Ma trận khả nghịch

Hà Minh Lam
hmlam@math.ac.vn

2021-2022

Tóm tắt

Tóm tắt

Ma trận khả nghịch

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A \neq B$ nhưng $AC = BC$.

Câu hỏi: Khi nào thì từ $AC = BC$ có thể suy ra $A = B$?

Ma trận khả nghịch

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A \neq B$ nhưng $AC = BC$.

Câu hỏi: Khi nào thì từ $AC = BC$ có thể suy ra $A = B$?

Định nghĩa

Một ma trận vuông A cấp n được gọi là khả nghịch (hay không suy biến) nếu tồn tại một ma trận vuông B cấp n sao cho

$$AB = BA = I_n\,.$$

Khi đó, ma trận B được gọi là ma trận nghịch đảo của A.

Một ma trận không khả nghịch còn được gọi là một ma trận suy biến.

Ma trận khả nghịch

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A \neq B$ nhưng $AC = BC$.

Câu hỏi: Khi nào thì từ $AC = BC$ có thể suy ra $A = B$?

Định nghĩa

Một ma trận vuông A cấp n được gọi là khả nghịch (hay không suy biến) nếu tồn tại một ma trận vuông B cấp n sao cho

$$AB = BA = I_n.$$

Khi đó, ma trận B được gọi là ma trận nghịch đảo của A.

Một ma trận không khả nghịch còn được gọi là một ma trận suy biến.

Chú ý:

- Ma trận không vuông thì không khả nghịch.
- Không phải mọi ma trận vuông đều khả nghịch.

Ma trận khả nghịch

Định lý

Nếu A là một ma trận khả nghịch thì ma trận nghịch đảo của nó là duy nhất. Khi đó, ma trận nghịch đảo của A được ký hiệu là A^{-1}.

Ma trận khả nghịch

Định lý

Nếu A là một ma trận khả nghịch thì ma trận nghịch đảo của nó là duy nhất. Khi đó, ma trận nghịch đảo của A được ký hiệu là A^{-1}.

Chứng minh:
Giả sử B và C là hai ma trận nghịch đảo của A: $AB = BA = I_n$ và $AC = CA = I_n$.
Ta có:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C\,.$$

Ma trận khả nghịch

Định lý

Nếu A là một ma trận khả nghịch thì ma trận nghịch đảo của nó là duy nhất. Khi đó, ma trận nghịch đảo của A được ký hiệu là A^{-1}.

Chứng minh:
Giả sử B và C là hai ma trận nghịch đảo của A: $AB = BA = I_n$ và $AC = CA = I_n$.
Ta có:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C\,.$$

Chú ý: Nếu hai ma trận vuông A, B thỏa mãn $AB = I_n$ thì $B = A^{-1}$.

Ma trận khả nghịch

Định lý

Nếu A là một ma trận khả nghịch thì ma trận nghịch đảo của nó là duy nhất. Khi đó, ma trận nghịch đảo của A được ký hiệu là A^{-1}.

Chứng minh:
Giả sử B và C là hai ma trận nghịch đảo của A: $AB = BA = I_n$ và $AC = CA = I_n$.
Ta có:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C\,.$$

Chú ý: Nếu hai ma trận vuông A, B thỏa mãn $AB = I_n$ thì $B = A^{-1}$.

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Tóm tắt

1. Ma trận khả nghịch
   - Ma trận khả nghịch
   - Tìm ma trận nghịch đảo
   - Tính chất của ma trận nghịch đảo
2. Ma trận sơ cấp
   - Ma trận sơ cấp và các phép biến đổi sơ cấp
   - Ma trận sơ cấp và ma trận khả nghịch
3. Ứng dụng của hệ pttt và ma trận

Tìm ma trận nghịch đảo

Tìm ma trận nghịch đảo

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$

Tìm ma trận nghịch đảo

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Cần tìm $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ sao cho $AX = I_2$.

$$\begin{cases} x + 4y = 1 \\ -x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z + 4t = 0 \\ -z - 3t = 1 \end{cases}$$

Tìm ma trận nghịch đảo

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Cần tìm $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ sao cho $AX = I_2$.

$$\begin{cases} 1x + 4y = 1 \\ -1x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1z + 4t = 0 \\ -1z - 3t = 1 \end{cases}$$

Tìm ma trận nghịch đảo

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Cần tìm $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ sao cho $AX = I_2$.

$$\begin{cases} 1x + 4y = 1 \\ -1x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1z + 4t = 0 \\ -1z - 3t = 1 \end{cases}$$

Hai hệ pttt có cùng ma trận hệ số nên có thể được giải bằng các phép biến đổi giống nhau $\Rightarrow$ giải song song!

Tìm ma trận nghịch đảo

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Cần tìm $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ sao cho $AX = I_2$.

$$\begin{cases} 1x + 4y = 1 \\ -1x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1z + 4t = 0 \\ -1z - 3t = 1 \end{cases}$$

Hai hệ pttt có cùng ma trận hệ số nên có thể được giải bằng các phép biến đổi giống nhau $\Rightarrow$ giải song song!

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2+h_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h1-4h_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Thuật toán Gauss-Jordan để tìm ma trận nghịch đảo

Cho ma trận A cỡ $n \times n$.

- Viết ma trận $(A \mid I_n)$.
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp (theo hàng), đưa về dạng $(I_n \mid B)$.
- Nếu thành công thì $A^{-1} = B$, nếu không thì A không khả nghịch.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}:$$

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix} : \quad (A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{h_2 - h_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 + 6h_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3 + 4h_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-h_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2 + h_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1 + h_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right).$$

Ví dụ:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}:$$

Ví dụ:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} : \quad (B \mid I_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{h_2-3h_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3+2h_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3+h_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ví dụ:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} : \quad (B \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{h_2-3h_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3+2h_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3+h_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Vậy $(B \mid I_3)$ không đưa về được dạng $(I_3 \mid C)$. Do đó B không khả nghịch.

Ma trận vuông cấp 2

Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ma trận A là khả nghịch khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0$.

Nếu $ad - bc \neq 0$ thì $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ma trận vuông cấp 2

Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ma trận A là khả nghịch khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0$.

Nếu $ad - bc \neq 0$ thì $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận vuông cấp 2

Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ma trận A là khả nghịch khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0$.

Nếu $ad - bc \neq 0$ thì $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, B không khả nghịch vì $(3)(2) - (-1).(-6) = 0$.

Tóm tắt

Tính chất của ma trận nghịch đảo

Định lý

Giả sử A là một ma trận khả nghịch, k là một số nguyên dương và c là một vô hướng khác 0. Khi đó:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^k)^{-1} = A^{-1}A^{-1}\dots A^{-1} = (A^{-1})^k$
3. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Tính chất của ma trận nghịch đảo

Định lý

Giả sử A là một ma trận khả nghịch, k là một số nguyên dương và c là một vô hướng khác 0. Khi đó:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^k)^{-1} = A^{-1}A^{-1}\dots A^{-1} = (A^{-1})^k$
3. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Chú ý: Lũy thừa với số mũ nguyên âm:

$$A^{-k} := (A^k)^{-1}\,.$$

Các công thức $A^{k+l} = A^kA^l$ và $A^{kl} = (A^k)^l$ được mở rộng cho số mũ nguyên bất kỳ.

Nghịch đảo của một tích

Định lý

Nếu A, B là các ma trận vuông khả nghịch cấp n thì AB cũng khả nghịch và

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Nghịch đảo của một tích

Định lý

Nếu A, B là các ma trận vuông khả nghịch cấp n thì AB cũng khả nghịch và

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Chú ý: Mở rộng cho tích của k ma trận khả nghịch

$$(A_1A_2\dots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\dots A_1^{-1}.$$

Nghịch đảo của một tích

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Nghịch đảo của một tích

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -8 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -7/3 \end{pmatrix}.$$

Rút gọn thừa số khả nghịch

Định lý

Giả sử A, B, C là các ma trận với cỡ sao cho các phép toán được thực hiện là có nghĩa. Giả sử ma trận C là khả nghịch. Khi đó:

1. *Nếu $AC = BC$ thì $A = B$.*
2. *Nếu $CA = CB$ thì $A = B$.*

Rút gọn thừa số khả nghịch

Định lý

Giả sử A, B, C *là các ma trận với cỡ sao cho các phép toán được thực hiện là có nghĩa. Giả sử ma trận* C *là khả nghịch. Khi đó:*

1. *Nếu* $AC = BC$ *thì* $A = B$.
2. *Nếu* $CA = CB$ *thì* $A = B$.

Định lý

Nếu A *là một ma trận khả nghịch thì hệ pttt* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *có nghiệm duy nhất được cho bởi* $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= -1 \\ 3x+3y+z &= 1 \\ 2x+4y+z &= -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 4 \\ 3x+3y+z &= 8 \\ 2x+4y+z &= 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 0 \\ 3x+3y+z &= 0 \\ 2x+4y+z &= 0 \end{cases}$$

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= -1 \\ 3x+3y+z &= 1 \\ 2x+4y+z &= -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 4 \\ 3x+3y+z &= 8 \\ 2x+4y+z &= 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 0 \\ 3x+3y+z &= 0 \\ 2x+4y+z &= 0 \end{cases}$$

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= -1 \\ 3x+3y+z &= 1 \\ 2x+4y+z &= -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 4 \\ 3x+3y+z &= 8 \\ 2x+4y+z &= 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 0 \\ 3x+3y+z &= 0 \\ 2x+4y+z &= 0 \end{cases}$$

Ma trận hệ số:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= -1 \\ 3x+3y+z &= 1 \\ 2x+4y+z &= -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 4 \\ 3x+3y+z &= 8 \\ 2x+4y+z &= 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 0 \\ 3x+3y+z &= 0 \\ 2x+4y+z &= 0 \end{cases}$$

Ma trận hệ số:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= -1 \\ 3x+3y+z &= 1 \\ 2x+4y+z &= -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 4 \\ 3x+3y+z &= 8 \\ 2x+4y+z &= 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 0 \\ 3x+3y+z &= 0 \\ 2x+4y+z &= 0 \end{cases}$$

Ma trận hệ số:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= -1 \\ 3x+3y+z &= 1 \\ 2x+4y+z &= -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 4 \\ 3x+3y+z &= 8 \\ 2x+4y+z &= 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 0 \\ 3x+3y+z &= 0 \\ 2x+4y+z &= 0 \end{cases}$$

Ma trận hệ số:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix},$$

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= -1 \\ 3x+3y+z &= 1 \\ 2x+4y+z &= -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 4 \\ 3x+3y+z &= 8 \\ 2x+4y+z &= 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+3y+z &= 0 \\ 3x+3y+z &= 0 \\ 2x+4y+z &= 0 \end{cases}$$

Ma trận hệ số:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tóm tắt

Ma trận sơ cấp

Định nghĩa

Một ma trận vuông cấp n được gọi là sơ cấp *nếu nó có thể được nhận từ I_n bằng* **một** *phép biến đổi sơ cấp.*

Ma trận sơ cấp

Định nghĩa

Một ma trận vuông cấp n được gọi là sơ cấp nếu nó có thể được nhận từ I_n bằng **một** *phép biến đổi sơ cấp.*

Ví dụ:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận sơ cấp

Định nghĩa

Một ma trận vuông cấp n được gọi là sơ cấp nếu nó có thể được nhận từ I_n bằng **một** *phép biến đổi sơ cấp.*

Ví dụ:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Các ma trận A_1, A_4, A_5 là sơ cấp; các ma trận A_2, A_3, A_6 không phải sơ cấp.

Ma trận sơ cấp và các phép biến đổi sơ cấp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và các phép biến đổi sơ cấp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 A =$$

Ma trận sơ cấp và các phép biến đổi sơ cấp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ma trận sơ cấp và các phép biến đổi sơ cấp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 A =$$

Ma trận sơ cấp và các phép biến đổi sơ cấp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 12 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận sơ cấp và các phép biến đổi sơ cấp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 12 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3A =$$

Ma trận sơ cấp và các phép biến đổi sơ cấp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 12 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ma trận sơ cấp và các phép biến đổi sơ cấp

Định lý

Giả sử ma trận sơ cấp E được nhận từ ma trận đơn vị I_m bằng một phép biến đổi sơ cấp. Khi đó, với mọi ma trận A cỡ $m \times n$, tích EA là ma trận nhận được từ A bằng cách thực hiện chính phép biến đổi sơ cấp đó.

Ma trận sơ cấp và các phép biến đổi sơ cấp

Định lý

Giả sử ma trận sơ cấp E được nhận từ ma trận đơn vị I_m bằng một phép biến đổi sơ cấp. Khi đó, với mọi ma trận A cỡ $m \times n$, tích EA là ma trận nhận được từ A bằng cách thực hiện chính phép biến đổi sơ cấp đó.

Chú ý: Ma trận sơ cấp ở bên trái của tích.

Ma trận sơ cấp và dạng bậc thang theo hàng

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang theo hàng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và dạng bậc thang theo hàng

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang theo hàng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và dạng bậc thang theo hàng

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang theo hàng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và dạng bậc thang theo hàng

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang theo hàng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và dạng bậc thang theo hàng

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang theo hàng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và dạng bậc thang theo hàng

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang theo hàng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1/2 \times h_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và dạng bậc thang theo hàng

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang theo hàng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1/2 \times h_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và dạng bậc thang theo hàng

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang theo hàng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và dạng bậc thang theo hàng

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang theo hàng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = E_3 E_2 E_1 A\,.$$

Ma trận sơ cấp và dạng bậc thang theo hàng

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang theo hàng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = E_3 E_2 E_1 A\,.$$

Định lý

Hai ma trận A và B cỡ $m \times n$ là tương đương theo hàng khi và chỉ khi tồn tại các ma trận sơ cấp $E_1, E_2, \dots, E_k$ sao cho

$$B = E_k \dots E_2 E_1 A\,.$$

Tóm tắt

Nghịch đảo của ma trận sơ cấp

Định lý

Mọi ma trận sơ cấp đều khả nghịch. Nghịch đảo của một ma trận sơ cấp là một ma trận sơ cấp.

Nghịch đảo của ma trận sơ cấp

Định lý

Mọi ma trận sơ cấp đều khả nghịch. Nghịch đảo của một ma trận sơ cấp là một ma trận sơ cấp.

Nhận xét: Phép biến đổi tương ứng với E^{-1} là phép biến đổi "ngược" của phép biến đổi tương ứng với E

E	E^{-1}
$h_i \leftrightarrow h_j$	$h_i \leftrightarrow h_j$
$c \times h_i$	$\frac{1}{c} \times h_i$
$h_i + ch_j$	$h_i - ch_j$

Ma trận sơ cấp và ma trận khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông A là khả nghịch khi và chỉ khi nó viết được thành tích của các ma trận sơ cấp.

Ma trận sơ cấp và ma trận khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông A là khả nghịch khi và chỉ khi nó viết được thành tích của các ma trận sơ cấp.

Nhận xét: Giả sử A khả nghịch

1. Có thể đưa A về I_n bằng một số phép biến đổi sơ cấp.
2. Gọi $E_1, E_2, \ldots, E_k$ là các ma trận sơ cấp tương ứng với các phép biến đổi đó.
3. Ta có $I_n = E_k \ldots E_2 E_1 A$, suy ra $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$.

Ma trận sơ cấp và ma trận khả nghịch

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

Ma trận sơ cấp và ma trận khả nghịch

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{(-1)\times h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và ma trận khả nghịch

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{(-1)\times h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 - 3h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và ma trận khả nghịch

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{(-1)\times h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 - 3h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1/2)\times h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và ma trận khả nghịch

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{(-1)\times h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 - 3h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1/2)\times h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_1 - 2h_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận sơ cấp và ma trận khả nghịch

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{(-1)\times h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 - 3h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1/2)\times h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_1 - 2h_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tổng hợp các điều kiện khả nghịch

Định lý

Cho A là một ma trận vuông cấp n. Các điều kiện sau là tương đương:

1. *A khả nghịch.*
2. *Hệ pttt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ có nghiệm duy nhất với mọi $\mathbf{b}$.*
3. *Hệ pttt $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ chỉ có nghiệm tầm thường.*
4. *A tương đương theo hàng với I_n.*
5. *A viết được thành tích của các ma trận sơ cấp.*

Một vài ứng dụng của hệ pttt

Mô hình Input-Output của Leontief:

	Inputs Consumed per Unit of Output		
Purchased from:	**Manufacturing**	**Agriculture**	**Services**
Manufacturing	.50	.40	.20
Agriculture	.20	.30	.10
Services	.10	.10	.30
	↑ $\mathbf{c}_1$	↑ $\mathbf{c}_2$	↑ $\mathbf{c}_3$

THE LEONTIEF INPUT–OUTPUT MODEL, OR PRODUCTION EQUATION

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Amount produced}} = \underbrace{C\mathbf{x}}_{\text{Intermediate demand}} + \underbrace{\mathbf{d}}_{\text{Final demand}}$$

$$C = \begin{bmatrix} .50 & .40 & .20 \\ .20 & .30 & .10 \\ .10 & .10 & .30 \end{bmatrix}$$

Một vài ứng dụng của hệ pttt

Mô hình Input-Output của Leontief:

	Inputs Consumed per Unit of Output		
Purchased from:	**Manufacturing**	**Agriculture**	**Services**
Manufacturing	.50	.40	.20
Agriculture	.20	.30	.10
Services	.10	.10	.30
	↑ $\mathbf{c}_1$	↑ $\mathbf{c}_2$	↑ $\mathbf{c}_3$

THE LEONTIEF INPUT–OUTPUT MODEL, OR PRODUCTION EQUATION

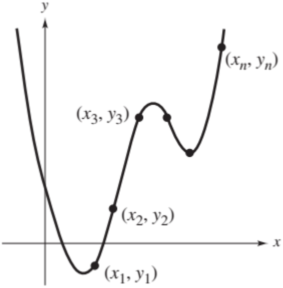
$$\underbrace{\mathbf{x}}_{\text{Amount produced}} = \underbrace{C\mathbf{x}}_{\text{Intermediate demand}} + \underbrace{\mathbf{d}}_{\text{Final demand}}$$

$$C = \begin{bmatrix} .50 & .40 & .20 \\ .20 & .30 & .10 \\ .10 & .10 & .30 \end{bmatrix}$$

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}.$$

Một vài ứng dụng của hệ pttt

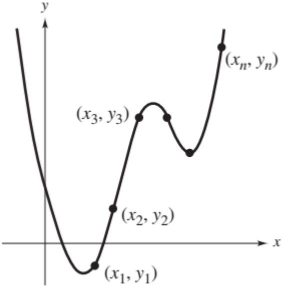
Tìm đường cong đa thức bậc $n-1$ đi qua n điểm cho trước:



Polynomial Curve Fitting

Một vài ứng dụng của hệ pttt

Tìm đường cong đa thức bậc $n-1$ đi qua n điểm cho trước:

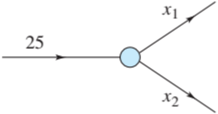


Polynomial Curve Fitting

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1x_1 + ... + a_{n-1}x_1^{n-1} &= y_1,\\
a_0 + a_1x_2 + ... + a_{n-1}x_2^{n-1} &= y_2,\\
&\dots\\
a_0 + a_1x_n + ... + a_{n-1}x_n^{n-1} &= y_n.
\end{aligned}
$$

Một vài ứng dụng của hệ pttt

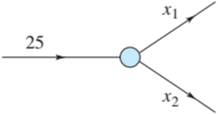
Phân tích mạng



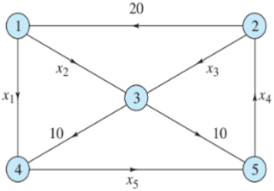
$x_1 + x_2 = 25.$

Một vài ứng dụng của hệ pttt

Phân tích mạng



$$x_1 + x_2 = 25.$$



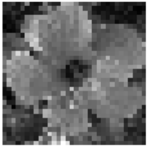
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 20 \\
 & & & & x_3 & - & x_4 & & & = & -20 \\
 & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 20 \\
x_1 & & & & & & & - & x_5 & = & -10 \\
 & & & & & & -x_4 & + & x_5 & = & -10
\end{array}$$

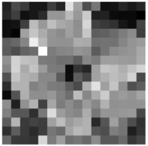
Ứng dụng của ma trận trong xử lý ảnh

Ma trận 240×240

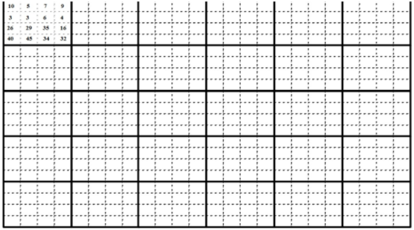
Ứng dụng của ma trận trong xử lý ảnh

Ma trận 240×240

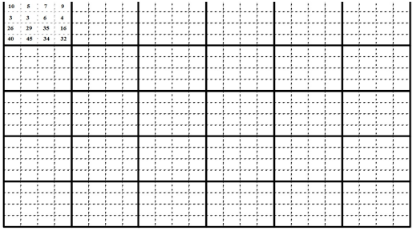


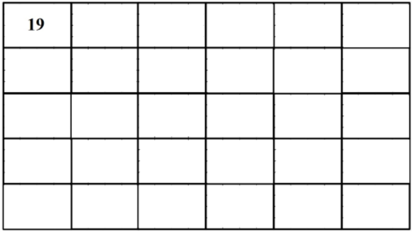


Ứng dụng của ma trận trong xử lý ảnh (tiếp)

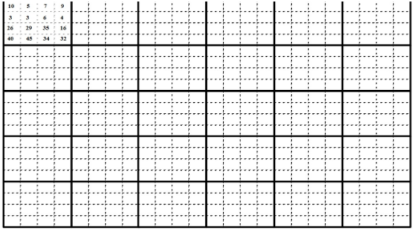


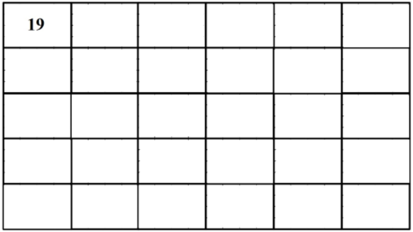
Ứng dụng của ma trận trong xử lý ảnh (tiếp)





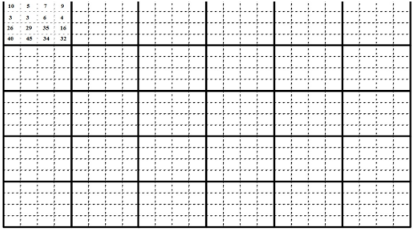
Ứng dụng của ma trận trong xử lý ảnh (tiếp)

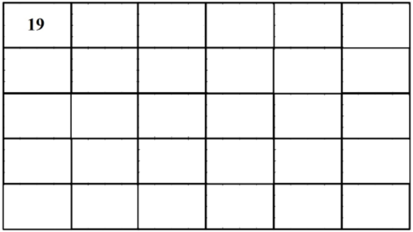




$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 6 & 4 \\ 26 & 29 & 35 & 16 \\ 40 & 45 & 34 & 32 \end{pmatrix}$$

Ứng dụng của ma trận trong xử lý ảnh (tiếp)





$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 6 & 4 \\ 26 & 29 & 35 & 16 \\ 40 & 45 & 34 & 32 \end{pmatrix}$$

$$PAQ = 19 \text{ với } P^T = Q = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Ứng dụng của ma trận trong xử lý ảnh (tiếp)

Làm mờ một phần ảnh:

Ứng dụng của ma trận trong xử lý ảnh (tiếp)

Làm mờ một phần ảnh:

Ứng dụng của ma trận trong xử lý ảnh (tiếp)

Làm mờ một phần ảnh:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 6 & 4 \\ 26 & 29 & 35 & 16 \\ 40 & 45 & 34 & 32 \end{pmatrix}$$

Ứng dụng của ma trận trong xử lý ảnh (tiếp)

Làm mờ một phần ảnh:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 6 & 4 \\ 26 & 29 & 35 & 16 \\ 40 & 45 & 34 & 32 \end{pmatrix} \quad \rightarrow B = \begin{pmatrix} 19 & 19 & 19 & 19 \\ 19 & 19 & 19 & 19 \\ 19 & 19 & 19 & 19 \\ 19 & 19 & 19 & 19 \end{pmatrix}$$

Câu hỏi:

- Một bức ảnh = một tập hợp các điểm

Câu hỏi:

- Một bức ảnh = một tập hợp các điểm
- Mỗi điểm được xác định bởi hai "tọa độ" của nó,v.d. điểm nằm ở hàng x và cột y được xác định duy nhất bởi hai tọa độ (x, y).

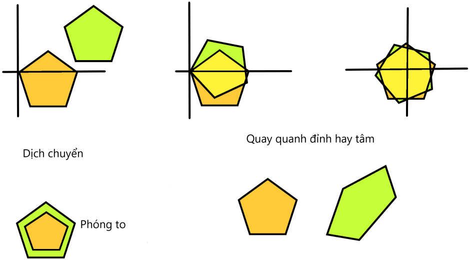
Câu hỏi:

- Một bức ảnh = một tập hợp các điểm
- Mỗi điểm được xác định bởi hai "tọa độ" của nó,v.d. điểm nằm ở hàng x và cột y được xác định duy nhất bởi hai tọa độ (x, y).
- Chỉnh sửa ảnh: quay bức ảnh quanh một góc hay quay quanh tâm, di chuyển ảnh, muốn phóng to hay thu nhỏ ảnh, muốn lật ảnh,...?

Câu hỏi:

- Một bức ảnh = một tập hợp các điểm
- Mỗi điểm được xác định bởi hai "tọa độ" của nó,v.d. điểm nằm ở hàng x và cột y được xác định duy nhất bởi hai tọa độ (x, y).
- Chỉnh sửa ảnh: quay bức ảnh quanh một góc hay quay quanh tâm, di chuyển ảnh, muốn phóng to hay thu nhỏ ảnh, muốn lật ảnh,...?

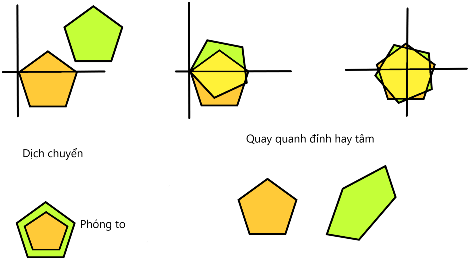
Câu hỏi: Tìm các ma trận tương ứng với các biến đổi trên?



Câu hỏi:

- Một bức ảnh $=$ một tập hợp các điểm
- Mỗi điểm được xác định bởi hai "tọa độ" của nó,v.d. điểm nằm ở hàng x và cột y được xác định duy nhất bởi hai tọa độ (x, y).
- Chỉnh sửa ảnh: quay bức ảnh quanh một góc hay quay quanh tâm, di chuyển ảnh, muốn phóng to hay thu nhỏ ảnh, muốn lật ảnh,...?

Câu hỏi: Tìm các ma trận tương ứng với các biến đổi trên?



Gợi ý: Mỗi điểm (x, y) tương ứng 1-1 với điểm $(x, y, 1)^T$