et al., p. 288

Bất đẳng thức tam giác

Định lý

Với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Chứng minh: Bình phương vế trái và sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2
\end{aligned}$$

Khai cuan hai vế và chú ý rằng cả $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ và $(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)$ đều không âm, ta được $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Điều kiện đẳng thức: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|$ và $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|$, tức là $\mathbf{u}$ và $\mathbf{v}$ cùng hướng hoặc (ít nhất) một trong hai vector bằng $\mathbf{0}$.

Định lý Pythagoras

Định lý

Hai vector **u** *và* **v** *trong* $\mathbb{R}^n$ *là vuông góc với nhau khi và chỉ khi*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 .$$

Tích vô hướng và tích ma trận

Vector trong $\mathbb{R}^n$ thường được biểu diễn dưới dạng ma trận cột:

$$\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Do đó tích vô hướng của hai vector có thể được biểu diễn dưới dạng tích ma trận:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}.$$

Tóm tắt

Tích vô hướng

Định nghĩa

Cho V là một không gian vector. Một tích vô hướng *trên V là một hàm hai biến $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, *với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, *với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
3. $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, *với mọi* $c \in \mathbb{R}$ *và với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ *với mọi* $\mathbf{u} \in V$ *và* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ví dụ:

- $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng thông thường.

Tích vô hướng

Định nghĩa

Cho V là một không gian vector. Một tích vô hướng *trên V là một hàm hai biến $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, *với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, *với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
3. $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, *với mọi* $c \in \mathbb{R}$ *và với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ *với mọi* $\mathbf{u} \in V$ *và* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ví dụ:

- $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng thông thường.
- $\mathbb{R}^2$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$ là một tích vô hướng.

Tích vô hướng

Định nghĩa

Cho V là một không gian vector. Một tích vô hướng *trên V là một hàm hai biến $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$*, với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$*, với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
3. $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$*, với mọi* $c \in \mathbb{R}$ *và với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ *với mọi* $\mathbf{u} \in V$ *và* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ví dụ:

- $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng thông thường.
- $\mathbb{R}^2$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2 u_2 v_2$ là một tích vô hướng.
- $\mathbb{R}^2$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$ không phải là một tích vô hướng.

Tích vô hướng

Định nghĩa

Cho V là một không gian vector. Một tích vô hướng *trên V là một hàm hai biến $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, *với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, *với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
3. $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, *với mọi* $c \in \mathbb{R}$ *và với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ *với mọi* $\mathbf{u} \in V$ *và* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ví dụ:

- $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng thông thường.
- $\mathbb{R}^2$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$ là một tích vô hướng.
- $\mathbb{R}^2$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$ không phải là một tích vô hướng.
- $\mathbb{R}^n$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c_1 u_1 v_1 + c_2 u_2 v_2 + \ldots + c_n u_n v_n$ $(c_i > 0\ \forall i)$ là một tích vô hướng.

Một vài ví dụ khác:

- $M_{2,2}: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,
  $\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$ là một tích vô hướng.

Một vài ví dụ khác:

- $M_{2,2}: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,
  $\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$ là một tích vô hướng.

- P_n: $\langle a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ là một tích vô hướng.

Một vài ví dụ khác:

- $M_{2,2}: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,
  $\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$ là một tích vô hướng.

- P_n: $\langle a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ là một tích vô hướng.

- Không gian $C[a, b]$ các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

  là một tích vô hướng.

Quiz:

1. Trong $\mathbb{R}^2$ xét các vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ và $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Trong các hàm sau, hàm nào là một tích trong trong $\mathbb{R}^2$?
   A) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1$.
   B) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 u_2 + v_1 v_2$.
   C) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$.
   D) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 3 u_2 v_2$.

Quiz:

1. Trong $\mathbb{R}^2$ xét các vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ và $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Trong các hàm sau, hàm nào là một tích trong trong $\mathbb{R}^2$?

   A) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1$.
   B) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 u_2 + v_1 v_2$.
   C) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$.
   D) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 3 u_2 v_2$.

   Đáp án: D).

Quiz:

1. Trong $\mathbb{R}^2$ xét các vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ và $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Trong các hàm sau, hàm nào là một tích trong trong $\mathbb{R}^2$?

   A) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1$.
   B) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 u_2 + v_1 v_2$.
   C) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$.
   D) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 3 u_2 v_2$.

   Đáp án: D).

2. Trong P_2, ta xét tích trong sau:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

   với mọi $f, g \in P_2$.

   Tính tích trong của đa thức $f(x) = 2$ và đa thức $g(x) = x^2 - x$.

Quiz:

1. Trong $\mathbb{R}^2$ xét các vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ và $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Trong các hàm sau, hàm nào là một tích trong trong $\mathbb{R}^2$?

   A) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1$.
   B) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 u_2 + v_1 v_2$.
   C) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$.
   D) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 3 u_2 v_2$.

   Đáp án: D).

2. Trong P_2, ta xét tích trong sau:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

   với mọi $f, g \in P_2$.

   Tính tích trong của đa thức $f(x) = 2$ và đa thức $g(x) = x^2 - x$.

   Đáp án: $\langle f, g \rangle = -1/3$..

Tính chất của tích vô hướng

Cho không gian vector V với tích vô hướng $\langle\ ,\ \rangle$.

Tính chất của tích vô hướng

Cho không gian vector V với tích vô hướng $\langle \ , \ \rangle$.

Định lý

Với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *và với mọi* $c \in \mathbb{R}$*:*

1. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = 0.$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$
3. $\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$

Tóm tắt

Độ dài và khoảng cách

Định nghĩa

1. Độ dài *hay* chuẩn *của vector* $\mathbf{u}$ *là* $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.
2. Khoảng cách *giữa hai vector* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *là* $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Định lý (Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz)

Với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$.

Góc

Định nghĩa

1. Góc *giữa hai vector khác không* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *là góc* θ *(*$0 \le \theta \le \pi$*) sao cho*

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \ \|\mathbf{v}\|}.$$

2. *Hai vector* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *được gọi là vuông góc với nhau nếu* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Góc

Định nghĩa

1. Góc *giữa hai vector khác không* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *là góc* θ *(*$0 \leq \theta \leq \pi$*) sao cho*

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\|}.$$

2. *Hai vector* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *được gọi là vuông góc với nhau nếu* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$*.*

Chú ý: Vector $\mathbf{0}$ vuông góc với mọi vector, mặc dù góc giữa nó và một vector khác không được định nghĩa.

Bất đẳng thức tam giác và định lý Pythagoras

Định lý (Bất đẳng thức tam giác)

Với mọi vector $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Bất đẳng thức tam giác và định lý Pythagoras

Định lý (Bất đẳng thức tam giác)

Với mọi vector $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

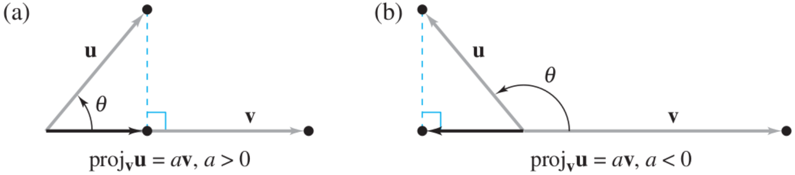
Định lý (Pythagoras)

Hai vector $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *vuông góc với nhau khi và chỉ khi*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 .$$

Tóm tắt

Phân tích



Hình: Larson et al., p. 300

Định nghĩa

Hình chiếu vuông góc *của một vector* $\mathbf{u}$ *lên một vector* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *ký hiệu là* $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$, *là một vector thỏa mãn:*

- $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$ *cùng phương với* $\mathbf{v}$;
- $\mathbf{u} - \pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$ *vuông góc với* $\mathbf{v}$.

Phép chiếu vuông góc (lên một vector)

Định lý

Hình chiếu vuông góc của một vector $\mathbf{u}$ *lên vector* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *được xác định duy nhất bởi:*

$$\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \, \mathbf{v} \, .$$

Chứng minh: Đặt $\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \alpha \mathbf{v}$. Thay vào đẳng thức $\langle \mathbf{u} - \pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0$ ta được

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \, .$$

Đường xiên và đường vuông góc

Định lý (Bất đẳng thức đường xiên và đường vuông góc)

Xét hai vector $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *với* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. *Với mọi* $c \in \mathbb{R}$:

$$d(\mathbf{u}, \pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})) \leq d(\mathbf{u}, c\mathbf{v})\,.$$

Đẳng thức xảy ra khi $c = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}$.

Quiz:

1. Cho $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$. Gọi $\mathbf{u}^{\perp}$ là tập hợp tất cả các vector trong $\mathbb{R}^3$ mà vuông góc (trực giao) với $\mathbf{u}$. Tìm $\mathbf{u}^{\perp}$.

Quiz:

1. Cho $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$. Gọi $\mathbf{u}^{\perp}$ là tập hợp tất cả các vector trong $\mathbb{R}^3$ mà vuông góc (trực giao) với $\mathbf{u}$. Tìm $\mathbf{u}^{\perp}$.

Đáp án: $\mathbf{u}^{\perp} = \{(s, t, s) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Quiz:

1. Cho $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$. Gọi $\mathbf{u}^{\perp}$ là tập hợp tất cả các vector trong $\mathbb{R}^3$ mà vuông góc (trực giao) với $\mathbf{u}$. Tìm $\mathbf{u}^{\perp}$.

   Đáp án: $\mathbf{u}^{\perp} = \{(s, t, s) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

2. Trong $\mathbb{R}^3$ cùng với tích chấm (tích vô hướng thông thường), cho hai vector $\mathbf{u} = (0, 1, 2), \mathbf{v} = (1, 2, 1)$. Khi đó $\mathbf{u} - \pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$ là vector nào dưới đây?

   A) $(-2/3, -1/3, 4/3)$.

   B) $(-2/3, 1/3, 2/3)$.

   C) $(2/3, -1/3, 4/3)$.

   D) $(1/3, 4/3, 2/3)$.

Quiz:

1. Cho $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$. Gọi $\mathbf{u}^{\perp}$ là tập hợp tất cả các vector trong $\mathbb{R}^3$ mà vuông góc (trực giao) với $\mathbf{u}$. Tìm $\mathbf{u}^{\perp}$.

   Đáp án: $\mathbf{u}^{\perp} = \{(s, t, s) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

2. Trong $\mathbb{R}^3$ cùng với tích chấm (tích vô hướng thông thường), cho hai vector $\mathbf{u} = (0, 1, 2), \mathbf{v} = (1, 2, 1)$. Khi đó $\mathbf{u} - \pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$ là vector nào dưới đây?

   A) $(-2/3, -1/3, 4/3)$.
   B) $(-2/3, 1/3, 2/3)$.
   C) $(2/3, -1/3, 4/3)$.
   D) $(1/3, 4/3, 2/3)$.

   Đáp án: A)