Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2017
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 2x - 3y - 5z = 5 \\ 3x - 4y + (m-10)z = 8 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $m = 1$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Tính $\det(A)$.
(b) Ma trận A có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A.

Bài 3. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Xét ánh xạ tuyến tính $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cho bởi $T(v) = Av$ với mọi $v \in \mathbb{R}^4$.
(a) Tìm một cơ sở của hạt nhân (hay không gian hạch) $\mathrm{Ker}(T)$ của T.
(b) Tìm ma trận của ánh xạ T đối với cơ sở

$$\{(0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0)\}.$$

Bài 4. (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi

$$T(x,y,z,t) = (x + z + t, x + y + 2z + 2t, x + 3y + 4z + 4t, x + 4y + 5z + 5t).$$

(a) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian ảnh $\mathrm{im}(T)$ của T.
(b) Dùng Gram-Schmidt để đưa cơ sở tìm được ở phần (a) về cơ sở trực chuẩn (theo tích vô hướng Euclid trong $\mathbb{R}^4$).

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận A với tham số thực a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng của ma trận A. Chứng minh rằng khi $a = 0$ thì ma trận A không chéo hóa được.
(b) Khi $a = \frac{1}{2}$, hãy tìm một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 1

Bài 1. (a) Khi $m = 1$, hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 2x - 3y - 5z = 5 \\ 3x - 4y - 9z = 8 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & -9 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do vậy nghiệm của hệ là $x = 4 + 7t$, $y = 1 + 3t$ và $z = t$ với $t \in \mathbb{R}$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m:
Định thức của ma trận hệ số là $m - 1$. Với $m \neq 1$ thì định thức của ma trận hệ số khác không. Do vậy hệ có nghiệm duy nhất.
Khi $m = 1$ thì hệ có vô số nghiệm (câu (a)).

Bài 2. (a) $\det(A) = 2$.
(b) Do $\det(A) \neq 0$ nên ma trận A khả nghịch.
Ma trận nghich đảo của A là:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Bài 3. (a) Một cơ sở của $\mathrm{Ker}(f)$ là $(1, 2, 3, 0), (0, 7, 5, 1)$.
(b) Ma trận của f đối với cơ sở đã cho là

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bài 4. Ma trận A của T trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Không gian ảnh của T được xác định bởi không gian cột của A.
Dạng bậc thang của A là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy $\{v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (0,1,3,4)\}$ là một cơ sở của im$T$. Do đó $\dim(\mathrm{im}T) = 2$.

(b) Ta trực chuẩn hóa cơ sở tìm được ở mục (a) theo Gram-Schmidt:

$$w_1 := v_1 := (1,1,1,1)$$
$$w_2 := v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (0,1,3,4) - \frac{8}{4}(1,1,1,1) = (-2,-1,1,2).$$

Vậy $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở trực chuẩn của imT với

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$
$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right).$$

Bài 5. (a) Đa thức đặc trưng của ma trận A là

(1)
$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 0 \\ -a^2 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - a) det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -a^2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} =$$
$$= (\lambda - a)((\lambda - 1)^2 - a^2) = (\lambda - a)(\lambda - 1 - a)(\lambda - 1 + a).$$

Từ (1) ta thấy các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = a, \lambda_2 = 1 + a, \lambda_3 = 1 - a$.
Khi $a = 0$: A có 2 giá trị riêng: $\lambda_1 = 0$ (bội 1), $\lambda_2 = 1$ (bội 2).
Với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ ta xét hệ phương trình

(2)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ (2) ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ là

$$\mathbb{R}^3_1(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Do đó ta không thể tìm được 2 vector riêng độc lập tuyến tính tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$. Vì vậy khi $a = 0$ ma trận A không chéo hóa được.

(b) Khi $a = 1/2$ ma trận A có 2 giá trị riêng: $\lambda_1 = 1/2$ (bội 2), $\lambda_2 = 3/2$ (bội 1).
$\lambda_1 = 1/2$: Xét hệ

(3)
$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ (3) ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1/2$ có dạng

(4)
$$\mathbb{R}^3_{1/2}(A) = \{\begin{pmatrix} -2t \\ s \\ t \end{pmatrix} | s, t \in \mathbb{R}\} = span(\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}).$$

Chọn các vector riêng $p_1 = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 3/2$: Xét hệ

(5) $$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ (2) ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 3/2$ là

$$\mathbb{R}^3_{3/2}(A) = span(\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}).$$

Chọn vector riêng $p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$