HÀM HAI BIẾN SỐ

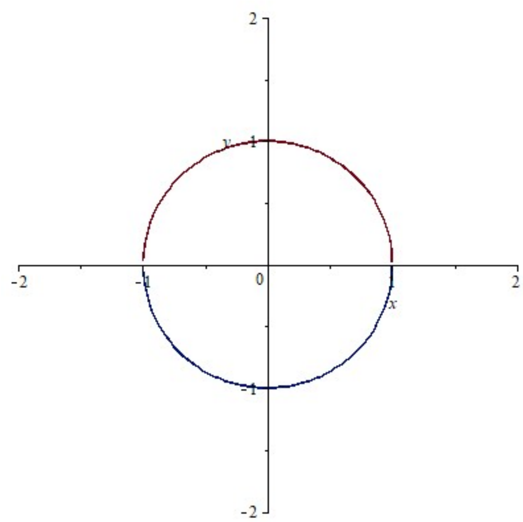
Bài tập. Tìm và biểu diễn tập xác định của các hàm số sau:

a. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ b. $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$

c. $z = \arcsin\dfrac{x+y}{x-y}$ d. $z = \dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

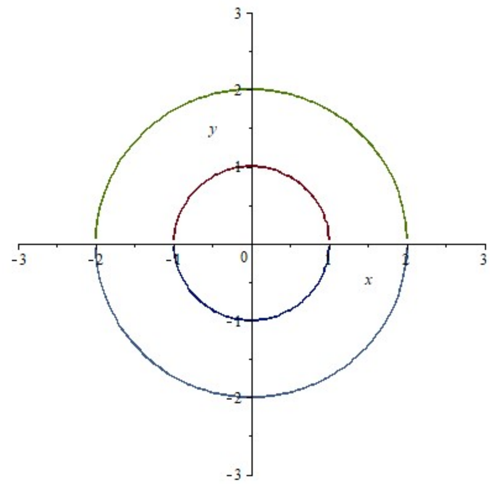
a) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 \ge 0 \\ \sqrt{x^2+y^2-1} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+y^2-1>0 \Leftrightarrow x^2+y^2>1$$



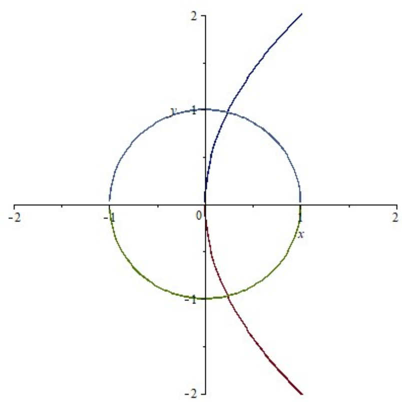
b. $z=\sqrt{\left(x^2+y^2-1\right)\left(4-x^2-y^2\right)}$

$$\left(x^2+y^2-1\right)\left(4-x^2-y^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2-1\geq 0\\4-x^2-y^2\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}x^2+y^2-1\leq 0\\4-x^2-y^2\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2\geq 1\\x^2+y^2\leq 4\end{cases}\\\begin{cases}x^2+y^2\leq 1\\x^2+y^2\geq 4\end{cases}\end{array}\right.$$



d. $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$

$$\begin{cases} 4x-y^2\geq 0 \\ 1-x^2-y^2>0 \\ \ln\left(1-x^2-y^2\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\leq 4x \\ x^2+y^2<1 \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{y^2}{4} \\ x^2+y^2<1 \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$$

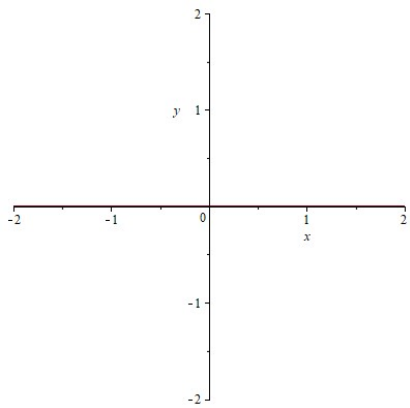


c) $z = \arcsin \dfrac{x+y}{x-y}$

$$-1 \le \frac{x+y}{x-y} \le 1, (x \ne y) \Leftrightarrow \left|\frac{x+y}{x-y}\right| \le 1, (x \ne y) \Leftrightarrow |x+y| \le |x-y|, (x \ne y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| \le |x-y| \\ x \ne y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 \le x^2 - 2xy + y^2 \\ x \ne y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy \le 0 \\ x \ne y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4xy \le 0 \\ x \ne y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 0; y \le 0 \\ x \le 0; y \ge 0 \end{array}\right. \\ x \ne y \end{cases}$$



GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM HAI BIẾN SỐ

Định nghĩa 1. Điểm $M_n(x_n, y_n)$ hội tụ đến $M_0(x_0, y_0)$ trong R^2 và ký hiệu là $M_n \to M_0$ nếu:

$$\lim_{n\to\propto} x_n = x_0 \text{ và } \lim_{n\to\propto} y_n = y_0$$

Định nghĩa 2. Hàm $f(x, y)$ có giới hạn L khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$ nếu:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: 0 < \rho < \delta \to |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Trong đó $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ hoặc:

$$\forall M_n(x_n, y_n) \to M_0(x_0, y_0) \to \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$$

Ký hiệu:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L$$

Định nghĩa 3. Hàm $f(x, y)$ liên tục tại điểm $(a, b) \in D$ nếu:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b)$$

Hàm số liên tục tại mọi điểm trong miền $D \in R^2$ gọi là liên tục trên D.

Tính giới hạn kép khi giới hạn không bị vi phạm

Với các trường hợp này, giới hạn nhận được khi thay trực tiếp các biến số đã cho.

Bài tập 1: Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{5x^2-\sqrt{4y+1}}{xy+3}=\frac{5-\sqrt{9}}{2+3}=\frac{2}{5}$$

Bài tập 2: Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln\left(2x^2+e^y\right)}{\sqrt{x^2+2xy^3}}=\frac{\ln\left(2+e^0\right)}{\sqrt{1+0}}=\ln 3$$

Bài tập 3: Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to \pi\\ y\to 0}}\frac{\cos\left(x+2y^2\right)}{\arcsin\left(2y-1\right)}=\frac{\cos\left(\pi\right)}{\arcsin\left(-1\right)}=\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

Một số giới hạn kép (có dạng vô định) không có giới hạn

- Thông thường, khi gặp dạng vô định 0/0, ∞/∞ mà bậc theo các biến x và y của tử số và mẫu số bằng nhau (hay tốc độ biến thiên về 0 hay ∞ của tử số và mẫu số như nhau) thì khả năng sẽ không tồn tại giới hạn.

- Để chứng minh hàm số không tồn tại giới hạn, ta xét hai dãy $(x_n^1, y_n^1), (x_n^2, y_n^2)$ cùng dần tiến về (x_0, y_0) nhưng $(x_n^1, y_n^1) \to L_1 \neq (x_n^2, y_n^2) \to L_2$.

Bài tập 1. Tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

Cho $(x, y) \to (0,0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thì ta có:

$$f(x, kx) = \frac{x^2 + k^2x^2}{x^2 - k^2x^2} = \frac{1+k^2}{1-k^2} \to \frac{1+k^2}{1-k^2}, x = 0$$

Vậy khi $(x, y) \to (0,0)$ theo những phương khác nhau thì hàm số đã cho tiến tới những giá trị khác nhau. Do đó không tồn tại giới hạn.

Bài tập 2. Tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin \pi x}{2x + y}$

Cho $(x, y) \to (0,0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thì ta có:

$$f(x, kx) = \sin \frac{\pi x}{2x + kx} = \sin \frac{\pi}{2+k} \to \sin \frac{\pi}{2+k}, x = 0$$

Vậy khi $(x, y) \to (0,0)$ theo những phương khác nhau thì hàm số đã cho tiến tới những giá trị khác nhau. Do đó không tồn tại giới hạn.

Bài tập 3. Tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+2y}{3x-y}$

Xem xét 2 dãy điểm $\left\{M_n\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ và $\left\{N_n\left(\dfrac{1}{n},0\right)\right\}$:

$$\left\{M_n\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}\to\lim_{n\to\infty}M_n=(0,0):\lim_{n\to\infty}f\left(0,\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{0+2.\frac{1}{n}}{3.0-\frac{1}{n}}=-2$$

$$\left\{N_n\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}\to\lim_{n\to\infty}N_n=(0,0):\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n},0\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+2.0}{3.\frac{1}{n}-0}=\frac{1}{3}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n},0\right)$, như vậy không tồn tại giới hạn.

Bài 4. Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{\sqrt{x^2+y}}{4x+3y}$$

Xem xét 2 dãy điểm $\{M_n(n,n)\}$ và $\{N_n(n,2n)\}$:

$$\{M_n(n,n)\}\to\lim_{n\to+\infty}M_n=(+\infty,+\infty):\lim_{n\to+\infty}f(n,n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{7n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{7}=\frac{1}{7}$$

$$\{N_n(n,2n)\}\to\lim_{n\to+\infty}N_n=(+\infty,+\infty):\lim_{n\to+\infty}f(n,2n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}}{10n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{10}=\frac{1}{10}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}f(n,n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(n,2n)$, như vậy không tồn tại giới hạn.

Bài 5. Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sqrt{2x^2+(y-1)^2}}{3x+y-1}$$

Xem xét 2 dãy điểm $\left\{M_n\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}$ và $\left\{N_n\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\right\}$:

$$\left\{M_n\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}\to\lim_{n\to+\infty}M_n=(0,1):\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2.\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}{3.\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\sqrt{3}}{\frac{4}{n}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\left\{N_n\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\right\}\to\lim_{n\to+\infty}N_n=(0,1):\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2.\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}{3.\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\sqrt{3}}{\frac{2}{n}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$, như vậy không tồn tại giới hạn.

Bài 6. Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{\ln xy+2x^2}{xy+y^2}$$

Xem xét 2 dãy điểm $\{M_n(n,n)\}$ và $\{N_n(2n,n)\}$:

$$+\{M_n(n,n)\}\to\lim_{n\to+\infty}M_n=(+\infty,+\infty):\lim_{n\to+\infty}f(n,n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n^2+2n^2}{2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n+n^2}{n^2}=1$$

$$+\{N_n(2n,n)\}\to\lim_{n\to+\infty}N_n=(+\infty,+\infty):\lim_{n\to+\infty}f(2n,n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln 2n^2+8n^2}{3n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln 2+2\ln n+8n^2}{3n^2}=\frac{8}{3}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}f(n,n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(2n,n)$, như vậy không tồn tại giới hạn.

Tính giới hạn lặp

Lần lượt tính giới hạn theo từng biến, trong đó khi tính theo biến này thì xem biến kia là hằng số và sử dụng các phương pháp tính giới hạn của hàm một biến số để tính: vô cùng lớn, vô cùng bé tương đương, l'Hospital, …

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

Bài tập 1. Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sqrt{3xy+1}-1}{5xy^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sqrt{3xy+1}-1}{5xy^2}=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{3xy+1}-1}{5xy^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 1}\frac{\left(\sqrt{3xy+1}-1\right)\left(\sqrt{3xy+1}+1\right)}{5xy^2\left(\sqrt{3xy+1}+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 1}\frac{3xy}{5xy^2\left(\sqrt{3xy+1}+1\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 1}\frac{3}{5y\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}\right)=\frac{3}{10}$$

Bài tập 2. Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}}\left(\frac{x^2y-2x\sqrt{2y-1}+1}{x^2-4xy+y+1}\right)^{xy}$$

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}}\left(\frac{x^2y-2x\sqrt{2y-1}+1}{x^2-4xy+y+1}\right)^{xy}=\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to 1}\left(\frac{x^2y-2x\sqrt{2y-1}+1}{x^2-4xy+y+1}\right)^{xy}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right]^{\frac{2x-1}{x^2-4x+2}x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2-4x+2}x}=e^2$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

Bài tập 3. Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\left(\frac{x^{\text{yx}}-x(2y-1)}{\ln x-xy+y^2}\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\left(\frac{x^{\text{yx}}-x(2y-1)}{\ln x-xy+y^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 1}\left(\frac{x^{\text{yx}}-x(2y-1)}{\ln x-xy+y^2}\right)\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{\text{x}}-x}{\ln x-x+1}\right)$$

Ta có:

$$y=x^x\to \ln y=x\ln x\ \ (x>0)$$

$$\frac{y'}{y}=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$\to y'=(\ln x+1)x^x$$

$$\to\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{\text{x}}-x}{\ln x-x+1}\right)\overset{L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x+1)x^x-1}{\frac{1}{x}-1}\overset{L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^x.\frac{1}{x}+(\ln x+1)^2x^x}{-\frac{1}{x^2}}=-2$$

Tính giới hạn kép dựa trên giới hạn của hàm 1 biến

Sử dụng các bất đẳng thức sau:

$$
\begin{aligned}
&2xy \le x^2 + y^2, \forall x, y \\
&x^2 + y^2 < (x+y)^2, \forall x > 0, y > 0 \\
&\frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} < \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}, \forall x \ne 0, y \ne 0 \\
&x^2 y^2 \le \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right)^2, \forall x, y
\end{aligned}
$$

Bài tập 1: Tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to 1}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ (có dạng 1^∞)

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to 1}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to 1}} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to 1}} \frac{x}{x+y}} = e$$

Bài tập 2: Tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\sin xy}$ (có dạng $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\sin xy} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{x} . \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}} \frac{xy}{\sin xy} . \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}} \frac{1}{y}$$

Ta có:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{x} \overset{L}{=} \frac{e^{\sin x} cosx + \sin x}{1} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}} \frac{xy}{\sin xy} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1; \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}} \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \to \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\sin xy} = 1.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Tính giới hạn kép nhờ định lý giới hạn kẹp và bất đẳng thức giới hạn

- Bất đẳng thức giới hạn: cho 2 hàm số $f(x,y) \le g(x,y), \forall (x,y) \in V(x_0,y_0)\{(x_0,y_0)\}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = a; \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = b$$

Thì $a \le b$.

- Định lý giới hạn kẹp: cho 3 hàm số $f(x,y) \le g(x,y) \le h(x,y), \forall (x,y) \in V(x_0,y_0)\{(x_0,y_0)\}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} h(x,y) = a; \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = a$$

Thì:
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = a$$

Bài tập 1. Tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$ (có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Nhận thấy:

$$0 < x^2 + y^2 < (x+y)^2, x>0, y>0 \to 0 < \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} < \frac{(x+y)^2}{e^{x+y}} = \frac{t^2}{e^t}, (t = x+y)$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} t = +\infty \to \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} \overset{L}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{e^t} \overset{L}{=} \frac{2}{e^t} = 0 \to \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = 0$$

Bài tập 2. Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \text{ (có dạng } \frac{\infty}{\infty})$$

Nhận thấy:

$$x^2-xy+y^2 \ge xy > 0, \forall x>0, y>0 \to 0 < \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} < \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \forall x>0, y>0$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{1}{x} + \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{1}{y} = 0$$

$$\to \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$$

Bài 3. Tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{(x+y)^3}{x^2+2y^2}$

Với $\forall x>0, y>0$:

$$x^2+2y^2 < 2(x^2+y^2) < 2(x+y)^2$$

$$\to \frac{(x+y)^3}{x^2+2y^2} > \frac{(x+y)^3}{2(x+y)^2} = \frac{1}{2}(x+y)$$

Ta có:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{1}{2}(x+y) = +\infty \to \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{(x+y)^3}{x^2+2y^2} = +\infty$$

Bài 4. Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

Nhận thấy:

$$0\le\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\le(x+y),\forall x\ne 0,y\ne 0$$

Ta có:

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}(x+y)=0\ \to\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$$

Bài 5. Tính giới hạn của hàm số

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x+2y}}$$

Ta có: $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$

$$\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x+2y}}=\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\left[\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right]^{\frac{x^2+y^2}{x+2y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\frac{x^2+y^2}{x+2y}}$$

Nhận thấy:

$$0\le\frac{x^2+y^2}{x+2y}\le\frac{x^2+y^2}{x+y}\le\frac{(x+y)^2}{x+y}=(x+y),\forall x>0,y>0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}(x+y)=0\to\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\frac{x^2+y^2}{x+2y}=0\to\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x+2y}}=1$$

Sự liên tục của hàm nhiều biến

Định nghĩa: Hàm số $f(x,y)$ được gọi là liên tục tại điểm $(a,b) \in D$ nếu:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = \mathrm{f}(a,b)$$

Hàm số liên tục tại mọi điểm trong miền $D \in R^2$ gọi là liên tục trên D.

Bài tập 1. Cho hàm số:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+2y+1}}{x-1}$$

Chứng minh rằng f liên tục tại gốc tọa độ.

Ta có:

$$f(0,0) = \frac{\sqrt{0+2.0+1}}{0-1} = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{x+2y+1}}{x-1} = -1 = f(0,0)$$