Đề thi Kết thúc môn học, Học kỳ 2 năm học 2019-2020
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{cases} x + my - z = 1 \\ 2x + 2y - 4z = 4 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với m = 0.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ m & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm điều kiện của m để A khả nghịch. Tìm ma trận nghịch đảo của A khi $m = 0$.

(b) Tìm m để ma trận A có hạng bé hơn 3.

Bài 3 (*2 điểm*) Cho ánh xạ $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (y + 2z, 3y + 8z, 4z).$$

(a) Chứng minh T là ánh xạ tuyến tính.

(b) Tìm ma trận chính tắc (chuẩn tắc) của T.

(c) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker(T)$.

(d) Véc-tơ $(3, 1, 2)$ có thuộc không gian ảnh $range(T) = \mathrm{im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$ hay không? Vì sao?

Bài 4. (*2 điểm*) Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, sinh bởi ba véc-tơ: $(1, 0, 1), (1, 1, 3), (3, 1, 5)$.

(a) (*1 điểm*) Tìm một cơ sở và số chiều của V.

(b) (*1 điểm*) Tìm một cơ sở trực chuẩn của V.

Bài 5. (*2 điểm*)

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 1

Bài 1. (a) Khi $m = 0$, hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x \quad\quad - z = 1 \\ 2x + 2y - 4z = 4 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do vậy nghiệm của hệ là $x = 1 + t,\ y = 1 + t$ và $z = t$ với $t \in \mathbb{R}$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m:
Định thức của ma trận hệ số là $6m$. Với $m \neq 0$ thì định thức của ma trận hệ số khác không. Do vậy hệ có nghiệm duy nhất.
Khi $m = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (câu (a))

Bài 2. Dùng phép biến đổi sơ cấp về hàng đưa A về dạng sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-4 \end{pmatrix}.$$

(a) Hạng A bằng 3 khi và chỉ khi $m = 4$.
(b) Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $m \neq 4$.

Bài 3. (a) Chứng minh theo định nghĩa ánh xạ tuyến tính
(b) Ma trận cần tìm là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) Qua phép biến đổi sơ cấp hàng ta thu được

$$A \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nên

$$\ker T = \{(t, 0, 0) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Vậy $\{(1, 0, 0)\}$ là một cơ sở của $\ker T$ và số chiều của $\ker T$ là 1.
(d) $(3, 1, 2)$ không thuộc $\operatorname{im}(T)$ vì phương trình $AX = b$ vô nghiệm với $b = (3 \quad 1 \quad 2)^t$.

Bài 4. a) Xét $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Do đó một cơ sở của V là $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$. Số chiều của V là 2.
b) Áp dụng trực chuẩn Gram-Schmidt vào hệ gồm hai véc-tơ $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, ta được hệ trực chuẩn

$$\Big\{ \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big), \Big(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) \Big\}.$$

Bài 5.