ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

Tích phân bội ba của hàm số $f(x, y, z)$ trong miền V:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

Tính chất tuyến tính:

$$\iiint\limits_V \left[f(x,y,z)+g(x,y,z)\right]dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\iiint\limits_V kf(x,y,z)\,dxdydz = k\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

Tính chất cộng tính: nếu $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \varnothing$ thì:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG HỆ TỌA ĐỘ DESCARTES

Giống như tính tích phân kép, ta cần phải đưa tích phân ba lớp về tích phân lặp, thông qua trung gian là tích phân hai lớp:

Tích phân ba lớp → Tích phân hai lớp → Tích phân lặp

Việc chuyển đổi phụ thuộc chặt chẽ vào miền V, nếu miền V được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y)$ trong đó $z_1(x, y)$ và $z_2(x, y)$ là các hàm liên tục trên miền D (hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy) thì ta có:

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \qquad (*)$$

Các bước tiến hành:

- Xác định hình chiếu D của V lên mặt phẳng Oxy
- Xác định biên dưới $z_1(x, y)$ và biên trên $z_2(x, y)$
- Sử dụng công thức (*) để hoàn tất việc chuyển đổi.

D, $z_1(x, y)$ và $z_2(x, y)$ có thể được xác định bằng hình học hoặc dựa trên biểu thức giải tích của miền V. Sử dụng hình học có ưu điểm là trực quan, dễ hiểu, trong khi việc dựa trên biểu thức giải tích của V có thể áp dụng cho nhiều bài nhưng lại khó hiểu và phức tạp.

Cũng giống như khi tính tích phân kép, việc nhận xét được tính đối xứng của miền V và tính chẵn lẻ của hàm lấy tích phân $f\left(x,y,z\right)$ đôi khi giúp giảm được khối lượng tính toán đáng kể.

Định lý 1. Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng Oxy $(z=0)$ và $f(x,y,z)$ là hàm số lẻ đối với z thì $\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz=0$.

Định lý 2. Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng Oxy $(z=0)$ và $f(x,y,z)$ là hàm số chẵn đối với z thì $\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz=2\iiint\limits_{V_1} f\left(x,y,z\right)dxdydz$, trong đó V_1 là phần phía trên mặt phẳng $z=0$ của V.

Bài tập. Tính

$$I=\iiint\limits_V z\,dxdydz,\ D=\left\{(x,y,z):0\le x\le\frac{1}{4},x\le y\le 2x,0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

$$I=\iiint\limits_V z\,dxdydz=\int_0^{1/4}dx\int_x^{2x}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz=\int_0^{1/4}dx\int_x^{2x}\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^{1/4}\left(x-\frac{10}{3}x^3\right)dx=\frac{43}{3072}$$

Bài tập. Tính $I=\iiint\limits_V z^2dxdydz$, V được giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2=1$ và $x^2+y^2+z^2=2z$

Mặt $x^2+y^2+z^2=2z\Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Giao của 2 mặt cầu thỏa mãn phương trình $2z=1\leftrightarrow z=\frac{1}{2}$. Như vậy mặt phẳng $z=\frac{1}{2}$ chia miền V thành 2 phần V_1 và V_2 tương ứng với $z\ge\frac{1}{2}$ và $z<\frac{1}{2}$ (vẽ hình).

$$I=\iiint\limits_V z^2dxdydz=\iiint\limits_{V_1}z^2dxdydz+\iiint\limits_{V_2}z^2dxdydz=I_1+I_2$$

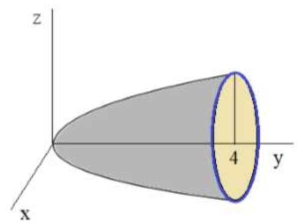
$$I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}z^2dz\iint\limits_{S(z)}dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\pi r^2\right)z^2dz=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\pi\left(x^2+y^2\right)\right)z^2dz=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\pi\left(1-z^2\right)\right)z^2dz$$

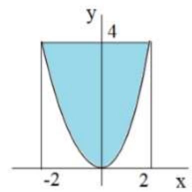
$$\Rightarrow I_1=\pi\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{47\pi}{480}$$

$$I_2=\int_0^{\frac{1}{2}}z^2dz\iint\limits_{S(z)}dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\pi r^2\right)z^2dz=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\pi\left(x^2+y^2\right)\right)z^2dz=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\pi\left(2z-z^2\right)\right)z^2dz$$

$$\Rightarrow I_2=\pi\left(\frac{z^4}{2}-\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{40}$$

Bài tập. Tính $I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$, V giới hạn bởi mặt paraboloid $y=x^2+z^2$ và mặt phẳng $y=4$.

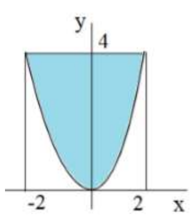


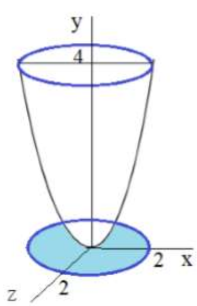


$$V=\left\{(x,y,z),-2\le x\le 2, x^2\le y\le 4, -\sqrt{y-x^2}\le z\le\sqrt{y-x^2}\right\}$$

$$I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz=\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}dy\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,dz$$

Đây là 1 tích phân rất khó để tính.



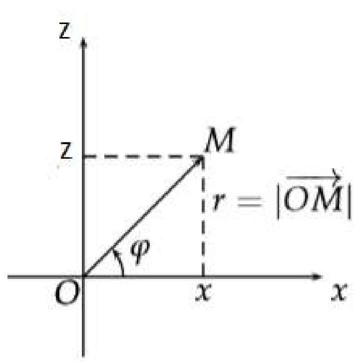


$$V=\begin{Bmatrix}(x,y,z),-2\le x\le 2,-\sqrt{4-x^2}\le z\le\sqrt{4-x^2},\\ x^2+z^2\le y\le 4\end{Bmatrix}$$

$$I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dz\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dz$$

$$=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2-z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}\,dz$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực $x=r\cos\varphi; z=r\sin\varphi$ (hình vẽ). Ta có:



$$4-x^2-z^2\Leftrightarrow x^2+z^2=4\Leftrightarrow r=2$$

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(4-r^2\right)r^2=\frac{128\pi}{15}$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN TỔNG QUÁT

Thường được sử dụng trong trường hợp miền V là giao của ba họ mặt. Giả sử hàm $f(x, y, z)$ liên tục trong miền V, thực hiện phép đổi biến số:

$$\begin{cases} x = x(u, v, \mathrm{w}) \\ y = y(u, v, \mathrm{w}) \\ z = z(u, v, \mathrm{w}) \end{cases} \qquad (*)$$

Thỏa mãn:

+ x, y, z cùng với các đạo hàm riêng của nó là các hàm số liên tục trên miền đóng V_{uvw}.

+ Công thức (*) xác định một song ánh $V_{uvw} \to V$.

+ Định thức Jacobi được xác định bởi:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, \mathrm{w})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{w}} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{w}} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{w}} \end{vmatrix}; \text{ hoặc } J^{-1} = \frac{D(u, v, \mathrm{w})}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial \mathrm{z}} \end{vmatrix}$$

Khi đó:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_{V_{uvw}} f\left[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right]|J|\,dudvdw$$

Bài tập. Tính thể tích miền V giới hạn bởi các mặt $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1; z\geq 0$

$$V=\iiint\limits_{V_{xyz}} \mathrm{dxd}y\mathrm{dz}$$

Thực hiện phép đổi biến:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}=u \\ \frac{y}{2}=v \\ z=\mathrm{w} \end{cases} \to J=\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,\mathrm{w})}\right|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=6$$

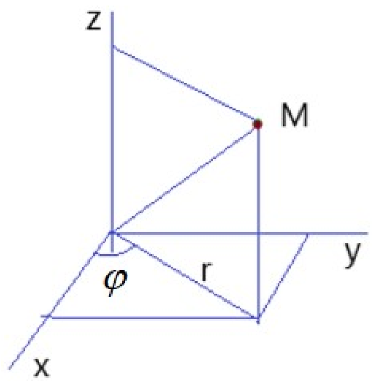
Dẫn đến:

$$V=6\iiint\limits_{V_{uvw}} \mathrm{dud}v\mathrm{dw}=6.\frac{1}{2}.V=6.\frac{1}{2}.\frac{4\pi r^3}{3}=4\pi$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN TRONG HỆ TỌA ĐỘ TRỤ

Khi miền V có biên là các mặt như paraboloit, mặt nón, mặt trụ và hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là hình tròn, hoặc hàm tích phân có chứa biểu thức x^2+y^2 thì công thức đổi biến trong hệ tọa độ trụ hay được sử dụng.

Tọa độ trụ (r,φ,z) có mối liên hệ với tọa độ Descartes như sau:



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Định thức Jacobian của phép biến đổi là:

$$J = \det(\mathbf{J}) = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0$$

Dẫn đến tích phân ba lớp trong tọa độ trụ:

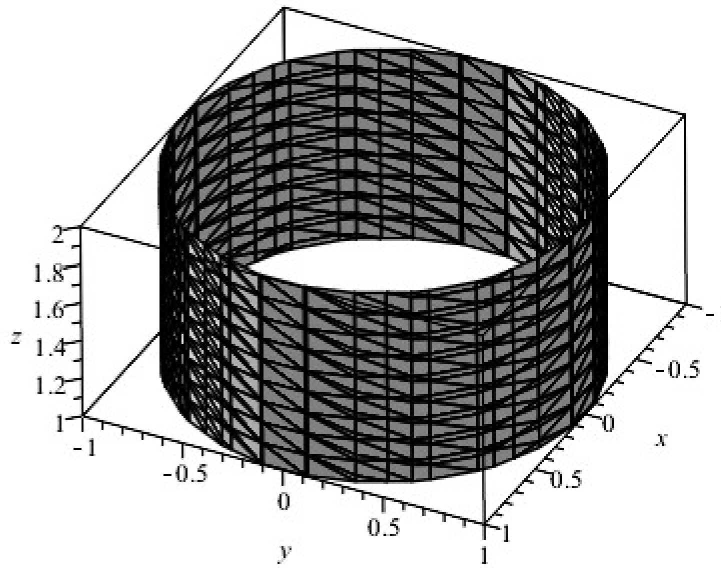
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\varphi z}} f(r,\varphi,z)\,rdrd\varphi dz$$

Bài tập. Tính $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, trong đó $V:\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ 1\le z\le 2 \end{cases}$

Đặt:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \to \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le 1 \\ 1\le z\le 2 \end{cases};$$

$$J = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}\right| = r$$



Dẫn đến:

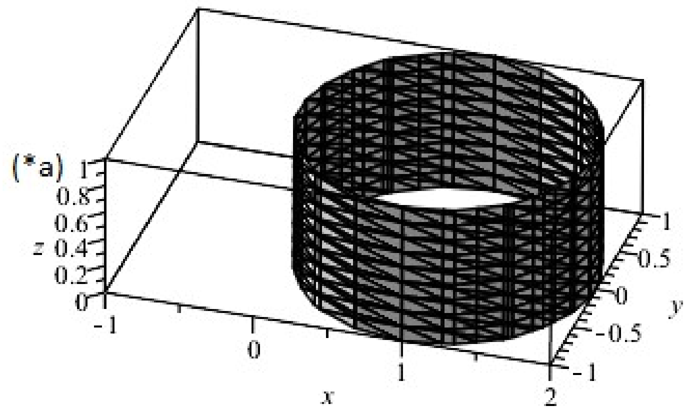
$$I = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz = \iiint\limits_{V_{\varphi rz}} r^2 r\,d\varphi\,dr\,dz,$$

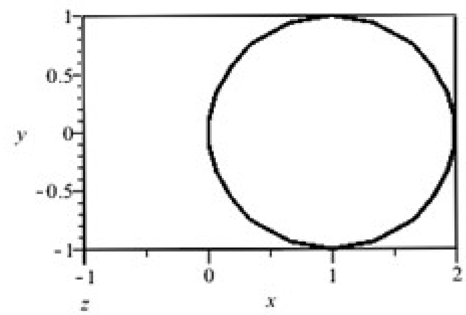
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr \int_1^2 dz = 2\pi.\frac{1}{4}.1 = \frac{\pi}{2}$$

Bài tập. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt trụ $x^2+y^2=2x$ và các mặt phẳng $z=0, z=a$ $(a>0)$.

$$x^2+y^2=2x \leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \to \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le r\le 2\cos\varphi \\ 0\le z\le a \end{cases}$



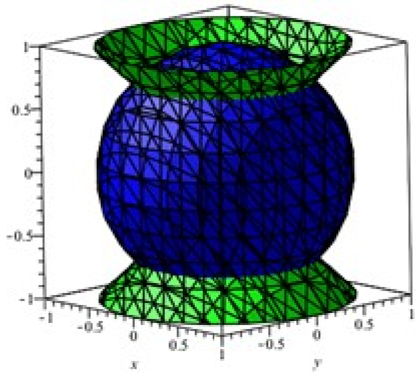


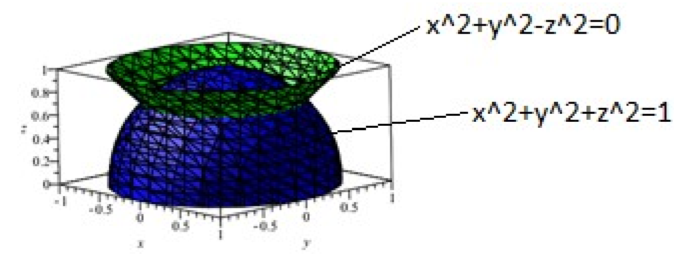
$$J=\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}\right|=r$$

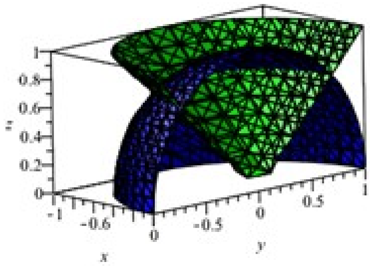
Dẫn đến:

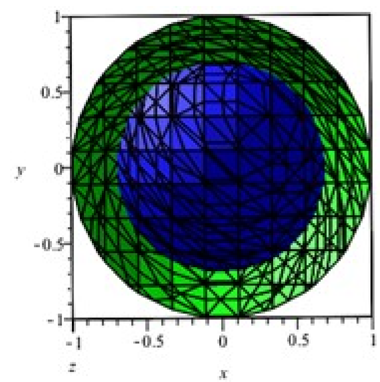
$$I=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}r^2dr\int\limits_0^a zdz=\frac{16a^2}{9}$$

Bài tập. Tính $I = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$ trong đó miền V: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$









Do tính đối xứng nên chỉ xét $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz = 2\iiint\limits_{V_1}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, trong đó V_1 là nửa phía trên mặt phẳng Oxy.

Giao tuyến của hai mặt được xác định tại $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$, như vậy hình chiếu của V_1 lên mặt phẳng Oxy là miền giới hạn bởi đường tròn có phương trình $x^2+y^2=\frac{1}{2}$. Ta có: $V_1:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$;$D:x^2+y^2\le\frac{1}{2}$.

$$I_1=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dz=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

Đổi biến trong hệ tọa độ cực $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi\rightarrow J=r;\begin{cases}0\le\varphi\le2\pi\\0\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ nên:

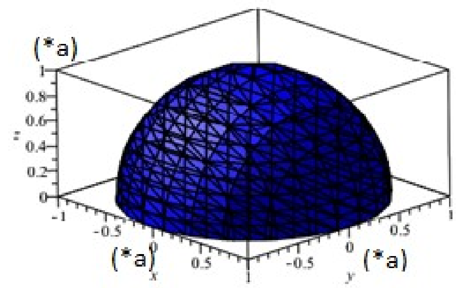
$$I_1=\int\limits_0^{1/\sqrt{2}}r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\int\limits_0^{1/\sqrt{2}}r^3\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr=\frac{\pi\left(8-5\sqrt{2}\right)}{30}$$

$$\rightarrow I=\frac{\pi\left(8-5\sqrt{2}\right)}{15}$$

Bài tập. Tính $\iiint\limits_V z\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}dxdydz$, trong đó V là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2\le a^2,\ z\ge 0\ (a>0)$.

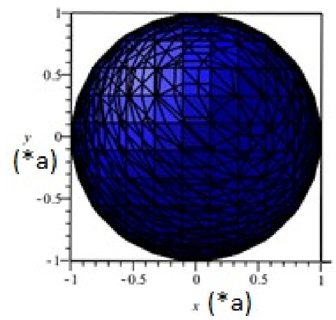
Đặt:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le a \\ 0\le z\le\sqrt{a^2-r^2} \end{cases}$$



$$x^2+y^2+z^2=a^2 \rightarrow z=\sqrt{a^2-\left(x^2+y^2\right)}=\sqrt{a^2-r^2}$$

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}=r$$

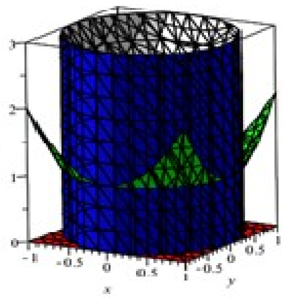


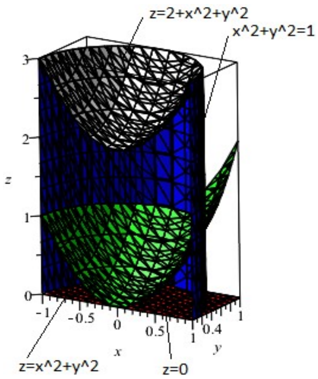
Dẫn đến:

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^2dr\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}}zdz=2\pi\int_0^a r^2\frac{\left(a^2-r^2\right)}{2}dr=\frac{2\pi a^5}{15}$$

Bài tập. Tính $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, trong đó V giới hạn bởi

$z=x^2+y^2; z=2+x^2+y^2; x^2+y^2=1.$





Đặt: $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases} \to J=\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}=r;\ D:\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le 1 \\ r^2\le z\le 2+r^2 \end{cases}$

$z=x^2+y^2 \to z=r^2; z=2+x^2+y^2 \to z=2+r^2; x^2+y^2=1 \to r=1$

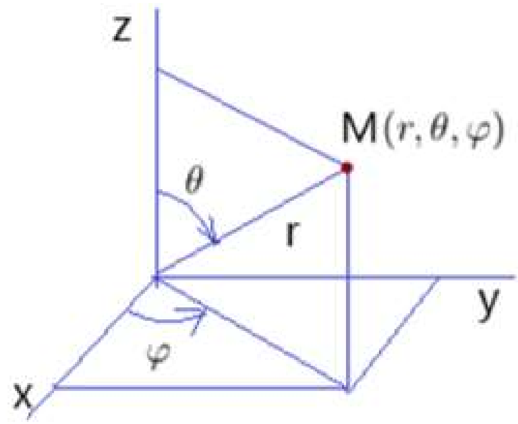
Dẫn đến tích phân:

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 dr\int_{r^2}^{2+r^2} zr\,dz=2\pi\int_0^1 r\left.\frac{z^2}{2}\right|_{r^2}^{2+r^2}dr=3\pi$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN TRONG HỆ TỌA ĐỘ CẦU

Khi miền V có dạng hình cầu, chỏm cầu, múi cầu, … và khi hàm lấy tích phân có chứa biểu thức $x^2+y^2+z^2$ thì phép đổi biến trong hệ tọa độ cầu hay được sử dụng. Thực hiện phép đổi biến số:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



$r \geq 0; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Định thức Jacobian của phép biến đổi:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

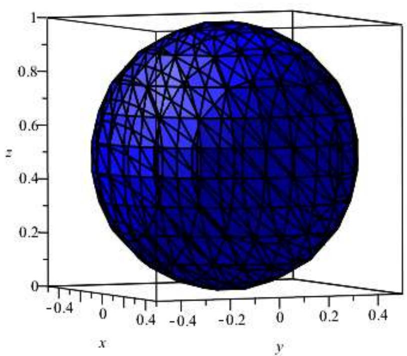
Dẫn đến:

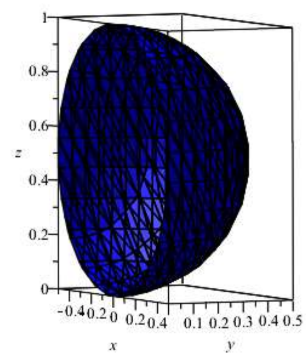
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\theta\varphi}} f[r,\theta,\varphi]\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

Đặc biệt, nếu $\begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\ (\varphi_2-\varphi_1 \leq 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) \leq r \leq r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$ thì:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta\,d\theta \int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r,r\theta,\varphi)\,r^2dr$$

Bài tập. Tính $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$ trong đó V: $x^2+y^2+z^2 \le z$





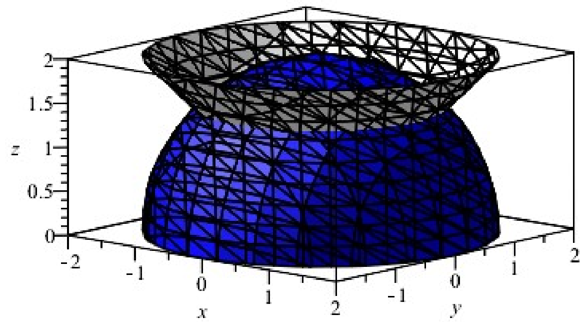
Đặt: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ \quad z = r\cos\theta \end{cases}$. Từ hình vẽ ta thấy rằng: $0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

Do $x^2+y^2+z^2 \le z$ nên: $0 \le r \le \cos\theta$. Dẫn đến tích phân:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r.r^2 dr = 2\pi....$$

Bài tập. Tính $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, trong đó V: $\begin{cases} 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \le z^2 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$



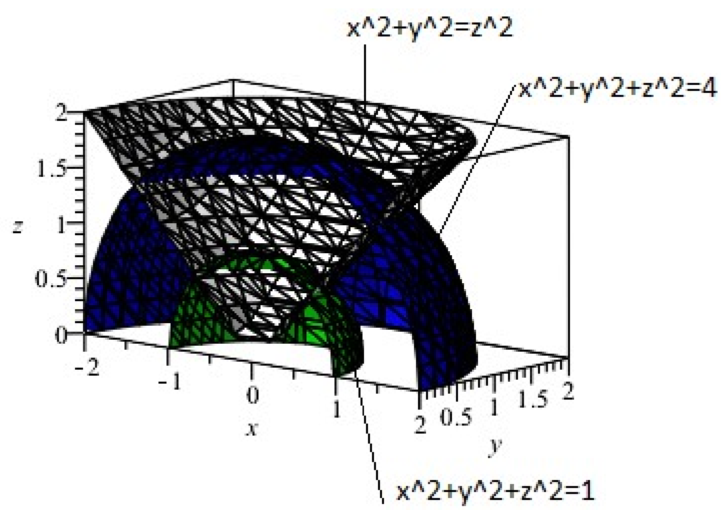
$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \to 1 \le r \le 2$

Mặt nón có phương trình:

$$x^2+y^2=z^2 \to \theta = \frac{\pi}{4}$$

Vậy miền tính tích phân được xác định:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$$



Dẫn đến tích phân:

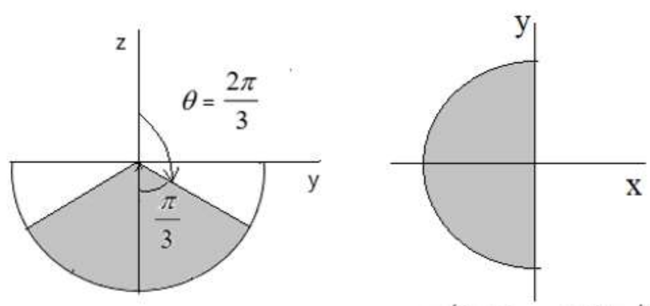
$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_1^2 r^2r^2dr = 2.2\pi.\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/4}\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^2 = \frac{4.31\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Bài tập. Tính $\iiint\limits_V zxdxdydz$, V là khối bên trong hình cầu $x^2+y^2+z^2=4, z\le 0$ bên trong mặt nón có đỉnh tại O và quay xuống dưới với góc ở đỉnh lập với trục z âm là $\pi/3$ và $x \le 0$.

Sử dụng hệ tọa độ cầu (r, θ, φ):

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases};\ J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

Bên trong hình cầu $x^2+y^2+z^2 \le 4 \Rightarrow r \le 2$. Góc ở đỉnh lập với trục z âm một góc $\pi/3 \Rightarrow \dfrac{2\pi}{3} \le \theta \le \pi$. Vì $x \le 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$.



$\pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2.$

Vì vậy miền xác định:

$$V^* = \left\{ (r,\theta,\varphi), 0 \le r \le 2, \frac{2\pi}{3} \le \theta \le \pi, \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Tích phân trở thành:

$$\iiint\limits_V zx\,dxdydz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_{2\pi/3}^{\pi} d\theta \int_0^2 r^4 \cos\varphi \cos\theta \sin^2\theta d\theta$$

$$= \frac{32}{5} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_{2\pi/3}^{\pi} \cos\varphi \cos\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{32}{5}(-2) \int_{2\pi/3}^{\pi} \cos\theta \sin^2\theta d\theta$$

$$= \frac{32}{5}.(-2).\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{5}$$