Đáp án đề thi số 1, Môn thi: Giải tích II

Câu 1. (1.5 điểm) Lấy vi phân các biểu thức ta có:

(0.5đ) $\begin{cases} df = 3u^2 du \\ du = 2\left(y + e^{2x}\right)dx + 2xdy \end{cases}$

dẫn tới $df = 6u^2\left(y + e^{2x}\right)dx + 6xu^2 dy$

(0.5đ) và $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6\left(y + e^{2x}\right)u^2$

Tiếp tục lấy vi phân ta có:

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 12e^{2x}u^2dx + 6u^2dy + 12u\left(y+e^{2x}\right)du = 12e^{2x}u^2dx + 6u^2dy + 12u\left(y+e^{2x}\right)\left(2\left(y+e^{2x}\right)dx + 2xdy\right)$$

$$= \left(12e^{2x}u^2 + 24u\left(y+e^{2x}\right)^2\right)dx + \left(6u^2 + 24ux\left(y+e^{2x}\right)\right)dy$$

(0.5đ) Vậy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6u^2 + 24ux\left(y+e^{2x}\right) = 6u\left(u + 4x\left(y+e^{2x}\right)\right)$

Câu 2. (2 điểm) Các điểm dừng được xác định từ hệ phương trình:

(0.5đ) $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ln\left(x+2y\right) + \dfrac{xy}{x+2y} = 0 \\ x\ln\left(x+2y\right) + \dfrac{2xy}{x+2y} = 0 \end{cases}$

(0.25đ) Với điều kiện $x > 0, y > 0$ ta có: $\begin{cases} \left(x+2y\right)\ln\left(x+2y\right) + x = 0 \\ \left(x+2y\right)\ln\left(x+2y\right) + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y$

(0.25đ) $\Rightarrow 4y\ln\left(4y\right) + 2y = 0 \Rightarrow 4y = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Giải ra được 1 điểm dừng: $M\left(\dfrac{1}{2\sqrt{e}}, \dfrac{1}{4\sqrt{e}}\right)$

(0.5đ) Tiếp theo tính biệt thức

$$\Delta = f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = \left(\frac{2y}{x+2y} - \frac{xy}{\left(x+2y\right)^2}\right)\left(\frac{4x}{x+2y} - \frac{4xy}{\left(x+2y\right)^2}\right) - \left(\ln\left(x+2y\right) + 1 - \frac{2xy}{\left(x+2y\right)^2}\right)^2$$

(0.25đ) Tại điểm dừng ta lần lượt có giá trị của biệt thức $\Delta = \dfrac{1}{2} > 0$. Vậy M là cực trị.

(0.25đ) Tại M ta có $f''_{xx} = \frac{2y}{x+2y} - \frac{xy}{(x+2y)^2} = \frac{3}{8} > 0$. Vậy M là cực tiểu địa phương.

Câu 3. (2 điểm)

(0.5đ) Đổi biến sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r > 0, -\pi \le \varphi \le \pi$. Jacobien của phép biến đổi bằng *r*.

(0.5đ) Thay vào các bất đẳng thức ta có:

$$\begin{cases} 2r\cos\varphi \le r^2 \le 6r\cos\varphi \\ \sin\varphi \ge \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 6\cos\varphi \\ \sin\varphi \ge \cos\varphi \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 6\cos\varphi \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Tích phân 2 lớp chuyển thành:

(0.5đ) $S = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int\limits_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} dr \right) d\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 4\cos\varphi d\varphi$

(0.5đ) $= 4\sin\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 4 - 2\sqrt{2}$

Câu 4. (3 điểm)

a. (0.5đ) Đổi biến sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r > 0, -\pi \le \varphi \le \pi$. Jacobien của phép biến đổi bằng *r*.

(0.5đ) Miền V xác định bởi các bất đẳng thức: $\begin{cases} z \ge \sqrt{x^2+y^2} \\ z \le 2 \end{cases}$. Thay phép đổi biến vào ta có:

$r \le z \le 2$ và dẫn tới $r \le 2$

Tích phân cần tính có dạng:

(0.5đ) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{r} \left(\int\limits_{r}^{2} dz \right) r dr \right) d\varphi = \left(\int\limits_{0}^{2} (2-r) dr \right) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \right) = 4\pi$

b. (0.25đ) Hình chiếu của phần mặt lên mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm (0,0), bán kính 2, xác định bởi bất đẳng thức $x^2 + y^2 \le 4$.

(0.5đ) Từ biểu thức $z = \sqrt{x^2+y^2}$ có $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}$

(0.25đ) Tích phân mặt chuyển thành: $\iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \frac{x^2\sqrt{2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} dxdy$

Đổi biến sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r > 0, -\pi \le \varphi \le \pi$. Jacobien của phép biến đổi bằng *r*.

Tích phân 2 lớp chuyển thành:

(0.5đ) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{0}^{2} \sqrt{2}\cos^2\varphi dr \right) d\varphi = 2\sqrt{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = 2\sqrt{2}\pi$

Câu 5. (1.5 điểm).

(0.25đ) Giải phương trình đặc trưng: $k^2+4k+3=0$ cho ra 2 nghiệm $k_1=-1$, $k_2=-3$. Đặt $y_1=e^{-x}, y_2=e^{-3x}$

Vế phải có dạng $e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$ với α=-1,β=0, n=0, α+iβ=-1 là nghiệm bội 1 của phương trình đặc trưng.

(0.25đ) Vậy ta tìm nghiệm riêng dạng: $y_r=axe^{-x}$ với a là hằng số cần tìm.

Ta có: $\begin{aligned} y_r' &= a(1-x)e^{-x} \\ y_r'' &= a(x-2)e^{-x} \end{aligned}$

Thay vào phương trình vi phân có:

$a(x-2)e^{-x}+4a(1-x)e^{-x}+3axe^{-x}=e^{-x}$

(0.25đ) Cân bằng hệ số 2 vế ta tìm được $a=\frac{1}{2}$. Vậy $y_r=\frac{xe^{-x}}{2}$.

(0.25đ) Nghiệm tổng quát có dạng: $y=C_1y_1+C_2y_2+y_r=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{xe^{-x}}{2}$

Từ điều kiện ta có:

(0.25đ) $\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=1 \\ y(1)=\frac{C_1}{e}+\frac{C_2}{e^3}+\frac{1}{2e}=\frac{3}{2e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1+\frac{C_2}{e^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=0 \end{cases}$

(0.25đ) Nghiệm cuối cùng là: $y=\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-x}$