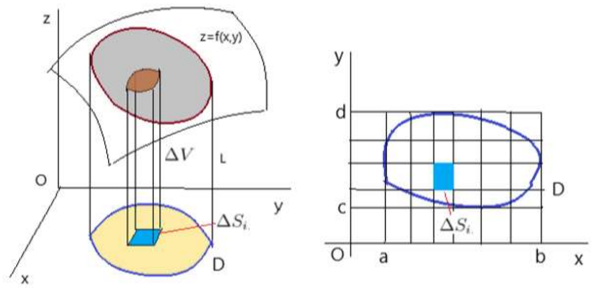
Bài toán thể tích

Xét mặt cong $z = f(x, y)$ xác định và liên tục trong miền đóng D có biên hữu hạn. Để tính thể tích hình trụ giới hạn bởi mặt phẳng Oxy, mặt cong $z = f(x, y)$ và mặt trụ tạo bởi các đường sinh song song với trục Oz và tựa trên D, bằng cách chia miền D thành n miền con có diện tích $\Delta S_i, i = 1..n$. Tương ứng với mỗi phần tử diện tích ΔS_i, ta xây dựng một hình trụ có thể tích $\Delta V = \Delta S_i f(x_i, y_i)$, trong đó (x_i, y_i) là điểm tùy ý trong ΔS_i.



Lập tổng Riemann ta nhận được thể tích V được xấp xỉ bởi:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i f(x_i, y_i)$$

Gọi $d(\Delta S_i)$ là "đường kính" của phần tử ΔS_i, tức là khoảng cách lớn nhất của những điểm chứa trong ΔS_i và $d = \max d(\Delta S_i)$. Dễ dàng nhận thấy nếu n càng lớn tức là chia miền D càng nhỏ thì công thức xấp xỉ trên càng chính xác.

Định nghĩa tích phân hai lớp

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trong miền đóng và bị chặn D. Chia miền D thành n phần tử có diện tích $\Delta S_i, i = 1..n$ và lấy điểm bất kỳ (x_i, y_i) trong ΔS_i. Lập tổng Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i f\left(x_i, y_i\right).$$

Khi $n \to \infty$ sao cho $d \to 0$, nếu $\lim\limits_{d \to 0} S_n$ tồn tại không phụ thuộc vào cách phân chia các phần tử ΔS_i thì được gọi là tích phân hai lớp của hàm $f(x, y)$ trong miền D và được ký hiệu: $\iint\limits_D f\left(x, y\right) dS$.

Lúc này D là miền lấy tích phân, $f(x, y)$ là hàm dưới dấu tích phân và khả tích trong D, dS là yếu tố diện tích.

Vì tích phân tồn tại không phụ thuộc vào cách phân chia phần tử diện tích bé ΔS_i, do đó trong hệ tọa độ Cartesian vuông góc, ta lấy $dS = dxdy$, tích phân được viết:

$$\iint\limits_D f\left(x, y\right) dS = \iint\limits_D f\left(x, y\right) dxdy$$

Ý nghĩa của tích phân hai lớp

1. Hàm f liên tục và $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in D \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dS = V$.

2. $f(x,y) = 1, \forall (x,y) \in D \Rightarrow \iint\limits_D dS = S_D$ (diện tích miền D).

3. f là mật độ của tấm phẳng $\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dS = M_D$ (khối lượng của tấm phẳng có diện tích D).

Tính chất của tích phân hai lớp

Giả sử $f(x,y)$ và $g(x,y)$ khả tích trong D, các tính chất sau được thỏa mãn:

1. $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$
2. $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy, k \in R$
3. $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} kf(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} kf(x,y)dxdy, D_1 \cap D_2 = \varnothing, D = D_1 \cup D_2$
4. $f(x,y) \leq g(x,y), \forall (x,y) \in D \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$
5. $m \leq f(x,y) \leq M, \forall (x,y) \in D \Rightarrow mS_D \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS_D$
6. Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền đóng và bị chặn D thì tồn tại (x,y) sao cho:

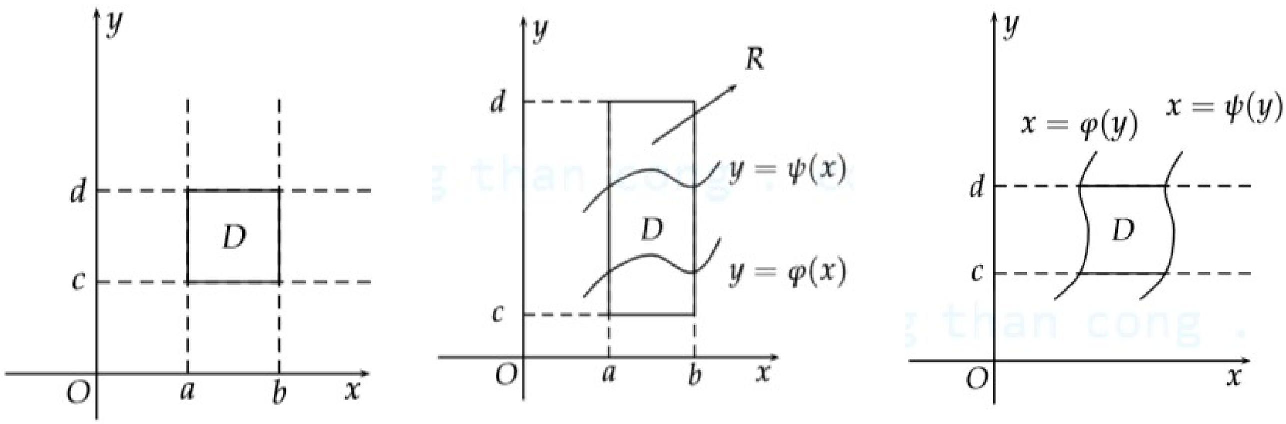
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f\left(\overline{x},\overline{y}\right)S_D$$

   với $f\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ được gọi là giá trị trung bình của tích phân.

Tính tích phân kép trong tọa độ Descartes

Để tính tích phân hai lớp $\iint_D f(x,y)\,dxdy,$ ta phải đưa về tính các tích phân lặp.

1. Phác thảo hình dạng của miền D.



2. Nếu D là miền hình chữ nhật $(D): a \le x \le b; c \le y \le d$ thì ta có thể sử dụng một trong hai tích phân lặp (**Định lý Fubini**):

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

3. Nếu D là hình thang cong có các cạnh song song với Oy, $(D): a \le x \le b; \varphi(x) \le y \le \psi(x) \rightarrow$ tích phân lặp theo dy trước, dx sau:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

4. Nếu D là hình thang cong có các cạnh song song với Ox, $(D): c \le y \le d; \varphi(y) \le x \le \psi(y) \rightarrow$ tích phân lặp theo dx trước, dy sau:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x,y)dx = \int_c^d \left[\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

5. Nếu D có hình dáng phức tạp thì thông thường sẽ chia miền D thành một số hữu hạn các miền có dạng 3, 4 rồi sử dụng tính chất cộng tính để đưa về tính toán các tích phân lặp trên miền có dạng 3, 4.

Ví dụ. Tính $I = \iint\limits_D \left(2x^2 - 3xy + y^2\right) dxdy, D = [1,2]x[2,3]$

<u>Cách 1:</u>

$$I = \int_2^3 \left[\int_1^2 \left(2x^2 - 3xy + y^2\right) dx \right] dy = \int_2^3 \left[\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3yx^2}{2} + y^2 x \right) \Bigg|_1^2 \right] dy = \int_2^3 \left(y^2 - \frac{9y}{2} + \frac{14}{3} \right) dy = -\frac{1}{4}$$

<u>Cách 2:</u>

$$I = \int_1^2 \left[\int_2^3 \left(2x^2 - 3xy + y^2\right) dy \right] dx = \int_1^2 \left[\left(2x^2 y - \frac{3xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_2^3 \right] dx = \int_1^2 \left(2x^2 - \frac{15x}{2} + \frac{19}{3} \right) dx = -\frac{1}{4}$$

Ví dụ. Tính: $I=\iint\limits_D x\sin(x+y)\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)\in R^2: 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$

Cách 1:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(x+y)\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-x\cos(x+y)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+x\cos x\right]dx$$

$$=\left[-\cos\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)-\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)\sin\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)+\frac{1}{2}\pi\sin\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)+\cos x+\sin x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

Cách 2:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(x+y)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin(x+y)-(x+y)\cos(x+y)+y\cos(x+y)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dy$$

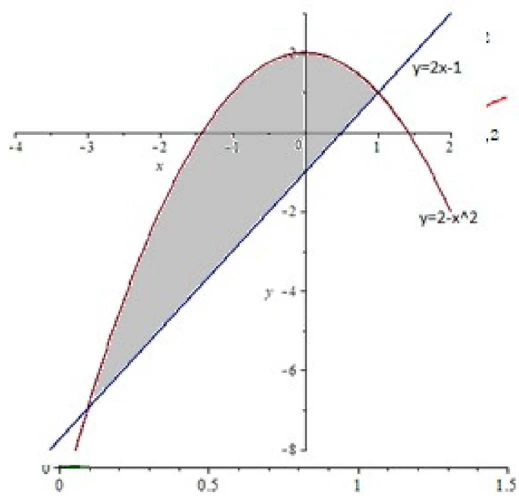
$$=\left[\sin\left(\frac{1}{2}\pi+y\right)-\left(\frac{1}{2}\pi+y\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi+y\right)+y\cos\left(\frac{1}{2}\pi+y\right)-\sin y\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

Ví dụ. Tính: $I=\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, D giới hạn bởi: $y = 2 - x^2$ và $y = 2x - 1$.

Giải $2 - x^2 = 2x - 1 \rightarrow 2$ giao điểm là $(-3, -7)$ và $(1,1)$.

Miền xác định:

$$D:\begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ 2x-1 \le y \le 2-x^2 \end{cases}$$



$$I=\iint\limits_D (x-y)\,dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy = \int_{-3}^{1} \left[xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{2x-1}^{2-x^2} dx$$

$$= \int_{-3}^{1} \left[x\left(2-x^2\right) - x(2x-1) - \frac{1}{2}\left(2-x^2\right)^2 + \frac{1}{2}(2x-1)^2 \right] dx$$

$$= \int_{-3}^{1} \left[-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right] dx$$

$$= \left[-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} \right]_{-3}^{1} = \frac{64}{15}$$

Ví dụ. Cho D là một tấm composite phẳng hình chữ nhật có kích thước $D=\left[0,1\right]x\left[1,3\right]$ và mật độ khối lượng $\rho\left(x,y\right)=xy\ln\left(x+y\right)\left(kg/m^2\right)$. Khối lượng của tấm được tính:

$$\iint\limits_D\left(xy\ln\left(x+y\right)\right)dxdy=\int_1^3\left[\int_0^1 xy\ln\left(x+y\right)dx\right]dy$$

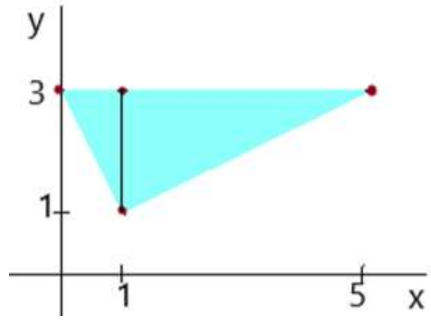
$$=\int_1^3 y\left(\frac{1}{2}\ln\left(x+y\right)x^2-\frac{x^2}{4}+\frac{yx}{2}-\frac{1}{2}y^2\ln\left(x+y\right)\right)\Bigg|_0^1 dy$$

$$=\int_1^3\left(\frac{1}{2}\ln\left(y\right)y^3-\frac{1}{2}\ln\left(y+1\right)y^3+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+y\right)y-\frac{y}{4}\right)dy$$

$$=2-10\ln\left(4\right)+\ln\left(16\right)+\frac{81\ln\left(81\right)}{32}=2.03309kg$$

Ví dụ. Tính $I = \iint\limits_D \left(x^2 - 5xy\right)dxdy$ trong đó D là miền tam giác có 3 đỉnh là $(0,3),(1,1),(5,3)$.

<u>Cách 1:</u>



Chia miền $D = D_1 \cup D_2$ sao cho:

$$D_1 = \left\{(x,y): 0 \le x \le 1, -2x+3 \le y \le 3\right\}, D_2 = \left\{(x,y): 1 \le x \le 5, \frac{x+1}{2} \le y \le 3\right\}$$

Ta có:

$$I = \iint\limits_{D_1} \left(x^2 - 5xy\right)dxdy + \iint\limits_{D_2} \left(x^2 - 5xy\right)dxdy$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{-2x+3}^{3} \left(x^2 - 5xy\right)dy\right]dx + \int\limits_1^5 \left[\int\limits_{\frac{x+1}{2}}^{3} \left(x^2 - 5xy\right)dy\right]dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left(12x^3 - 30x^2\right)dx + +\int\limits_1^5 \left(\frac{x^3}{8} + \frac{15x^2}{4} - \frac{175x}{8}\right)dx = -7 - 88 = -95$$

Cách 2: $D=\left\{(x,y):1\le y\le 3,\frac{3-y}{2}\le x\le 2y-1\right\}$

$$I=\int_1^3\left[\int_{\frac{3-y}{2}}^{2y-1}\left(x^2-5xy\right)dx\right]dy=\int_1^3\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2y}{2}\right]\Bigg|_{\frac{3-y}{2}}^{2y-1}$$

$$=\int_1^3\left[-\frac{5}{24}\left(32y^3-9y^2-30y+7\right)\right]dy=-95$$

Phép đổi thứ tự lấy tích phân

1) Thứ tự lấy tích phân theo x hoặc y trước không thay đổi giá trị của tích phân.

2) Thay đổi thứ tự lấy tích phân có thể mang lại cách tính đơn giản hơn hoặc thậm chí biến một tích phân không tính được trở nên có thể.

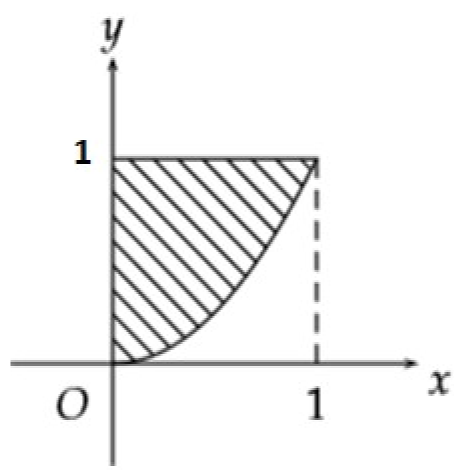
Ví dụ. Tính $I=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_{x^2}^1 e^{y^2}dy=\int\limits_0^1\left[\int\limits_{x^2}^1 e^{y^2}dy\right]xdx$

Hàm $f(x,y)=xe^{y^2}$ liên tục trên miền D nên chắc chắn khả tích trên D. Tuy nhiên, nếu tính tích phân trên theo thứ tự y trước thì không tính được, vì hàm số e^{y^2} không có nguyên hàm sơ cấp.

Từ biểu thức tích phân, biểu diễn giải tích của miền D là $\begin{cases}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le 1\end{cases}$

Vẽ miền D và biểu diễn lại dưới dạng:

$$\begin{cases}0\le y\le 1\\ 0\le x\le \sqrt{y}\end{cases}$$

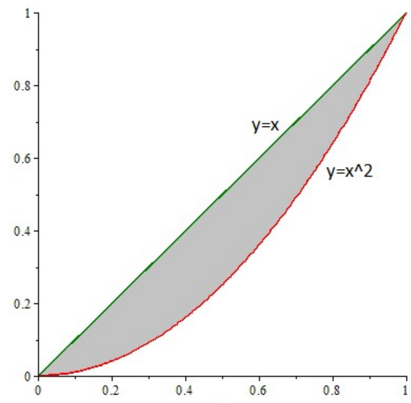


Do đó:

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}dx=\int\limits_0^1 e^{y^2}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{y^2}ydy=\frac{1}{4}e^{y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e-1)$$

Ví dụ. Đổi thứ tự lấy tích phân trong biểu thức sau: $I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$

Từ biểu thức tích phân, biểu diễn giải tích của miền D là $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$



Vẽ miền D và biểu diễn lại dưới dạng:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$$

Dẫn đến: $$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$$

Tích phân kép có chứa dấu giá trị tuyệt đối

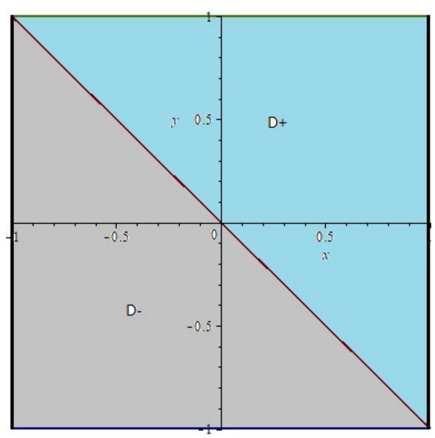
Do tính liên tục của hàm $f(x,y)$ nên đường $f(x,y) = 0$ sẽ chia miền D thành 2 miền: trên miền $D^+, f(x,y) \geq 0$, trên miền $D^-, f(x,y) \leq 0$. Ta có công thức:

$$\iint_D |f(x,y)| dxdy = \iint_{D^+} f(x,y) dxdy - \iint_{D^-} f(x,y) dxdy \quad (*)$$

Các bước thực hiện:

- Vẽ đường cong $f(x,y) = 0$ để phân chia miền D.
- Xét một điểm (x_0, y_0) bất kỳ, nếu $f(x_0, y_0) > 0$ thì miền chứa (x_0, y_0) là D^+ và ngược lại.
- Sử dụng công thức (*) để tính.

Bài tập (*). Tính $I = \iint_D |x+y| dxdy, D = \{(x,y) \in R^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$



$$D^+ : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -x \leq y \leq 1 \end{cases}; D^- : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq -x \end{cases}$$

$$\iint_D |x+y| dxdy = \iint_{D^+} (x+y) dxdy - \iint_{D^-} (x+y) dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-x}^{1} (x+y) dy - \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{-x} (x+y) dy = \frac{8}{3}$$

Tích phân kép trong trường hợp miền lấy tích phân là miền đối xứng qua trục tọa độ

Định lý 1. Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng là trục Oy) và hàm $f(x,y)$ là hàm lẻ đối với y (tương ứng đối với x) thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$$

Định lý 2. Nếu miền D là miền đối xứng qua trục Ox (tương ứng là trục Oy) và hàm $f(x,y)$ là hàm chẵn đối với y (tương ứng đối với x) thì:

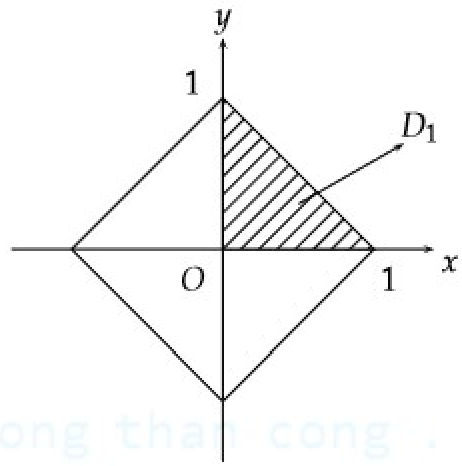
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 2\iint\limits_{D^+} f(x,y)dxdy$$

Trong đó D^+ là phần D nằm phía trên trục x (tương ứng là phần D nằm bên phải của trục y).

Định lý 3. Nếu miền D là miền đối xứng qua gốc tọa độ và hàm $f(x,y)$ thỏa mãn $f(-x,-y) = -f(x,y)$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$$

Bài tập. Tính $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\left(|x|+|y|\right)dxdy$



Vì D đối xứng qua cả Ox và Oy và hàm $f\left(x,y\right)=|x|+|y|$ là hàm chẵn với x,y nên:

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\left(|x|+|y|\right)dxdy=4\iint\limits_{D_1}\left(x+y\right)dxdy=4\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(x+y\right)dy=\frac{4}{3}$$

Phép đổi biến số tổng quát

Mục đích của phép đổi biến số là đưa việc tính tích phân từ miền D_{xy} có hình dáng phức tạp về tính tích phân trên miền D_{uv} đơn giản hơn như là hình thang cong hoặc hình chữ nhật. Trong nhiều trường hợp, phép đổi biến số còn có tác dụng làm đơn giản biểu thức tính tích phân.

Phép biến đổi tổng quát thường được sử dụng trong trường hợp miền D_{xy} là giao của hai họ đường cong. Xét tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, trong đó $f(x,y)$ liên tục trên D. Thực hiện phép biến đổi: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ (*)

Giả sử phép biến đổi thỏa mãn:

- ✓ $x = x(u,v), y = y(u,v)$ là các hàm số liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong miền đóng D_{uv} của mặt phẳng $O'uv$.
- ✓ Công thức (*) xác định song ánh từ $D_{uv} \to D$.
- ✓ Định thức Jacobi $J = \left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u,v) \in D_{uv}$

Có thể tính J thông qua $J^{-1} = \left|\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$

Khi đó ta có công thức đổi biến số:

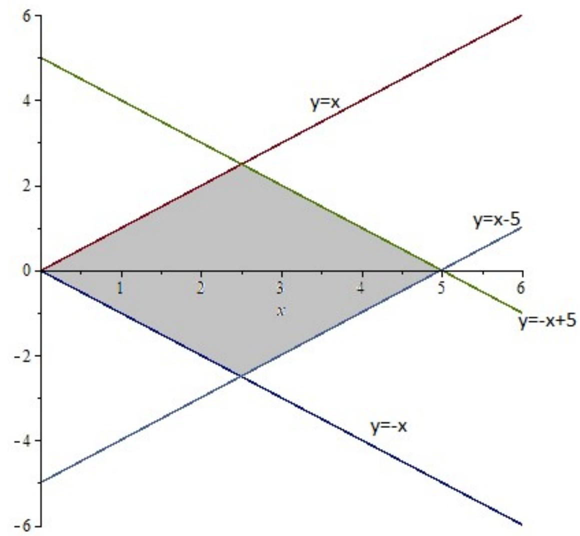
$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|dudv$$

Ví dụ. Tính $I=\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D là hình thoi có các đỉnh:

$$(0,0),(5,0),\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right),\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$$

Nhận thấy các cạnh của hình thoi có thể được đưa về dưới dạng:

$$y=x\to x-y=0$$
$$y=-x\to x+y=0$$
$$y=x-5\to x-y=5$$
$$y=-x+5\to x+y=5$$



Đặt:

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}\to\begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

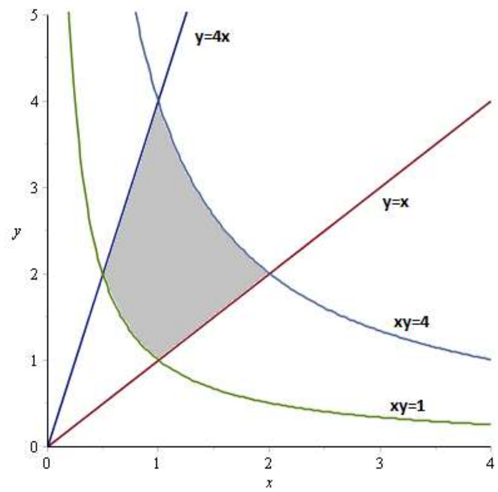
Miền xác định:

$$D_{uv}:\begin{cases} 0\le u\le 5 \\ 0\le v\le 5 \end{cases};J=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

Dẫn đến tích phân:

$$I=\iint\limits_{D_{uv}} u|J|dudv=\frac{1}{2}\int_0^5 dv\int_0^5 udu=\frac{1}{2}.5.\frac{25}{2}=\frac{125}{4}$$

Ví dụ. Tính $\iint\limits_D \left(4x^2-2y^2\right)dxdy, D:\begin{cases}1\le xy\le 4\\ x\le y\le 4x\end{cases}$



Đặt: $\begin{cases}u=xy\\ v=\dfrac{y}{x}\end{cases}\Rightarrow D_{uv}:\begin{cases}1\le u\le 4\\ 1\le v\le 4\end{cases}$

$$J^{-1}=\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & x\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{2y}{x}=2v$$

Dẫn đến tích phân:

$$I=\int_1^4 du\int_1^4\left(4\frac{u}{v}-2uv\right)\frac{1}{2v}dv=\int_1^4 du\int_1^4\left(\frac{2u}{v^2}-u\right)dv=-\int_1^4\frac{3}{2}udu=-\frac{45}{4}$$

Phép đổi biến trong hệ tọa độ cực

Trong nhiều trường hợp, việc tính toán tích phân kép trong toạ độ cực đơn giản hơn rất nhiều so với việc tính tích phân trong toạ độ Descartes, đặc biệt là khi miền D có dạng hình tròn, quạt tròn... và hàm dưới dấu tích phân có những biểu thức $x^2 + y^2$.

Mối liên hệ giữa hệ tọa độ Descartes và hệ tọa độ cực:

$$x = rcos\varphi; y = rsin\varphi$$

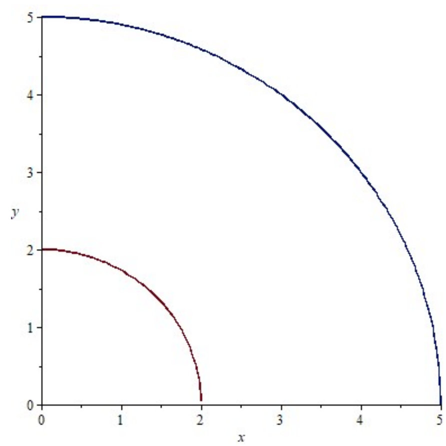
Định thức Jacobi:

$$J = \left|\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Và công thức tính tích phân hai lớp trở thành:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

Ví dụ. Tính $I = \iint\limits_D 2xydxdy$ với D nằm trong 2 cung tròn bán kính $r = 2, r = 5$ (tâm là gốc tọa độ) trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ.



Sử dụng phép đổi biến trong tọa độ cực:

$$x = rcos\varphi; y = rsin\varphi$$

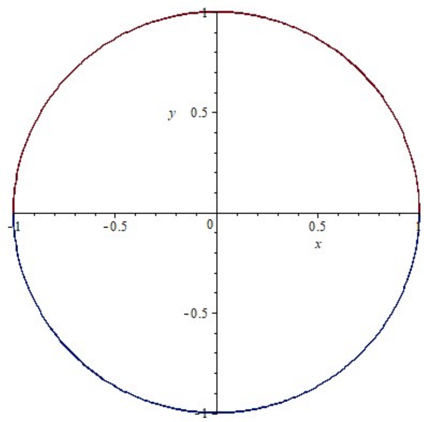
Miền D trở thành $D_{r\varphi} = \left\{ (r, \varphi) : 2 \le r \le 5, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

$$I = \iint\limits_D 2xydxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_2^5 2r^3 \sin\varphi\cos\varphi dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_2^5 r^3 dr$$

$$= \frac{r^4}{4}\bigg|_2^5 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{609}{4}\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{609}{4}$$

Ví dụ. Tính $I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$ với D là vòng tròn đơn vị tâm tại gốc tọa độ.



$$D_{r\varphi} = \{(r,\varphi) : 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

$$x^2 + y^2 = r^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = r^2$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdr$$

$$\Rightarrow I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 e^{r^2}\,rdr = \frac{e-1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = (e-1)\pi$$

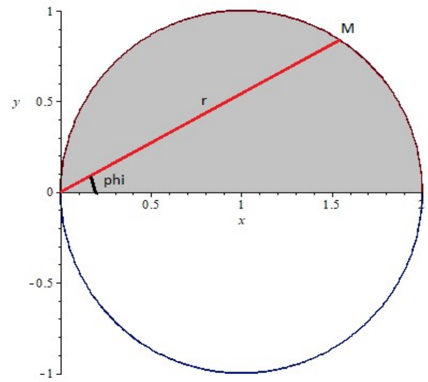
Ví dụ. Tính tích phân sau: $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ với D là miền giới hạn bởi:

$$(x-1)^2+y^2=1; y=0, (y\geq 0)$$

Đặt $x = rcos\varphi; y = rsin\varphi$, dẫn đến:

$$(x-1)^2+y^2=1 \rightarrow x^2+y^2=2x \rightarrow r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=2r\cos\varphi \rightarrow r=2\cos\varphi$$

$$D_{r,\varphi}:\begin{cases} 0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2} \\ 0\leq r\leq 2\cos\varphi \end{cases}$$



$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}dr = -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{-2r}{2\sqrt{4-r^2}}dr$$

$$= -\int_0^{\pi/2} d\varphi\left(\sqrt{4-r^2}\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} = -\int_0^{\pi/2}\left(2\sin\varphi-2\right)d\varphi = 2\left(\cos\varphi+\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi-2$$