ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

KỲ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN
HỌC KỲ II NĂM HỌC 2020 - 2021

Mã lớp học phần: **MAT1042 1,2,3,7,8**. Tên học phần: Giải tích 2

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2 điểm) Cho hàm số $f(x,y)=\dfrac{x^m y\left(x^2+y^2\right)}{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}$ với x>0,m>0

a. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to\left(0^+,0\right)} f(x,y)$ khi m>1

b. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to\left(0^+,0\right)} f(x,y)$ khi m≤1

(0.5đ) Sử dụng phép đổi biến $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, r>0, \dfrac{-\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$

(0.25đ) Khi đó $(x,y)\to\left(0^+,0\right)\Leftrightarrow r\to 0$

(0.5đ)

$$\lim_{(x,y)\to\left(0^+,0\right)} f(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{r^{m+3}\cos^m\varphi\sin\varphi}{1-\cos\left(r^2\right)}=\lim_{r\to 0}\frac{r^{m+3}\cos^m\varphi\sin\varphi}{\dfrac{1}{2}r^4}=2\lim_{r\to 0} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi$$

(0.25đ) Khi m>1 thì $\lim\limits_{r\to 0} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi=0$, giới hạn hàm số bằng 0

(0.25đ) Khi $0<m<1$ thì $\lim\limits_{r\to 0} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi=\infty\times\operatorname{sgn}(\sin\varphi)$, giá trị này không duy nhất hàm không có giới hạn

(0.25đ) Khi $m=1$ thì $\lim\limits_{r\to 0} r^{m-1}\cos^m\varphi\sin\varphi=\cos^m\varphi\sin\varphi$. Giá trị này không duy nhất do phụ thuộc vào φ, vậy hàm không có giới hạn

Câu 2. (2 điểm) Xác định các cực trị của hàm 2 biến $f(x,y)=e^{y-x}\left(y^2+2x^2\right)$.

$f_x^{'} = -e^{y-x}\left(y^2+2x^2\right)+4xe^{y-x} = e^{y-x}\left(4x-y^2-2x^2\right)$

$f_y^{'} = e^{y-x}\left(y^2+2x^2\right)+2ye^{y-x} = e^{y-x}\left(y^2+2x^2+2y\right)$

(0.5đ) $f_{xx}^{''} = -e^{y-x}\left(4x-y^2-2x^2\right)+\left(4-4x\right)e^{y-x} = e^{y-x}\left(y^2+2x^2-8x+4\right)$

$f_{yy}^{''} = e^{y-x}\left(y^2+2x^2+2y\right)+e^{y-x}\left(2y+2\right) = e^{y-x}\left(y^2+2x^2+4y+2\right)$

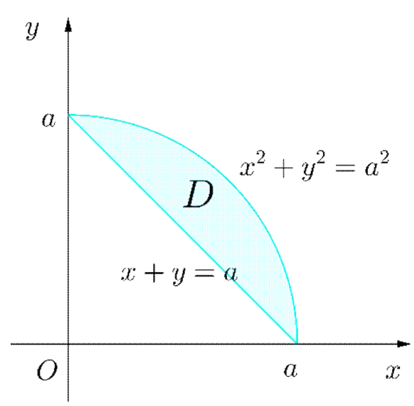
$f_{xy}^{''} = e^{y-x}\left(4x-y^2-2x^2\right)-2ye^{y-x} = e^{y-x}\left(4x-y^2-2x^2-2y\right)$

(0.5đ) Giải hệ: $\begin{cases} f_x^{'}=0 \\ f_y^{'}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2-y^2+4x=0 \\ 2x^2+y^2+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ -6x^2+4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=\dfrac{2}{3}, y=\dfrac{-4}{3} \end{array}\right.$

(0.5đ) Xét điểm $\left(0,0\right): f_{xx}^{''}=4;\ f_{yy}^{''}=2;\ f_{xy}^{''}=0 \Rightarrow D=f_{xx}^{''}f_{yy}^{''}-\left(f_{xy}^{''}\right)^2=8>0$ - điểm cực tiểu.

(0.5đ) Xét điểm $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{-4}{3}\right): f_{xx}^{''}=\dfrac{4}{3e^2};\ f_{yy}^{''}=\dfrac{-2}{3e^2} \Rightarrow f_{xx}^{''}f_{yy}^{''}<0$ - không phải cực trị.

Câu 3. (2 điểm) Cho D là hình viên phân $\begin{cases} x^2+y^2 \le a^2 \\ x+y \ge a \end{cases}$ với a>0. Hãy xác định *a* biết rằng $\iint\limits_D \left(x+y\right)dxdy = \dfrac{1}{3}$



Tọa độ giao điểm của đường tròn $x^2+y^2=a^2$ và đường thẳng $x+y=a$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a, y = 0 \\ x = 0, y = a \end{array}\right.$$

(0.5đ) Miền $D = \left\{(x, y) : 0 \le x \le a, a - x \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\right\}, (a > 0)$

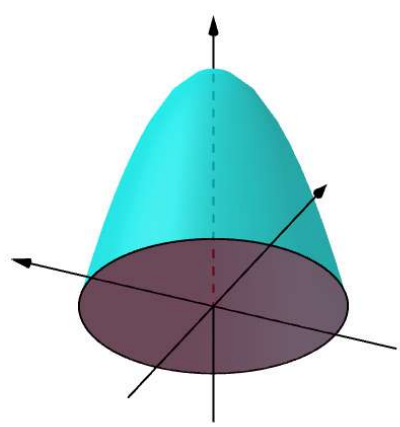
Vậy

(0.5đ)
$$\iint_D (x + y)\,dxdy = \int_0^a \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y)\,dydx$$
$$= \int_0^a \left(x\left(\sqrt{a^2 - x^2} - a + x\right) + \frac{a^2 - x^2 - (a - x)^2}{2} \right) dx$$

(0.5đ) $= \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{3}\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}\Big|_a^0 = \frac{a^3}{3}$

(0.5đ) Mà $\iint_D (x + y)\,dxdy = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 1$

Câu 4. (2 điểm) Cho V là khối giới hạn bởi: $0 \le z \le a^2 - x^2 - y^2$ với a>0. Chứng minh rằng $\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{8}{3a} \iiint_V dxdydz$.



Giao của mặt paraboloid $z = a^2 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng $z = 0$ là đường tròn $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$.

(0.5đ) Miền $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le a^2, 0 \le z \le a^2 - x^2 - y^2\}$.

Hình chiếu của khối V lên Oxy là miền $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le a^2\}$.

Xét trong hệ tọa độ trụ:

(0.5đ) $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |J| = r \\ V = \{(r, \varphi, z) : 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le a, 0 \le z \le a^2 - r^2\} \end{cases}$

(0.5đ) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{a^2-r^2} \dfrac{1}{r}.rdzdrd\varphi = 2\pi\int_0^a (a^2 - r^2)dr = \dfrac{4\pi a^3}{3}$

(0.5đ) $\dfrac{8}{3a}\iiint\limits_V dxdydz = \dfrac{8}{3a}\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{a^2-r^2} rdzdrd\varphi = \dfrac{16\pi}{3a}\int_0^a (a^2r - r^3)dr = \dfrac{4\pi a^3}{3}$

Câu 5. (2 điểm) Giải phương trình vi phân $xy' - y = \dfrac{y^2}{x^2}$ thỏa mãn điều kiện $y(1) = 1$

(0.5đ) Đặt $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = xz' + z$

(0.5đ) Thay vào phương trình ta có: $x^2 z' = z^2$

(0.5đ) Dẫn tới tách biến $\dfrac{dz}{z^2} = \dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + C$

có z(1)=y(1)=1 nên hệ số C=0

(0.5đ) Thay z theo y và x, nghiệm cuối cùng là: $y = x^2$