Đề thi Kết thúc môn học, Hè 2018
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(*Thời gian làm bài: 120 phút*)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ (m-1)x - y + 3z = 6. \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $m = 4$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) (a) Cho ma trận $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Tính $B^T B$ và xác định xem ma trận $B^T B$ có khả nghịch hay không?

(b) Tính định thức $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Bài 3. (*2 điểm*) Cho $\mathcal{P}_2$ là không gian các đa thức với bậc nhỏ hơn hay bằng 2. Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cho bởi

$$T(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx, \quad \text{với mọi } f \in \mathcal{P}_2.$$

(a) Tìm ma trận của T trong cặp cơ sở $\{1, x, x^2\}$ của $\mathcal{P}_2$ và $\{1\}$ của $\mathbb{R}$.
(b) Tìm một cơ sở của hạt nhân (hay không gian hạch) $\mathrm{Ker}(T)$ của T. Tính số chiều của $\mathrm{Ker}(T)$.

Bài 4. (*2 điểm*) Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^4$ cùng với tích vô hướng thông thường trong $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các véc-tơ sau

$$(1, 1, 0, 2), (2, 3, 1, 5), (3, 4, 1, 7).$$

(a) Tìm một cơ sở và số chiều của V.
(b) Dùng Gram-Schmidt để đưa cơ sở tìm được ở phần (a) về cơ sở trực chuẩn.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, trong đó a là một số thực.

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng của A và chứng minh rằng với mọi a ta luôn có $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ là một véc-tơ riêng của A.
(b) Khi $a = 0$, hãy tìm một ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 1

Bài 1. (a) Khi $m = 4$, hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x - y + 3z = 6 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do vậy hệ vô nghiệm.

(b) Biện luận số nghiệm của phương trình trên theo tham số m:

Định thức ma trận hệ số là $4 - m$. Với $m \neq 4$ thì định thức của ma trận hệ số khác không. Do vậy hệ có nghiệm duy nhất.

Khi $m = 4$ thì hệ vô nghiệm (câu (a))

Bài 2. (a) $B^T B = \begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ma trận này có định thức bằng 0 nên không khả nghịch.

(b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 189.

Bài 3. (a) Ma trận của T đối với cơ sở đã cho là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathrm{Ker}(T) = \{a + bx + cx^2 | a, b, c \in \mathbb{R} : c = -3a\}$.

Một cơ sở của $\mathrm{Ker}(T)$ là $\{1 - 3x^2, x\}$.

$\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$.

Bài 4. (a) V chính là không gian hàng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 7. \end{bmatrix}$$

Dạng bậc thang của ma trận này là

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Một cơ sở của V là $\{v_1 = (1, 1, 0, 2), v_2 = (0, 1, 1, 1)\}$.

(b) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở của phần a:

$$w_1 = v_1 = (1, 1, 0, 2)$$
$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (-1/2, 1/2, 1, 0).$$

Cơ sở trực chuẩn cần tìm

$$u_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}})$$
$$u_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0).$$

Bài 5. (a)

(1) $$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & - & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & -a & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)^2(\lambda-1).$$

Vậy A có 3 giá trị riêng là : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$(bội 2)$, \lambda_3 = 1$.

Ta có $Av = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3v$, do đó v là một vector riêng của A với mọi a.

(b) Với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$: Xét hệ phương trình

(2) $$(2I_4 - A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giải hệ (2) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ có dạng $t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chọn $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Với $\lambda_2 = 3$: xét hệ

(3) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giải hệ (3) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 3$ có dạng $s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, trong đó s, t không đồng thời bằng 0. Chọn $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Với $\lambda_3 = 1$: Xét hệ

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Giải hệ (4) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 1$ có dạng $t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, t \neq 0$. Chọn $p_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Khi đó $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$