Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2017
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(*Thời gian làm bài: 120 phút*)

Bài 1. (*2 điểm*) Xét hệ phương trình tuyến tính với tham số k:

$$\begin{cases} x - y - \ \ z = 1 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ (m+1)x - y - 3z = 2 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $m = 2$.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo m.

Bài 2. (*2 điểm*) (a) Cho véc-tơ $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ và I_3 là ma trận đơn vị cấp 3.

Tính $(I_3 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^2$ và xác định nghịch đảo của ma trận $I_3 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$.

(b) Tính định thức $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Bài 3. (*2 điểm*) Cho $\mathcal{P}_2$ là không gian các đa thức với bậc nhỏ hơn hay bằng 2. Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ cho bởi

$$T(f) = xf'(x), \text{ với mọi } f \in \mathcal{P}_2.$$

(a) Tìm ma trận của ánh xạ T đối với cơ sở $\mathcal{B} := \{1, x, x^2\}$ của $\mathcal{P}_2$.

(b) Tìm một cơ sở của không gian ảnh $\mathrm{Im}(T)$ của T. Tính số chiều của $\mathrm{Im}(T)$.

Bài 4. (*2 điểm*) Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hai vector $v_1 = (1,1,1,1)$ và $v_2 = (1,2,1,2)$. Ta xét không gian $\mathbb{R}^4$ cùng với tích vô hướng thông thường.

(a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con V.

(b) Tìm hình chiếu vuông góc của vector $v = (1,2,3,4)$ lên không gian con V.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng và các không gian riêng tương ứng của A.

(b) Tìm một ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 2

Bài 1. (a) Khi $m = 2$, hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ 3x - y - 3z = 2 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do vậy hệ vô nghiệm.
(b) Biện luận số nghiệm của phương trình trên theo tham số m:
Định thức ma trận hệ số là $m - 2$. Với $m \neq 2$ thì định thức của ma trận hệ số khác không. Do vậy hệ có nghiệm duy nhất.
Khi $m = 2$ thì hệ vô nghiệm (câu (a))

Bài 2. (a) $(I_3 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^2 = I_3$ và do đó $(I_3 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1} = I_3 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5.$

Bài 3. (a) Ma trận của T đối với cơ sở đã cho là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathrm{Im}(T) = \{bx + cx^2 | b, c \in \mathbb{R}.\}$
Một cơ sở của $\mathrm{Im}(T)$ là $\{x, x^2\}$.
$\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

Bài 4. Vì hai vector v_1 và v_2 là độc lập tuyến tính nên chúng lập thành một cơ sở của không gian V.

Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở $\{v_1, v_2\}$, ta nhận được:

$$w_1 := v_1 = (1,1,1,1) \text{ và } w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (-1/2, 1/2, -1/2, 1/2).$$

Chuẩn hóa hai vector w_1 và w_2, ta nhận được:

$$\{u_1, u_2\} = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}.$$

Khi đó, ta có:

$$\mathrm{proj}_V v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 = (9/2, 11/2, 9/2, 11/2).$$

Bài 5. (a)

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4) \tag{1}$$

Vậy A có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = -2$ (bội 2),$\lambda_2 = 4$ (bội 1).
Với $\lambda_1 = -2$: Xét hệ

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Giải hệ (**??**) ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ có dạng $\{s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\} = span\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Với $\lambda_2 = 4$: Xét hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Giải hệ (**??**) ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ có dạng $span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

(b) Chọn $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt:

$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$w_2 = v_2 - \frac{v_2.w_1}{w_1.w_1} w_1 = v_2 - \frac{1}{2} w_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$p_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, p_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

Lấy $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Chuẩn hóa: $p_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

Đặt $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$. Khi đó $P^T AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.