ĐẠO HÀM RIÊNG

$$z = f(x, y)$$

Công thức biểu diễn:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x^{'} = D_x f \,; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y^{'} = D_y f$$

Bài tập. Tìm đạo hàm riêng của $z = y^2 \sin\frac{x}{y}$.

$$z_x^{'} = \frac{\partial z}{\partial x} = y^2.\frac{1}{y}.\cos\frac{x}{y} = y.\cos\frac{x}{y}$$

$$z_y^{'} = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.\sin\frac{x}{y} + y^2.x.\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cos\frac{x}{y} = 2y.\sin\frac{x}{y} - x.\cos\frac{x}{y}$$

Bài tập. Tìm đạo hàm riêng của $z = \sqrt{2x + 3y^2 + 1}$ và tính giá trị của chúng tại điểm (2,4).

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{2x + 3y^2 + 1}\right) = \frac{\left(2x + 3y^2 + 1\right)'_x}{2\sqrt{2x + 3y^2 + 1}} = \frac{2}{2\sqrt{2x + 3y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 3y^2 + 1}}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{2x + 3y^2 + 1}\right) = \frac{\left(2x + 3y^2 + 1\right)'_y}{2\sqrt{2x + 3y^2 + 1}} = \frac{6y}{2\sqrt{2x + 3y^2 + 1}} = \frac{3y}{\sqrt{2x + 3y^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow z'_x\left(2,4\right) = \frac{1}{\sqrt{4 + 48 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{53}};z'_y\left(2,4\right) = \frac{3.4}{\sqrt{4 + 48 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{53}}$$

Bài tập. Cho hàm số:

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}, & \left(x,y\right) \neq \left(0,0\right) \\ 0, & \left(x,y\right) = \left(0,0\right) \end{cases}$$

Chứng minh $f'_x(0,0) = 0;\ f'_y(0,0) = 0.$

$$f'_x = \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y\left(x^4 + 4x^2y^2 - y^4\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$f'_y = \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x\left(x^4 - 4x^2y^2 - y^4\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Khi $x \to 0, y \to 0$, các giới hạn của f'_x và f'_y đều tiến đến 0 (đpcm).

Bài tập. Chứng minh rằng hàm số $f(x,y) = yln(x^2 - y^2)$ thỏa mãn phương trình:

$$\frac{1}{x}f_x^{'} + \frac{1}{y}f_y^{'} = \frac{f}{y^2}$$

$$f_x^{'} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}; f_y^{'} = \frac{\partial f}{\partial y} = \ln\left(x^2 - y^2\right) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{x}f_x^{'} + \frac{1}{y}f_y^{'} = \frac{1}{x}.\frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}\left[\ln\left(x^2 - y^2\right) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}\right]$$ (đpcm)

$$= \frac{1}{y}\ln\left(x^2 - y^2\right) = \frac{y.\ln\left(x^2 - y^2\right)}{y^2} = \frac{f}{y^2}$$

Bài tập. Chứng minh $z = f(x,y) = y^{\frac{y}{x}} sin\frac{y}{x}$ thỏa mãn: $x^2 f_x^{'} + xyf_y^{'} = yz$

$$f_x^{'} = \frac{\partial f}{\partial x} = y^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\ln y\right)\sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cos\frac{y}{x}$$

$$f_y^{'} = \frac{\partial f}{\partial y} = y^{\frac{y}{x}}\frac{1}{x}\left(1+\ln y\right)\sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}}\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}$$

$$\rightarrow f_x^{'} + xyf_y^{'} = x^2 y^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\ln y\right)\sin\frac{y}{x} + x^2 y^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cos\frac{y}{x}$$

$$+ y^{\frac{y}{x}} y\left(1+\ln y\right)\sin\frac{y}{x} + y^{\frac{y}{x}} y\cos\frac{y}{x}$$

$$= y^{\frac{y}{x}}\left[\left(-y\ln y\right)\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} + y\left(1+\ln y\right)\sin\frac{y}{x} + y\cos\frac{y}{x}\right] = yy^{\frac{y}{x}}\sin\frac{y}{x} = yz$$

(đpcm)

VI PHÂN TOÀN PHẦN

Công thức biểu diễn:

$$dz = f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy$$

trong đó $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

Bài tập. Tìm vi phân toàn phần của hàm $f(x,y) = e^x(\text{cosy} + \text{xsiny})$

$$f_x'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x(\text{cosy+xsiny}) + e^x\text{siny} = e^x(\cos y + x\sin y + \sin y)$$

$$f_y'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = e^x(-\sin y + x\cos y)$$

Vi phân toàn phần là:

$$dz = e^x\left[(\cos y + x\sin y + \sin y)dx - (\sin y - x\cos y)dy\right]$$

Bài tập. Tìm vi phân toàn phần của hàm $f(x,y) = \sqrt{\cos(x^2+y^2)}$

$$f_x'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\cos(x^2+y^2)}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x^2+y^2)\right) = \frac{-x.\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{\cos(x^2+y^2)}}$$

Tương tự tính được: $f_y'(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-y.\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{\cos(x^2+y^2)}}$

Dẫn đến vi phân toàn phần:

$$dz = -\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{\cos(x^2+y^2)}}(xdx + ydy)$$

Ứng dụng của vi phân để tính gần đúng

Nếu hàm $z = f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì giá trị của $f(x,y)$ tại lân cận điểm (x_0, y_0) được tính theo công thức xấp xỉ tuyến tính (bỏ qua đại lượng VCB bậc cao) sau đây:

$$f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) + f_x^{'}\left(x_0, y_0\right)\Delta x + f_y^{'}\left(x_0, y_0\right)\Delta y$$

Bài tập. Tính gần đúng biểu thức $A = \ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0.98} - 1\right)$

Xét hàm số $f\left(x,y\right) = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$ và điểm $(x_0, y_0) = (1,1)$. Ta có:

$$\Delta x = 0.03; \Delta y = -0.02 .$$

$$f_x^{'}\left(1,1\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}.\frac{1}{3}.\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f_x^{'}\left(1,1\right) = \frac{1}{3}$$

$$f_y^{'}\left(1,1\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}.\frac{1}{4}.\frac{1}{y^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow f_y^{'}\left(1,1\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f\left(1.03, 0.98\right) \approx f\left(1,1\right) + f_x^{'}\left(1,1\right).\Delta x + f_y^{'}\left(1,1\right).\Delta y = 0 + \frac{1}{3}.0,03 + \frac{1}{4}.\left(-0.02\right) = 0.05$$

Bài tập. Tính gần đúng biểu thức: $A = \sqrt[3]{(1.02)^2 + (0.05)^2}$

Xét hàm số $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2} = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{3}}$ và điểm $(x_0, y_0) = (1,0)$, có:

$$f_x' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2\right)^2}}; f_y' = \frac{2y}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2\right)^2}}$$

$$f_x'(1,0) = \frac{2}{3}; f_y'(1,0) = 0; \Delta x = 0.02; \Delta y = 0.05$$

$$\Rightarrow f(1.02, 0.05) \approx f(1,0) + f_x'(1,0).\Delta x + f_y'(1,0).\Delta y = 1 + \frac{2}{3}.(0.02) = 1.0133$$

Bài tập. Tính gần đúng biểu thức: $A = \sqrt{8e^{0,03} + (0.97)^2}$

Xét hàm số $f(x, y) = \sqrt{8e^x + y^2}$ và điểm $(x_0, y_0) = (0,1)$, có:

$$f_x' = \frac{8e^x}{2\sqrt{8e^x + y^2}}; f_y' = \frac{y}{\sqrt{8e^x + y^2}}$$

$$f_x'(0,1) = \frac{4}{3}; f_y'(0,1) = \frac{1}{3}; \Delta x = 0.03; \Delta y = -0.03$$

$$\Rightarrow f(0.03, 0.97) \approx f(0,1) + f_x'(0,1).\Delta x + f_y'(0,1).\Delta y$$

$$= 3 + \frac{4}{3}.(0.04) + \frac{1}{3}.(-0.03) = 3.03$$

ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA HÀM HỢP

Nếu $z = f(x, y)$ khả vi theo các biến số trung gian, còn $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ (trong đó t là biến độc lập), φ và ψ là các hàm khả vi thì:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Nếu $z = f(u)$ khả vi theo biến số u, còn $u = \varphi(x, y)$ khả vi theo các biến số độc lập x và y, ta có các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u.u'_x; \frac{\partial z}{\partial y} = f'_u.u'_y$$

Nếu $z = f(u, v)$ khả vi theo các biến số u và v, còn $u = u(x, y), v = v(x, y)$ khả vi theo các biến số x, y, ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u.u'_x + f'_v.v'_x; \frac{\partial z}{\partial y} = f'_u.u'_y + f'_v.v'_y$$

Bài tập. Cho $z = z(x, y) = x^2e^y + 3xy^4$ trong đó $x = sin2t, y = cos^2t$. Tính $z'(t)$ và $z'(t = 0)$.

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \left(2xe^y + 3y^4\right).\left(2\cos 2t\right) + \left(x^2e^y + 12xy^3\right).\left(-2\sin t \cos t\right)$$

Khi $t = 0$ ta có $x = 0, y = 1$, dẫn đến $z'(0) = 6$.

Bài tập. Cho $z = 2x^2e^{3(x+1)y}, x = t^2 + 1, y = 1/t$. Tính dz/dt.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} = \left\{4xe^{3(x+1)y} + 6x^2ye^{3(x+1)y}\right\}2t - \left\{6e^{3(x+1)y}x^2(x+1)\right\}\frac{1}{t^2}$$

$$= \left\{2t\left(4\left(t^2+1\right)e^{\frac{3\left(t^2+2\right)}{t}} + \frac{6\left(t^2+1\right)^2 e^{\frac{3\left(t^2+2\right)}{t}}}{t}\right) - \frac{6e^{\frac{3\left(t^2+2\right)}{t}}\left(t^2+1\right)^2\left(t^2+2\right)}{t^2}\right\}$$

$$= \frac{2e^{\left(3t+\frac{6}{t}\right)}\left(t^2+1\right)\left(4t^3+3\left(t^4-t^2-2\right)\right)}{t^2}$$

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

Đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp 1 gọi là đạo hàm riêng cấp 2:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}=z''_{xx};\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}=z''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}=z''_{yx};\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}=z''_{yy}$$

Các đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ là các đạo hàm riêng hỗn hợp. Nếu hàm $z=f(x,y)$ liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp liên tục thì:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=z''_{\mathrm{yx}}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Tương tự, các đạo hàm riêng cấp cao hơn: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$

Vi phân của vi phân cấp 1 là vi phân cấp 2:

$$d\left(df\right)=d^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,\ dx^2=\left(dx\right)^2,dy^2=\left(dy\right)^2$$

Bài tập. Cho hàm $f(x,y) = \sin(x^2 + y) - xy$. Tính các đạo hàm riêng cấp 2.

$$f_x^{'} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sin\left(x^2 + y\right) - xy\right] = 2x\cos\left(x^2 + y\right) - y$$

$$f_{xx}^{''} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2x\cos\left(x^2 + y\right) - y\right] = 2\cos\left(x^2 + y\right) - 4x^2\sin\left(x^2 + y\right)$$

$$f_y^{'} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sin\left(x^2 + y\right) - xy\right] = \cos\left(x^2 + y\right) - x$$

$$f_{yy}^{''} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\cos\left(x^2 + y\right) - x\right] = -\sin\left(x^2 + y\right)$$

$$f_{xy}^{''} = f_{yx}^{''} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos\left(x^2 + y\right) - x\right] = -2x\sin\left(x^2 + y\right) - 1$$

Bài tập. Tính vi phân cấp 2 của hàm số $f = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.2x.\sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\sqrt{x^2 + y^2}\right] = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Tính tương tự: $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2y^2 + x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.2x.\sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{x^2 + y^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(x\sqrt{x^2 + y^2}\right)_y^{'} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\to d^2 f = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx^2 + \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy + \frac{2y^2 + x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy^2$$

ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA HÀM SỐ ẨN

Nếu $F(x, y)$ khả vi theo 2 biến x và y, trong đó $y = y(x)$, x là biến số độc lập được xác định từ phương trình $F(x, y) = 0$:

$$y'_x = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}, F'_y(x,y) \neq 0$$

Nếu $F(x, y, z)$ khả vi theo các biến số x, y, z trong đó x và y là các biến số độc lập được xác định từ phương trình $F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_y(x,y,z)}; F'_y(x,y,z) \neq 0$$

Bài tập. Cho $F(x, y) = \cos(x + y) + y = 0$, tìm y'_x

$$F'_x(x,y) = -\sin(x+y)$$
$$F'_y(x,y) = 1 - \sin(x+y) \neq 0$$
$$\Rightarrow y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}$$

Bài tập. Tính đạo hàm của hàm số ẩn được xác định bởi $x^3y - y^3x = a^4$

$$F(x,y) = x^3y - y^3x - a^4$$
$$F'_x(x,y) = 3x^2y - y^3; F'_y(x,y) = x^3 - 3y^2x$$
$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{y(3x^2 - y^2)}{x(3y^2 - x^2)}$$

Bài tập. Tính đạo hàm của hàm số ẩn được xác định bởi phương trình:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$F\left(x,y,z\right) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$F_x^{'}\left(x,y,z\right) = 3x^2 - 3yz; F_y^{'}\left(x,y,z\right) = 3y^3 - 3xz; F_z^{'}\left(x,y,z\right) = 3z^2 - 3xy$$

$$\to \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x^{'}\left(x,y,z\right)}{F_z^{'}\left(x,y,z\right)} = \frac{3yz - 3x^2}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y^{'}\left(x,y,z\right)}{F_z^{'}\left(x,y,z\right)} = \frac{3xz - 3y^2}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz - y^2}{z^2 - xy}$$

Bài tập. Tìm dz nếu $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình $\frac{x}{z} = ln\frac{z}{y} + 1$

$$F\left(x,y,z\right) = \ln\frac{z}{y} + 1 - \frac{x}{z} = 0$$

$$F_x^{'}\left(x,y,z\right) = -\frac{1}{z}; F_y^{'}\left(x,y,z\right) = \frac{y}{z}.\frac{-z}{y^2} = -\frac{1}{y}$$

$$F_z^{'}\left(x,y,z\right) = \frac{y}{z}.\frac{1}{y} + \frac{x}{z^2} = \frac{z+x}{z^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y\left(z+x\right)} \Rightarrow dz = \frac{1}{y\left(z+x\right)}\left[zydx + z^2dy\right]$$