Ý nghĩa của tích phân hai lớp

1. Hàm f liên tục và $f(x,y) \geq 0, \forall(x,y) \in D \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dS = V$.

2. $f(x,y) = 1, \forall(x,y) \in D \Rightarrow \iint\limits_D dS = S_D$ (diện tích miền D).

3. $f(x,y)$ là hàm mật độ khối lượng của tấm phẳng $\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dS = M_D$ (khối lượng của tấm phẳng có diện tích D).

Tính chất của tích phân hai lớp

Giả sử $f(x,y)$ và $g(x,y)$ khả tích trong D, các tính chất sau được thỏa mãn:

1. $\iint\limits_D \left[f(x,y)+g(x,y)\right]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$
2. $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy, k \in R$
3. $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} kf(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} kf(x,y)dxdy, D_1 \cap D_2 = \varnothing, D = D_1 \cup D_2$
4. $f(x,y) \leq g(x,y), \forall(x,y) \in D \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$
5. $m \leq f(x,y) \leq M, \forall(x,y) \in D \Rightarrow mS_D \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS_D$
6. Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền đóng và bị chặn D thì tồn tại (x,y) sao cho:

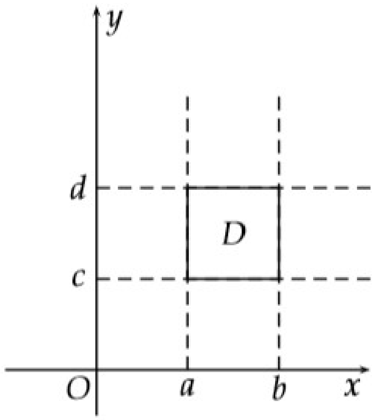
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f\left(\overline{x},\overline{y}\right)S_D$$

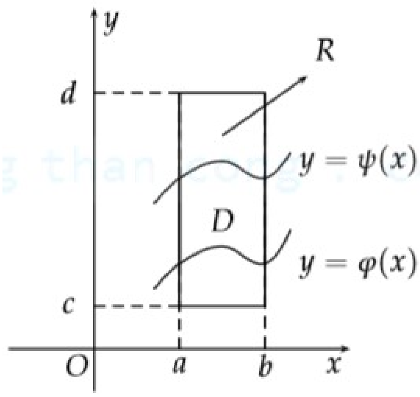
   với $f\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ được gọi là giá trị trung bình của tích phân.

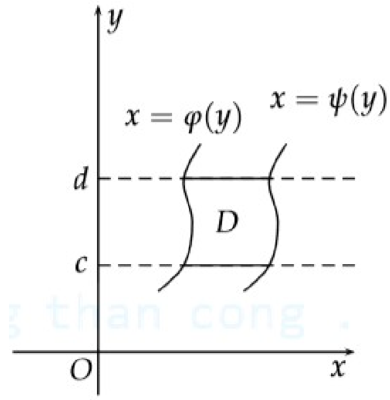
Tích phân kép trong hệ tọa độ Descartes

Để tính tích phân hai lớp $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$ ta phải đưa về tính các tích phân lặp.

1. Phác thảo hình dạng của miền D.







2. Nếu D là miền hình chữ nhật $(D): a \le x \le b; c \le y \le d$ thì ta có thể sử dụng một trong hai tích phân lặp (**Định lý Fubini**):

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

3. Nếu D là hình thang cong có các cạnh song song với Oy, $(D): a \le x \le b; \varphi(x) \le y \le \psi(x) \to$ tích phân lặp theo dy trước, dx sau:

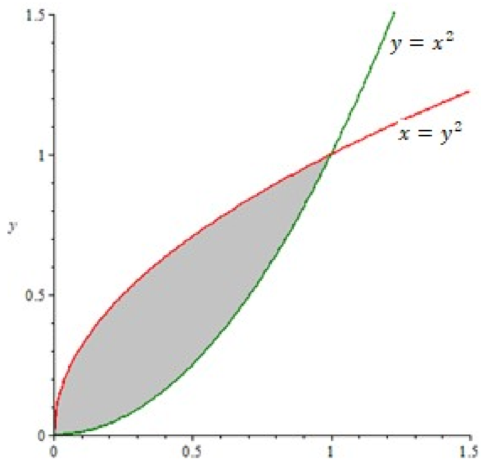
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b \left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

4. Nếu D là hình thang cong có các cạnh song song với Ox, $(D): c \le y \le d; \varphi(y) \le x \le \psi(y) \to$ tích phân lặp theo dx trước, dy sau:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x,y)\,dx = \int_c^d \left[\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

5. Nếu D có hình dáng phức tạp thì thông thường sẽ chia miền D thành một số hữu hạn các miền có dạng 3, 4 rồi sử dụng tính chất cộng tính để đưa về tính toán các tích phân lặp trên miền có dạng 3, 4.

Bài tập. Tính $I = \iint\limits_D x^2(y-x)\,dxdy$, D giới hạn bởi: $y = x^2$ và $x = y^2$.



Miền xác định:

$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

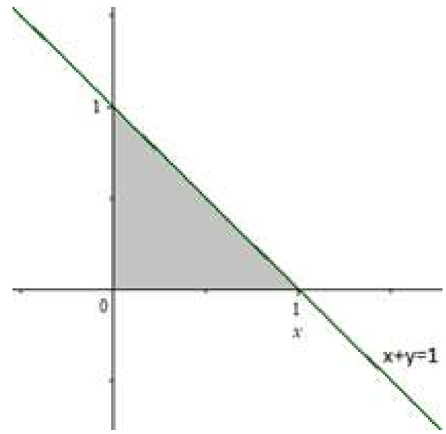
$$D:\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_D x^2(y-x)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2(y-x)\,dy = \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y \right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^5 - x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^3 \right) dx = -\frac{1}{504}$$

Bài tập. Tính $I = \iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, D giới hạn bởi các đường:

$$x = 0, y = 0, x + y = 1$$



Miền xác định:

$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$$

$$D:\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1-y \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} \frac{y}{x^2+y^2}dy = \int_0^1 x.\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+y^2\right)\right]\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x.\ln\left(2x^2-2x+1\right)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x.\ln\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left(I_1 - I_2\right)$$

Tính I_1 và I_2 bằng công thức tích phân từng phần: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

$$I_1 = \int_0^1 x.\ln\left(2x^2-2x+1\right)dx = \int_0^1 \ln\left(2x^2-2x+1\right)d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}.\ln\left(2x^2-2x+1\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}.\frac{4x-2}{2x^2-2x+1}dx$$

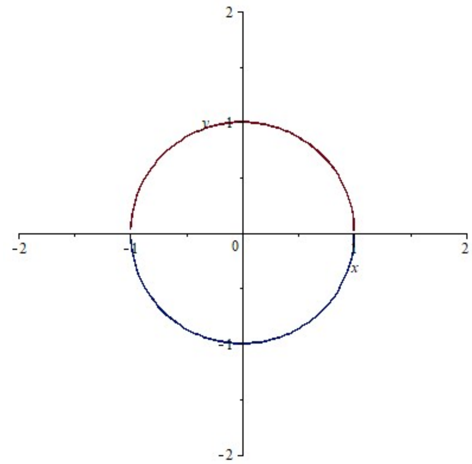
$$= -\int_0^1 \frac{2x^3-x^2}{2x^2-2x+1}dx = -\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-4x+2}\right)dx = -\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{(2x-1)^2+1}\right)dx$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\arctan\left(2x-1\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}-1$$

$$I_2 = \int_0^1 2x\ln xdx = \int_0^1 \ln xd\left(x^2\right) = x^2\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x^2\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{2}$$

Vì vậy, tích phân đã cho: $I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4} = \frac{\pi-2}{8}$

Bài tập. Tính $I = \iint\limits_D x^2 y dxdy, D = \left\{ \left(x, y \right) : x^2 + y^2 = 1, x \ge 0 \right\}$



$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

$$I = \iint\limits_D x^2 y dxdy = \int\limits_0^1 x^2 \left[\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right] dx = 0$$

Phép đổi thứ tự lấy tích phân

1) Thứ tự lấy tích phân theo x hoặc y trước không thay đổi giá trị của tích phân.

2) Thay đổi thứ tự lấy tích phân có thể mang lại cách tính đơn giản hơn hoặc thậm chí biến một tích phân không tính được trở nên có thể.

Bài tập. Đổi thứ tự lấy tích phân trong biểu thức: $I = \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$

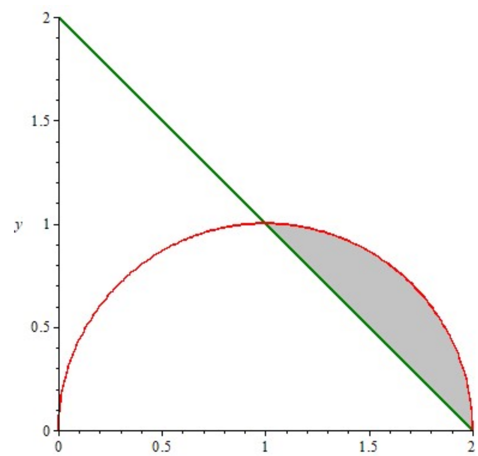
Lưu ý: $y = \sqrt{2x-x^2} \leftrightarrow y^2 = 2x - x^2 \leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ là đường tròn có tâm $(1,0)$ và bán kính bằng 1.

Từ biểu thức tích phân, biểu diễn giải tích của miền D là

$$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 2 - x \le y \le \sqrt{2x - x^2} \end{cases}$$

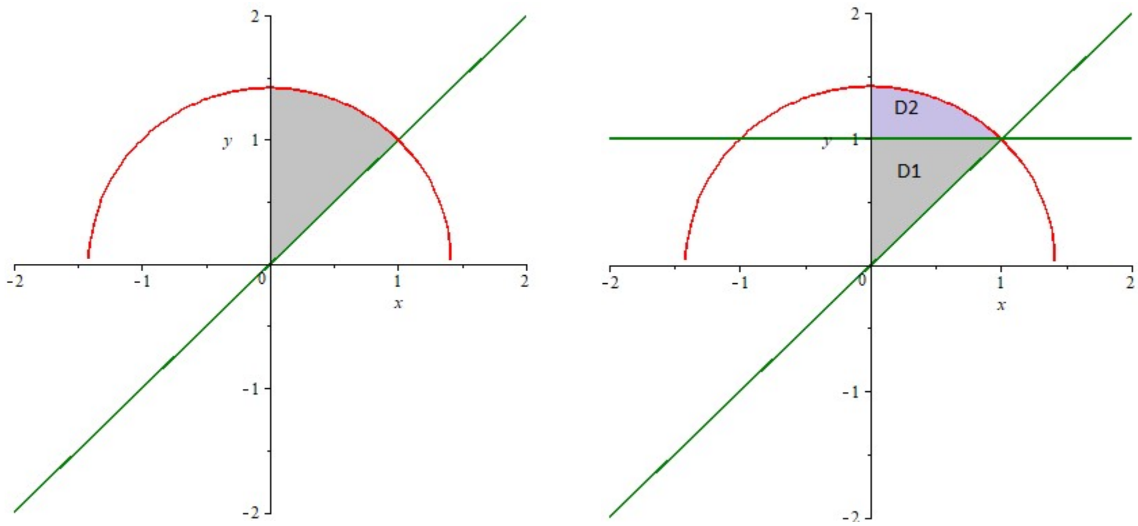
Vẽ miền D và biểu diễn lại dưới dạng:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 2 - y \le x \le 1 + \sqrt{1 - y^2} \end{cases}$$



Dẫn đến: $$I = \int_0^1 dy \int_{2-x}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

Bài tập. Đổi thứ tự lấy tích phân trong biểu thức sau: $I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$



Đổi miền xác định:

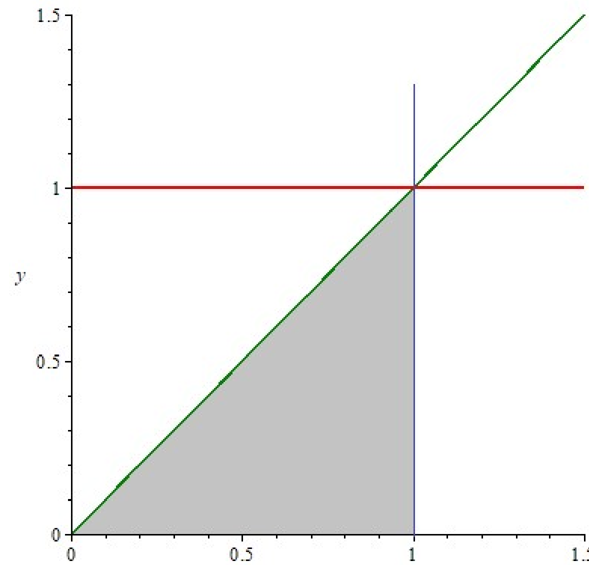
$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le \sqrt{2-x^2} \end{cases} \to D1: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le y \end{cases}; D2: \begin{cases} 1 \le y \le \sqrt{2} \\ 0 \le x \le \sqrt{2-y^2} \end{cases}$$

$$\to I = \int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx$$

Bài tập. Tính $I = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$

Miền xác định:

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases} \rightarrow D^*: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

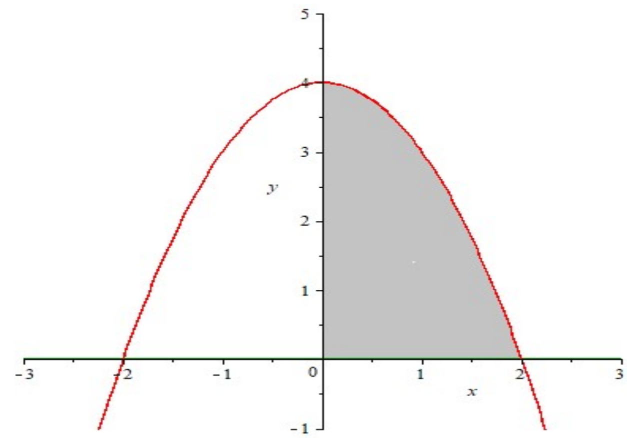


$$\rightarrow I = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = \int_0^1 \left(e^{x^2} y \Big|_0^x \right) dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} d\left(x^2\right) = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

Bài tập. Tính tích phân: $I=\int_0^2 dx\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}dy$ trong miền $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\0\le y\le 4-x^2\end{cases}$

Đổi miền xác định:

$$D^*:\begin{cases}0\le y\le 4\\0\le x\le\sqrt{4-y}\end{cases}$$



Dẫn đến:

$$\rightarrow I=\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{xe^{2y}}{4-y}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 e^{2y}dy=\frac{e^8}{4}-\frac{1}{4}$$

Tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối

Do tính liên tục của hàm $f(x,y)$ nên đường $f(x,y) = 0$ sẽ chia miền D thành 2 miền: trên miền $D^+, f(x,y) \geq 0$, trên miền $D^-, f(x,y) \leq 0$. Ta có công thức:

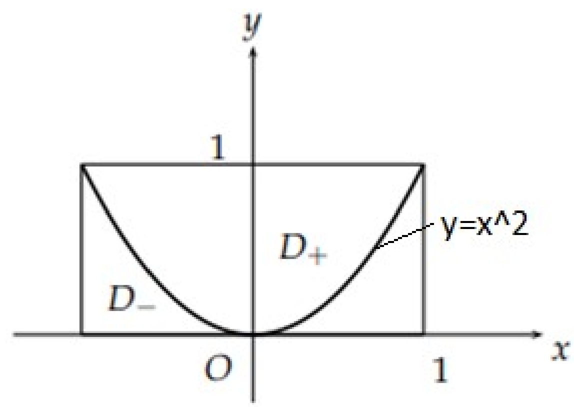
$$\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy = \iint\limits_{D^+} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{D^-} f(x,y)dxdy \quad (*)$$

Các bước thực hiện:

- Vẽ đường cong $f(x,y) = 0$ để phân chia miền D.
- Xét một điểm (x_0, y_0) bất kỳ, nếu $f(x_0, y_0) > 0$ thì miền chứa (x_0, y_0) là D^+ và ngược lại.
- Sử dụng công thức (*) để tính.

Bài tập. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}dxdy, D = \{(x,y) \in R^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

$$D^+ : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}; D^- : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$



$$I_1 = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} \sqrt{y - x^2}dy = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2} \sqrt{x^2 - y}dy = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} |x^3|dx = \frac{4}{3}\int_{0}^{1} x^3 dx = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$$

Tích phân kép trong trường hợp miền lấy tích phân là miền đối xứng qua trục tọa độ

Định lý 1. Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng là trục Oy) và hàm $f(x,y)$ là hàm lẻ đối với y (tương ứng đối với x) thì:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$$

Định lý 2. Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng là trục Oy) và hàm $f(x,y)$ là hàm chẵn đối với y (tương ứng đối với x) thì:

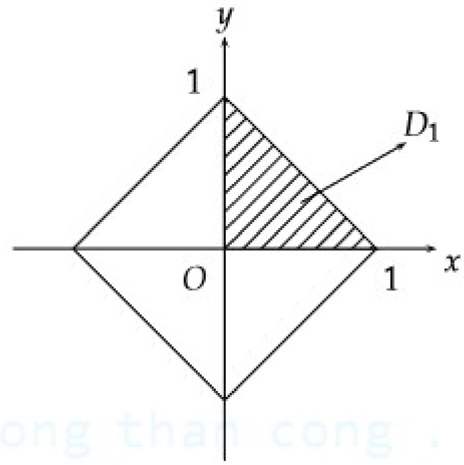
$$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D^+} f(x,y)dxdy$$

Trong đó D^+ là phần D nằm phía trên trục x (tương ứng là phần D nằm bên phải của trục y).

Định lý 3. Nếu miền D là miền đối xứng qua gốc tọa độ và hàm $f(x,y)$ thỏa mãn $f(-x,-y) = -f(x,y)$ thì:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$$

Bài tập. Tính $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \left(|x|+|y|\right)dxdy$



Vì D đối xứng qua cả Ox và Oy và hàm $f\left(x,y\right)=|x|+|y|$ là hàm chẵn với x,y nên:

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \left(|x|+|y|\right)dxdy = 4\iint\limits_{D_1}\left(x+y\right)dxdy = 4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x+y\right)dy = \frac{4}{3}$$

Phép đổi biến tổng quát trong tích phân kép

Mục đích của phép đổi biến số là đưa việc tính tích phân từ miền D_{xy} có hình dáng phức tạp về tính tích phân trên miền D_{uv} đơn giản hơn như là hình thang cong hoặc hình chữ nhật. Trong nhiều trường hợp, phép đổi biến số còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tính tích phân.

Phép đổi biến tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền D_{xy} là giao của hai họ đường cong. Xét tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, trong đó $f(x,y)$ liên tục trên D. Thực hiện phép biến đổi số: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ (*)

Giả sử phép đổi biến thỏa mãn:

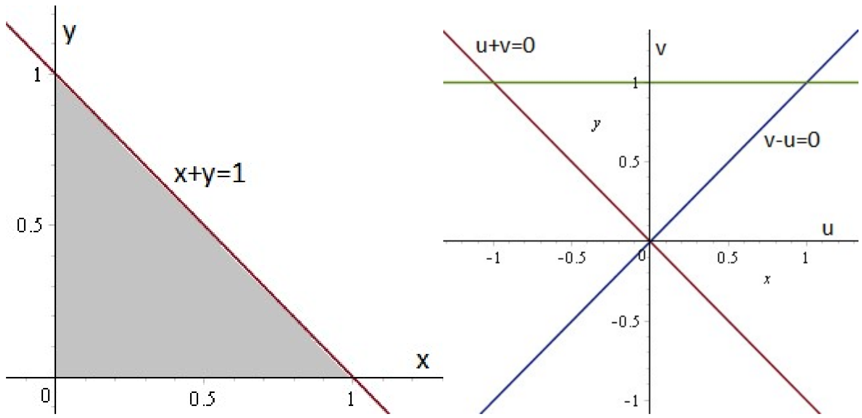
- ✓ $x = x(u,v), y = y(u,v)$ là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng D_{uv} của mặt phẳng $O'uv$.
- ✓ Công thức (*) xác định song ánh từ $D_{uv} \to D$.
- ✓ Định thức Jacobi $J = \left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u,v) \in D_{uv}$

Có thể tính J thông qua $J^{-1} = \left|\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$

Khi đó công thức đổi biến số:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|dudv$$

Bài tập. Tính $I=\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy, D=\left\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\right\}$



Đặt $u=x-y, v=x+y \to x=\frac{1}{2}(u+v), y=\frac{1}{2}(v-u)$

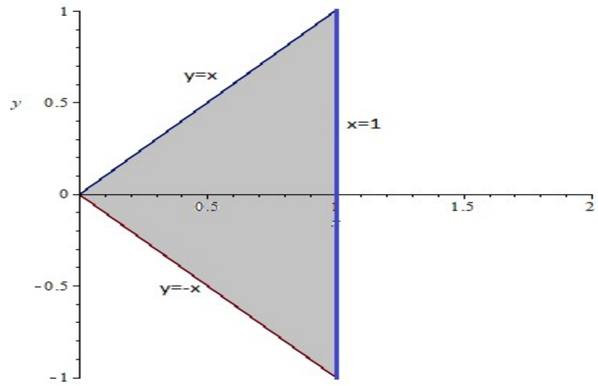
$$\to D^*=\left\{(u,v): 0\le v\le 1, u+v\ge 0, v-u\ge 0\right\}$$

$$J=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Tích phân trở thành:

$$I=\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D^*} e^{\frac{u}{v}}dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left(e-e^{-1}\right)dv=\frac{1}{4}\left(e-e^{-1}\right)$$

Bài tập. Tính $I = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} (2-x-y)^2\, dy$



Đặt

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}; J^{-1} = \left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Miền xác định:

$$-x \le y \le x \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -x \\ x - y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \ge 0 \\ x - y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \ge 0 \\ v \ge 0 \end{cases}$$

$$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \ge 0 \\ u + v \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \ge -u \\ v \le 2 - u \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -x \le y \le x \end{cases} \to D^*: \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 2 - u \end{cases}$$

$$\to I = \int_0^2 du \int_0^{2-u} \frac{1}{2}(2-u)^2\, dv = 2$$

Bài tập. Tính $I=\iint\limits_D\left(x^2-xy+y^2\right)dxdy, D=\left\{(x,y): x^2-xy+y^2\le 2\right\}$

Ta biến đổi phương trình đường cong:

$$x^2-xy+y^2=2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2=2$$

Đặt $u=x-\frac{y}{2}, v=\frac{\sqrt{3}y}{2} \Rightarrow x=u+\frac{v}{\sqrt{3}}; y=\frac{2v}{\sqrt{3}}$

$$\to D^*=\left\{(u,v): u^2+v^2\le 2\right\}; J=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Tích phân trở thành:

$$I=\iint\limits_D\left(x^2-xy+y^2\right)dxdy=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D^*}\left(u^2+v^2\right)dudv=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}du\int\limits_{-\sqrt{2-u^2}}^{\sqrt{2-u^2}}\left(u^2+v^2\right)dv$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(u^2v+\frac{v^3}{3}\right)_{-\sqrt{2-u^2}}^{\sqrt{2-u^2}}du=\frac{8}{3\sqrt{3}}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(u^2\sqrt{2-u^2}+\sqrt{2-u^2}\right)du$$

$$=\left(\frac{2\left(\sqrt{2-u^2}\left(u^2+1\right)+6\sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right)}{3\sqrt{3}}\right)_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

Phép đổi biến trong hệ tọa độ cực

Trong nhiều trường hợp, việc tính toán tích phân kép trong toạ độ cực đơn giản hơn rất nhiều so với việc tính tích phân trong toạ độ Descartes, đặc biệt là khi miền D có dạng hình tròn, quạt tròn... và hàm dưới dấu tích phân có những biểu thức $x^2 + y^2$.

Mối liên hệ giữa hệ tọa độ Descartes và hệ tọa độ cực:

$$x = rcos\varphi; y = rsin\varphi$$

Định thức Jacobi:

$$J = \left|\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Và công thức tính tích phân hai lớp:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$$

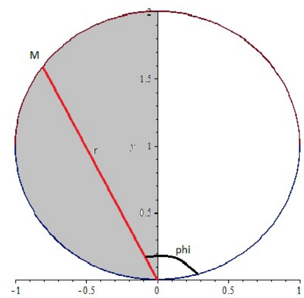
Bài tập. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường:

$x^2 + (y-1)^2 = 1; x = 0, (x \le 0)$.

Đặt $x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$, dẫn đến:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \to x^2 + y^2 = 2y \to r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2r\sin\varphi \to r = 2\sin\varphi$$

$$D_{r,\varphi}: \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 2\sin\varphi \end{cases}$$



$$\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy = \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \sqrt{4 - r^2}\,rdr \qquad (*)$$

Ta tính riêng $\int_0^{2\sin\varphi} \sqrt{4 - r^2}\,rdr$. Đặt $t = \sqrt{4 - r^2}$ dẫn đến:

$$t^2 = 4 - r^2 \to tdt = -rdr$$

$$\to \int_0^{2\sin\varphi} \sqrt{4 - r^2}\,rdr = -\int_2^{-2\cos\varphi} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-2\cos\varphi}^{2} = \frac{8}{3}\left(1 + \cos^3\varphi\right)$$

Từ

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \to \cos^3\varphi = \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}:$$

$$(*) \Rightarrow \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy = \frac{8}{3}\int_{\pi/2}^{\pi} \left(1 + \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}\right) d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}\int_{\pi/2}^{\pi} (4 + \cos 3\varphi + 3\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{2}{3}\left.\left(4\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + 3\sin\varphi\right)\right|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{3}\left(2\pi - \frac{8}{3}\right)$$

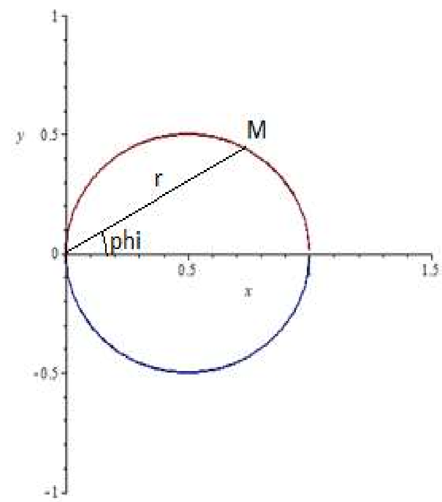
Bài tập. Tính tích phân: $I = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2 + 1\right)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi đường: $x^2 + y^2 - x = 0$

Ta có: $$x^2 + y^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Đặt $x = r cos\varphi; y = r sin\varphi$, dẫn đến:

$$x^2 + y^2 = x \to r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r\cos\varphi \to r = \cos\varphi$$

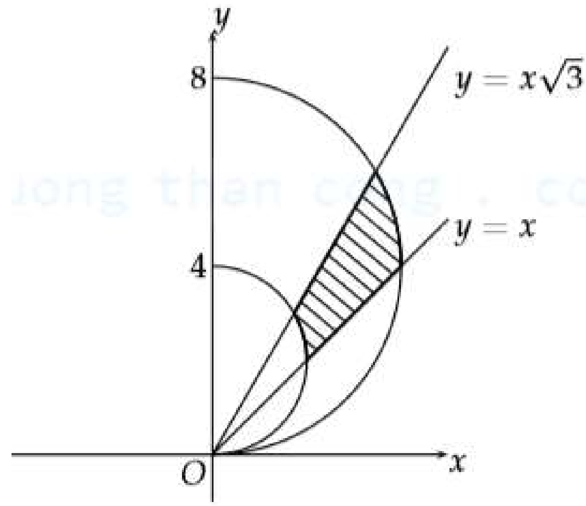
$$D': \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le \cos\varphi \end{cases}$$



$$\Rightarrow I = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2 + 1\right)dxdy = \iint\limits_{D'} \left(r^2 + 1\right)rdrd\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} \left(r^3 + r\right)dr$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right)\right]_0^{\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos^4\varphi}{4} + \frac{\cos^2\varphi}{2}\right)d\varphi$$

Bài tập. Tính $I = \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ D: \begin{cases} 4y \le x^2+y^2 \le 8y \\ x \le y \le x\sqrt{3} \end{cases}, x \ge 0$



Đặt:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \\ 4\sin\varphi \le r \le 8\sin\varphi \end{cases}$$

Tích phân trở thành:

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \frac{1}{r^4} r dr = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{64\sin^2\varphi} - \frac{1}{16\sin^2\varphi}\right) d\varphi = \frac{3}{128}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$