Đề thi Kết thúc môn học, Học kỳ 1 năm học 2020-2021
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(*Thời gian làm bài: 120 phút)*

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{cases} (m-1)x + 3y + 3z & = 3 \\ 6x + 6y + 12z & = 13 \\ 12x + 9y - z & = 2 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình với $m = 3$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho ma trận hàng $v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, trong đó a là một tham số.

(a) Tìm kích cỡ (hay cấp) của các ma trận vv^T và v^Tv (trong đó v^T là ma trận chuyển vị của v). Tính v^Tv.
(b) Tính định thức của ma trận $v^Tv - I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3. Tìm điều kiện của a để $v^Tv - I$ khả nghịch.
(c) Tìm ma trận nghịch đảo của $v^Tv - I$ trong trường hợp $a = 0$.

Bài 3 (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, -x + 2y + 4z).$$

(a) Tìm ma trận chuẩn tắc của T (tức là ma trận của T đối với cặp cơ sở chuẩn tắc (hay chính tắc) của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$).
(b) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker(T)$ của T.
(c) Tìm số chiều của không gian ảnh $\mathrm{im}(T)$ ($\mathrm{range}(T)$).
(d) Tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (1, -1)\}$ có phải là một không gian con của $\mathbb{R}^3$ không? Tại sao?

Bài 4 (*2 điểm*) Xét không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường (tích chấm) $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Cho hệ vectơ

$$\{v_1 := (a, 1, 0),\ v_2 := (2, 2a, 2),\ v_3 := (1, 2, 3a)\},$$

với a là một tham số.

(a) Với những giá trị nào của a thì

$$\langle v_1, v_2 \rangle . \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$$

(b) Với giá trị a nguyên tìm được ở câu (a) (nếu có), dùng phương pháp Gram-Schmidt để đưa tập vectơ trên về một tập trực chuẩn.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng và không gian riêng tương ứng của A.
(b) Tìm một ma trận trực giao P và một ma trận đường chéo D (nếu có) sao cho $P^TAP = D$.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 2

Bài 1. (a) Với $m = 3$, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$2x + 3y + 3z = 3$$
$$6x + 6y + 12z = 13$$
$$12x + 9y - z = 2$$

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 12 & 13 \\ 12 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow_{R_2-3R1\rightarrow R_2, R_3-6R_1\rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -19 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow_{R_3-3R_2\rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -28 & -28 \end{pmatrix}$$

Do vậy, hệ có nghiệm là: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{-1}{3}, z = 1$.

(b) Ta có:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 12 & 13 \\ 12 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2\rightarrow R_3} \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 12 & 13 \\ 0 & -3 & -25 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2; \frac{1}{6}R_2\rightarrow R_2; -R_3\rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \frac{13}{6} \\ m-1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 25 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-(m-1)R_1\rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \frac{13}{6} \\ 0 & 4-m & 5-2m & \frac{31-13m}{6} \\ 0 & 3 & 25 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3; \frac{1}{3}R_2\rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \frac{13}{6} \\ 0 & 1 & \frac{25}{3} & 8 \\ 0 & 4-m & 5-2m & \frac{31-13m}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+(m-4)R_2\rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \frac{13}{6} \\ 0 & 1 & \frac{25}{3} & 8 \\ 0 & 0 & \frac{19m-85}{3} & \frac{35m-161}{6} \end{pmatrix}$$

Với $m = \frac{85}{19}$ hệ vô nghiệm.
Với $m \neq \frac{85}{19}$ hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 2. (a) (*0.5 điểm*) Kích cỡ của ma trận vv^T và v^Tv lần lượt là 1×1 và 3×3.
Ma trận $vv^T = (2 + a^2)$.

$$v^Tv = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -a \\ t & -a & a^2 \end{pmatrix}$$

(b) (*1 điểm*) Định thức của $v^Tv - I$ là $1 + a^2$. [*0.5 điểm*]
Vì $a^2 + 1 > 0$ với mọi t nên ma trận $v^Tv - I$ luôn khả nghịch với mọi a (*0.5 điểm*)

(c) (*0.5 điểm*) Thay $a = 0$ vào $v^Tv - I$ ta được ma trận:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo cần tìm là:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bài 3. (a) (*0,5 điểm*) Ma trận chuẩn tắc của T là

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) (*0,5 điểm*) Hạt nhân là không gian nghiệm của hệ:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ -x + 2y + 4z &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ 3y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

Có nghiệm $(x, y, z) = (-2t, -3t, t)$ với $t \in \mathbb{R}$. Vậy hạt nhân có một cở sở là $\{(-2, -3, 1)\}$.

(c) (*0,5 điểm*) Theo Định lý về số chiều, chiều của không gian ảnh bằng $\dim T(\mathbb{R}^3) = 3 - \dim\ker T = 2$.

(d) (*0,5 điểm*) Tập $T^{-1}(1, -1)$ không phải là không gian con vì không chứa vec-tơ $(0, 0, 0)$.

Bài 4. (a) Ta có:

- $\langle v_1, v_2 \rangle = 4a$;
- $\langle v_1, v_3 \rangle = a + 2$;
- $\langle v_2, v_3 \rangle = 2 + 10a$.

Vậy () $\iff 4a(a+2) = 2 + 10a \iff 2a^2 - a - 1 = 0 \iff a \in \{1; -1/2\}$.

(b) Với $a = 1$, ta có hệ $\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (2, 2, 2), v_3 = (1, 2, 3)\}$. Ta trực chuẩn hóa hệ này theo phương pháp Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} &w_1 := v_1 := (1, 1, 0); \\ &w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (2, 2, 2) - \frac{4}{2}(1, 1, 0) = (0, 0, 2); \\ &w_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = (1, 2, 3) - \frac{3}{2}(1, 1, 0) - \frac{6}{4}(0, 0, 2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right). \end{aligned}$$

Vậy $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một hệ trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ với

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = (0, 0, 1); \\ u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right). \end{aligned}$$

Bài 5. (a) Với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

đa thức đặc trưng của A là

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2.$$

Suy ra đa thức đặc trưng của A có hai giá trị riêng 0 (bội 1) và 2 (bội 2).
Với $\lambda_1 = 0$,

$$\lambda_1 I_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hệ

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

có nghiệm $(x, y, z) = (0, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Vậy không gian riêng tương ứng với $\lambda_1 = 0$ là $span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Với $\lambda_2 = 2$,

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hệ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

có nghiệm $(x, y, z) = (x, z, -z)$, $x, z \in \mathbb{R}$. Do đó không gian riêng tương ứng với $\lambda_2 = 2$ là $span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

(b) -Với $\lambda_1 = 0$ ta lấy vector riêng đơn vị $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

-Với $\lambda_2 = 2$ ta có các vector riêng $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hai vector này trực giao với nhau, sau khi trực chuẩn hóa, ta được $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ và $p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Chọn P là ma trận với các cột p_1, p_2, p_3, tức là

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ta có P là ma trận trực giao và

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$