Bài toán dẫn đến tích phân đường loại 2

Cho $\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{e}_1 + Q(x,y)\boldsymbol{e}_2$ là một trường lực biến đổi trên $\boldsymbol{R}^2$. Tính công thực hiện bởi lực này để di chuyển một hạt dọc theo đường cong C.

Cho hai hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ xác định trên cung C cho bởi phương trình véc tơ $r(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2$,$t \in [a,b]$.

Chia $[a,b]$ thành n đoạn có các nút $t_i, i = 0, n$, lúc đó trên đường cong C sẽ nhận được các điểm tương ứng $M_i(x_i, y_i)$. Xét tích vô hướng:

$$\mathbf{F}.\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \mathbf{F}.d\mathbf{r} = P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i$$

Với $\left(x_i^*, y_i^*\right)$ là điểm bất kỳ trong cung bé $M_{i-1}M_i$.

Lập tổng: $$\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i\right]$$

Ta đi đến định nghĩa định nghĩa về tích phân đường loại 2.

Định nghĩa. Cho trường véc tơ $\mathbf{F} = \left(P(x,y), Q(x,y)\right)$ xác định trên $D \subset R^2$ bao gồm đường cong $C: x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$, tổng tích phân đường đối với trường véc tơ $\boldsymbol{F}$ là:

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i\right]$$

nếu tồn tại.

Tích phân đường đối với trường véc tơ được gọi là tích phân đường loại 2, trong khi tích phân đường đối với trường vô hướng là tích phân đường loại 1.

Tổng quát, nếu xem $\boldsymbol{F}$ là trường véc tơ trong $\boldsymbol{R}^3$ với:

$$\mathbf{F} = P(x,y,z)\mathbf{e}_1 + Q(x,y,z)\mathbf{e}_2 + R(x,y,z)\mathbf{e}_3$$

$$C: \mathbf{r} = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3, t \in [a,b]$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_1 + dy\mathbf{e}_2 + dz\mathbf{e}_3$$

$$\rightarrow \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

Một số tính chất của tích phân đường loại 2

1) Đối với tích phân đường loại 1 tổng tích phân tính theo độ dài vi phân cung ds nên không phụ thuộc vào chiều của đường cong lấy tích phân. Tuy nhiên, đối với tích phân đường loại hai tổng tích phân dựa vào tích vô hướng của hai vector $\boldsymbol{F}$ với véc tơ $d\boldsymbol{r}$, do đó tích phân phụ thuộc vào chiều của đường cong lấy tích phân, nghĩa là:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

2) Có thể tách tích phân đường thành tổng các tích phân thành phần:

$$\int_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{C} P(x,y)dx + \int_{C} Q(x,y)dy$$

3) Nếu $AB = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, C_i là các cung trơn thì:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

4) $$\int_{C} (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}).dr = a\int_{C} \mathbf{F}.dr + b\int_{C} \mathbf{G}.dr$$

Các công thức tính tích phân đường loại 2

1. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $x = a, x = b$ thì:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x) \right] dx$$

2. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(y)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $y = c, y = d$ thì:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_c^d \left[P\left(x(y), y\right).x'(y) + Q\left(x(y), y\right) \right] dy$$

3. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(t), y = y(t)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $t = t_1, t = t_2$ thì:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right).x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right).y'(t) \right] dt$$

Tương tự, tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ dọc theo cung C có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \le t \le b$, được viết:

$$I = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_a^b P\left(x(t), y(t), z(t)\right).x'(t)dt$$

$$+ Q\left(x(t), y(t), z(t)\right).y'(t)dt + R\left(x(t), y(t), z(t)\right).z'(t)dt$$

Bài tập*. Tính $\int\limits_{AB} ydx + x^2dy$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $y = x^2$ từ $A(1,1)$ đến $B(0,0)$

Ta có: $y = x^2 \to dy = 2xdx$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x) \right] dx$$

$$= \int\limits_1^0 \left(x^2 + x^2.2x \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} \right) \Bigg|_1^0 = -\frac{5}{6}$$

Bài tập*. Tính $\int\limits_{AB} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(2xy - y^2\right)dy$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $y = x^2$ từ $A(1,1)$ đến $B(2,4)$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x) \right] dx$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\left(x^2 - 2x^3\right) + \left(2x^3 - x^4\right).2x \right) dx = \int\limits_1^2 \left(-2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x^2 \right) dx$$

$$= \left(-\frac{x^6}{3} + \frac{4x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_1^2 = -\frac{41}{30}$$

Bài tập*. Tính $\int\limits_{AB} 2ydx$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $x = y^3 + y$ từ $A(-2,-1)$ đến $B(2,1)$

Ta có: $$x = y^3 + y \to dx = \left(3y^2 + 1\right)dy$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{c}^{d} \left[P\left(x\left(y\right), y\right).x'\left(y\right) + Q\left(x\left(y\right), y\right) \right] dy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} 2y\left(3y^2 + 1\right)dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(6y^3 + 2y\right)dy = \left.\left(\frac{6y^4}{4} + \frac{2y^2}{2}\right)\right|_{-1}^{1} = 0$$

Bài tập*. Tính $\int\limits_{AB}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(2xy-y^2\right)dy$, trong đó $\widehat{AB}$ là đường cong $x = a(t - sint); y = a(1 - cost)$ theo chiều tăng của $t, 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$.

Ta có: $$dx = a\left(1-\cos t\right)dt; dy = a\sin t dt$$

Sử dụng công thức:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[P\left(x(t),y(t)\right).x'(t)+Q\left(x(t),y(t)\right).y'(t)\right]dt$$

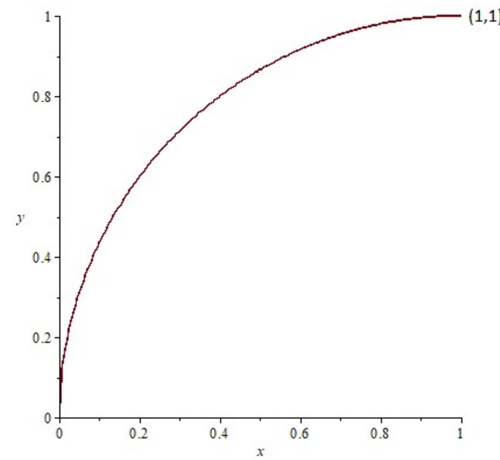
Dẫn đến:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left\{\left[2a\left(t-\sin t\right)-a\left(1-\cos t\right)\right]a\left(1-\cos t\right)+a\left(t-\sin t\right).a\sin t\right\}dt$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(2t-2\right)+\sin 2t+\left(t-2\right)\sin t-\left(2t-2\right)\cos t\right]dt$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(2t-2\right)+t\sin t-2t\cos t\right]dt=a^2\left(4\pi^2-6\pi\right)$$

Bài tập*. Tính $I = \int\limits_C ydx + xdy$, C là cung $x^2 + y^2 = 2x$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$ theo chiều kim đồng hồ.



Đặt $x = 1 + \cos t; y = \sin t$ dẫn đến:

$$dx = -\sin t dt; dy = \cos t dt; t : \pi \to \frac{\pi}{2}$$

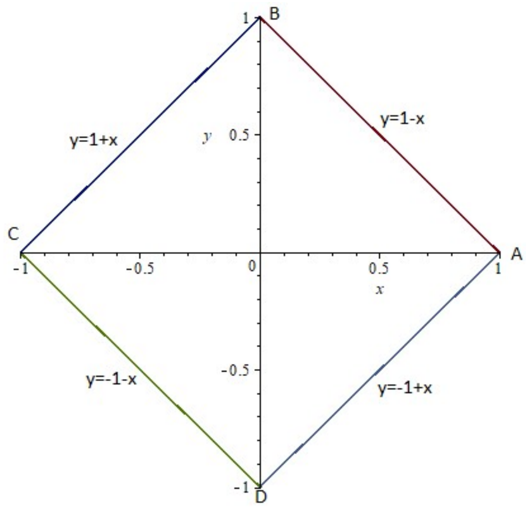
Áp dụng công thức:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right).x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right).y'(t) \right] dt$$

$$\to I = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \left[-\sin t.\sin t + \left(1 + \cos t\right).\cos t \right] dt$$

$$= \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \left(\cos t + \cos 2t\right) dt = \left(\sin t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_{\pi}^{\pi/2} = 1$$

Bài tập. Tính $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, $ABCDA$ là đường gấp khúc qua các điểm $A(1{,}0), B(0{,}1), C(-1{,}0), D(0,-1)$



Xét các đoạn:

$$AB: y = 1 - x \to dx + dy = 0$$
$$BC: y = 1 + x \to dx = dy$$
$$CD: y = -1 - x \to dx + dy = 0$$
$$DA: y = -1 + x \to dx = dy$$

Ta có:

$$\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|a|+|b|} = \int\limits_{AB} \frac{dx+dy}{|a|+|b|} + \int\limits_{BC} \frac{dx+dy}{|a|+|b|} + \int\limits_{CD} \frac{dx+dy}{|a|+|b|} + \int\limits_{DA} \frac{dx+dy}{|a|+|b|}$$

$$= 0 + 2\int\limits_{BC} \frac{dx}{-(x-y)} + 0 + 2\int\limits_{DA} \frac{dx}{(x-y)} = 2\int_0^{-1} dx - 2\int_0^{1} dx = -2$$

Bài tập. Tính $\int\limits_{AB} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}dx + dy$ trong đó:

$$x = t\sin\sqrt{t}; y = t\cos\sqrt{t}; 0 \le t \le \frac{\pi^2}{4}$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right).x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right).y'(t) \right] dt$$

Đặt $u = \sqrt{t}$ dẫn đến:

$$0 \le u \le \frac{\pi}{2}$$

$$x = u^2 \sin u \to x'(u) = 2u\sin u + u^2 \cos u$$

$$y = u^2 \cos u \to y'(u) = 2u\cos u - u^2 \sin u$$

Công thức tích phân:

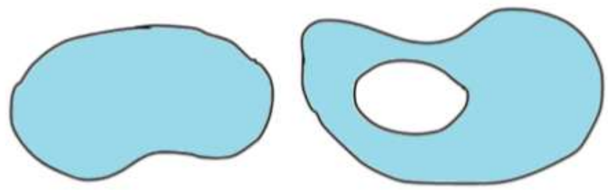
$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{u_1}^{u_2} \left[P\left(x(u), y(u)\right).x'(u) + Q\left(x(u), y(u)\right).y'(u) \right] du$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} \left[\sqrt[4]{u^4\left(\cos^2 u + \sin^2 u\right)}.\left(2u\sin u + u^2\cos u\right) + 2u\cos u - u^2 \sin u \right] du$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/2} \left[\frac{u}{2}.\left(2u\sin u + u^2\cos u\right) + 2u\cos u - u^2\sin u \right] du = -\frac{3}{2}\pi^2 + 2$$

Công thức Green

Chiều dương của đường cong kín. Đường cong kín C là biên của miền D. Chiều dương qui ước trên C là chiều sao cho nếu đi dọc theo C theo chiều này, thì miền D gần nhất sẽ nằm ở phía trái. Chiều ngược lại gọi là chiều âm.



Miền đơn liên và miền đa liên (nhị liên)

Miền đơn liên và miền đa liên. Miền D được gọi là miền đơn liên nếu các biên kín của D có thể co về thành một điểm $P \in D$ mà không bị các biên khác cản trở. Ngược lại, D được gọi là miền đa liên.

Biểu diễn của công thức Green. $D \in R^2$ là miền đơn liên, bị chặn bởi biên kín C với hướng dương. Nếu P, Q cùng các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên D, khi đó:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Nếu C có hướng âm thì:

$$\int_C Pdx + Qdy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Trong một số trường hợp, nếu C là đường cong không kín thì có thể bổ sung C để nhận được đường cong kín và áp dụng công thức hàm Green.

Bài tập*. Tính tích phân $\int\limits_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, trong đó C là đường $x^2+y^2=R^2$

Tính trực tiếp. Đặt $x=R\cos\varphi; y=R\sin\varphi \ (0\le\varphi\le 2\pi)$, sử dụng công thức:

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[P\big(x(t),y(t)\big).x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big).y'(t)\right]dt$$

Dẫn đến:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left[\begin{array}{l}\left(R^2\cos\varphi\sin\varphi+R\cos\varphi+R\sin\varphi\right)\left(-R\sin\varphi\right)\\+\left(R^2\cos\varphi\sin\varphi+R\cos\varphi-R\sin\varphi\right)\left(R\cos\varphi\right)\end{array}\right]d\varphi$$

$$=\frac{R^3}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\cos 2\varphi+\sin\varphi\cos 2\varphi\right)d\varphi=0$$

Sử dụng công thức Green. Ta có:

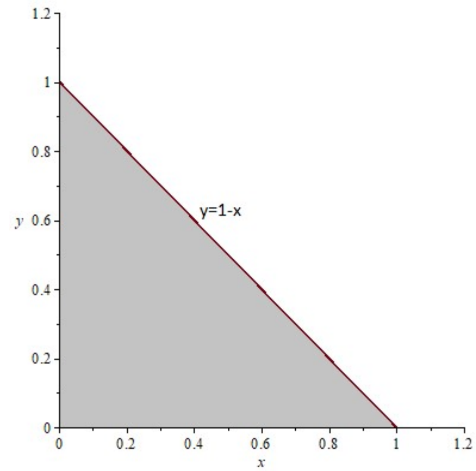
$$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = x + 1 \\ Q(x,y) = xy + x - y \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y + 1 \end{cases}$$

$$\to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$$

$$\to I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} (y - x)\,dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} ydxdy - \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} xdxdy = 0$$

Bài tập*. Tính tích phân $\int_C x^2dx + xydy$, trong đó C là biên tam giác tạo nên từ các đoạn thẳng nối từ $(0,0)$ tới $(1,0)$, từ $(1,0)$ tới $(0,1)$, và từ $(0,1)$ tới $(0,0)$.

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ Q(x,y) = xy \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y$$



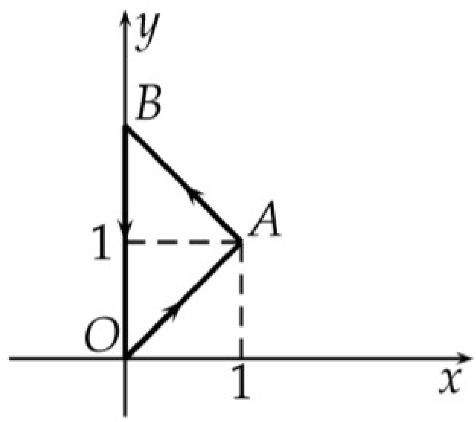
Dẫn đến:

$I = \iint_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D ydxdy$, trong đó D là miền được xác định bởi:

$$0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x$$

$$\to I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} ydy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x)^3}{3}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}(0-1) = \frac{1}{6}$$

Bài tập. Tính $I = \int\limits_C e^x\left(1+\frac{y^2}{2}\right)dx - (y-\sin y)dy$ trong đó C là đường gấp khúc nối $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$.

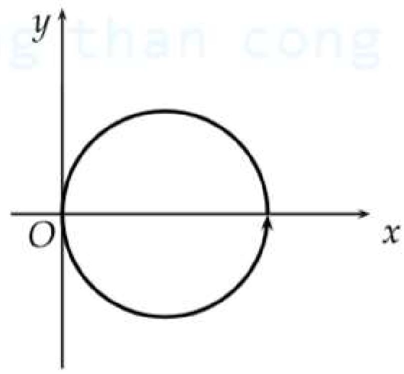


$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x y$$

$$\Rightarrow I = -\iint\limits_D e^x y dxdy = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x} e^x y dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^x (4x-4)dx = 4-2e$$

Bài tập. Tính $I = \int_C \left(xy + e^x \sin x + x + y\right)dx - \left(xy - e^{-y} + x - \sin y\right)dy$

trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$.



$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -y - x - 2$$

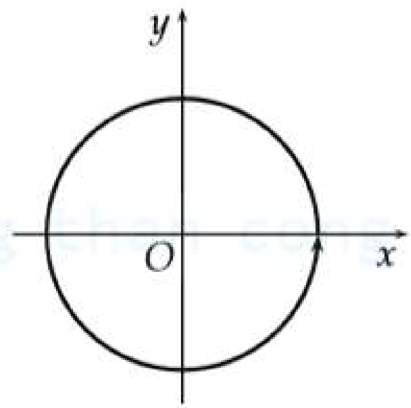
$$\Rightarrow I = -\iint_D \left(y + x + 2\right)dxdy = -\iint_D \left(x + 2\right)dxdy \text{ vì } \iint_D ydxdy = 0$$

Đặt $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; 0 \le r \le 2\cos\varphi$

$$\Rightarrow I = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \left(r\cos\varphi + 2\right)rdr = -3\pi$$

Bài tập. Tính $I = \int\limits_C \left(xy^4 + x^2 + y\cos xy\right)dx + \left(\dfrac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy$

trong đó C được cho bởi phương trình $x = a\cos t, y = a\sin t, (a > 0)$.



$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1$$

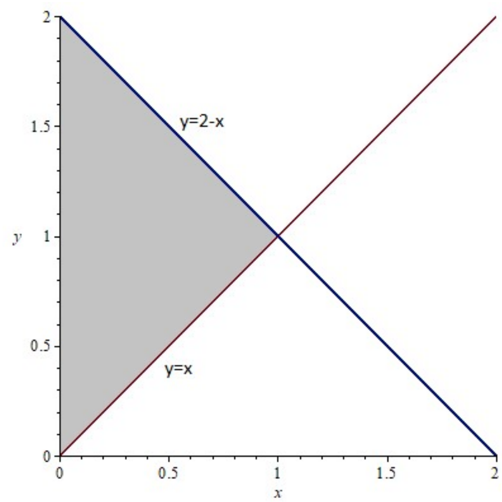
$$\Rightarrow I = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2 - 4xy^3 - 1\right)dxdy = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2 - 1\right)dxdy$$

(vì $\iint\limits_D xy^3 dxdy = 0$)

Đặt $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi \Rightarrow 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le r \le a$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(r^2 - 1\right) r dr = \pi\left(\frac{a^4}{2} - a^2\right)$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C \left(x^2+3y\right)dx+2ydy$, trong đó C là biên tam giác tạo nên từ các đoạn thẳng nối từ (0,0) tới (1,1), từ (1,1) tới (0,2), và từ (0,2) tới (0,0) và ngược chiều kim đồng hồ.



$$\begin{cases} P(x,y)=x^2+3y \to \dfrac{\partial P}{\partial y}=3 \\ Q(x,y)=2y \to \dfrac{\partial Q}{\partial x}=0 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3$$

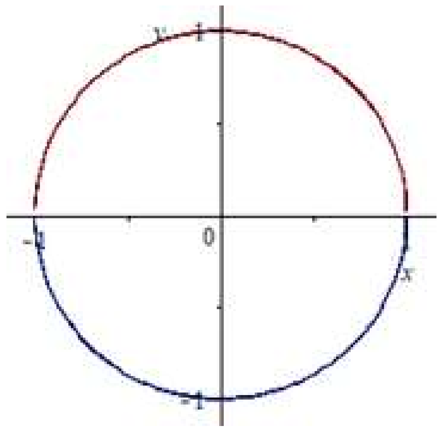
Dẫn đến:

$$I=\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=-3\iint\limits_D dxdy,$$

trong đó D là miền được xác định bởi: $0 \le x \le 1; x \le y \le 2-x$.

$$\to I=-3\int_0^1 dx\int_x^{2-x} dy=-3\int_0^1 (2-2x)dx=-6\int_0^1 (1-x)dx=-6.\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-3$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C \left(2x^3 - y^3\right)dx + \left(x^3 + y^3\right)dy$, trong đó C là đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.



$$\begin{cases} P(x,y) = 3x^3 - y^3 \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 \\ Q(x,y) = x^3 + y^3 \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3\left(x^2 + y^2\right)$$

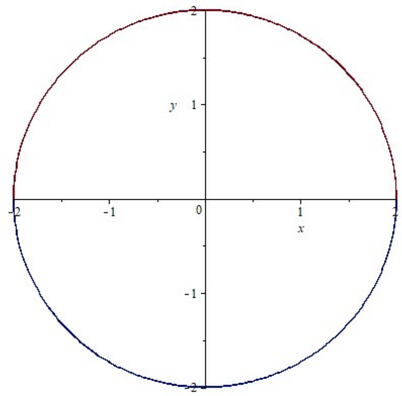
Dẫn đến:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 3\left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

Đặt $x = \cos\varphi; y = \sin\varphi \to J = r$:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} 3\left(x^2 + y^2\right)dxdy = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = 3.2\pi.\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{2}$$

Bài tập. Tính tích phân $I=\int\limits_C (xy+4x+5y)dx+\left(y^2-2x+\dfrac{x^2}{2}\right)dy$, trong đó C là đường $x^2+y^2=4$ và theo chiều ngược kim đồng hồ.

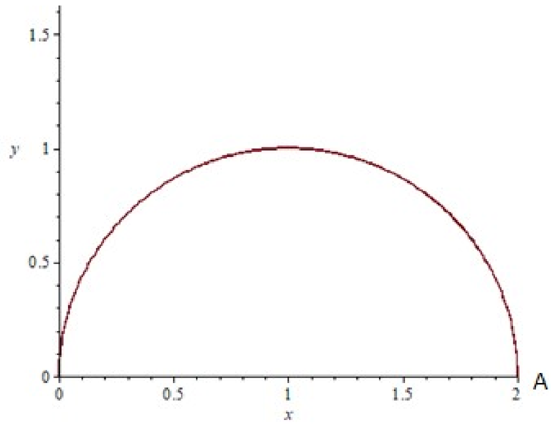


$$\begin{cases} P(x,y)=xy+4x+5y\to\dfrac{\partial P}{\partial y}=x+5 \\ Q(x,y)=y^2-2x+\dfrac{x^2}{2}\to\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2+x \end{cases}\to\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-7$$

Đặt $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi\to J=r$:

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(-7)dxdy=-7\int\limits_0^2 rdr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=-7.2\pi.\frac{r^2}{2}\bigg|_0^2=-28\pi$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, trong đó C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ cùng chiều kim đồng hồ.



$$I = \int\limits_{C \cup \overline{AO}} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy - \int\limits_{\overline{AO}} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int\limits_{C \cup \overline{AO}} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$
$$= -\iint\limits_D \left(2(x+y) + 2(x-y) \right) dxdy = -4\iint\limits_D xdxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực với $x = rcos\varphi$:

$$I_1 = -4\iint\limits_D xdxdy = -4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r\cos\varphi.rdr = -2\pi$$

Để tính I_2, sử dụng công thức ($y = 0$):

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)).y'(x) \right] dx$$

$$\rightarrow I = I_1 - I_2 = -2\pi + \frac{8}{3}$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, trong đó C là đường $x^2+y^2=2x$

Sử dụng công thức Green:

$$\begin{cases} P(x,y)=xy+x+y \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=x+1 \\ Q(x,y)=xy+x-y \rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y+1 \end{cases} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y-x$$

Dẫn đến:

$$\rightarrow I=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}(y-x)dxdy$$

Đặt $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi$ ta có:

$$x^2+y^2=2x \rightarrow r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=2r\cos\varphi \rightarrow r=2\cos\varphi$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{r\cos\varphi}rdr$$

Điều kiện tích phân đường độc lập đường lấy tích phân

Ta thấy rằng giá trị của $\int\limits_C Pdx + Qdy$ không những phụ thuộc vào đường cong C mà còn phụ thuộc vào giá trị hai mút của đường cong. Bây giờ ta xét với điều kiện nào thì giá trị tích phân đường chỉ phụ thuộc vào hai mút mà không phụ thuộc vào đường cong lấy tích phân.

Định lý. Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trong miền đơn liên D. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:

1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D$

2) $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$, với mọi đường cong kín $L \in D$

3) $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào hai điểm mút A, B mà không phụ thuộc vào đường cong AB.

4) $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $\psi(x, y)$ nào đó, hay còn gọi $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần đúng.

Hệ quả 1. Nếu $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $\psi(x, y)$ thì:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \psi(A) - \psi(B)$$

Hệ quả 2. Nếu $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $\psi(x, y)$ trên R^2 thì:

$$\psi(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C$$

Hoặc:
$$\psi(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C$$

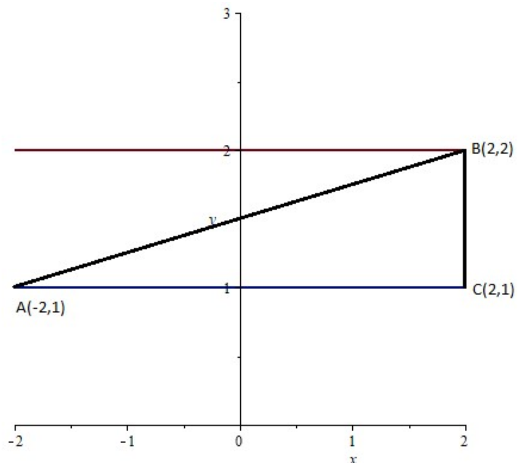
Giải bài toán tính tích phân đường không phụ thuộc đường đi

+) Kiểm tra điều kiện $P_y^{'} = Q_x^{'}$ (*)

+) Nếu điều kiện (*) được thỏa mãn và đường lấy tích phân là đường cong kín thì $I = 0$.

+) Nếu điều kiện (*) được thỏa mãn và đường lấy tích phân là đường cong không kín thì ta chọn đường tích phân sao cho việc lấy tích phân là đơn giản nhất, thông thường ta chọn đường thẳng nối hai điểm hoặc đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục tọa độ.

Bài tập. Tính tích phân $\int_A^B ydx + xdy$ từ điểm A đến điểm B (hình vẽ).



Ta có: $$\begin{cases} P(x,y) = y \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ Q(x,y) = x \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

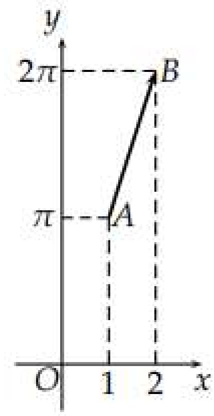
Vì vậy tích phân không phụ thuộc đường đi. Sử dụng công thức:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)).y'(x) \right] dx$$

Hoặc: $$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_c^d \left[P(x(y), y).x'(y) + Q(x(y), y) \right] dy$$

$$I = \int_{AC} ydx + xdy + \int_{CB} ydx + xdy = \int_{-2}^{2} 2xdx + \int_1^2 2ydy = 6$$

Bài tập. Tính tích phân $\int_A^B \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ từ điểm A đến điểm B (hình vẽ)



Ta có:

$$\begin{cases} P(x,y)=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ Q(x,y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

Vì vậy tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi. Ta chọn đường thẳng AB có phương trình $y=\pi x$ như hình vẽ. Sử dụng công thức:

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_a^b \left[P\left(x,y(x)\right)+Q\left(x,y(x)\right).y'(x)\right]dx$$

$$\to I=\int_A^B \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

$$=\int_1^2 \left[\left(1-\pi^2\cos\pi\right)+\left(\sin\pi+\pi\cos\pi\right)\pi\right]dx=1$$

Bài tập. Tìm m,n sao cho tích phân đường sau:

$$\oint_C \left[(x+a)(y+b)^2+(n-m)by+amy\right]dx+\left[(x+a)^2(y+b)+2(n-1)ax\right]dy=0$$

Với mọi đường cong kín C và với mọi giá trị của a,b.

Các hàm $P,Q,\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$ liên tục trên R^2, điều kiện cần và đủ để tích phân đường $\oint_C Pdx+Qdy=0$ với mọi đường cong kín C là:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

Dẫn đến:

$$ma+(n-m)b=2(n-1)a$$

Với mọi a,b.

$$\Rightarrow \begin{cases} n-m=0 \\ m=2(n-1) \end{cases} \Rightarrow m=n=2$$

Bài tập. Chứng minh rằng các biểu thức:

$$1)\left(x^2-2xy^2+3\right)dx+\left(y^2-2x^2y+3\right)dy$$

$$2)\left[e^{x+y}+\cos(x-y)\right]dx+\left[e^{x+y}-\cos(x-y)+2\right]dy$$

Là vi phân toàn phần của một hàm $\psi(x,y)$ nào đó. Tìm $\psi(x,y)$.

Gợi ý:

1/ Kiểm tra điều kiện $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ dẫn đến $Pdx+Qdy$ là vi phân của một hàm số $\psi(x,y)$ nào đó.

2/ Các hàm $P,Q,\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$ liên tục trên R^2 nên sử dụng một trong hai công thức:

$$\psi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C$$

$$(x_0,y_0)=(0,0)$$

$$\psi(x,y)=\int_{0}^{x}\left(x^2-2x.0+3\right)dx+\int_{0}^{y}Q(x,y)dy+C$$

Hoặc: $$\psi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C$$

Trong đó (x_0,y_0) là điểm bất kỳ, lấy $(0,0)$.

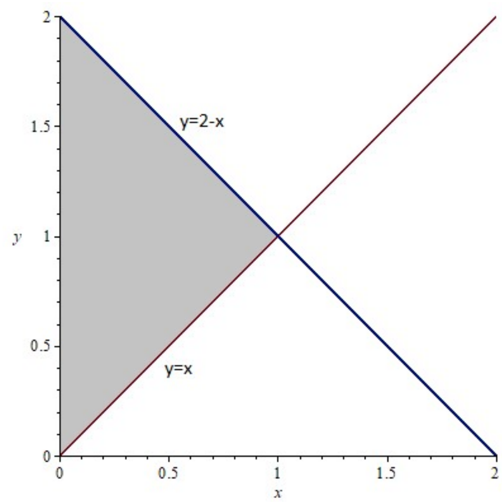
$$1)\left(x^2-2xy^2+3\right)dx+\left(y^2-2x^2y+3\right)dy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-4xy$$

$$\psi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,dy+C$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{x}\left(x^2-2x.0+3\right)$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C \left(x^2+3y\right)dx+2ydy$, trong đó C là biên tam giác tạo nên từ các đoạn thẳng nối từ (0,0) tới (1,1), từ (1,1) tới (0,2), và từ (0,2) tới (0,0) và ngược chiều kim đồng hồ.



$$\begin{cases} P(x,y)=x^2+3y \to \dfrac{\partial P}{\partial y}=3 \\ Q(x,y)=2y \to \dfrac{\partial Q}{\partial x}=0 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3$$

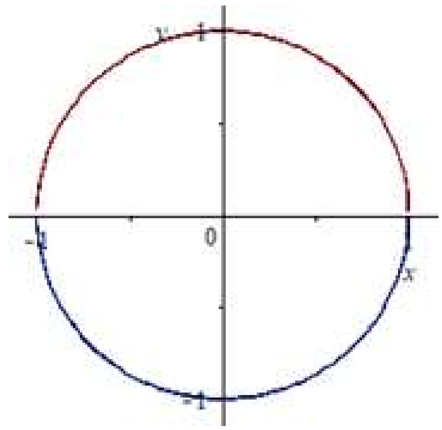
Dẫn đến:

$$I=\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=-3\iint\limits_D dxdy,$$

trong đó D là miền được xác định bởi: $0 \le x \le 1; x \le y \le 2-x$.

$$\to I=-3\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x} dy=-3\int\limits_0^1 (2-2x)dx=-6\int\limits_0^1 (1-x)dx=-6.\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-3$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C \left(2x^3 - y^3\right)dx + \left(x^3 + y^3\right)dy$, trong đó C là đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.



$$\begin{cases} P(x,y) = 3x^3 - y^3 \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 \\ Q(x,y) = x^3 + y^3 \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3\left(x^2 + y^2\right)$$

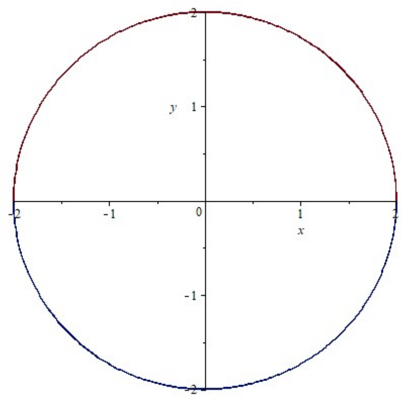
Dẫn đến:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 3\left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

Đặt $x = \cos\varphi; y = \sin\varphi \to J = r$:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} 3\left(x^2 + y^2\right)dxdy = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = 3.2\pi.\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{2}$$

Bài tập. Tính tích phân $I=\int\limits_C (xy+4x+5y)dx+\left(y^2-2x+\frac{x^2}{2}\right)dy$, trong đó C là đường $x^2+y^2=4$ và theo chiều ngược kim đồng hồ.

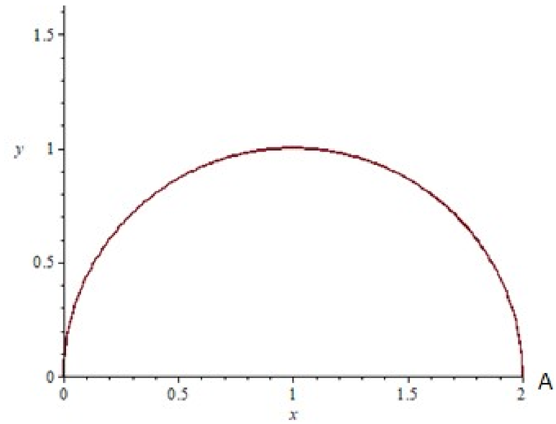


$$\begin{cases} P(x,y)=xy+4x+5y \to \dfrac{\partial P}{\partial y}=x+5 \\ Q(x,y)=y^2-2x+\dfrac{x^2}{2} \to \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2+x \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-7$$

Đặt $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi \to J=r$:

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(-7)dxdy=-7\int\limits_0^2 rdr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=-7.2\pi.\frac{r^2}{2}\Big|_0^2=-28\pi$$

Bài tập. Tính tích phân $\int_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, trong đó C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ cùng chiều kim đồng hồ.



$$I = \int_{C \cup \overline{AO}} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy - \int_{\overline{AO}} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_{C \cup \overline{AO}} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$
$$= -\iint_D \big(2(x+y) + 2(x-y)\big) dxdy = -4\iint_D xdxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực với $x = rcos\varphi$:

$$I_1 = -4\iint_D xdxdy = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\cos\varphi . rdr = -2\pi$$

Để tính I_2, sử dụng công thức ($y = 0$):

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big).y'(x) \right] dx$$

$$\rightarrow I = I_1 - I_2 = -2\pi + \frac{8}{3}$$

Giải bài toán tính tích phân đường không phụ thuộc đường đi

+) Kiểm tra điều kiện $P_y^{'} = Q_x^{'}$ (*)

+) Nếu điều kiện (*) được thỏa mãn và đường lấy tích phân là đường cong kín thì $I = 0$.

+) Nếu điều kiện (*) được thỏa mãn và đường lấy tích phân là đường cong không kín thì ta chọn đường tích phân sao cho việc lấy tích phân là đơn giản nhất, thông thường ta chọn đường thẳng nối hai điểm hoặc đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục tọa độ.