ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN HAI LỚP

TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

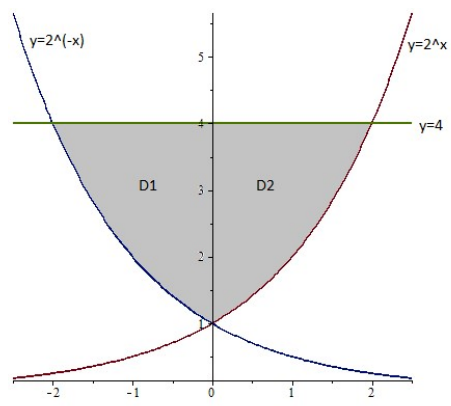
Từ công thức tích phân hai lớp:

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Khi $f(x,y)=1$, công thức tích phân xác định diện tích của miền D:

$$S_D = \iint_D dxdy$$

Ví dụ. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $y=2^x; y=2^{-x}; y=4$



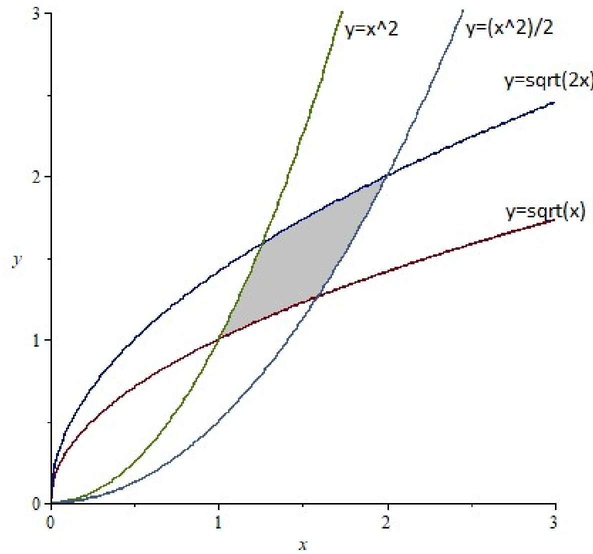
$$D = D_1 \cup D_2; D_1 : \begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ 2^{-x} \le y \le 4 \end{cases}; D_2 : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 2^{x} \le y \le 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow S_D = \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy = 2\iint_{D_1} dxdy = 2\int_{-2}^{0} dx \int_{2^{-x}}^{4} dy$$

$$= 2\int_{-2}^{0} \left(4 - 2^{-x}\right) dx = 2\left(\frac{8\ln 2 - 3}{\ln 2}\right)$$

Ví dụ. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi: $y^2 = x; y^2 = 2x; x^2 = y; x^2 = 2y$

Ta có: $S = \iint\limits_D dxdy$. Sử dụng phép đổi biến, đặt:



$$\begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{y} \end{cases} \Rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$$

$$J^{-1} = \left| \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3$$

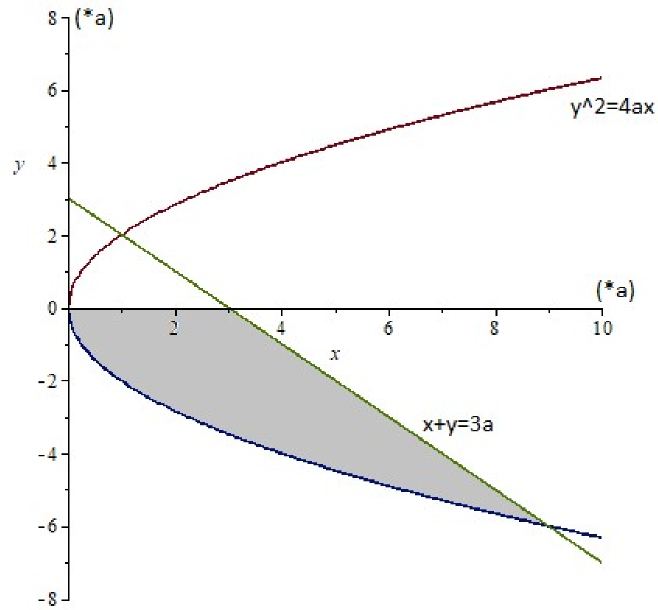
Dẫn đến: $$\rightarrow S_D = \int\limits_{D_{uv}} \frac{1}{3} \text{dud}v = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^2 dv = \frac{1}{3}$$

Ví dụ. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi:

$$y=0; y^2=4ax; x+y=3a, (a>0, y\le 0)$$

Từ hình vẽ, ta có miền xác định:

$$D:\begin{cases} -6a\le y\le 0 \\ \dfrac{y^2}{4a}\le x\le 3a-y \end{cases}$$



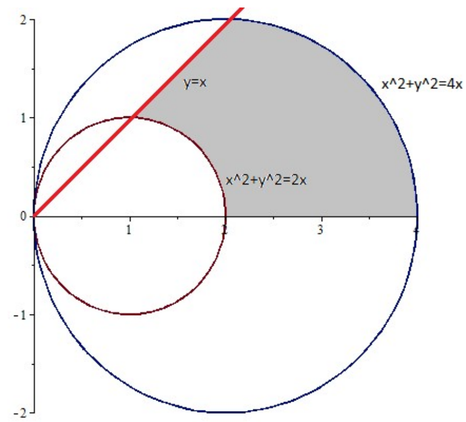
Dẫn đến:

$$\to S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-6a}^{0}dy\int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{3a-y}dx=\int\limits_{-6a}^{0}\left(3a-y-\frac{y^2}{4a}\right)dy=18a^2$$

Ví dụ. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi:

$$x^2+y^2=2x; x^2+y^2=4x; x=y; y=0$$

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow D: \begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4} \\ 2\cos\varphi\le r\le 4\cos\varphi \end{cases}$



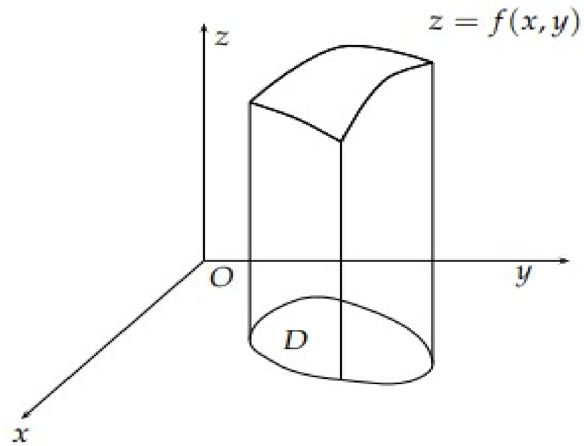
$$\Rightarrow J=\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}=r$$

$$\rightarrow S_D=\iint_D dxdy=\iint_{D_{r\varphi}} rdrd\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi=6\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi d\varphi$$

$$=6\left.\left(\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}\varphi\right)\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}$$

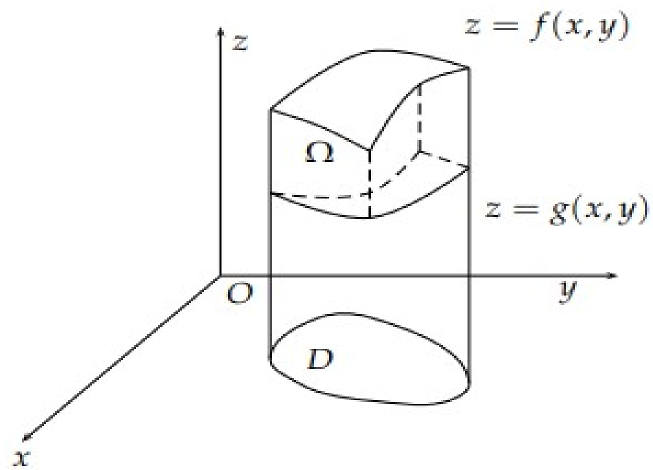
TÍNH THỂ TÍCH CỦA VẬT THỂ

Ứng dụng này đã được trình bày như là bài toán tích phân dẫn đến tích phân 2 lớp.



- Vật thể có mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đáy là miền D trong mặt phẳng Oxy, phía trên bị giới hạn mởi mặt cong $z = f(x,y) \geq 0$ và liên tục trên D thì:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

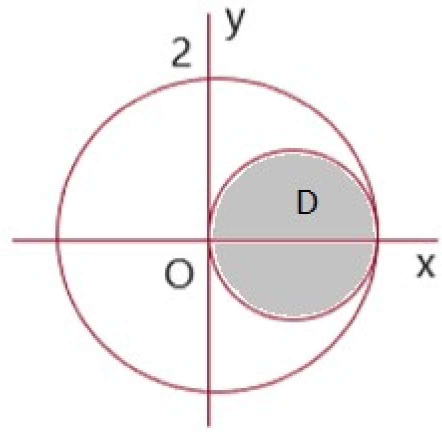


- Vật thể có mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, bị giới hạn bởi $z = f(x,y)$, $z = g(x,y)$. Chiếu các mặt này lên mặt phẳng Oxy ta được miền D, $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là các hàm liên tục, có đạo hàm liên tục trên D. Khi đó:

$$V = \iint_D \left[f(x,y) - g(x,y) \right] dxdy$$

Ví dụ. Tính thể tích giới hạn bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ và hình trụ tròn $x^2+y^2=2x$

Miền D là hình tròn $(x-1)^2+y^2=1$ đối xứng qua trục x. Cả mặt cầu và mặt trụ đều đối xứng qua mặt $z=0$ và $y=0$, do đó miền lấy tích phân là nửa đường tròn. Thể tích miền giới hạn được xác định bởi:



$$V=4\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$$

Sử dụng hệ tọa độ cực: $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi$

$$D_{r,\theta}:\begin{cases}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le r\le 2\cos\varphi\end{cases}$$

$$\to V=4\iint_D\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\sqrt{4-r^2}\,rdr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\cos\varphi}d\varphi$$

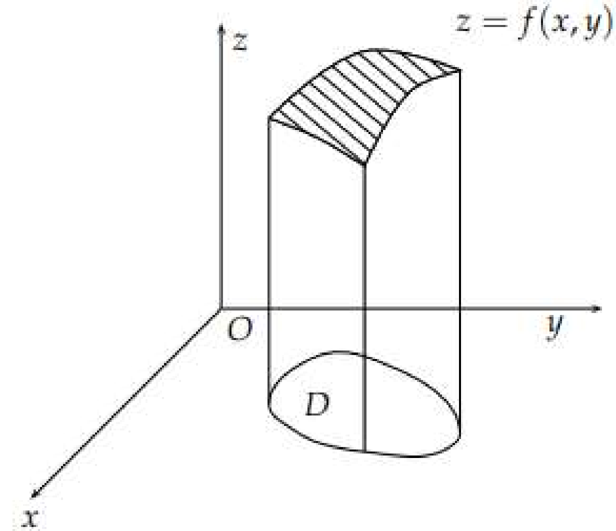
$$=\frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\varphi\right)d\varphi=\frac{32}{3}.\frac{1}{6}(3\pi-4)=\frac{16}{9}(3\pi-4)$$

TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CONG

Mặt $z = f(x, y)$ được giới hạn bởi một đường cong kín, hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy là D. Nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó:

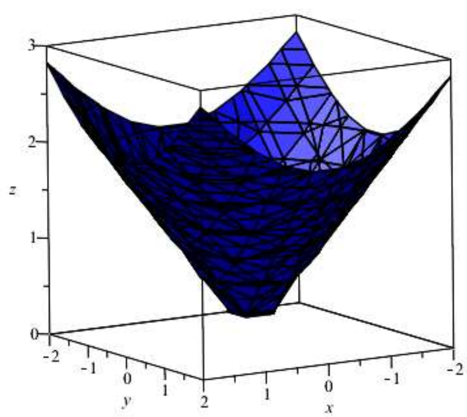
$$S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy$$

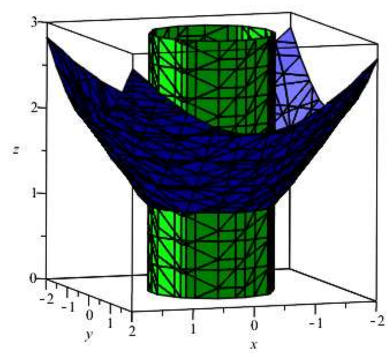
trong đó các đạo hàm riêng $p = f'_x; q = f'_y$.



Ví dụ. Tính diện tích của phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2, (z \geq 0)$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$

Giao tuyến của phần mặt nón và hình trụ thỏa mãn $z \geq 0$ được xác định tại $z = 1,$ như vậy phương trình hình chiếu của giao tuyến này lên mặt phẳng Oxy là đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 = 1$





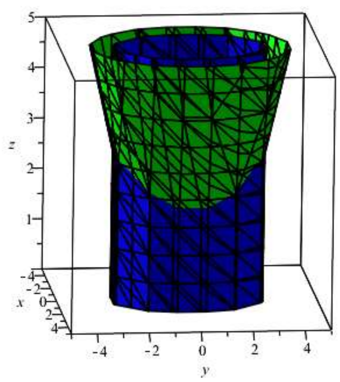
Gọi D là miền phẳng giới hạn bởi đường tròn đó. Phương trình của phần mặt nón ứng với $z \geq 0$ là:

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rightarrow S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\, dxdy$$

$$= \sqrt{2} \iint\limits_D dxdy = \pi\sqrt{2}$$

Ví dụ. Tính diện tích của phần paraboloit $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}, \left(a > 0, b > 0\right)$ nằm trong mặt trụ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Ta có:

$$z = f\left(x, y\right) = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}; S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(f_x^{'}\right)^2 + \left(f_y^{'}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{a}\right)^2 + \left(\frac{2y}{b}\right)^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy$$

Trong đó D là miền trong mặt phẳng Oxy, giới hạn bởi đường elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Đổi biến số:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases} \rightarrow J = \begin{vmatrix} x_r^{'} & x_\varphi^{'} \\ y_r^{'} & y_\varphi^{'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr$$

$$\rightarrow D_{r,\varphi} : \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases} \rightarrow S = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\, r dr = \frac{\pi ab}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

KHỐI LƯỢNG VÀ KHỐI TÂM CỦA TẤM PHẲNG

Cho tấm phẳng D có hàm mật độ $\rho(x,y)$, khối lượng M và khối tâm (x_c, y_c) được xác định như sau:

$$M = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$$

$$x_c = \frac{1}{M}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy$$

$$y_c = \frac{1}{M}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy$$

Ví dụ. Tìm khối tâm của hình chữ nhật $[0,1]x[0,1]$ với hàm mật độ $\rho(x,y) = e^{x+y}$

Khối lượng của tấm:

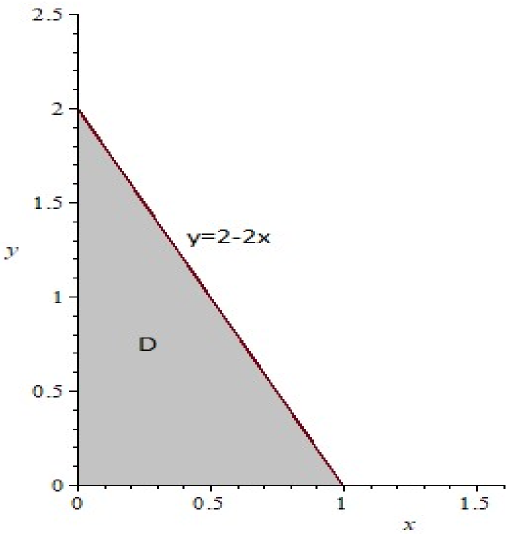
$$M = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^1 e^{x+y}dy = \int_0^1 (e-1)e^x dx = (e-1)^2$$

Tọa độ khối tâm:

$$x_c = \frac{1}{M}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy = \frac{1}{(e-1)^2}\int_0^1 dx\int_0^1 xe^{x+y}dy = \frac{1}{(e-1)^2}\int_0^1 (e-1)xe^x dx = \frac{1}{e-1}$$

$$y_c = \frac{1}{M}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy = \frac{1}{(e-1)^2}\int_0^1 dx\int_0^1 ye^{x+y}dy = \frac{1}{(e-1)^2}\int_0^1 e^x dx = \frac{1}{e-1}$$

Ví dụ. Tìm khối lượng và trọng tâm của tấm phẳng được giới hạn bởi các điểm $(0,0), (1,0), (0,2)$ với mật độ hàm là $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.



$$M = \iint_D \rho(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (1+3x+y)dy$$

$$= \int_0^1 \left(y + 3xy + \frac{1}{2}y^2 \right)\Bigg|_0^{2-2x} dx$$

$$= 4\int_0^1 \left(1-x^2\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$x_c = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\,dxdy = \frac{3}{8}\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} \left(x + 3x^2 + yx\right)dy$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left(xy + 3x^2y + \frac{1}{2}y^2x \right)\Bigg|_0^{2-2x} dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \left(x - x^3\right)dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{8}$$

$$y_c = \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\,dxdy = \frac{3}{8}\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} \left(y + 3xy + y^2\right)dy$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right)\Bigg|_0^{2-2x} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(7 - 9x - 3x^2 + 5x^3\right)dx = \frac{1}{4}\left(7x - \frac{9}{2}x^2 - x^3 + \frac{5}{4}x^4 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{16}$$

GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH CỦA TÍCH PHÂN

Hàm $f(x, y)$ xác định trên miền D có giá trị trung bình:

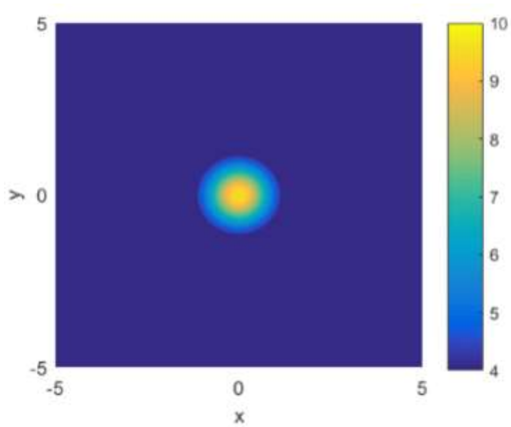
$$\overline{f} = \frac{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}$$

Ví dụ. Một hồ nước hình tròn có bán kính $10m$ bị ô nhiễm bởi các ion hòa tan. Biết hàm mật độ phân bố chất ô nhiễm là $c(x, y) = 10/(x^2 + y^2 + 1)$. Hãy xác định nồng độ trung bình của chất gây ô nhiễm nguồn nước và vị trí có nồng độ đạt nồng độ trung bình.

$$\overline{c} = \frac{\iint\limits_D \frac{10dxdy}{x^2+y^2+1}}{\iint\limits_D dxdy} = \frac{1}{100\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{10} \frac{10r}{r^2+1}dr = \frac{1}{5}\int_0^{10}\frac{r}{r^2+1}dr = \frac{1}{5}\frac{\ln\left(r^2+1\right)}{2}\Bigg|_0^{10} = \frac{1}{10}\ln(101) = 0.4615$$

Để tìm vị trí có nồng độ trung bình của chất gây nhiễm, giải phương trình:

$$c(x,y) = \overline{c} \Leftrightarrow \frac{10}{x^2+y^2+1} = 0.465 \Leftrightarrow \frac{10}{r^2+1} = 0.465 \Leftrightarrow r = 4.5463m$$

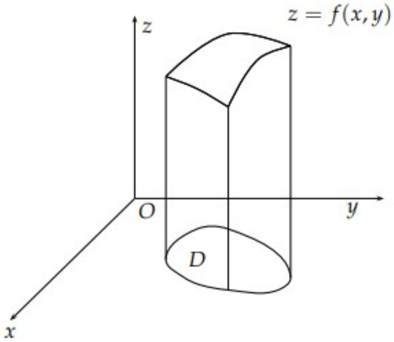


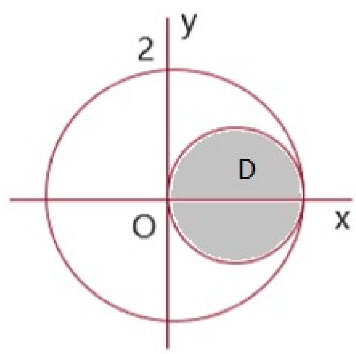
Bản đồ contour của nồng độ chất ô nhiễm

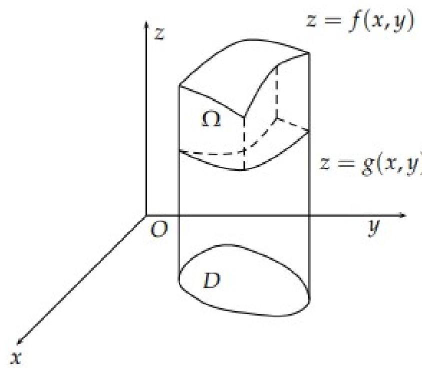
ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BA LỚP

THỂ TÍCH CỦA VẬT THỂ

Có thể sử dụng tích phân kép để tính thể tích của vật thể bởi:







$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy$$

$$V = \iint_D \left[f(x, y) - g(x, y) \right] dxdy$$

Tuy nhiên, trong một số trường hợp sử dụng tích phân bội ba cho phép tính toán thể tích nhanh hơn vì tích phân bội ba cho phép chuyển đổi sang hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu.

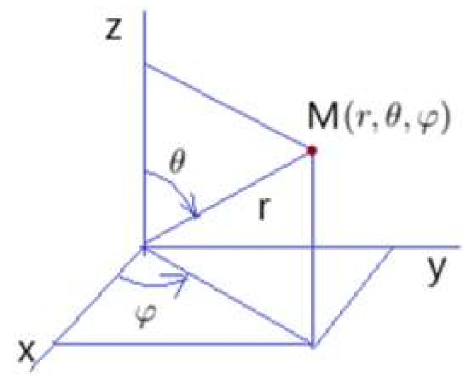
Từ định nghĩa của tích phân bội ba, thể tích của khối:

$$V = \iiint_V dxdydz$$

Ví dụ. Tính thể tích của vật thể $x^2+y^2+z^2=R^2$

Sử dụng phương pháp đổi biến trong hệ tọa độ cầu:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



$$r \ge 0; 0 \le \theta \le \pi; 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^2 \sin\theta dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3}\sin\theta d\theta = \frac{2\pi R^3}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Ví dụ. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt phẳng:

$$x+y+z=\pm 3; x+2y-z=\pm 1; x+4y+z=\pm 2$$

Thể tích: $$V=\iiint\limits_V dxdydz$$

Đặt $x+y+z=u; x+2y-z=v; x+4y+z=\mathrm{w}$ đó là 1 song ánh biến miền V lên miền V' trong không gian (u,v,w) xác định bởi:

$$-3\le u\le 3; -1\le v\le 1; -2\le \mathrm{w}\le 2$$

$$J^{-1}=\frac{D(u,v,\mathrm{w})}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=6\to J=\frac{1}{6}$$

$$\frac{D(u,v,\mathrm{w})}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=6\Rightarrow V=\frac{1}{6}\iiint\limits_V \mathrm{dud}v dw=\frac{1}{6}.6.4.2=8$$

KHỐI LƯỢNG CỦA VẬT THỂ

Khối lượng M của vật thể V có hàm mật độ $\rho(x, y, z)$:

$$M = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\,dxdydz$$

Ví dụ. Tính khối lượng của khối lập phương $[1,2]x[1,2]x[1,2]$ có mật độ khối lượng $\rho(x, y, z) = (1 + x)e^z y$.

$$M = \iiint\limits_V (1+x)e^z y\,dxdydz = \int_1^2 dx \int_1^2 dy \int_1^2 (1+x)e^z y\,dz$$

$$= \int_1^2 dx \int_1^2 (1+x)\,y\left(e^2 - e\right)dy = \frac{3}{2}\left(e^2 - e\right)\int_1^2 (1+x)\,dx = \frac{15}{4}\left(e^2 - e\right)$$

KHỐI TÂM CỦA VẬT THỂ

Khối tâm (x_c, y_c, z_c) của vật thể V có hàm mật độ $\rho(x,y,z)$:

$$x_c = \frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$y_c = \frac{1}{M}\iiint_V y\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$z_c = \frac{1}{M}\iiint_V z\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

Trong đó M là khối lượng của vật thể.

Ví dụ. Tính khối tâm của khối bán cầu được xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ và $z \ge 0$ có mật độ khối lượng $\rho(x,y,z) = x^2y^2$.

Sử dụng hệ tọa độ cầu cho biến tích phân:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases};\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases};J = r^2\sin\theta$$

$$M = \iiint_V x^2y^2\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^6\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^5\theta\,dr$$

$$= \frac{1}{7}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}\sin^5\theta\,d\theta = \frac{1}{7}.\frac{\pi}{4}.\frac{8}{15} = \frac{2\pi}{105}$$

$$x_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x^3 y^2 dxdydz = \frac{105}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^7 \cos^3\varphi \sin^2\varphi \sin^6\theta dr$$

$$= \frac{105}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin^2\varphi \sin^6\theta d\theta = \frac{525}{512}\int_0^{2\pi} \cos^3\varphi \sin^2\varphi d\varphi = 0$$

$$y_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x^2 y^3 dxdydz = \frac{105}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^7 \cos^2\varphi \sin^3\varphi \sin^6\theta dr$$

$$= \frac{105}{16\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin^3\varphi \sin^6\theta d\theta = \frac{525}{512}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^3\varphi d\varphi = 0$$

$$z_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x^2 y^2 z dxdydz = \frac{105}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^7 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \cos\theta \sin^5\theta dr$$

$$= \frac{105}{16\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin^2\varphi \cos\theta \sin^5\theta d\theta = \frac{105}{96}\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi = \frac{35}{128}$$

Ví dụ. Tính khối lượng và khối tâm của khối hình chữ nhật $[1,2],[1,2],[1,2]$ có mật độ khối lượng $\rho(x,y,z)=(x+y)z$.

$$M=\int_1^2 dx\int_1^2 dy\int_1^2 (x+y)zdz=\int_1^2 dx\int_1^2 (x+y)\frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=1}^{z=2} dy=\frac{3}{2}\int_1^2 dx\int_1^2 (x+y)dy$$

$$=\frac{3}{2}\int_1^2\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2} dx=\frac{3}{2}\int_1^2\left(x+\frac{3}{2}\right)dx=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}=\frac{3}{2}.3=\frac{9}{2}$$

$$x_c=\frac{1}{M}\int_1^2 dx\int_1^2 dy\int_1^2 x(x+y)zdz=\frac{2}{9}.\frac{55}{8}=\frac{110}{72}$$

$$y_c=\frac{1}{M}\int_1^2 dx\int_1^2 dy\int_1^2 y(x+y)zdz=\frac{2}{9}.\frac{55}{8}=\frac{110}{72}$$

$$z_c=\frac{1}{M}\int_1^2 dx\int_1^2 dy\int_1^2 z(x+y)zdz=\frac{2}{9}.7=\frac{14}{9}$$

GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH CỦA TÍCH PHÂN

Hàm $f(x, y, z)$ xác định trên miền V có giá trị trung bình tích phân:

$$\overline{f} = \frac{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_V dxdydz}$$

Ví dụ. Cho biết nhiệt độ tại mỗi điểm của khối lập phương $[-1,1]x[-1,1]x[-1,1]$ tỷ lệ với bình phương khoảng cách của nó từ tâm khối. Tính nhiệt độ trung bình của khối lập phương. Tại vị trí nào của khối có nhiệt độ bằng nhiệt độ trung bình?

Gọi c là hằng số tỷ lệ. Ta có:

$$\overline{T} = \frac{1}{V}\iiint\limits_V c\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}c\left(x^2+y^2+z^2\right)dz$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}c\left(3x^2+3y^2+1\right)dy = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}4c\left(\frac{2}{3}+x^2\right)dx = c$$

Vị trí (x, y, z) có nhiệt độ bằng nhiệt độ trung bình thỏa mãn:

$$c\left(x^2+y^2+z^2\right) = c \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 1$$

Đây chính là mặt cầu nội tiếp của khối lập phương đã cho.