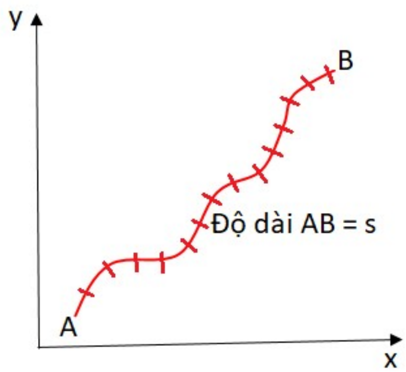
Bài toán dẫn đến định nghĩa tích phân đường loại 1

Tính khối lượng đoạn dây không đồng chất : $\rho = f(x, y)$.



Trường hợp đồng chất: $m = \rho . s$ (ρ – khối lượng riêng, s – độ dài dây).

Trường hợp không đồng chất: Chia nhỏ chiều dài dây $AB = \bigcup_{i=1}^{n} s_i$. Cho $n \to \infty$ để s_i là các đoạn dây đồng chất:

$$m_i = \rho_i . s_i = f(x_i, y_i).\Delta s_i \to m \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta s_i$$

Khối lượng của đoạn dây:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta s_i \qquad (*)$$

Định nghĩa. Nếu tồn tại giới hạn (*) và không phụ thuộc cách chọn điểm (x_i, y_i) thì (*) gọi là tích phân đường loại 1 trên AB, ký hiệu:

$$I = \int_{AB} f(x, y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

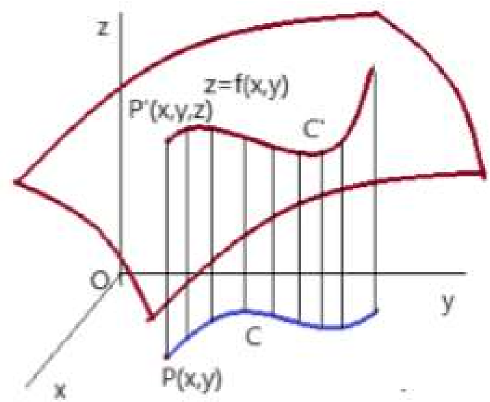
AB là đường cong lấy tích phân, hàm $f(x, y)$ khả tích trên AB.

Ý nghĩa của tích phân đường loại 1

Tích phân đường xuất hiện đầu thế kỷ 19 để giải quyết để giải quyết các vấn đề liên quan đến lĩnh vực cơ học lý thuyết, cơ học chất lỏng, điện từ trường trong vật lý, …

+ **Ý nghĩa hình học.** Xét đường cong C được xác định bởi phương trình $x = x(t),\ y = y(t)$ và hàm $z = f(x,y) \geq 0, \forall x,y \in C$.

Khi $P(x,y)$ di chuyển dọc theo C thì $P'(x,y,z)$ di chuyển dọc theo đường cong C' trên mặt $z = f(x,y)$.



Tích phân $\int_C f(x,y)ds$ chính là diện tích của "hàng rào" tạo bởi C và C'.

Khi $f(x,y) = 1$ thì tích phân trên chính là chiều dài của C.

+ Ý nghĩa vật lý. Cho thanh cong C có mật độ khối lượng $\rho(x,y,z)$. Khối lượng của thanh chính là tích phân đường loại 1:

$$M = \int_C \rho(x,y,z)ds$$

Các tính chất cơ bản

1) Từ định nghĩa trên thấy rằng tích phân đường loại 1 không phụ thuộc vào chiều của đường cong AB, nghĩa là:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds$$

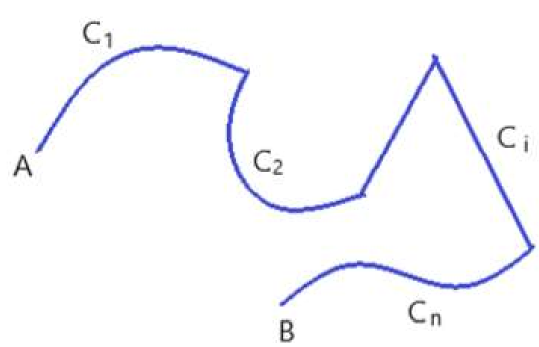
Tuy nhiên, cần lấy tích phân theo chiều tăng của biến.

2) Dễ dàng mở rộng định nghĩa tích phân đường đối với đường cong trong không gian.

3) Tích phân đường loại 1 có các tính chất giống tích phân xác định:

$$\int_C [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]ds = \alpha\int_C f(x,y)ds + \beta\int_C g(x,y)ds$$

$$\int_C f(x,y)ds = \sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} f(x,y)ds$$



Trong đó $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ với C_i là các cung trơn (hàm có đạo hàm liên tục trên cung).

Các công thức tính tích phân đường loại 1

Điều kiện khả tích. Nếu AB là đường cong trơn từng khúc và hàm $f(x,y)$ liên tục trên AB thì hàm $f(x,y)$ khả tích trên AB.

Xét tích phân:

$$I=\int_{AB} f(x,y)ds$$

1. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x), a \le x \le b$ thì:

$$\int_{AB} f(x,y)ds=\int_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$$

2. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(y), c \le y \le d$ thì:

$$\int_{AB} f(x,y)ds=\int_c^d f\left(x(y),y\right)\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}dy$$

3. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(t), y = y(t), t_1 \le t \le t_2$ thì:

$$\int_{AB} f(x,y)ds=\int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt$$

Bằng cách tương tự, công thức tính tích phân cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trên đường cong $\widehat{AB}$ trong không gian cho bởi: $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t_1 \leq t \leq t_2$

$$\int_{AB} f(x, y, z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}dt$$

4. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình trong tọa độ cực $r = r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ thì coi nó như là phương trình dưới dạng tham số, ta có:

$$ds = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$$

$$\rightarrow \int_{AB} f(x, y)ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(r(\varphi)cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$$

Bài tập. Tính $\int_C xyds$ với C là hình elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Đặt $x = 2cost; y = 3sint; t: 0 \to \frac{\pi}{2}$

Tích phân được tính:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t.3\sin t\sqrt{4\sin^2 t+9\cos^2 t}dt=\frac{38}{5}$$

Bài tập. Tính $\int_C xyds$ với C là đường $x = y^2$ từ $A(0,0) \to B(4,2)$

$$I=\int_0^2 y^2.y\sqrt{(2y)^2+1}dy=\int_0^2 y^2.y.\sqrt{4y^2+1}dy$$

Đặt $\sqrt{4y^2+1}=t \Rightarrow t^2=4y^2+1 \Rightarrow 2tdt=8ydy \Rightarrow ydy=\frac{tdt}{4}$

$$\Rightarrow I=\int_1^{\sqrt{17}} \frac{t^2-1}{4}.t.\frac{tdt}{4}=\frac{1}{16}\int_1^{\sqrt{17}}\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{1}{16}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{17}}$$

Bài tập. Tính khối lượng của đường cong:

$$x = \cos t; y = \sqrt{2}\sin t; \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{6}$$

Biết mật độ khối lượng của nó tại điểm (x, y) là $\rho(x, y) = |xy|$.

Khối lượng của đường cong được đưa ra bởi công thức:

$$m = \int_C \rho(x, y)ds = \sqrt{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} |\sin t\cos t|\sqrt{1+\cos^2 t}dt$$

$$= -\sqrt{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin t\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{1+\cos^2 t}d\left(1+\cos^2 t\right)$$

$$\to m = \frac{\sqrt{2}}{3}.\frac{7\sqrt{7}-5\sqrt{5}}{8}$$

Bài tập. Tính khối lượng của đường đinh ốc:

$$x = \cos t; y = \sin t; z = t; 0 \le t \le 2\pi$$

Biết mật độ của nó tại điểm (x, y, z) là $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$m = \int_C \rho(x, y, z)ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right]$$

Bài tập. Tính $\int\limits_C \left(x^2+y^2\right)ds$, C là nửa đường $x^2+y^2=2x,\left(x\ge 1\right)$.

Đặt phương trình tham số của đường:

$$\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \end{cases}, -\frac{\pi}{2}\le t\le \frac{\pi}{2}$$

$$ds=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=\sqrt{\left(-\sin t\right)^2+\left(\cos t\right)^2}\,dt=dt$$

$$\to I=\int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(1+\cos t\right)^2+\sin^2 t\right)dt$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2+2\cos t\right)dt=\left(2t+2\sin t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi+4$$

Bài tập. Tính $\int\limits_C y^2 ds$, C là đường tròn có phương trình

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$$

$$x'(t) = a(1 - \cos t); y'(t) = a\sin t \to \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$\to I = \int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 .2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{256a^3}{15}$$

Bài tập. Tính $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, C là đường tròn có phương trình

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi, a > 0$$

$$x'(t) = at\cos t; y'(t) = at\sin t \to \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = at$$

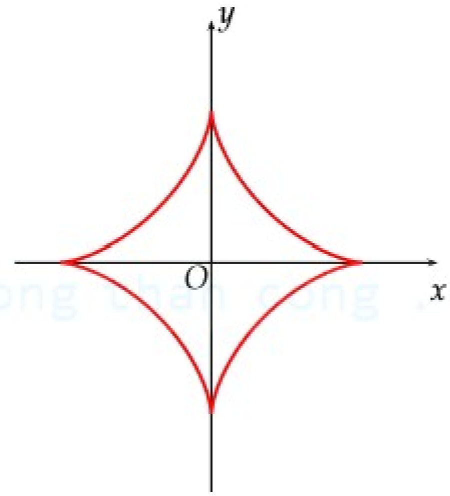
$$\to I = \int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\left[(\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right]}atdt = \frac{a^2}{3}\left(\sqrt{(1 + 4\pi)^3} - 1\right)$$

Bài tập. Tính tích phân đường:

$I=\int\limits_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds$, trong đó L là đường Astroid có phương trình:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},(a>0)$$



Do tính chất của đường Astroid nhận các trục Ox, Oy làm trục đối xứng và hàm số dưới dấu tích phân không thay đổi khi ta đảo dấu 1 hoặc 2, hoặc cả 2 biến x, y.

$\rightarrow I=\int\limits_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds=4\int\limits_{L_1}\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds$, L_1 là phần đường Astroid trong góc phần tư thứ nhất. Tham số hóa đường Astroid ta có:

$$x=a\cos^3 t; y=a\sin^3 t$$

$$\rightarrow I=\int\limits_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\frac{4}{3}}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)3a\sin t\cos t dt$$

$$=12a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^5 t\sin t+\sin^5 t\cos t\right)dt=12a^{\frac{7}{3}}\left(-\frac{1}{6}\cos^6 t+\frac{1}{6}\sin^6 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=4a^{\frac{7}{3}}.$$

Bài tập. Tính tích phân đường $I=\int\limits_L xyzds$, trong đó L là đường xoắn có phương trình $\mathbf{r}(t)=(\cos t,\sin t,3t), t\in[0,4\pi]$.

$$I=\int\limits_L xyzds=\int\limits_0^{4\pi}3t\cos t\sin t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+9}dt=\frac{3\sqrt{10}}{2}\int\limits_0^{4\pi}t\sin(2t)dt$$

$$=\frac{3\sqrt{10}}{2}\left[\frac{1}{4}\sin(2t)-\frac{t}{2}\cos(2t)\right]_0^{4\pi}=-3\sqrt{10}\pi$$

Bài tập. Tính tích phân đường $I = \int\limits_L x^2 ds$, trong đó L giao điểm của các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (a > 0)$ và $x + y + z = 0$.

Từ đầu bài, L là một đường tròn lớn của mặt cầu, có chu vi $2\pi a$ và L không thay đổi khi ta hoán vị xung quanh các trục x, y, z. Vì vậy:

$$\int\limits_L x^2 ds = \int\limits_L y^2 ds = \int\limits_L z^2 ds \Rightarrow \int\limits_L x^2 ds = \frac{1}{3}\int\limits_L \left(x^2 + y^2 + z^2\right) ds$$

Vì trên đường L thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$:

$$\Rightarrow \int\limits_L x^2 ds = \frac{a^2}{3}\int\limits_L ds = \frac{a^2}{3}.2\pi a = \frac{2\pi a^3}{3}$$

Bài tập*. Tính $\int_C (xy-4z)ds$ với C là đoạn thẳng đi từ $P_1(1,1,0)$ đến $P_2(2,3,-2)$.

Trước hết ta cần lập phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm P_1, P_2. Véc tơ song song với đoạn thẳng P_1P_2 là:

$$\vec{T} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (1,2,-2)$$

Dẫn đến:

$$x = 1+t; y = 1+2t; z = -2t$$

$$\Rightarrow \int_C (xy-4z)ds = \int_0^1 \left[(1+t)(1+2t)+8t\right]\sqrt{1+4+4}dt$$

$$= 3\int_0^1 \left(1+11t+2t^2\right)dt = 3\left[t+\frac{11}{2}t^2+\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{43}{2}$$