ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN HAI LỚP

TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

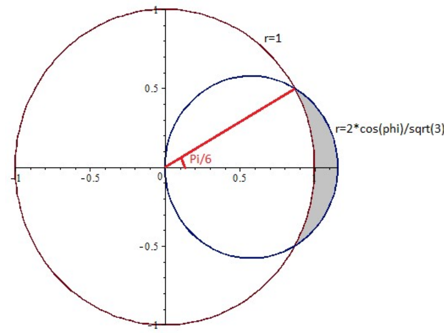
Từ công thức tích phân hai lớp:

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Khi $f(x,y) = 1$, công thức tích phân xác định diện tích của miền D:

$$S_D = \iint_D dxdy$$

Bài tập. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi các đường tròn: $r \ge 1; r = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi$



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

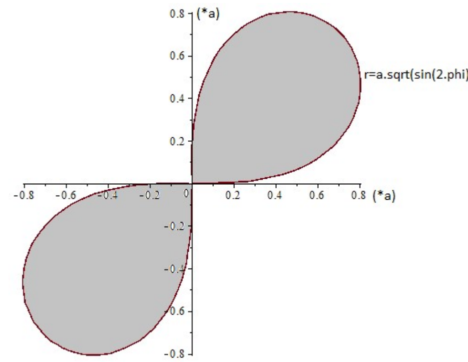
Giao của 2 đường tròn là nghiệm của phương trình:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi = 1 \to \varphi = \pm\frac{\pi}{6} \Rightarrow D: \begin{cases} -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6} \\ 1 \le r \le \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi \end{cases}$$

$$\to S_D = \iint_D dxdy = \iint_{D_{r\varphi}} rdrd\varphi = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi} rdr = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{18}$$

Bài tập. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi đường:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy,\left(a>0\right))$$



Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow J=\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}=r$$

$$D:\begin{cases} 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2};\pi\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2} \\ 0\le r\le a\sqrt{\sin 2\varphi} \end{cases}$$

Phương trình đường cong được viết dưới dạng tọa độ cực:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy\to\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\right)^2=2a^2r^2\sin\varphi\cos\varphi$$

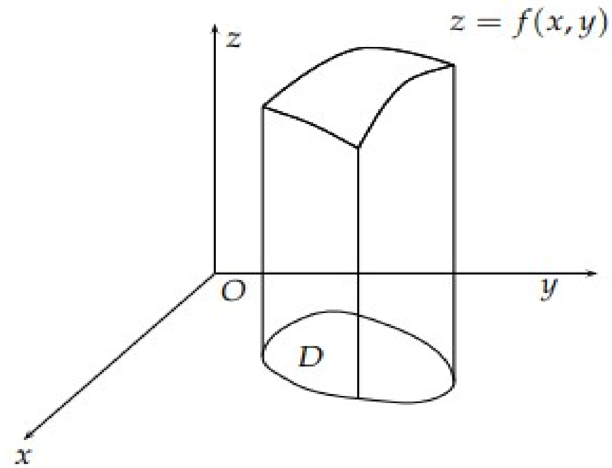
$$\to r^2=a^2\sin 2\varphi\to r=a\sqrt{\sin 2\varphi}$$

Do tính đối xứng của hình vẽ nên:

$$\to S=\iint\limits_D dxdy=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}rdr=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}d\varphi=-\frac{a^2}{2}\cos 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=a^2$$

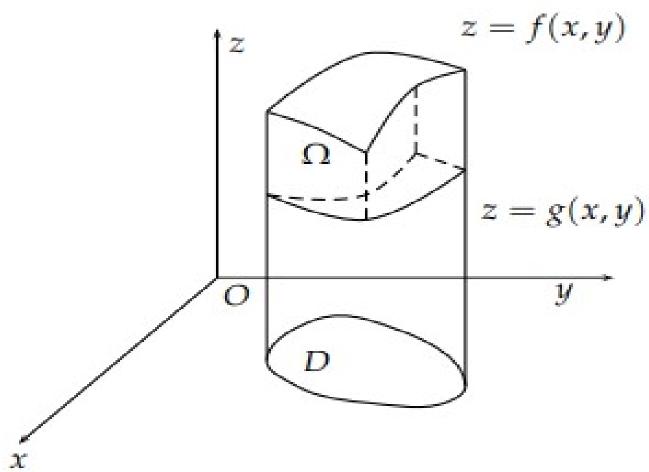
TÍNH THỂ TÍCH CỦA VẬT THỂ

Ứng dụng này đã được trình bày như là bài toán tích phân dẫn đến tích phân 2 lớp.



- Vật thể có mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đáy là miền D trong mặt phẳng Oxy, phía trên bị giới hạn bởi mặt cong $z = f(x, y) \geq 0$ và liên tục trên D thì:

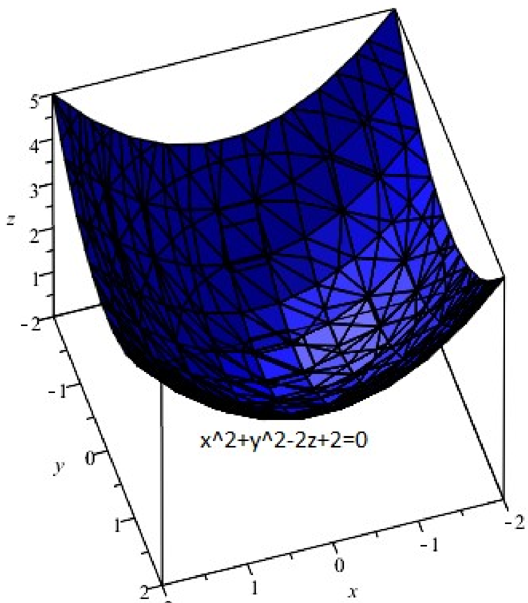
$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

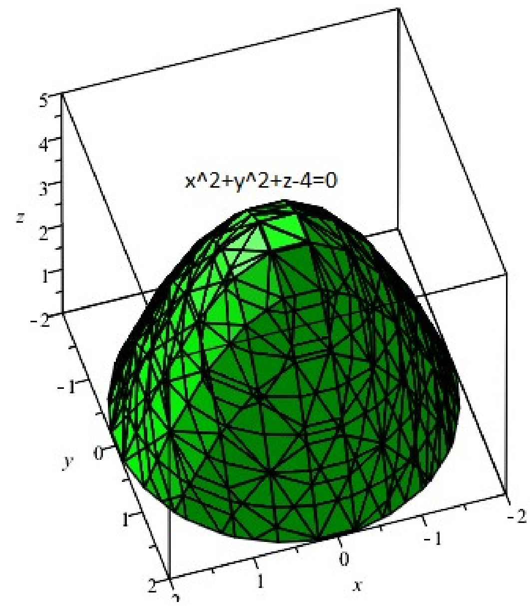


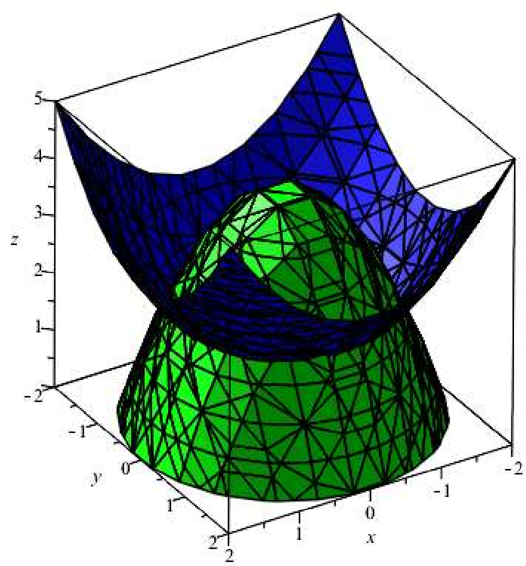
- Vật thể có mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, bị giới hạn bởi $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$. Chiếu các mặt này lên mặt phẳng Oxy ta được miền D, $f(x, y)$ và $g(x, y)$ là các hàm liên tục, có đạo hàm liên tục trên D. Khi đó:

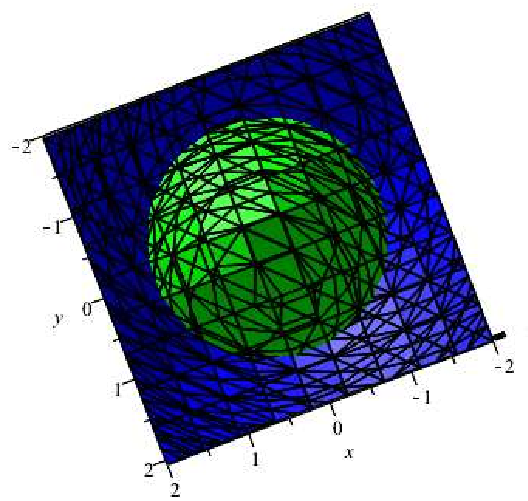
$$V = \iint_D \left[f(x,y) - g(x,y) \right] dxdy$$

Bài tập. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi: $z = 4 - x^2 - y^2; 2z = 2 + x^2 + y^2$









Giao tuyến của 2 mặt là: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ nên hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy là D: $x^2 + y^2 \le 2$. Mặt khác, trên D có $4 - x^2 - y^2 \ge \dfrac{2 + x^2 + y^2}{2}$ nên ta có:

$$V = \iint\limits_D \left[4 - \left(x^2 + y^2 \right) - \frac{2 + x^2 + y^2}{2} \right] dxdy$$

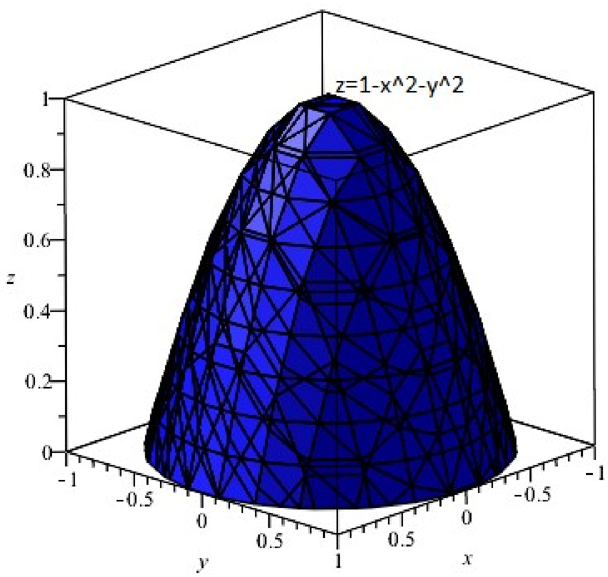
Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \end{cases}$ dẫn đến:

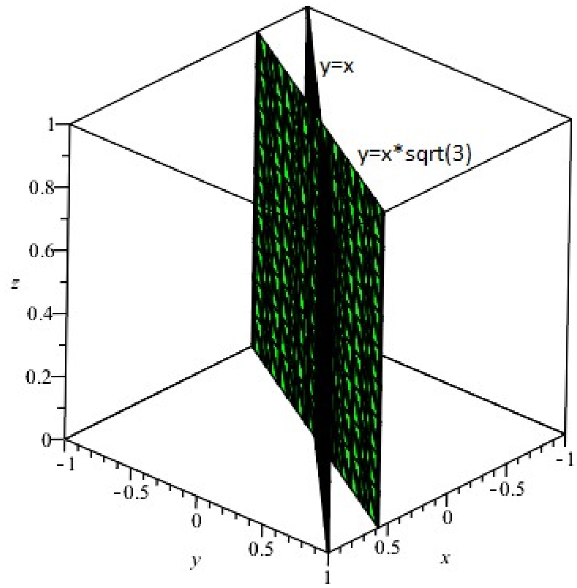
$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left[4 - r^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) - \frac{2 + r^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}{2} \right] rdr$$

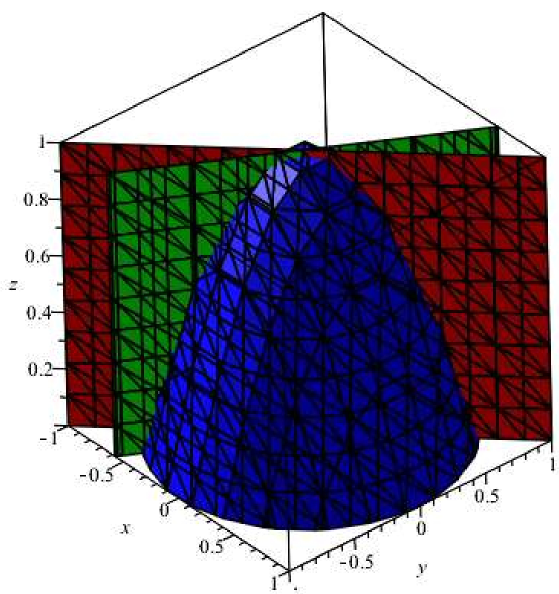
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left(3 - -\frac{3}{2} r^2 \right) rdr = 3\pi$$

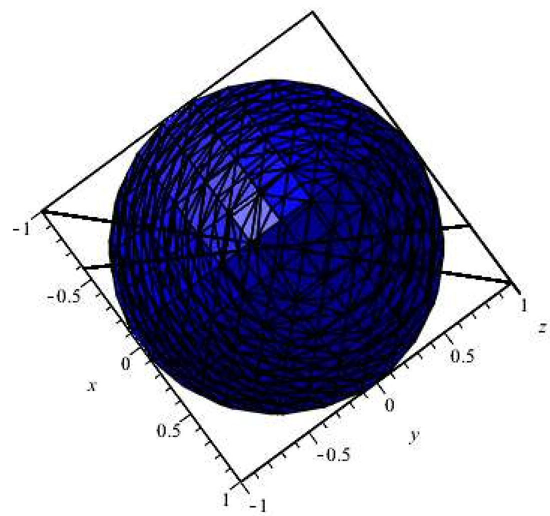
Bài tập. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi:

$$z = 1 - x^2 - y^2; y = x; y = x\sqrt{3}; z = 0$$









Ta có:

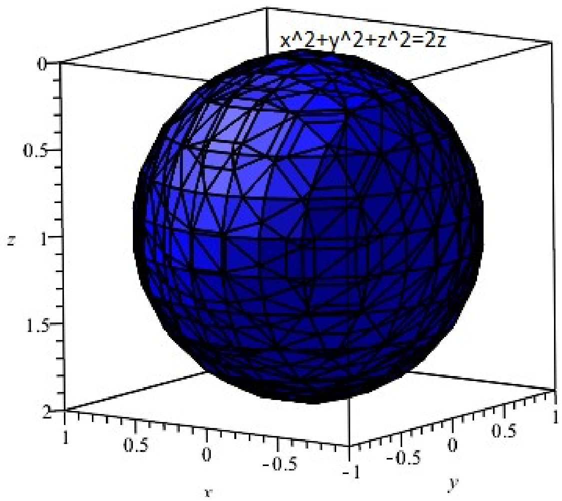
$$V = \iint\limits_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy$$

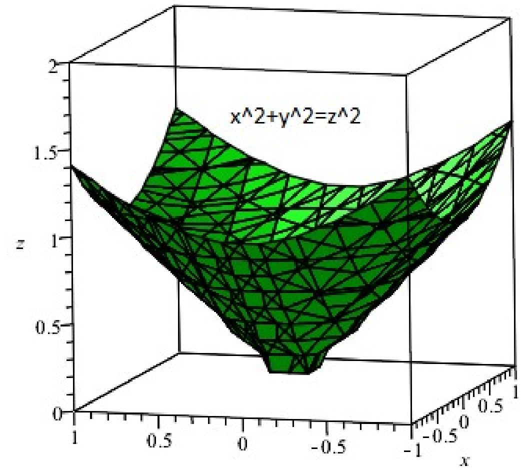
Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ thì $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$ dẫn đến:

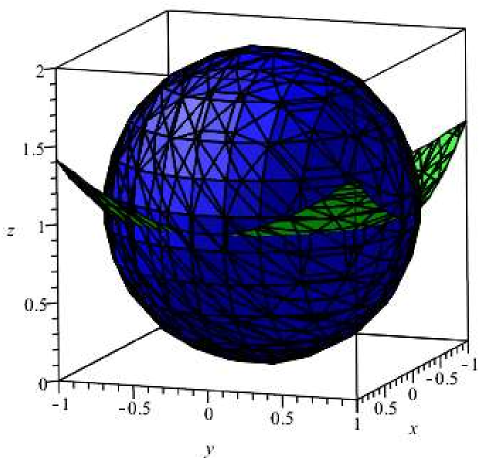
$$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 \left(1 - r^2\right) r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4} d\varphi$$

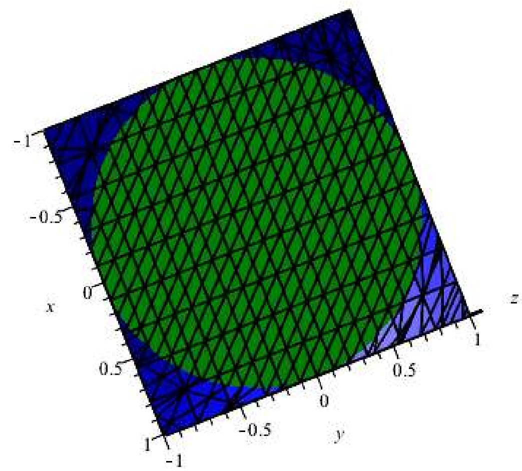
$$= \frac{1}{4} r \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{48}$$

Bài tập. Tính thể tích miền giới hạn bởi: $x^2 + y^2 + z^2 = 2z; x^2 + y^2 = z^2$









Giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ và mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$ tại những điểm thỏa mãn phương trình:

$$2z - z^2 = z^2 \leftrightarrow 2z = 2z^2 \leftrightarrow z = 1$$

Như vậy hình chiếu của giao tuyến xuống mặt phẳng Oxy là đường tròn có phương trình:

$$x^2 + y^2 = 1$$

D là miền giới hạn bởi đường tròn trong mặt phẳng Oxy. Từ các phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ và $x^2 + y^2 = z^2$ rút ra tương ứng $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ và $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dẫn đến thể tích cần tính toán:

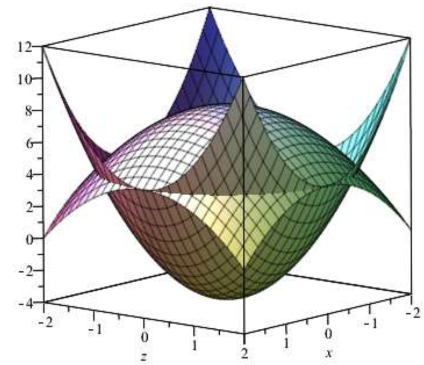
$$V = \iint_D \left(1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực với $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi; J = r$ dẫn đến:

$$V = \iint_{D_{r,\varphi}} \left(1 + \sqrt{1 - r^2} - \sqrt{r^2}\right) r d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1 - r^2} - r\right) r dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\left(1 - r^2\right)^3}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \pi$$

Bài tập. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt paraboloid $y = 2x^2 + 2z^2 - 4; y = 8 - x^2 - z^2$



$$3x^2 + 3z^2 = 12 \Rightarrow x^2 + z^2 = 4$$

$$x = r\cos\varphi; z = r\sin\varphi \Rightarrow D_{r\varphi} : 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le r \le 2$$

$$V = \iint\limits_{D_{r\varphi}} \left[2x^2 + 2z^2 - 4 - \left(8 - x^2 - z^2 \right) \right] r dr d\varphi$$

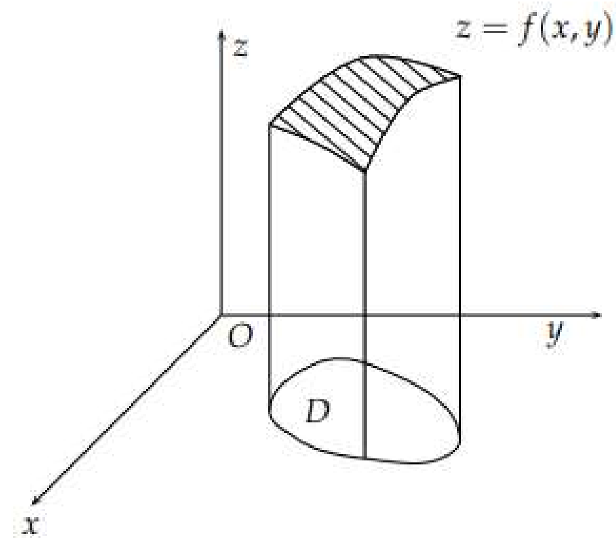
$$= \iint\limits_{D_{r\varphi}} \left[2r^2 - 4 - \left(8 - r^2 \right) \right] r dr d\varphi = \iint\limits_{D_{r\varphi}} \left[3r^2 - 12 \right] r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(3r^3 - 12r \right) dr$$

TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CONG

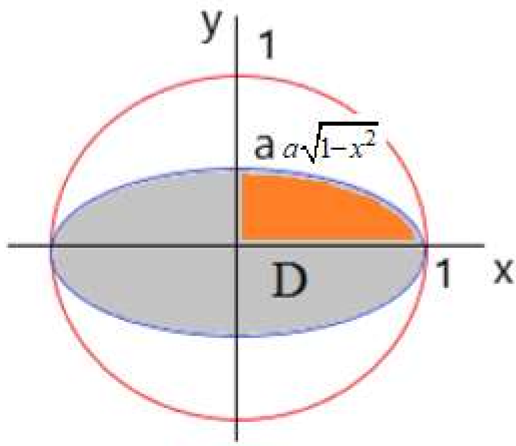
Mặt $z = f(x,y)$ được giới hạn bởi một đường cong kín, hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng Oxy là D. Nếu $f(x,y)$ là hàm liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên D. Khi đó:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy$$

trong đó các đạo hàm riêng $p = f'_x; q = f'_y$.



Bài tập. Tính diện tích phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ nằm trên ellipse $x^2+\frac{y^2}{a^2}\le 1$, $0<a\le 1$.



Ta có:

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow z'_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; z'_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$x^2+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow y=a\sqrt{1-x^2}$$

Do tính đối xứng của mô hình cho nên diện tích cần tính sẽ bằng bốn lần diện tích phần mặt cầu nằm trên phần tô màu cam của hình ellipse. Ta có:

$$S=4\iint_{D_1}\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy=4\int_0^1 dx\int_0^{a\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy$$

$$=4\int_0^1 \arcsin\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\Bigg|_0^{a\sqrt{1-x^2}} dx=4\arcsin a$$

KHỐI LƯỢNG VÀ KHỐI TÂM CỦA TẤM PHẲNG

Cho tấm phẳng D có hàm mật độ $\rho(x, y)$, khối lượng M và khối tâm (x_c, y_c) được xác định như sau:

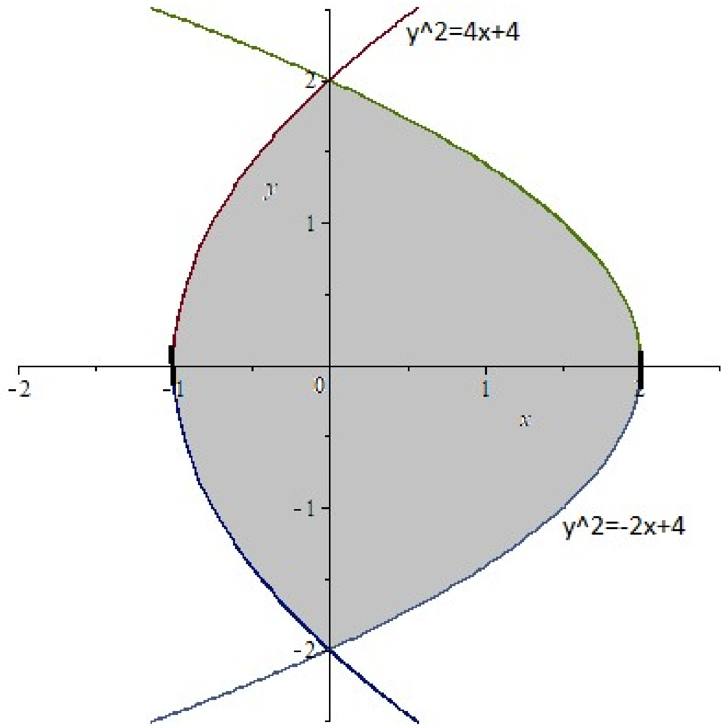
$$M = \iint_D \rho(x, y) dxdy$$

$$x_c = \frac{1}{M} \iint_D x\rho(x, y) dxdy$$

$$y_c = \frac{1}{M} \iint_D y\rho(x, y) dxdy$$

Bài tập. Xác định trọng tâm của bản phẳng đồng chất giới hạn bởi các đường

$$y^2 = 4x + 4; y^2 = -2x + 4$$



Từ hình vẽ thấy rằng bản đã cho nhận Ox là trục đối xứng, vì vậy trọng tâm của bản sẽ có tọa độ $y_c = 0$, chúng ta cần tìm $y_c = 0$. Ta có:

$$\iint_D dxdy = 2\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx = 8$$

$$\iint_D xdxdy = 2\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} xdx = \frac{16}{5}$$

Dẫn đến: $x_c = \frac{1}{8}.\frac{16}{5} = \frac{2}{5}$

GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH CỦA TÍCH PHÂN

Hàm $f(x,y)$ xác định trên miền D có giá trị trung bình:

$$\overline{f} = \frac{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}$$

Bài tập. Một hồ nước hình tròn có bán kính $10m$ bị ô nhiễm bởi các ion hòa tan. Biết hàm mật độ phân bố chất ô nhiễm là $c(x,y) = 10/(x^2 + y^2 + 1)$. Hãy xác định nồng độ trung bình của chất gây ô nhiễm nguồn nước và vị trí có nồng độ đạt nồng độ trung bình.

$$\overline{c} = \frac{\iint\limits_D \dfrac{10dxdy}{x^2+y^2+1}}{\iint\limits_D dxdy} = \frac{1}{100\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \int_0^{10} \frac{10r}{r^2+1}dr = \frac{1}{5}\int_0^{10}\frac{r}{r^2+1}dr = \frac{1}{5}\left.\frac{\ln\left(r^2+1\right)}{2}\right|_0^{10} = \frac{1}{10}\ln(101) = 0.4615$$

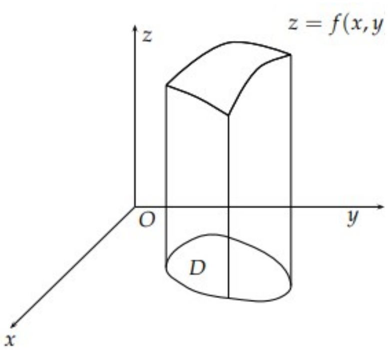
Để tìm vị trí có nồng độ trung bình của chất gây nhiễm, giải phương trình:

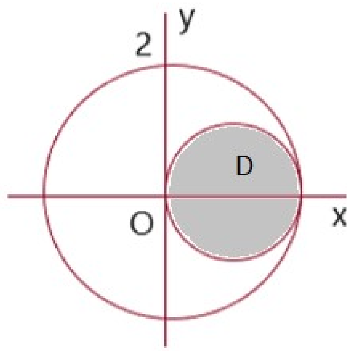
$$c(x,y) = \overline{c} \Leftrightarrow \frac{10}{x^2+y^2+1} = 0.465 \Leftrightarrow \frac{10}{r^2+1} = 0.465 \Leftrightarrow r = 4.5463m$$

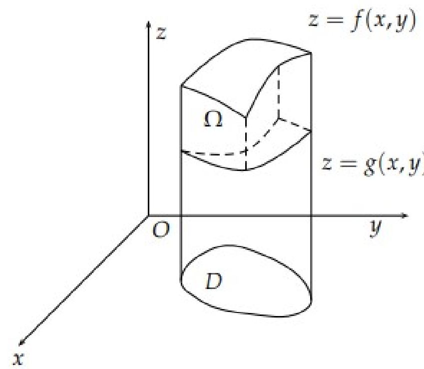
ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BA LỚP

THỂ TÍCH CỦA VẬT THỂ

Có thể sử dụng tích phân kép để tính thể tích của vật thể bởi:







$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

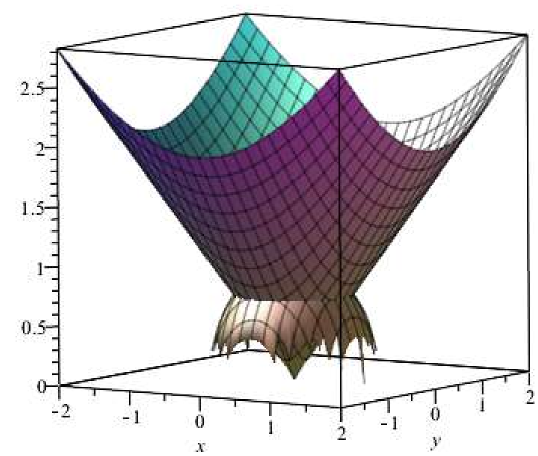
$$V = \iint_D \left[f(x,y) - g(x,y) \right] dxd$$

Tuy nhiên, trong một số trường hợp sử dụng tích phân bội ba cho phép tính toán thể tích nhanh hơn vì tích phân bội ba cho phép chuyển đổi sang hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu.

Từ định nghĩa của tích phân bội ba, thể tích của khối:

$$V = \iiint_V 1\,dxdydz$$

Bài tập. Tính thể tích của miền V được giới hạn bởi hai mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1; x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt nón $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.



Sử dụng phép đổi biến trong hệ tọa độ cầu:

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 r^2 \sin\theta dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \frac{7}{3} \sin\theta d\theta = \frac{14\pi}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{3}\pi$$

KHỐI LƯỢNG VÀ KHỐI TÂM CỦA VẬT THỂ

Khối lượng M của vật thể V có hàm mật độ $\rho(x, y, z)$:

$$M = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\, dxdydz$$

Khối tâm (x_c, y_c, z_c) của vật thể V có hàm mật độ $\rho(x, y, z)$:

$$x_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x\rho(x, y, z)\, dxdydz$$

$$y_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_V y\rho(x, y, z)\, dxdydz$$

$$z_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)\, dxdydz$$

Trong đó M là khối lượng của vật thể.

Bài tập. Tính khối lượng và khối tâm của khối bán cầu được xác định bởi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ và $z \ge 0$ có mật độ khối lượng $\rho\left(x, y, z\right) = x^2 y^2$.

Sử dụng hệ tọa độ cầu ta có:

$$M = \iiint\limits_V x^2 y^2 dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^1 r^6 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \sin^5\theta dr$$

$$= \frac{1}{7}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^5\theta d\theta = \frac{1}{7}.\frac{\pi}{4}.\frac{8}{15} = \frac{2\pi}{105}$$

$$x_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x^3 y^2 dxdydz = \frac{105}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^1 r^7 \cos^3\varphi \sin^2\varphi \sin^6\theta dr$$

$$= \frac{105}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi \sin^2\varphi \sin^6\theta d\theta = \frac{525}{512}\int\limits_0^{2\pi} \cos^3\varphi \sin^2\varphi d\varphi = 0$$

$$y_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x^2 y^3 dxdydz = \frac{105}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^1 r^7 \cos^2\varphi \sin^3\varphi \sin^6\theta dr$$

$$= \frac{105}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin^3\varphi \sin^6\theta d\theta = \frac{525}{512}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^3\varphi d\varphi = 0$$

$$z_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_V x^2 y^2 z dxdydz = \frac{105}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^1 r^7 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \sin^5\theta dr$$

$$= \frac{105}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin^2\varphi \sin^5\theta d\theta = \frac{105}{96\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi = \frac{35}{128}$$

GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH CỦA TÍCH PHÂN

Hàm $f(x, y, z)$ xác định trên miền V có giá trị trung bình tích phân:

$$\overline{f} = \frac{\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz}{\iiint\limits_V dxdydz}$$

Bài tập. Cho biết nhiệt độ tại mỗi điểm của khối lập phương $[-1,1]x[-1,1]x[-1,1]$ tỷ lệ với bình phương khoảng cách của nó từ tâm khối. Tính nhiệt độ trung bình của khối lập phương. Tại vị trí nào của khối có nhiệt độ bằng nhiệt độ trung bình?

Gọi c là hằng số tỷ lệ. Ta có:

$$\overline{T} = \frac{1}{V}\iiint\limits_V c\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} dx\int_{-1}^{1} dy\int_{-1}^{1} c\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dz$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} dx\int_{-1}^{1} \frac{2}{3}c\left(3x^2 + 3y^2 + 1\right)dy = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} 4c\left(\frac{2}{3} + x^2\right)dx = c$$

Vị trí (x, y, z) có nhiệt độ bằng nhiệt độ trung bình thỏa mãn:

$$c\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = c \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Đây chính là mặt cầu nội tiếp của khối lập phương đã cho.

Bài tập. Tính khối lượng và khối tâm của khối hình chữ nhật $[1,2],[1,2],[1,2]$ có mật độ khối lượng $\rho(x,y,z)=(x+y)z$.

$$M=\int_1^2 dx\int_1^2 dy\int_1^2 (x+y)zdz=\int_1^2 dx\int_1^2 (x+y)\frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=1}^{z=2} dy=\frac{3}{2}\int_1^2 dx\int_1^2 (x+y)dy$$

$$=\frac{3}{2}\int_1^2\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2} dx=\frac{3}{2}\int_1^2\left(x+\frac{3}{2}\right)dx=\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}=\frac{3}{2}.3=\frac{9}{2}$$

$$x_c=\frac{1}{M}\int_1^2 dx\int_1^2 dy\int_1^2 x(x+y)zdz=\frac{2}{9}.\frac{55}{8}=\frac{110}{72}$$

$$y_c=\frac{1}{M}\int_1^2 dx\int_1^2 dy\int_1^2 y(x+y)zdz=\frac{2}{9}.\frac{55}{8}=\frac{110}{72}$$

$$z_c=\frac{1}{M}\int_1^2 dx\int_1^2 dy\int_1^2 z(x+y)zdz=\frac{2}{9}.7=\frac{14}{9}$$