Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2018
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1. (*2 điểm*) Xét hệ phương trình tuyến tính sau, ở đó x, y, z là ẩn và m là tham số:

$$\begin{cases} 5x + 5y - 3z = -1 \\ 2x + 3y - 3z = -5 \\ x - y + (m+2)z = 9 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình với $m = 1$.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình theo m.

Bài 2. (*2 điểm*) Tìm nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bài 3 (*2 điểm*)

Cho ánh xạ tuyến tính $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 3y + z, 4x + 7y - z).$$

(a) Tìm ma trận của T đối với các cở sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$.

(b) Xác định xem $(0, 3, 3)$ có nằm trong ảnh của T hay không?

(c) Tìm một cơ sở của không gian ảnh $\operatorname{im}(T)$ của T.

Bài 4. (*2 điểm*) Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^4$, cùng với tích vô hướng thông thường trong $\mathbb{R}^4$, sinh bởi tập

$$S = \{(2, 1, 0, -1); (1, 0, 1, 0); (1, 1, -1, -1)\}.$$

(a) Tìm một cơ sở của V và dùng Gram-Schmidt để đưa cơ sở tìm được về cơ sở trực chuẩn.

(b) Tìm hình chiếu của vectơ $x = (1, 1, 1, 1)$ lên V.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận A với tham số thực a: $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng của A. Chứng minh rằng nếu $a = \frac{1}{2}$ thì ma trận A không chéo hóa được.

(b) Khi $a = 0$, hãy tìm một ma trận P khả nghịch (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 1

Bài 1. (a) Với $m = 1$, ma trận hệ số mở rộng tương đương với:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & -9 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ có vô số nghiệm: $x = \frac{22}{5} - \frac{6}{5}z, y = -\frac{23}{5} + \frac{9}{5}z, z \in \mathbb{R}$.

(b) Ma trận hệ số mở rộng tương đương với:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m+2 & 9 \\ 0 & 5 & -2m-7 & -23 \\ 0 & 0 & -m+1 & 0 \end{array}\right)$$

Từ đó hệ có vô số nghiệm nếu $m = 1$ (câu trên), và có nghiệm duy nhất $(\frac{22}{5}, \frac{-23}{5}, 0)$ nếu $m \neq 1$.

Bài 2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 3. (a) (*0.5 điểm*) Ma trận của T đối với cơ sở chính tắc:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (*0.5 điểm*) $(0, 3, 3) = T(1, 0, 1)$ nằm trong ảnh của T.

(c) (*1 điểm*) Ảnh là không gian cột của ma trận A. Một cơ sở của nó là

$$\{(1, 2, 4), (2, 3, 7)\}.$$

Bài 4. (a) Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, V là không gian hàng của A. Đưa A về ma trận bậc thang, ta được

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cơ sở của V: $\{u_1, u_2\} = \{(1, 0, 1, 0); (0, 1, -2, -1)\}$.

Áp dụng quá trình Gramschmidt, ta được

$$w_1 = u_1 = (1, 0, 1, 0);$$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (1, 1, -1, -1).$$

Cơ sở trực chuẩn của V: $\{v_1, v_2\} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.

Cơ sở của V cũng có thể lấy là $\{(2,1,0,-1);(1,0,1,0)\}$*. Khi đó, cơ sở trực chuẩn tương ứng là* $\{(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0,-\frac{1}{\sqrt{6}});(\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}})\}$.

(b)
$$proj_V(x) = \langle x, v_1\rangle v_1 + \langle x, v_2\rangle v_2 = (1,0,1,0).$$

Bài 5. (a) Ta có đa thức đặc trưng của A là $|\lambda I_3 - A| = (\lambda - a)(\lambda - 1 - a)(\lambda - 1 + a)$.
Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1 = a, \lambda_2 = 1 + a, \lambda_3 = 1 - a$.
Nếu $a = \frac{1}{2}$ thì $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$(bội 2)$, \lambda_2 = \frac{3}{2}$.
Xét

$$\lambda_1 I_3 - A = \frac{1}{2}I_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan elimination}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Do đó không gian riêng của A tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ là $V_{1/2}(A) = \text{span}(\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\})$, tức là không thể tìm được 2 vector riêng độc lập tuyến tính tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1/2$ (bội 2). Vì vậy, khi $a = \frac{1}{2}$, ma trận A không chéo hóa được.

(b) Khi $a = 0$, ma trận A có các giá trị riêng: $\lambda_1 = 0$(bội 1), $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (bội 2).
Với $\lambda_1 = 0$:

$$\lambda_1 I_3 - A = -A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Do đó không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 0$ là
$V_0(A) = \text{span}(\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\})$.
Chọn $p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Với $\lambda_2 = 1$:

$$\lambda_2 I_3 - A = I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Do đó không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ là $V_1(A) = \text{span}(\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\})$.
Chọn $p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Lấy $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Khi đó $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.