Giá trị riêng và vector riêng

Hà Minh Lam
hmlam@math.ac.vn

2021-2022

Tóm tắt

1. Giá trị riêng và vector riêng
    - Giá trị riêng và vector riêng của ma trận
    - Giá trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Motivation

- Mô hình biến đổi dân số Thành thị - Nông thôn

$\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k \ (k = 0, 1, 2, \dots)$ với $M = \begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix}$

Tìm dân số năm thứ k. *Cần tính* M^k

- Bài toán đếm số thỏ: *tìm số thứ k của dãy Fibonacci*

$\longrightarrow$ *Cần tính* A^k *với* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Tóm tắt

Giá trị riêng của ma trận

Định nghĩa

Xét ma trận vuông A cấp n. Một giá trị λ được gọi là một giá trị riêng *của A nếu tồn tại một vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ sao cho $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Khi đó, ta nói $\mathbf{x}$ là một* vector riêng *của A ứng với giá trị riêng λ.*

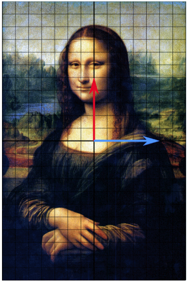
Giá trị riêng của ma trận

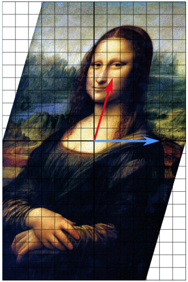
Định nghĩa

Xét ma trận vuông A cấp n. Một giá trị λ được gọi là một giá trị riêng *của A nếu tồn tại một vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ sao cho $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Khi đó, ta nói $\mathbf{x}$ là một* vector riêng *của A ứng với giá trị riêng λ.*

Ví dụ:

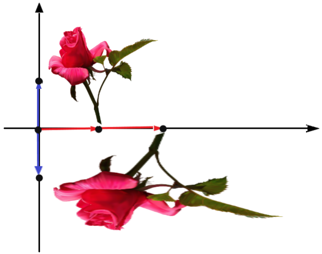
- Cho $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3/10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
  Vector $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$ là một vector riêng ứng với $\lambda_1 = 1$,
  vector $\mathbf{x}_2 = (0, 1)$ không là một vector riêng.





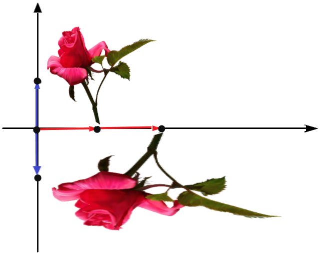
Ví dụ

- Cho $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vector $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$ là một vector riêng ứng với $\lambda_1 = 2$, vector $\mathbf{x}_2 = (0, 1)$ là một vector riêng ứng với $\lambda_2 = -1$.



Ví dụ

- Cho $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vector $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$ là một vector riêng ứng với $\lambda_1 = 2$, vector $\mathbf{x}_2 = (0, 1)$ là một vector riêng ứng với $\lambda_2 = -1$.



- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (-3, -1, 1)$. Ta có $A_3\mathbf{x} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x}$, vì vậy $\mathbf{x}$ là một vector riêng của A_3 ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$.

Không gian con riêng của ma trận

Nhận xét: Nếu $A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1$ và $A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_2$ thì:

$$\begin{cases} A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \\ A(c\mathbf{x}_1) = \lambda(c\mathbf{x}_1). \end{cases}$$

Do đó, tập hợp tất cả gồm các vector riêng ứng với cùng một giá trị riêng λ và vector $\mathbf{0}$ đóng với phép cộng và phép nhân với vô hướng.

Không gian con riêng của ma trận

Nhận xét: Nếu $A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1$ và $A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_2$ thì:

$$\begin{cases} A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \\ A(c\mathbf{x}_1) = \lambda(c\mathbf{x}_1). \end{cases}$$

Do đó, tập hợp tất cả gồm các vector riêng ứng với cùng một giá trị riêng λ và vector $\mathbf{0}$ đóng với phép cộng và phép nhân với vô hướng.

Định nghĩa

Cho $A \in M_{n,n}$ và λ là một giá trị riêng của A. Khi đó, tập hợp tất cả các vector riêng ứng với λ cùng với vector $\mathbf{0}$ tạo thành một không gian con của $\mathbb{R}^n$, gọi là không gian con riêng *tương ứng với giá trị riêng λ.*

Không gian con riêng của ma trận

Nhận xét: Nếu $A\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_1$ và $A\mathbf{x}_2 = \lambda \mathbf{x}_2$ thì:

$$\begin{cases} A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \\ A(c\mathbf{x}_1) = \lambda(c\mathbf{x}_1). \end{cases}$$

Do đó, tập hợp tất cả gồm các vector riêng ứng với cùng một giá trị riêng λ và vector $\mathbf{0}$ đóng với phép cộng và phép nhân với vô hướng.

Định nghĩa

Cho $A \in M_{n,n}$ và λ là một giá trị riêng của A. Khi đó, tập hợp tất cả các vector riêng ứng với λ cùng với vector $\mathbf{0}$ tạo thành một không gian con của $\mathbb{R}^n$, gọi là không gian con riêng *tương ứng với giá trị riêng λ.*

Nhận xét: Một vector không thể thuộc hai không gian con riêng ứng với hai giá trị riêng khác nhau. Nói cách khác, hai không gian con riêng ứng với hai giá trị riêng khác nhau chỉ có chung duy nhất vector $\mathbf{0}$.

Tìm giá trị riêng và không gian con riêng của một ma trận

Ta viết lại phương trình $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \lambda I_n\mathbf{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Hệ thuần nhất này có nghiệm khác $\mathbf{0}$ khi và chỉ khi $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Tìm giá trị riêng và không gian con riêng của một ma trận

Ta viết lại phương trình $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \lambda I_n\mathbf{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Hệ thuần nhất này có nghiệm khác **0** khi và chỉ khi $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Định nghĩa

Đa thức (biến λ) $\det(\lambda I_n - A)$ *được gọi là* đa thức đặc trưng *của ma trận A.*

Tìm giá trị riêng và không gian con riêng của một ma trận

Ta viết lại phương trình $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \lambda I_n\mathbf{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Hệ thuần nhất này có nghiệm khác $\mathbf{0}$ khi và chỉ khi $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Định nghĩa

Đa thức (biến λ) $\det(\lambda I_n - A)$ được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A.

Định lý

1. *Một số λ là một giá trị riêng của ma trận vuông A khi và chỉ khi nó là nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận đó.*
2. *Các vector riêng tương ứng với λ là các nghiệm* khác không *của hệ phương trình tuyến tính $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Tìm giá trị riêng và không gian con riêng của một ma trận

Ta viết lại phương trình $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \lambda I_n\mathbf{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Hệ thuần nhất này có nghiệm khác $\mathbf{0}$ khi và chỉ khi $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Định nghĩa

Đa thức (biến λ) $\det(\lambda I_n - A)$ được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A.

Định lý

1. *Một số λ là một giá trị riêng của ma trận vuông A khi và chỉ khi nó là nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận đó.*
2. *Các vector riêng tương ứng với λ là các nghiệm* khác không *của hệ phương trình tuyến tính $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Nhận xét: Nếu λ là một giá trị riêng của A thì không gian con riêng ứng với λ là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Tìm giá trị riêng và không gian con riêng của một ma trận

Ví dụ:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$
   Ta có $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, do đó A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.

Tìm giá trị riêng và không gian con riêng của một ma trận

Ví dụ:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$
   Ta có $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, do đó A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.
   Giải hệ $(-I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta thu được không gian con riêng ứng với $\lambda_1 = -1$ là $span\{(4, 1)\}$.

Tìm giá trị riêng và không gian con riêng của một ma trận

Ví dụ:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

   Ta có $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, do đó A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.

   Giải hệ $(-I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta thu được không gian con riêng ứng với $\lambda_1 = -1$ là $span\,\{(4, 1)\}$.

   Giải hệ $(-2I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta thu được không gian con riêng ứng với $\lambda_2 = -2$ là $span\,\{(3, 1)\}$.

Tìm giá trị riêng và không gian con riêng của một ma trận

Ví dụ:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$
   Ta có $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda+1)(\lambda+2)$, do đó A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.
   Giải hệ $(-I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta thu được không gian con riêng ứng với $\lambda_1 = -1$ là $span\,\{(4,1)\}$.
   Giải hệ $(-2I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta thu được không gian con riêng ứng với $\lambda_2 = -2$ là $span\,\{(3,1)\}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tìm giá trị riêng và không gian con riêng của một ma trận

Ví dụ:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

   Ta có $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, do đó A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.

   Giải hệ $(-I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta thu được không gian con riêng ứng với $\lambda_1 = -1$ là $span\{(4, 1)\}$.

   Giải hệ $(-2I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta thu được không gian con riêng ứng với $\lambda_2 = -2$ là $span\{(3, 1)\}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   Ta có $\det(\lambda I_3 - B) = (\lambda - 2)^3$, B có một giá trị riêng $\lambda = 2$.

Tìm giá trị riêng và không gian con riêng của một ma trận

Ví dụ:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

   Ta có $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, do đó A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.

   Giải hệ $(-I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta thu được không gian con riêng ứng với $\lambda_1 = -1$ là $span\{(4, 1)\}$.

   Giải hệ $(-2I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta thu được không gian con riêng ứng với $\lambda_2 = -2$ là $span\{(3, 1)\}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   Ta có $\det(\lambda I_3 - B) = (\lambda - 2)^3$, B có một giá trị riêng $\lambda = 2$.

   Hệ $(2I_3 - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ có tập nghiệm $\{(s, 0, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = span\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$.

Quiz:

1) Tìm các giá trị riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quiz:

1) Tìm các giá trị riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Cho A là một ma trận vuông cấp 2 có hai giá trị riêng phân biệt. Chứng minh rằng tổng của hai giá trị riêng bằng $Tr(A)$ và tích của hai giá trị riêng đó bằng $|A|$.

Tóm tắt

Giá trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Cho V là một không gian vector và $T : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính.

Định nghĩa

Giá trị λ là một giá trị riêng *của ánh xạ tuyến tính T nếu tồn tại vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ trong V sao cho $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Khi đó, ta nói $\mathbf{v}$ là một vector riêng của T ứng với giá trị riêng λ.*

Giá trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Cho V là một không gian vector và $T : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính.

Định nghĩa

Giá trị λ là một giá trị riêng *của ánh xạ tuyến tính T nếu tồn tại vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ trong V sao cho $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Khi đó, ta nói $\mathbf{v}$ là một vector riêng của T ứng với giá trị riêng λ.*

Định nghĩa

Nếu λ là một giá trị riêng của T thì tập hợp tất cả các vector riêng ứng với λ cùng với vector $\mathbf{0}$ tạo thành một không gian con của V, gọi là không gian con riêng *ứng với giá trị riêng λ.*

Giá trị riêng của các ma trận đồng dạng

Giả sử V là hữu hạn chiều và B là một cơ sở. Gọi A là ma trận của T trong cơ sở B.

Giả sử λ là một giá trị riêng của T và $\mathbf{v}$ là một vector riêng ứng với λ. Ta có:

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \implies [T(\mathbf{v})]_B = [\lambda\mathbf{v}]_B = \lambda\,[\mathbf{v}]_B$$

Giá trị riêng của các ma trận đồng dạng

Giả sử V là hữu hạn chiều và B là một cơ sở. Gọi A là ma trận của T trong cơ sở B.

Giả sử λ là một giá trị riêng của T và $\mathbf{v}$ là một vector riêng ứng với λ. Ta có:

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \implies [T(\mathbf{v})]_B = [\lambda\mathbf{v}]_B = \lambda\,[\mathbf{v}]_B$$
$$[T(\mathbf{v})]_B = A\,[\mathbf{v}]_B$$

Suy ra $A\,[\mathbf{v}]_B = \lambda\,[\mathbf{v}]_B$, hay λ là một giá trị riêng của A.

Giá trị riêng của các ma trận đồng dạng

Giả sử V là hữu hạn chiều và B là một cơ sở. Gọi A là ma trận của T trong cơ sở B.

Giả sử λ là một giá trị riêng của T và $\mathbf{v}$ là một vector riêng ứng với λ. Ta có:

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \implies [T(\mathbf{v})]_B = [\lambda\mathbf{v}]_B = \lambda\,[\mathbf{v}]_B$$
$$[T(\mathbf{v})]_B = A\,[\mathbf{v}]_B$$

Suy ra $A\,[\mathbf{v}]_B = \lambda\,[\mathbf{v}]_B$, hay λ là một giá trị riêng của A.

Ngược lại, giả sử λ là một giá trị riêng của A và $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ là một vector riêng của A ứng với λ. Khi đó, vector $\mathbf{v} \in V$ sao cho $[\mathbf{v}]_B = \mathbf{x}$ thỏa mãn $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Do đó λ là một giá trị riêng của T.

Giá trị riêng của các ma trận đồng dạng

Định lý

Cho V là một không gian vector n chiều, $T : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính và $A \in M_{n,n}$ là ma trận của T trong một cơ sở nào đó. Khi đó mọi giá trị riêng của T đều là giá trị riêng của A và ngược lại.

Giá trị riêng của các ma trận đồng dạng

Định lý

Cho V là một không gian vector n chiều, $T : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính và $A \in M_{n,n}$ là ma trận của T trong một cơ sở nào đó. Khi đó mọi giá trị riêng của T đều là giá trị riêng của A và ngược lại.

Hệ quả

Hai ma trận vuông đồng dạng thì có cùng các giá trị riêng.

Chứng minh: Giả sử A và B là hai ma trận đồng dạng. Khi đó, tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho: $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\lambda I_n - B| &= |\lambda I_n - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I_n - A)P| \\ &= |\lambda I_n - A| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Đa thức đặc trưng của A và B bằng nhau. Vậy A và B có cùng các giá trị riêng.

Giá trị riêng của các ma trận đồng dạng

Định lý

Cho V là một không gian vector n chiều, $T : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính và $A \in M_{n,n}$ là ma trận của T trong một cơ sở nào đó. Khi đó mọi giá trị riêng của T đều là giá trị riêng của A và ngược lại.

Hệ quả

Hai ma trận vuông đồng dạng thì có cùng các giá trị riêng.

Chứng minh: Giả sử A và B là hai ma trận đồng dạng. Khi đó, tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho: $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\lambda I_n - B| &= |\lambda I_n - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I_n - A)P| \\ &= |\lambda I_n - A| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Đa thức đặc trưng của A và B bằng nhau. Vậy A và B có cùng các giá trị riêng.

Nhận xét: Giả sử $B = P^{-1}AP$ và λ là một giá trị riêng của A (và do đó của B). Khi đó:

$$\left(A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow B(P^{-1}\mathbf{x}) = \lambda(P^{-1}\mathbf{x})\right)$$