Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2019
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(*Thời gian làm bài: 120 phút*)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + mz + (2-m)t &= 6 \\ x - 4y + 3z + 2t &= 5 \\ -3x - 3y + 2z - 2t &= -7 \end{aligned}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $m = 1$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính định thức của ma trận A.
(b) Ma trận A có khả nghịch hay không? Nếu có, tính A^{-1}.

Bài 3 (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x - z, 2x - y - 2z, -x + 2y + z).$$

(a) Tìm ma trận chính tắc (chuẩn tắc) của T.
(b) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker(T)$. Ánh xạ T có phải là đơn cấu (đơn ánh) không? Vì sao?
(c) Véc-tơ $(0, -1, 1)$ có thuộc không gian ảnh $\mathrm{im}(T) = \mathrm{range}(T) = T(\mathbb{R}^3)$ hay không? Vì sao?

Bài 4. (*2 điểm*) Xét không gian $\mathbb{R}^3$ cùng với tích vô hướng thông thường (tích chấm). Xem $\mathbb{R}^3$ như là hệ trục tọa độ $Oxyz$, O là gốc tọa độ. Cho tập hợp các véc-tơ

$$\{v_1 = \overrightarrow{OA_1} = (1, 0, 1);\ v_2 = \overrightarrow{OA_2} = (a, 1, 1);\ v_3 = \overrightarrow{OA_3} = (1, 1, -a)\}.$$

(a) Với những giá trị nào của a thì A_1, A_2, A_3 là các đỉnh của một tam giác đều?
(b) Với $a = 1$, dùng phương pháp Gram-Schmidt để đưa tập hợp các véc-tơ trên về một tập trực chuẩn.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận A với tham số a: $A = \begin{bmatrix} 0 & -3a & 0 \\ 1 & 2a & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Viết đa thức đặc trưng của A. Chứng minh rằng với mọi a ta luôn có $\lambda = 1$ là một giá trị riêng của A.
(b) Khi $a = -1$, hãy tìm một ma trận P khả nghịch (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 1

Bài 1. a) Khi $m = 1$, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x - 4y + 3z + 2t &= 5 \\ y \qquad - t &= -2 \\ z - t &= -2 \end{aligned}$$

(Các phép biến đổi:
- $R_1 \leftrightarrows R2$; $R_2 - 4 \times R_1$;
- $R_3 + 3 \times R_1$; $R_2 + 1 \times R_3$;
- $R_3 + 5 \times R_2$; $R_2 \times \frac{1}{3}$; $R_3 \times \frac{1}{11}$.)

Từ đó hệ có vô số nghiệm: $x = -t + 3$, $y = t - 2$, $z = t - 2$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Dùng các phép biến đổi tương tự câu trên, đưa về hệ:

$$\begin{aligned} x - 4y + \quad 3z + \quad 2t &= 5 \\ 3y + (m-1)z - (m+2)t &= -6 \\ (5m+6)z - (5m+6)t &= -22 \end{aligned}$$

Với $m = -6/5$, hệ vô nghiệm. Với $m \neq -6/5$, hệ có vô số nghiệm.

(Đề bài chỉ yêu cầu biện luận số nghiệm nên không bắt buộc phải viết công thức nghiệm cụ thể.)

Bài 2. (a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$

(b) Do định thức của A khác 0 nên ma trận A khả nghịch. Sử dụng phương pháp khử Gauss-Jordan trên ma trận $[A|I_4]$ ta thu được kết quả

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Bài 3. (1) [*0.5 điểm*] Ma trận cần tìm là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Qua phép biến đổi sơ cấp hàng ta thu được

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nên

$$\ker T = \{(t, 0, t) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Vậy $\{(1, 0, 1)\}$ là một cơ sở của $\ker T$ và số chiều của $\ker T$ là 1. [*0.5 điểm*]

Vì $\ker T$ không tầm thường nên T không phải là đơn ánh. [*0.5 điểm*]

(3) [*0.5 điểm*] $(0,-1,1)$ không thuộc $\mathrm{im}(T)$ vì phương trình $AX=b$ vô nghiệm với $b=(0 \quad -1 \quad 1)^t$.

Bài 4. (a) Để A_1, A_2, A_3 là các đỉnh của một tam giác đều thì ta phải có

$$\begin{aligned}
& \|v_1-v_2\| = \|v_2-v_3\| = \|v_3-v_1\| \\
\iff\; & \|(1-a,-1,0)\| = \|(a-1,0,1+a)\| = \|(0,1,-a-1)\| \\
\iff\; & (a-1)^2+1 = (a-1)^2+(a+1)^2 = (a+1)^2+1 \\
\iff\; & a^2-2a+2 = 2a^2+2 = a^2+2a+2 \\
\iff\; & a=0.
\end{aligned}$$

(b) Với $a=1$, hệ trở thành $\{v_1=(1,0,1);\ v_2=(1,1,1);\ v_3=(1,1,-1)\}$, ta trực chuẩn hóa theo Gram-Schmidt:

$$w_1 := v_1 := (1,0,1)$$

$$w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}w_1 = (1,1,1)-\frac{2}{2}(1,0,1) = (0,1,0).$$

$$w_3 := v_3 - \frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}w_1 - \frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle}w_2 = (1,1,-1)-\frac{0}{2}(1,0,1)-\frac{1}{1}(0,1,0) = (1,0,-1).$$

Vậy hệ trực chuẩn nhận được là $\{u_1,u_2,u_3\}$ với

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$
$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = (0,1,0).$$
$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Bài 5. (a) (0.5 điểm) Đa thức đặc trưng của A là $|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3a & 0 \\ -1 & \lambda-2a & 0 \\ -1 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-2a\lambda+3a)$.

Ta thấy $\lambda=1$ là một nghiệm của đa thức đặc trưng của A, do đó nó là một giá trị riêng của A.

(b) (1.5 điểm) Khi $a=-1$, A có các giá trị riêng $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-3$.

Với $\lambda_1=1$: ta có $\lambda_1 I_3 - A = I_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ta tìm được 2 vector riêng độc lập tuyến tính tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1=1$: $p_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Với $\lambda_3=-3$: ta có $\lambda_3 I_3 - A = -3I_3 - A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

ta tìm được vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_3=-3$: $p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$