Đề thi Kết thúc môn học, Hè 2017
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ \quad\;\; - 4x_2 - x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

(a) Viết ma trận bổ sung (hay còn gọi là ma trận tăng hoặc ma trận mở rộng) $[A|b]$ tương ứng với hệ phương trình trên và đưa nó về dạng bậc thang theo dòng rút gọn.

(b) Giải hệ phương trình trên.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho $A = \begin{bmatrix} a & 1/2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Tính $A^T A$.

b. Tìm tất cả các giá trị của a để $A^2 = I_3$.

Bài 3. (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(u) = \frac{< u, v >}{< v, v >} v,$$

trong đó $v = (1, 1, 1)$.

(a) Tìm ma trận của T trong các cơ sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker(T)$.

Bài 4. (*2 điểm*) Cho V là không gian nghiệm của phương trình

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

(a) Tìm một cơ sở của V.

(b) Hãy dùng quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt để biến cơ sở đã tìm được ở câu (a) thành một cơ sở trực chuẩn của V.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & a \end{pmatrix},$$

trong đó a là một số thực.

(a) Chứng minh rằng với mọi số thực a ta luôn có $\lambda = -2$ là một giá trị riêng của A.

(b) Khi $a = -6$, hãy tìm một ma trận khả nghịch P (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu và các thiết bị điện tử! Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 1

Bài 1. (a) Ma trận bổ sung

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 4 & -2 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & | & -4 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/8 & 0 & | & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 & | & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x_1 &= -\frac{3}{8}t - \frac{1}{8}, \\ x_2 &= -\frac{1}{4}t + \frac{5}{4}, \\ x_3 &= t, \\ x_4 &= -1. \end{cases}$$

Bài 2. (a) $A^TA = \begin{bmatrix} a^2+4 & \frac{5}{2}a & 0 \\ \frac{5}{2}a & a^2+1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A^2 = \begin{bmatrix} a^2+1 & a & 0 \\ 4a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Nên $A^2 = I_3 \Leftrightarrow a = 0$.

Bài 3. (a) Cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^3$ là :$\{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$. Ta có:

$$T(u_1) = T(u_2) = T(u_3) = (1/3, 1/3, 1/3.$$

Vậy ma trận của T trong các cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(b) Biến đổi tương đương theo hàng ta có:

$$(1) \quad A \sim \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy không gian hạch của T là:

$$(2) \quad \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \{(-p-q, p, q) | p, q \in \mathbb{R}\} = \\ = \{p(-1,1,0) + q(-1,0,1) | p, q \in \mathbb{R}\}.$$

Vậy một cơ sở của $\ker(T)$ là $B = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$.

Bài 4. (a)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vậy một cơ sở của không gian vector V là

$$S = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 1)\}.$$

(b) Áp dụng quá trình Gram-Schmidt tới tập S ta có

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= (-1, 1, 0, 0) \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 \\
&= (1, 0, 1, 0) - \frac{-1}{2}(-1, 1, 0, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0) \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 \\
&= (1, 0, 0, 1) - \frac{-1}{2}(-1, 1, 0, 0) - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0) \\
&= (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 1)
\end{aligned}$$

Cơ sở trực chuẩn là

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0) \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0) \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 1)
\end{aligned}$$

Bài 5. (a) Đa thức đặc trưng của ma trận A là

$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 \\ 3 & 6 & \lambda - a \end{pmatrix} = \tag{3}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} -2 & \lambda - 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-12 - 3\lambda + 6) + 2(6\lambda + 6 + 6) + (\lambda - a)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (\lambda + 2)(18 + (\lambda - a)(\lambda - 3)).$$

Từ (3) ta thấy với mọi số thực a ta luôn có $\lambda = -2$ là một giá trị riêng của A.

(b) Khi $a = -6$, từ (3) ta thấy

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 2)(18 + (\lambda + 6)(\lambda - 3)) = (\lambda + 2)\lambda(\lambda + 3).$$

Do đó ma trận A có 3 giá trị riêng là $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3$.
$\lambda_1 = -2$: Xét hệ

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Giải hệ (4) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -3$ có dạng $(x_1, x_2, x_3) = t(-2, 1, 0), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$\lambda_2 = 0$: Xét hệ

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Giải hệ (5) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = -1$ có dạng $(x_1, x_2, x_3) = t(0, -1, 1), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$\lambda_3 = -3$: Xét hệ

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Giải hệ (4) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = -3$ có dạng $(x_1, x_2, x_3) = t(-1, 0, 1), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Cho $t = 1$, ta được các vector riêng tương ứng lần lượt với $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ như sau:

$$p_1 = (-2, 1, 0), p_2 = (0, -1, 1), p_3 = (-1, 0, 1) \tag{7}$$

Vì chúng tương ứng với các giá trị riêng khác nhau nên độc lập tuyến tính.

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$