Mở đầu

Hệ phương trình vi phân cấp một có dạng chuẩn tắc như sau:

$$\begin{aligned} &y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots. \\ &y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Trong đó x là biến độc lập, y_i, $i = 1, n$ là các ẩn hàm cần tìm.

Một số dạng biểu diễn khác của hệ PTVP:

$$\begin{cases} x' = 4x - 4y \\ y' = 3x - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$y' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} y; \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + y_2 \end{cases}$$

Bài toán Cauchy. Tìm nghiệm của hệ PTVP cấp một thỏa mãn các điều kiện ban đầu:

$$y_1(x_0) = y_{10}; y_2(x_0) = y_{20}; ...; y_n(x_0) = y_{n0}$$

Định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy. Nếu các hàm $f_i, i = 1, n$ cùng với các đạo hàm riêng $\frac{\partial f_i}{\partial x}$ liên tục trong $D \subset R^{n+1}$ chứa điểm $(x_0, y_{10}, y_{20}, .., y_{n0})$, thế thì trong lân cận của điểm x_0, bài toán Cauchy sẽ tồn tại duy nhất nghiệm.

Nghiệm riêng, nghiệm tổng quát. Nghiệm tổng quát của hệ PTVP cấp một có dạng:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, .., C_n), i = 1, n$$

Trong đó $C_i, i = 1, n$ là các hằng số, nếu thỏa mãn các điều kiện:

1/ Các $\varphi_i(x, C_1, C_2, .., C_n)$ thỏa mãn PTVP với $\forall C_i, i = 1, n$.

2/ Với mọi $(x_0, y_{10}, y_{20}, .., y_{n0})$ thỏa mãn định lý Cauchy, luôn tìm được một bộ $(C_1, C_2, .., C_n)$ sao cho các hàm $\varphi_i(x, C_1, C_2, .., C_n)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu đã cho.

Điều này có nghĩa nghiệm của bài toán Cauchy là nghiệm riêng của PTVP tương ứng với một bộ giá trị ($C_i, i = 1, n$) cho trước.

PTVP cấp cao và hệ PTVP

Dạng tổng quát của PTVP cấp n đã giải ra đối với đạo hàm:

$$y^{(n)} = f\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Bằng cách đặt biến mới: $y_1 = y; y_2 = y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$

Ta đưa PTVP cấp n về hệ n PTVP cấp 1:

$$\begin{aligned} & y_1 = y \\ & y_2 = y' \\ & \ldots \\ & y_n = f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \end{aligned}$$

Như vậy, từ PTVP cấp cao, có thể chuyển về hệ PTVP cấp một. Ngược lại, để giải hệ PTVP, ta biến đổi nó về PTVP cấp cao để giải.

Giải hệ PTVP bằng phương pháp khử

Nội dung phương pháp khử là đưa hệ phương trình vi phân về phương trình vi phân cấp cao hơn bằng cách đạo hàm một phương trình rồi khử các hàm chưa biết.

Phương pháp này có ưu điểm là giải hệ phương trình rất nhanh. Tuy nhiên, nhược điểm của phương pháp là gặp khó khăn khi giải hệ nhiều phương trình nhiều hàm.

Bài tập. Giải hệ PTVP $y'=\frac{y^2}{z}; z'=5y$

Ta có: $$z''=5y'=5\frac{y^2}{z}$$

Tiếp tục khử y trong biểu thức trên:

$$z''=5\frac{y^2}{z}=\frac{5}{z}\left(\frac{z'}{5}\right)^2=\frac{z'^2}{5z}\Rightarrow 5zz''=z'^2$$

Đặt $u=z'\Rightarrow z''=u'=u\frac{du}{dz}$. Thay vào phương trình trên:

$$5zz''=z'^2\Rightarrow 5zu\frac{du}{dz}=u^2\Rightarrow\frac{du}{u}=\frac{dz}{5z}\Rightarrow\ln\left|\frac{u}{C_1}\right|=\frac{1}{5}\ln|z|\Rightarrow u=C_1z^{1/5}$$

Tiếp tục giải phương trình:

$$z'=C_1^*z^{1/5}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=C_1^*z^{1/5}\Rightarrow\frac{dz}{z^{1/5}}=C_1^*dx\Rightarrow\frac{5}{4}z^{4/5}=C_1^*x+C_2^*$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ PTVP đã cho là (C_1, C_2 là các hằng số):

$$z=\left(C_1x+C_2\right)^{5/4}$$

Bài tập. Giải hệ PTVP $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 & (1) \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 & (2) \end{cases}$

Trừ 2 phương trình cho nhau dẫn đến:

$$y_2' - 4y_1' = -5y_2 \qquad (*)$$

Đạo hàm cả 2 vế của phương trình (2):

$$y_2'' = 4y_1' + 3y_2' \to -4y_1' = 3y_2' - y_2''$$

Thay vào phương trình (*):

$$3y_2' - y_2'' + y_2' = -5y_2 \qquad (**)$$

Giải phương trình (**) nhận được:

$$y_2 = -C_1e^{-x} + \frac{1}{2}C_2e^{5x} \to y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{5x}$$

Bài tập. Giải hệ PTVP $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 & (1) \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 & (2) \end{cases}$

Trừ hai phương trình cho nhau dẫn đến:

$$y_2' - 2y_1' = -4y_1 \qquad (*)$$

Đạo hàm 2 vế của (1):

$$y_1'' = 3y_1' + y_2' \to y_2' = y_1'' - 3y_1'$$

Thay vào (*):

$$y_1'' - 3y_1' - 2y_1' = -4y_1 \to y_1'' - 5y_1' + 4y_1 = 0 \qquad (**)$$

Giải (**) nhận được:

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{4x} \to y_2 = -2C_1e^x + C_2e^{4x}$$

Hệ phương trình vi phân tuyến tính

Dạng tổng quát của hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$$

Trong đó a_{ij} là các hệ số phụ thuộc vào x.

Hoặc dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_1(x) \end{bmatrix}$$

Hoặc dưới dạng vectơ: $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}$ **(*)**

Trong đó:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{bmatrix}; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_1(x) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ được gọi là ma trận hệ số. Chúng ta nói $\boldsymbol{A}$ và $\boldsymbol{f}$ liên tục khi tất cả các phần tử của chúng là những hàm liên tục.

Bài toán Cauchy. Tìm nghiệm của hệ PTVP tuyến tính thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}, y(x_0) = k$$

Trong đó k là véc tơ hằng số cho trước.

Định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy. Giả sử ma trận các hệ số $\boldsymbol{A}$ và véc tơ $\boldsymbol{f}$ là liên tục trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$ và cho $\boldsymbol{k}$ là véc tơ hằng số tùy ý, thế thì bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất trên (a, b).

Hệ PTVP tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

Khi $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{0}$ thì hệ PTVP trở thành hệ PTVP tuyến tính thuần nhất:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \qquad (*)$$

Khi các phần tử $A_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ là các hằng số thì hệ phương trình được gọi là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng. Trong phạm vi chương trình chỉ xem xét hệ PTVP tuyến tính hệ số hằng (*), trong $\boldsymbol{A}$ là ma trận vuông cấp n của các hệ số hằng số . Vì $\boldsymbol{A}$ liên tục trong R nên mọi nghiệm của (*) liên tục trên R.

Giá trị riêng, véc tơ riêng

Cho $\boldsymbol{A}$ là ma trận vuông cấp n của các hằng số, nếu tồn tại $\lambda \in R$ và véc tơ $\boldsymbol{y} \in R^{\boldsymbol{n}}$ sao cho:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{y} \qquad (*)$$

λ được gọi là giá trị riêng của A và vector $\boldsymbol{y}$ được gọi là vector riêng tương ứng với giá trị riêng λ.

Để xác định các giá trị riêng λ_i, ta biến đổi HPT đại số về dạng:

$$\boldsymbol{Ay} = \lambda\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{Iy} \rightarrow (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{y}$$

Trong đó $\boldsymbol{I}$ là ma trận vuông đơn vị cấp n. Để hệ có nghiệm không tầm thường thì điều kiện:

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$$

Phương trình trên được gọi là phương trình đặc trưng.

Định lý về nghiệm của hệ PTVP tuyến tính hệ số hằng. Giả sử ma trận vuông hằng số $\boldsymbol{A}$ cấp n có n giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (không nhất thiết phải phân biệt) tương ứng với n véc tơ riêng độc lập tuyến tính $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Thế thì các hàm:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{p}_1 e^{\lambda_1 x}, \mathbf{y}_2 = \mathbf{p}_2 e^{\lambda_2 x}, \mathbf{y}_3 = \mathbf{p}_3 e^{\lambda_3 x}$$

Lập nên hệ nghiệm cơ bản của hệ (*) và nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{p}_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \mathbf{p}_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 \mathbf{p}_3 e^{\lambda_3 x}$$

Bài tập. Giải hệ PTVP $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 & (1) \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 & (2) \end{cases}$

+ Sử dụng phương pháp khử

Trừ 2 phương trình cho nhau dẫn đến:

$$y_2' - 4y_1' = -5y_2 \qquad (*)$$

Đạo hàm cả 2 vế của phương trình (2):

$$y_2'' = 4y_1' + 3y_2' \rightarrow -4y_1' = 3y_2' - y_2''$$

Thay vào phương trình (*):

$$3y_2' - y_2'' + y_2' = -5y_2 \qquad (**)$$

Giải phương trình (**) nhận được:

$$y_2 = -C_1e^{-x} + \frac{1}{2}C_2e^{5x} \rightarrow y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{5x}$$

+ Sử dụng phương pháp giá trị riêng, véc tơ riêng

Phương trình đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)-8 = \lambda^2-4\lambda-5=0 \Rightarrow \lambda_1=-1; \lambda_2=5$$

Để tính véc tơ riêng tương ứng với $\lambda_1=-1$ ta cần giải hệ:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $p_{11}=-p_{21}$, chọn $p_{21}=1 \to p_{11}=-1$.

Để tính véc tơ riêng tương ứng với $\lambda_1=5$ ta cần giải hệ:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $p_{12}=\frac{1}{2}p_{22}$, chọn $p_{12}=1 \to p_{22}=\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình:

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{p}_1 + C_2\mathbf{p}_2 = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-x} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}e^{5x}$$

$y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{5x}; y_2 = -C_1e^{-x} + \frac{1}{2}C_2e^{5x}$ (kết quả phương pháp khử)

Bài tập. Tìm nghiệm tổng quát của hệ PTVP $\begin{cases} x' = 4x - 4y \\ y' = 3x - 3y \end{cases}$

Phương trình đặc trưng:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 12 = \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1$$

Để tính véc tơ riêng tương ứng với $\lambda_1 = 0$ ta cần giải hệ:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda_1 & -4 \\ 3 & -3-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $p_{11} = p_{21}$, chọn $p_{21} = 1 \rightarrow p_{11} = 1$.

Để tính véc tơ riêng tương ứng với $\lambda_1 = 1$ ta cần giải hệ:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda_2 & -4 \\ 3 & -3-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $3p_{12} = 4p_{22}$, chọn $p_{22} = 3 \rightarrow p_{12} = 4$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình:

$$C_1\mathbf{p}_1 + C_2\mathbf{p}_2 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0t} + C_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{1t} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{t}$$

Hoặc dưới dạng: $\begin{cases} x = C_1 + 4C_2e^t \\ y = C_1 + 3C_2e^t \end{cases}$

Bài tập. Tìm nghiệm tổng quát của hệ PTVP $\begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện $x(0) = 1; y(0) = 0$.

Phương trình đặc trưng:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 12 = (\lambda - 4)(\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4; \lambda_2 = -4$$

Để tính véc tơ riêng tương ứng với $\lambda_1 = 0$ ta cần giải hệ:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & -4 \\ 3 & -2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $p_{11} = 2p_{21}$, chọn $p_{21} = 1 \to p_{11} = 2$.

Để tính véc tơ riêng tương ứng với $\lambda_1 = 1$ ta cần giải hệ:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & -4 \\ 3 & -2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $3p_{12} = -2p_{22}$, chọn $p_{22} = -3 \to p_{12} = 2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình:

$$C_1\mathbf{p}_1 + C_2\mathbf{p}_2 = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

Hoặc dưới dạng: $\begin{cases} x = 2C_1e^{4t} + 2C_2e^{-4t} \\ y = C_1e^{4t} - 3C_2e^{-4t} \end{cases}$

Điều kiện ban đầu: $\begin{cases} x(0) = 2C_1 + 2C_2 = 1 \\ y(0) = C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{3}{8}; C_2 = \frac{1}{8}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ PTVP:

$$\frac{3}{8}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-4t}; \begin{cases} x = \frac{3}{4}e^{4t} + \frac{1}{4}e^{-4t} \\ y = \frac{3}{4}e^{4t} - \frac{3}{8}e^{-4t} \end{cases}$$

Bài tập. a/ Tìm nghiệm tổng quát của hệ PTVP

$$y' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} y$$

b/ Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$y' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} y; y(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Lời giải:

a/ Phương trình đặc trưng của $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 16 = (\lambda - 6)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 6; \lambda_2 = -2$$

Để tính véc tơ riêng tương ứng với $\lambda_1 = 6$ ta cần giải hệ:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $p_{11} = p_{21}$, chọn $p_{21} = 1 \to p_{11} = 1$.

Để tính véc tơ riêng tương ứng với $\lambda_1 = -2$ ta cần giải hệ:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $p_{12} = -p_{22}$, chọn $p_{22} = 1 \to p_{12} = -1$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình:

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6x} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x}$$

b/ Nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu:

$$\mathbf{y}(0) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nghĩa là giải hệ:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 5 \\ C_1 + C_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 2; C_2 = -3$$

Vậy nghiệm của bài toán Cauchy là:

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2 = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6x} - 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x}$$

Bài tập. Tìm nghiệm tổng quát của hệ PTVP

$$y' = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} y$$

Phương trình đặc trưng của $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 5)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_{2,3} = -5$$

Để tính véc tơ riêng tương ứng với $\lambda_1 = 1$ ta cần giải hệ:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chọn $r_3 = 1$ suy ra hệ phương trình xác định r_1, r_2:

$$\begin{cases} -4r_1 + 2r_2 = -2 \\ 2r_1 - 4r_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

Dẫn đến nghiệm riêng tương ứng với $\lambda_1 = 1$:

$$\mathbf{y}_1 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^x$$

Để tính véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng kép $\lambda_{2,3} = -5$ ta giải hệ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Định thức cấp 2 và cấp 3 đều bằng không nên nghiệm của phương trình phụ thuộc vào 2 biến r_2, r_3. Do đó nghiệm thỏa mãn phương trình $2r_1 = -2r_2 - 2r_3$. Ta chọn:

$$r_2 = 0; r_3 = 1 \Rightarrow r_1 = -1$$
$$r_2 = 1; r_3 = 0 \Rightarrow r_1 = -1$$

Dẫn đến 2 nghiệm riêng độc lập tương ứng với $\lambda_{2,3} = -5$:

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5x}; \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-5x}$$

Như vậy, nghiệm tổng quát của hệ PTVP:

$$\mathbf{y}_1 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{x} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5x} + C_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-5x}$$

Bài tập. Giải hệ PTVP $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + y_2 \end{cases}$

+ Giải phương trình đặc trưng tìm trị riêng:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3$$

+ Tìm vectơ riêng:

Với $\lambda_1 = 2$, tọa độ vectơ riêng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow x_2 = -2x_1$$

Chọn $x_1 = 1; x_2 = -2$, vectơ riêng là $v_1\{1,-2\}$, nghiệm cơ bản là:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Với $\lambda_2 = 3$, tọa độ vectơ riêng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow x_2 = -x_1$$

Chọn $x_1 = 1; x_2 = -1$, vectơ riêng là $v_1\{1,-1\}$, nghiệm cơ bản là:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm tổng quát: $\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix}$

Phương trình đặc trưng

Phương trình đặc trưng (ẩn λ) của hệ (*) được viết:

$$\begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

Hoặc viết dưới dạng vectơ:

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I} = \boldsymbol{0}$ (Đây là phương trình đa thức cấp n theo λ).

Bài tập. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 & ^{(1)} \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 & ^{(2)} \end{cases}$

Trừ 2 phương trình cho nhau dẫn đến:

$$y_2' - 4y_1' = -5y_2 \qquad (*)$$

Đạo hàm cả 2 vế của phương trình (2):

$$y_2'' = 4y_1' + 3y_2' \to -4y_1' = 3y_2' - y_2''$$

Thay vào phương trình (*):

$$3y_2' - y_2'' + y_2' = -5y_2 \to y_2'' - 4y_2' - 5y_2 = 0 \ \ (**)$$

Giải phương trình (**) nhận được:

$$y_2 = -C_1e^{-x} + \frac{1}{2}C_2e^{5x} \to y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{5x}$$

Bài tập. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 + e^x \,(1) \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 + x\,(2) \end{cases}$

Trừ 2 phương trình cho nhau dẫn đến:

$$y_2' - 2y_1' = -4y_1 + x - 2e^x \text{ (*)}$$

Đạo hàm 2 vế của (1):

$$y_1'' = 3y_1' + y_2' + e^x \to y_2' = y_1'' - 3y_1' - e^x$$

Thay vào (*):

$$y_1'' - 3y_1' - e^x - 2y_1' = -4y_1 + x - 2e^x \to y_1'' - 5y_1' + 4y_1 = x - e^x \quad (**)$$

Giải (**) nhận được:

$$y_1 = C_1e^t + C_2e^{4t} + \frac{e^t}{9} + \frac{te^t}{3} + \frac{t}{4} + \frac{5}{16}$$

$$\to y_2 = -2C_1e^t + C_2e^{4t} - \frac{8e^t}{9} - \frac{2te^t}{3} - \frac{3t}{4} - \frac{11}{16}$$

Bài tập. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y_1' = 6y_1 - 12y_2 - y_3 \,(1) \\ y_2' = y_1 - 3y_2 - y_3 \,(2) \\ y_3' = -4y_1 + 12y_2 + 3y_3 \,(3) \end{cases}$

Lấy (2) trừ đi (1):

$$-y_1' + y_2' = -5y_1 + 9y_2 \quad (4)$$

Lấy (3) cộng với 2 lần (1):

$$3y_1' + y_3' = 14y_1 - 24y_2 \quad (5)$$

Đạo hàm 2 vế của (2):

$$y_2'' = y_1' - 3y_2' - y_3' \rightarrow y_3' = y_1' - 3y_2' - y_2''$$

Thay vào (5):

$$4y_1' - 3y_2' - y_2'' = 14y_1 - 24y_2 \quad (6)$$

Khử y_1 trong (4) và (6) nhận được:

$$6y_1' - y_2' - 5y_2'' = 6y_2 \qquad (7)$$

Khử y'_1 trong (4) và (6) nhận được:

$$y_2' - y_2'' = -6y_1 + 12y_2 \qquad (8)$$

Đạo hàm 2 vế của (8):

$$y_2'' - y_2''' = -6y_1' + 12y_2' \qquad (9)$$

Thay y'_1 từ (9) vào (7):

$$y_2''' - 6y_2'' + 12y_2' - 6y_2' = 0 \quad (10)$$

Giải (10) nhận được:

$$y_2 = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

Thay vào (7) nhận được y_1.

Thay tiếp vào hệ ban đầu nhận được y_3.

Bài tập. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + y_2 \end{cases}$

+ Giải phương trình đặc trưng tìm trị riêng:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3$$

+ Tìm vectơ riêng: Với $\lambda_1 = 2$, tọa độ vectơ riêng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow x_2 = -2x_1$$

Chọn $x_1 = 1; x_2 = -2$, vectơ riêng là $v_1\{1,-2\}$, nghiệm cơ bản là:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Với $\lambda_2 = 3$, tọa độ vectơ riêng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow x_2 = -x_1$$

Chọn $x_1 = 1; x_2 = -1$, vectơ riêng là $v_1\{1,-1\}$, nghiệm cơ bản là:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix}$

Bài tập. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 7y_1 + 3y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 6y_1 + 4y_2 \end{cases}$

+ Giải phương trình đặc trưng tìm trị riêng:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 10$$

+ Tìm vectơ riêng:

Với $\lambda_1 = 1$, tọa độ vectơ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow x_2 = -2x_1$

Chọn $x_1 = 1; x_2 = -2$, vectơ riêng là $v_1\{1,-2\}$, nghiệm cơ bản là:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} e^x \\ -2e^x \end{pmatrix}.$$

Với $\lambda_1 = 10$, tọa độ vectơ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow x_1 = x_2$$

Chọn $x_1 = 1; x_2 = 1$, vectơ riêng là $v_1\{1,1\}$, nghiệm cơ bản là:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} e^{10x} \\ e^{10x} \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1 \begin{pmatrix} e^x \\ -2e^x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{10x} \\ e^{10x} \end{pmatrix}$

Bài tập. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$

+ Giải phương trình đặc trưng tìm trị riêng:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 3$$

+ Tìm vectơ riêng:

Với $\lambda_1 = 1$, tọa độ vectơ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \leftrightarrow x = 0; y = z$

Chọn $x = 0; y = z = 1$, vectơ riêng là $v_1\{0,1,1\}$, nghiệm cơ bản là $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}$

Với $\lambda_2 = 2$, tọa độ vectơ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} -y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \leftrightarrow x = y = z$

Chọn $x = y = z = 1$, vectơ riêng là $v_1\{1,1,1\}$, nghiệm cơ bản là $Y_2 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$

Với $\lambda_3 = 3$, tọa độ vectơ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \leftrightarrow y = 0; x = z$

Chọn $y = 0; x = z = 1$, vectơ riêng là $v_1\{1,0,1\}$, nghiệm cơ bản là $Y_3 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm tổng quát:

$$y = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ e^{x} \\ e^{x} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

Bài tập. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 4y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 - 2y_2 \end{cases}$

+ Giải phương trình đặc trưng tìm trị riêng:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

+ Tìm vectơ riêng:

Với $\lambda = 0$, tọa độ vectơ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow x_1 = -2x_2$

Chọn $x_1 = 2; x_2 = -1$, vectơ riêng là $v_1\{2,-1\}$, nghiệm cơ bản là

$Y_1 = \begin{pmatrix} 2e^{0x} \\ -e^{0x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

+ Giả sử một nghiệm cơ bản nữa của hệ phương trình đã cho có dạng:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} e^{0x}(a_1 + b_1x) \\ e^{0x}(a_2 + b_2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1x \\ a_2 + b_2x \end{pmatrix}$$

Thay Y_2 vào phương trình ban đầu ta có:

$$\begin{cases} b_1 = 2(a_1 + b_1x) + 4(a_2 + b_2x) \\ b_2 = -(a_1 + b_1x) - 2(a_2 + b_2x) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} b_1 = (2b_1 + 4b_2)x + (2a_1 + 4a_2) \\ b_2 = -(b_1 + 2b_2)x - (a_1 + 2a_2) \end{cases}$$

Phương trình trên phải thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} 2b_1 + 4b_2 = 0 \\ -b_1 - 2b_2 = 0 \\ b_1 = 2a_1 + 4a_2 \\ b_2 = a_1 + 2a_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -2b_2 \\ b_1 = 2a_1 + 4a_2 \\ b_2 = a_1 + 2a_2 \end{cases}$$

Chọn $a_1 = 1; a_2 = -1 \rightarrow b_1 = -2; b_2 = 1$ dẫn đến:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 - 2x \\ -1 + x \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 - 2x \\ -1 + x \end{pmatrix}$$

Bài tập. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$

+ Giải phương trình đặc trưng tìm trị riêng:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$$

+ Tìm vectơ riêng:

Với $\lambda_1 = 1$ ta có hệ: $\begin{cases} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0 \end{cases}$

Suy ra $\gamma_1 = -\gamma_2$. Chọn $\gamma_1 = 1; \gamma_2 = -1$ ta được một nghiệm: $x_1 = e^t; y_1 = e^{-t}$

Tương tự, với $\lambda_1 = 2$ ta có hệ: $\begin{cases} -3\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \\ 3\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0 \end{cases}$

Suy ra $3\gamma_1 = -2\gamma_2$. Chọn $\gamma_1 = 1; \gamma_2 = -\dfrac{3}{2}$ ta được một nghiệm: $x_2 = e^{2t}; y_2 = -\dfrac{3}{2}e^{2t}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ: $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{2t} \\ y = -C_1e^t - \dfrac{3}{2}C_2e^{2t} \end{cases}$

Bài tập. Tìm nghiệm tổng quát của hệ $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 2y_2 \end{cases}$

+ Giải phương trình đặc trưng tìm trị riêng:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (\lambda-2)^2 - 16 = 0 \leftrightarrow (\lambda-6)(\lambda+2) \leftrightarrow \lambda_1 = 6; \lambda_2 = -2$$

+ Tìm vectơ riêng:

Với $\lambda_1 = 6$ ta có hệ: $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Suy ra $x_1 = -x_2$. Chọn $x_2 = 1; x_1 = 1$ ta có vectơ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Với $\lambda_1 = -2$ ta có hệ: $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Suy ra $x_1 = -x_2$. Chọn $x_2 = 1; x_1 = -1$ ta có vectơ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$y = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6x} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x}$$