Đề thi Kết thúc môn học, Học kỳ 1 năm học 2020-2021
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(*Thời gian làm bài: 120 phút*)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ 2x + 7z = -3 \\ -3x + y + (m-8)z = 5 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên khi $m = -2$.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm tất cả các giá trị của m để ma trận A khả nghịch.
(b) Tính ma trận nghịch đảo của A khi $m = 9$.

Bài 3 (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi

$$T(x, y, z, t) = (x + z + t, x + y + 2z + 2t, x + 4y + 5z + 5t, x + 5y + 6z + 6t).$$

(a) Tìm ma trận chuẩn tắc của T (tức là ma trận của T đối với cơ sở chuẩn tắc (hay chính tắc) của $\mathbb{R}^4$).
(b) Tìm một cơ sở của hạt nhân $\ker(T)$ của T.
(c) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian ảnh $\mathrm{im}(T)$ ($\mathrm{range}(T)$) của T.
(d) T có phải là toàn cấu không? Tại sao?

Bài 4. (*2 điểm*) Xét không gian $\mathbb{R}^3$ cùng với tích vô hướng thông thường (tích chấm). Cho tập hợp các véc-tơ

$$\{v_1 = (1, 0, 1);\ v_2 = (a, 1, 1);\ v_3 = (1, 1, -a)\}.$$

(a) Với những giá trị nào của a thì $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$?
(b) Với $a = 1$, dùng phương pháp Gram-Schmidt để đưa tập hợp các véc-tơ trên về một tập trực chuẩn.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tìm một ma trận P khả nghịch và một ma trận đường chéo D (nếu có) sao cho $P^{-1}AP = D$.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 1

Bài 1. (a) Khi $m = -2$, hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ 2x + 7z = -3 \\ -3x + y - 10z = 5 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 7 & -3 \\ -3 & 1 & -10 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Do vậy nghiệm của hệ là $y = t,\ z = 1 - 2t,\ x = 7t - 5$ với $t \in \mathbb{R}$.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m:
Định thức của ma trận hệ số là $2(m + 2)$. Với $m \neq -2$ thì định thức của ma trận hệ số khác không, do vậy hệ có nghiệm duy nhất.
Khi $m = -2$ thì hệ có vô số nghiệm (câu (a)).

Bài 2. (a) $det(A) = m - 8$, do đó ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $m \neq 8$.

(b) Khi $m = 9$ thì $det(A) = 1$, A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \\ -6 & 17 & -5 \end{pmatrix}$.

Bài 3. (a) Ma trận chuẩn tắc của T là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

(b) Dạng bậc thang của A là:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $Ax = 0$ là $(x, y, z, t) = (-a - b, -a - b, a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Vậy $\{v_1 = (-1, -1, 1, 0), v_2 = (-1, -1, 0, 1)\}$ là một cơ sở của $\ker(T)$.

(c) Không gian ảnh của T được xác định bởi không gian cột của A. Từ dạng bậc thang của A ta thấy các hệ số 1 dẫn đầu nằm ở cột 1 và cột 2, vậy $\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\}$ là một cơ sở của $\mathrm{im}(T)$ và $\dim(\mathrm{im}(T)) = 2$.

(d) Vì $\dim(\mathrm{im}T) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^4)$ nên T không là toàn cấu.

Bài 4. (a) Đẳng thức $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$ tương đương với $a + 1 = 1 - a + 1$. Đáp số $a = 1/2$.

(b) Với $a = 1$ ta được hệ $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$. Trực chuẩn hóa ta được:

$$\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\}.$$

Bài 5. Với

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

đa thức đặc trưng của A là

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)^2.$$

Suy ra đa thức đặc trưng của A có hai giá trị riêng 0 (bội 1) và 1 (bội 2).

Với $\lambda = 0$,

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hệ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

có nghiệm $(x, y, z) = (t, 2t, 0)$. Do đó ta có vectơ riêng $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Với $\lambda = 1$,

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

có nghiệm $(x, y, z) = (2z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$. Do đó ta có các vectơ riêng $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ và $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Chọn P là ma trận với các cột v_1, v_2, v_3, tức là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dễ thấy $\det(P) = 1$, nên P khả nghịch. Suy ra v_1, v_2, v_3 là các vectơ riêng độc lập tuyến tính, A chéo hóa được, và ta có

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$