Định nghĩa tích phân đường loại 2

Cho hàm vector $\mathbf{F}: D \subset R^2$:

$$\boldsymbol{F}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{e}_1 + Q(x, y)\boldsymbol{e}_2$$

Gọi C là môt đường cong trong D có phương trình tham số:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2, t \in [a, b]$$

Chia $[a, b]$ thành n đoạn có các nút $t_i, i = 0, n$, lúc đó trên đường cong C sẽ nhận được các điểm tương ứng $M_i(x_i, y_i)$. Xét tích vô hướng:

$$\mathbf{F}.\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \mathbf{F}.d\mathbf{r} = P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i$$

Với $\left(x_i^*, y_i^*\right)$ là điểm bất kỳ trong cung bé $M_{i-1}M_i$.

Lập tổng: $$\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i\right]$$

Ta đi đến định nghĩa định nghĩa về tích phân đường loại 2.

Định nghĩa. Cho trường vector $\mathbf{F} = \left(P(x,y), Q(x,y)\right)$ xác định trên $D \subset R^2$ bao gồm đường cong $C: x = x(t), y = y(t), a \le t \le b$, tổng tích phân đường đối với trường vector $\boldsymbol{F}$ là:

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[P\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + Q\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i\right]$$

nếu tồn tại.

Tích phân đường đối với trường vector được gọi là tích phân đường loại 2, trong khi tích phân đường đối với trường vô hướng là tích phân đường loại 1.

Tổng quát, nếu xem $\boldsymbol{F}$ là trường vector trong $\boldsymbol{R}^3$ với:

$$\mathbf{F} = P(x,y,z)\mathbf{e}_1 + Q(x,y,z)\mathbf{e}_2 + R(x,y,z)\mathbf{e}_3$$
$$C: \mathbf{r} = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3, t \in [a,b]$$
$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_1 + dy\mathbf{e}_2 + dz\mathbf{e}_3$$

Dẫn đến:

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

Một số tính chất của tích phân đường loại 2

1) Đối với tích phân đường loại 1, tổng tích phân tính theo độ dài vi phân cung ds nên không phụ thuộc vào chiều của đường cong lấy tích phân. Tuy nhiên, đối với tích phân đường loại 2, tổng tích phân dựa vào tích vô hướng của hai vector $\boldsymbol{F}$ với véc tơ $d\boldsymbol{r}$, do đó tích phân phụ thuộc vào chiều của đường cong lấy tích phân, nghĩa là:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

2) Có thể tách tích phân đường thành tổng các tích phân thành phần:

$$\int_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{C} P(x,y)dx + \int_{C} Q(x,y)dy$$

3) Nếu $AB = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, C_i là các cung trơn thì:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

4) $$\int_{C} (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}).dr = a\int_{C} \mathbf{F}.dr + b\int_{C} \mathbf{G}.dr$$

Các công thức tính tích phân đường loại 2

Điều kiện khả tích. Nếu C là đường cong trơn từng khúc và các hàm $P(x,y),Q(x,y)$ liên tục trên C thì tích phân đường loại 2 tồn tại.

1. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $x = a, x = b$ thì:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x) \right] dx$$

2. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(y)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $y = c, y = d$ thì:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_c^d \left[P\left(x(y), y\right).x'(y) + Q\left(x(y), y\right) \right] dy$$

3. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình $x = x(t), y = y(t)$, điểm đầu và điểm cuối ứng với $t = t_1, t = t_2$ thì:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right).x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right).y'(t) \right] dt$$

Tương tự, tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ dọc theo cung C có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \le t \le b$, được viết:

$$\begin{aligned} I &= \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \\ &= \int_a^b P\left(x(t), y(t), z(t)\right).x'(t) \\ &\quad + Q\left(x(t), y(t), z(t)\right).y'(t) + R\left(x(t), y(t), z(t)\right).z'(t)dt \end{aligned}$$

Bài tập. Tính $\int\limits_{AB} ydx + x^2dy$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $y = x^2$ từ $A(1,1)$ đến $B(0,0)$

Ta có: $$y = x^2 \rightarrow dy = 2xdx$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x) \right] dx$$

$$= \int\limits_1^0 \left(x^2 + x^2.2x \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} \right) \Bigg|_1^0 = -\frac{5}{6}$$

Bài tập. Tính $\int\limits_{AB} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(2xy - y^2\right)dy$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $y = x^2$ từ $A(1,1)$ đến $B(2,4)$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x) \right] dx$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\left(x^2 - 2x^3\right) + \left(2x^3 - x^4\right).2x \right) dx = \int\limits_1^2 \left(-2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x^2 \right) dx$$

$$= \left(-\frac{x^6}{3} + \frac{4x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_1^2 = -\frac{41}{30}$$

Bài tập. Tính $\int_{AB} 2y dx$, trong đó $\widehat{AB}$ là cung parabol $x = y^3 + y$ từ $A(-2,-1)$ đến $B(2,1)$

Ta có: $$x = y^3 + y \rightarrow dx = \left(3y^2 + 1\right) dy$$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_c^d \left[P\left(x(y), y\right).x'(y) + Q\left(x(y), y\right) \right] dy$$

$$= \int_{-1}^{1} 2y\left(3y^2 + 1\right) dy = \int_{-1}^{1} \left(6y^3 + 2y\right) dy = \left(\frac{6y^4}{4} + \frac{2y^2}{2} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0$$

Bài tập. Tính $\int\limits_{AB}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(2xy-y^2\right)dy$, trong đó $\widehat{AB}$ là đường cong $x=a(t-sint);y=a(1-cost)$ theo chiều tăng của $t,0\leq t\leq 2\pi,a>0$.

Ta có: $dx=a\left(1-\text{cost}\right)dt;dy=a\sin tdt$

Sử dụng công thức:

$$\int\limits_{AB}Pdx+Qdy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[P\left(x(t),y(t)\right).x'(t)+Q\left(x(t),y(t)\right).y'(t)\right]dt$$

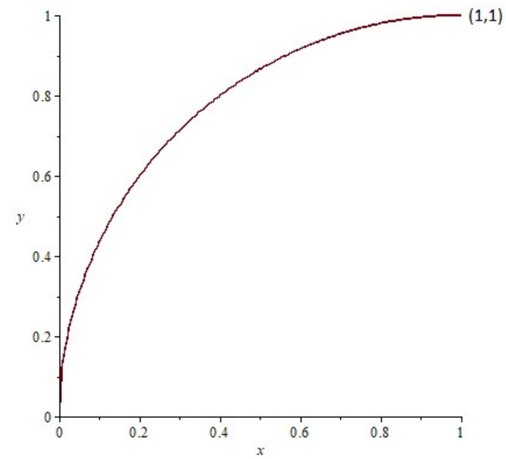
Dẫn đến:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left\{\left[2a\left(t-\sin t\right)-a\left(1-\cos t\right)\right]a\left(1-\cos t\right)+a\left(t-\sin t\right).a\sin t\right\}dt$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(2t-2\right)+\sin 2t+\left(t-2\right)\sin t-\left(2t-2\right)\cos t\right]dt$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(2t-2\right)+t\sin t-2t\cos t\right]dt=a^2\left(4\pi^2-6\pi\right)$$

Bài tập. Tính $I = \int\limits_C ydx + xdy$, C là cung $x^2 + y^2 = 2x$ từ (0,0) đến (1,1) theo chiều kim đồng hồ.



Đặt $x = 1 + \cos t; y = \sin t$ dẫn đến:

$$dx = -\sin t dt; dy = \cos t dt; t : \pi \to \frac{\pi}{2}$$

Áp dụng công thức:

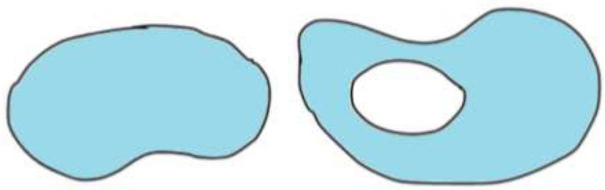
$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right).x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right).y'(t) \right] dt$$

$$\to I = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \left[-\sin t.\sin t + (1 + \cos t).\cos t \right] dt$$

$$= \int\limits_{\pi}^{\pi/2} (\cos t + \cos 2t) dt = \left(\sin t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Bigg|_{\pi}^{\pi/2} = 1$$

Công thức Green

Chiều dương của đường cong kín. Đường cong kín C là biên của miền D. Chiều dương qui ước trên C là chiều sao cho nếu đi dọc theo C theo chiều này, thì miền D gần nhất sẽ nằm ở phía trái. Chiều ngược lại gọi là chiều âm.



Miền đơn liên và miền đa liên (nhị liên)

Miền đơn liên và miền đa liên. Miền D được gọi là miền đơn liên nếu các biên kín của D có thể co về thành một điểm $P \in D$ mà không bị các biên khác cản trở. Ngược lại, D được gọi là miền đa liên.

Biểu diễn của công thức Green. $D \in R^2$ là miền đơn liên, bị chặn bởi biên kín C với hướng dương. Nếu P, Q cùng các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trên D, khi đó:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Nếu C có hướng âm thì:

$$\int_C Pdx + Qdy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Trong một số trường hợp, nếu C là đường cong không kín thì có thể bổ sung C để nhận được đường cong kín và áp dụng công thức hàm Green.

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, trong đó C là đường $x^2+y^2=R^2$

Tính trực tiếp. Đặt $x=R\cos\varphi; y=R\sin\varphi \left(0\le\varphi\le 2\pi\right)$, sử dụng công thức:

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[P\big(x(t),y(t)\big).x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big).y'(t)\right]dt$$

Dẫn đến:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\left[\begin{array}{l}\left(R^2\cos\varphi\sin\varphi+R\cos\varphi+R\sin\varphi\right)\left(-R\sin\varphi\right)\\+\left(R^2\cos\varphi\sin\varphi+R\cos\varphi-R\sin\varphi\right)\left(R\cos\varphi\right)\end{array}\right]d\varphi$$

$$=\frac{R^3}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\cos 2\varphi+\sin\varphi\cos 2\varphi\right)d\varphi=0$$

Sử dụng công thức Green. Ta có:

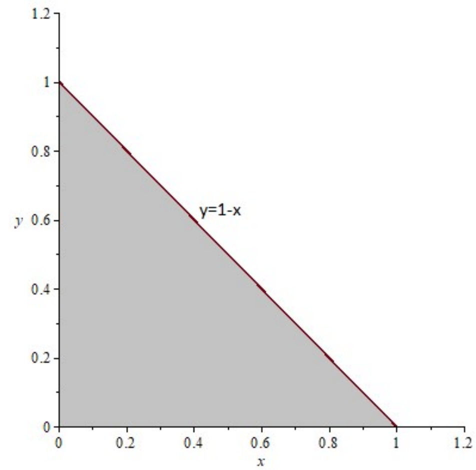
$$\begin{cases} P(x,y) = xy + x + y \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = x + 1 \\ Q(x,y) = xy + x - y \rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y + 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$$

$$\rightarrow I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} (y - x)\,dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} ydxdy - \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2} xdxdy = 0$$

Bài tập. Tính tích phân $\int_C x^2dx + xydy$, trong đó C là biên tam giác tạo nên từ các đoạn thẳng nối từ $(0,0)$ tới $(1,0)$, từ $(1,0)$ tới $(0,1)$, và từ $(0,1)$ tới $(0,0)$.

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2 \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ Q(x,y) = xy \rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y \end{cases} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y$$



Dẫn đến:

$I = \iint_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D ydxdy$, trong đó D là miền được xác định bởi:

$$0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 - x$$

$$\rightarrow I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} ydy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}(0-1) = \frac{1}{6}$$

Điều kiện tích phân đường độc lập đường lấy tích phân

Ta thấy rằng giá trị của $\int_C Pdx + Qdy$ không những phụ thuộc vào đường cong C mà còn phụ thuộc vào giá trị hai mút của đường cong. Bây giờ ta xét với điều kiện nào thì giá trị tích phân đường chỉ phụ thuộc vào hai mút mà không phụ thuộc vào đường cong lấy tích phân.

Định lý. Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trong miền đơn liên D. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:

1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D$

2) $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, với mọi đường cong kín $L \in D$

3) $\int_{AB} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào hai điểm mút A, B mà không phụ thuộc vào đường cong AB.

4) $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $\psi(x, y)$ nào đó, hay còn gọi $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần đúng.

Hệ quả 1. Nếu $Pdx+Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $\psi(x,y)$ thì:

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\psi(A)-\psi(B)$$

Hệ quả 2. Nếu $Pdx+Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $\psi(x,y)$ trên R^2 thì:

$$\psi(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C$$

Hoặc: $$\psi(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+C$$

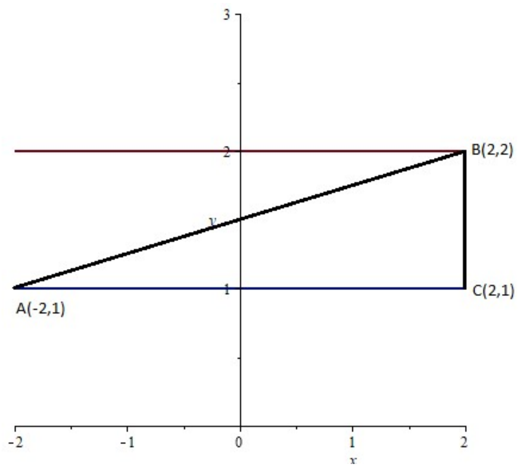
Các bước giải bài toán tích phân đường độc lập đường lấy tích phân

1) Kiểm tra điều kiện: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (*).

2) Nếu điều kiện (*) được thỏa mãn và đường lấy tích phân là đường cong kín thì $I=0$.

3) Nếu điều kiện (*) được thỏa mãn và cần tính tích phân trên cung AB không đóng thì ta chọn đường tính tích phân sao cho việc tính toán đơn giản nhất, thông thường là chọn đường thẳng nối A và B, hoặc đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục tọa độ. Mặt khác, nếu tìm được hàm F sao cho $dF=Pdx+Qdy$ thì $I=F(B)-F(A)$.

Ví dụ. Tính tích phân $\int_A^B ydx + xdy$ từ điểm A đến điểm B (hình vẽ).



Ta có: $$\begin{cases} P(x,y) = y \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ Q(x,y) = x \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

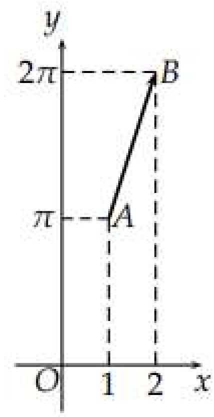
Vì vậy tích phân không phụ thuộc đường đi. Sử dụng công thức:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)).y'(x) \right] dx$$

Hoặc: $$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_c^d \left[P(x(y), y).x'(y) + Q(x(y), y) \right] dy$$

$$I = \int_{AC} ydx + xdy + \int_{CB} ydx + xdy = \int_1^2 2xdx + \int_2^3 2ydy = 8$$

Ví dụ. Tính tích phân $\int_A^B \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ từ điểm A đến điểm B (hình vẽ)



Ta có:

$$\begin{cases} P(x,y)=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ Q(x,y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

Vì vậy tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường đi. Ta chọn đường thẳng AB có phương trình $y=\pi x$ như hình vẽ. Sử dụng công thức:

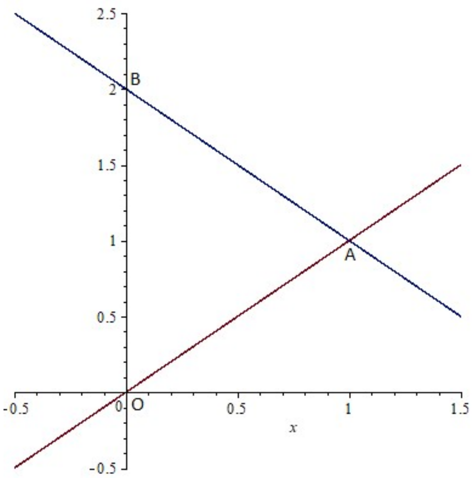
$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_a^b \left[P(x,y(x))+Q(x,y(x)).y'(x)\right]dx$$

$$\to I=\int_A^B \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

$$=\int_1^2 \left[\left(1-\pi^2\cos\pi\right)+\left(\sin\pi+\pi\cos\pi\right)\pi\right]dx=1$$

BÀI TẬP

Bài tập. Tính $I = \int\limits_{AB} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy$ trong đó $\widehat{AB}$ là biên của tam giác OAB, với $O(0,0)$; $A(1,1)$; $B(0,2)$ và ngược chiều kim đồng hồ.



$$I = \int\limits_{OA} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy$$

$$+ \int\limits_{AB} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy + \int\limits_{BO} \left(x^2 + 3y\right)dx + 2ydy$$

Sử dụng các công thức:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right).y'(x) \right] dx$$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_c^d \left[P\left(x(y), y\right).x'(y) + Q\left(x(y), y\right) \right] dy$$

Phương trình OA: $y = x$

$$\int_{OA} \left(x^2 + 3y\right) dx + 2ydy = \int_0^1 \left[\left(x^2 + 3x\right) + 2x.1 \right] dx = \int_0^1 \left(x^2 + 5x\right) dx = \frac{17}{6}$$

Phương trình AB: $y = 2 - x$

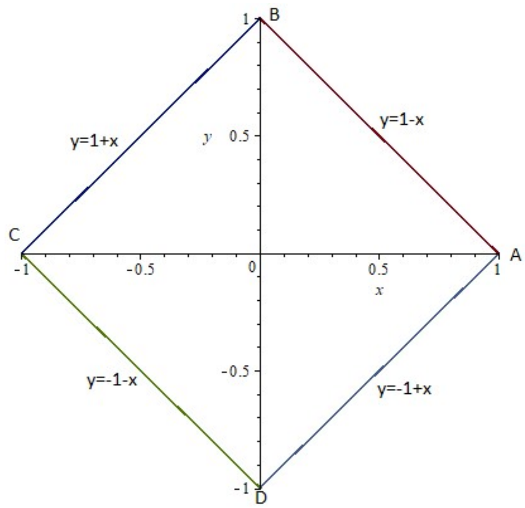
$$\int_{AB} \left(x^2 + 3y\right) dx + 2ydy = \int_0^1 \left[\left(x^2 + 3(2 - x)\right) + 2(2 - x).(-1) \right] dx = \int_1^0 (\quad) dx = -\frac{11}{6}$$

Phương trình BO: $x = 0$

$$\int_{BO} \left(x^2 + 3y\right) dx + 2ydy = \int_2^0 \left[\left(0^2 + 3y\right).0 + 2y \right] dy = y^2 \Big|_2^0 = -4$$

$$\Rightarrow I = -3$$

Bài tập. Tính $\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, $ABCDA$ là đường gấp khúc qua các điểm $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$



Xét các đoạn:

$$AB: y = 1 - x \to dx + dy = 0$$
$$BC: y = 1 + x \to dx = dy$$
$$CD: y = -1 - x \to dx + dy = 0$$
$$DA: y = -1 + x \to dx = dy$$

Ta có:

$$\int\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int\limits_{AB} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int\limits_{BC} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int\limits_{CD} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int\limits_{DA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$$

$$= 0 + 2\int\limits_{BC} \frac{dx}{-(x-y)} + 0 + 2\int\limits_{DA} \frac{dx}{(x-y)} = 2\int_0^{-1} dx + 2\int_0^{1} dx = 0$$

Bài tập. Tính $\int\limits_{AB} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} dx + dy$ trong đó:

$$x = t\sin\sqrt{t}; y = t\cos\sqrt{t}; 0 \le t \le \frac{\pi^2}{4}$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P\left(x(t), y(t)\right).x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right).y'(t) \right] dt$$

Đặt $u = \sqrt{t}$ dẫn đến:

$$0 \le u \le \frac{\pi}{2}$$

$$x = u^2 \sin u \to x'(u) = 2u\sin u + u^2 \cos u$$

$$y = u^2 \cos u \to y'(u) = 2u\cos u - u^2 \sin u$$

Công thức tích phân:

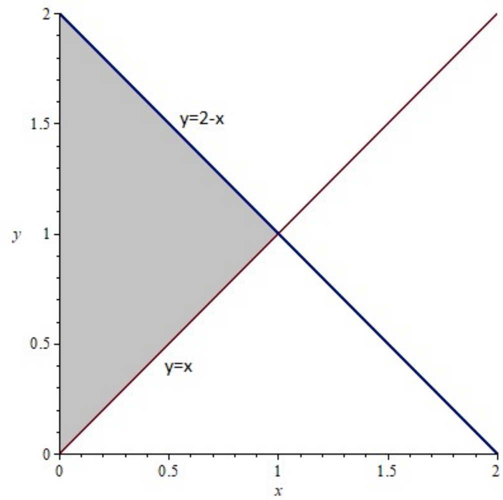
$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{u_1}^{u_2} \left[P\left(x(u), y(u)\right).x'(u) + Q\left(x(u), y(u)\right).y'(u) \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi/2} \left[\sqrt[4]{u^4\left(\cos^2 u + \sin^2 u\right)}.\left(2u\sin u + u^2 \cos u\right) + 2u\cos u - u^2 \sin u \right] du$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/2} \left[\frac{u}{2}.\left(2u\sin u + u^2 \cos u\right) + 2u\cos u - u^2 \sin u \right] du = -\frac{3}{2}\pi^2 + 2$$

Công thức Green

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C \left(x^2+3y\right)dx + 2ydy$, trong đó C là biên tam giác tạo nên từ các đoạn thẳng nối từ $(0{,}0)$ tới $(1{,}1)$, từ $(1{,}1)$ tới $(0{,}2)$, và từ $(0{,}2)$ tới $(0{,}0)$ và ngược chiều kim đồng hồ.



$$\begin{cases} P(x,y) = x^2+3y \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3 \\ Q(x,y) = 2y \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3$$

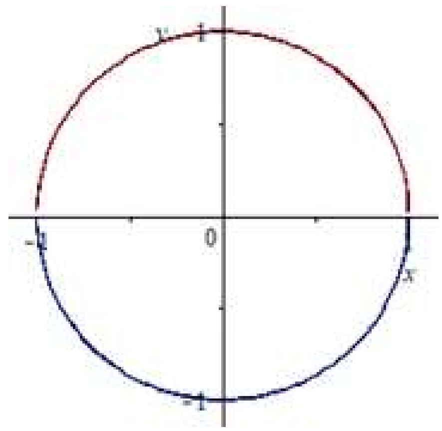
Dẫn đến:

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = -3\iint\limits_D dxdy,$$

trong đó D là miền được xác định bởi: $0 \le x \le 1; x \le y \le 2-x$.

$$\to I = -3\int_0^1 dx \int_x^{2-x} dy = -3\int_0^1 (2-2x)dx = -6\int_0^1 (1-x)dx = -6.\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = -3$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C \left(2x^3 - y^3\right)dx + \left(x^3 + y^3\right)dy$, trong đó C là đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.



$$\begin{cases} P(x,y) = 3x^3 - y^3 \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 \\ Q(x,y) = x^3 + y^3 \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3\left(x^2 + y^2\right)$$

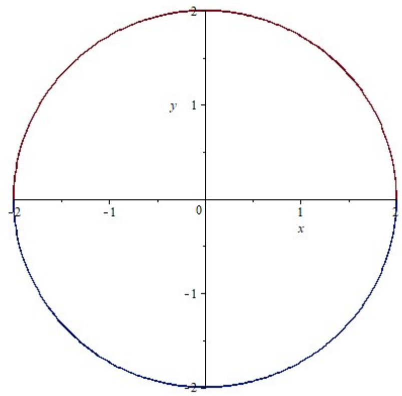
Dẫn đến:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 3\left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

Đặt $x = \cos\varphi; y = \sin\varphi \to J = r$:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} 3\left(x^2 + y^2\right)dxdy = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = 3.2\pi.\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3\pi}{2}$$

Bài tập. Tính tích phân $I = \int\limits_C (xy + 4x + 5y)\,dx + \left(y^2 - 2x + \dfrac{x^2}{2} \right) dy$, trong đó C là đường $x^2 + y^2 = 4$ và theo chiều ngược kim đồng hồ.

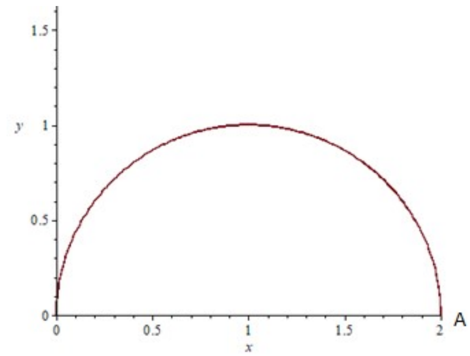


$$\begin{cases} P(x,y) = xy + 4x + 5y \to \dfrac{\partial P}{\partial y} = x + 5 \\ Q(x,y) = y^2 - 2x + \dfrac{x^2}{2} \to \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2 + x \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -7$$

Đặt $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi \to J = r$:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} (-7)\,dxdy = -7\int\limits_0^2 r\,dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = -7.2\pi.\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^2 = -28\pi$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, trong đó C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ cùng chiều kim đồng hồ.



$$I = \int\limits_{C \cup \overline{AO}} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy - \int\limits_{\overline{AO}} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int\limits_{C \cup \overline{AO}} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$
$$= -\iint\limits_D \left(2(x+y) + 2(x-y)\right) dxdy = -4\iint\limits_D xdxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực với $x = rcos\varphi$:

$$I_1 = -4\iint\limits_D xdxdy = -4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r\cos\varphi.rdr = -2\pi$$

Để tính I_2, sử dụng công thức ($y = 0$):

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)).y'(x) \right] dx$$

$$\to I_2 = \int\limits_2^0 \left[(x-0)^2 + (x+0)^2 .0 \right] dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_2^0 = -\frac{8}{3}$$

$$\to I = I_1 - I_2 = -2\pi + \frac{8}{3}$$

Bài tập. Tính tích phân $\int\limits_C (xy+x+y)\,dx+(xy+x-y)\,dy$, trong đó C là đường $x^2+y^2=2x$

Sử dụng công thức Green:

$$\begin{cases} P(x,y)=xy+x+y \to \dfrac{\partial P}{\partial y}=x+1 \\ Q(x,y)=xy+x-y \to \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y+1 \end{cases} \to \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y-x$$

Dẫn đến:

$$\to I=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} (y-x)\,dxdy$$

Đặt $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi$ ta có:

$$x^2+y^2=2x \to r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=2r\cos\varphi \to r=2\cos\varphi$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$\to I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} rdr$$

Giải bài toán tính tích phân đường không phụ thuộc đường đi

+) Kiểm tra điều kiện $P_y^{'} = Q_x^{'}$ (*)

+) Nếu điều kiện (*) được thỏa mãn và đường lấy tích phân là đường cong kín thì $I = 0$.

+) Nếu điều kiện (*) được thỏa mãn và đường lấy tích phân là đường cong không kín thì ta chọn đường tích phân sao cho việc lấy tích phân là đơn giản nhất, thông thường ta chọn đường thẳng nối hai điểm hoặc đường gấp khúc có các cạnh song song với các trục tọa độ.

TÍCH PHÂN KHÔNG PHỤ THUỘC ĐƯỜNG