Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Hà Minh Lam
hmlam@math.ac.vn

2021-2022

Tóm tắt

Tóm tắt

Ma trận chính tắc

Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Gọi $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ tương ứng là các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^m$.

Ma trận chính tắc

Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Gọi $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ tương ứng là các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^m$. Khi đó ánh xạ tuyến tính T xác định hoàn toàn bởi $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$, $\dots$, $T(\mathbf{e}_n)$.

Ma trận chính tắc

Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Gọi $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ tương ứng là các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^m$. Khi đó ánh xạ tuyến tính T xác định hoàn toàn bởi $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$, …, $T(\mathbf{e}_n)$.

Giả sử

$$[T(\mathbf{e}_j)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix},$$

với mọi $j = 1, 2, \dots, n$.

Định nghĩa

Ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m,n}$ (gồm n cột $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'}$, …, $[T(\mathbf{e}_n)]_{B'}$)được gọi là ma trận chính tắc *của T.*

Ma trận chính tắc

Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Gọi $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ tương ứng là các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^m$. Khi đó ánh xạ tuyến tính T xác định hoàn toàn bởi $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$, $\ldots$, $T(\mathbf{e}_n)$.

Giả sử

$$[T(\mathbf{e}_j)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix},$$

với mọi $j = 1, 2, \ldots, n$.

Định nghĩa

Ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m,n}$ (gồm n cột $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'}$, $\ldots$, $[T(\mathbf{e}_n)]_{B'}$)được gọi là ma trận chính tắc của T.

Nhận xét: Nếu A là ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ thì với mọi $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sao cho $T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y)$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sao cho $T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y)$

Ta có:

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, T(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

do đó ma trận chính tắc của T là:

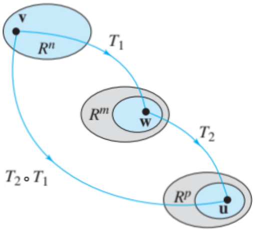
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hợp thành của hai ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *và* $T_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *là các ánh xạ tuyến tính.* Ánh xạ hợp thành *của* T_1 *và* T_2*, ký hiệu là* $T_2 \circ T_1$*, là một ánh xạ* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *được định nghĩa bởi*

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}) = T_2\left(T_1(\mathbf{v})\right).$$



Định lý

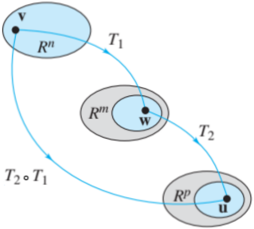
Nếu T_1 *và* T_2 *là các ánh xạ tuyến tính thì* $T_2 \circ T_1$ *cũng là một ánh xạ tuyến tính. Nếu* A_1 *và* A_2 *là các ma trận chính tắc của* T_1 *và* T_2 *thì ma trận chính tắc của* $T_2 \circ T_1$ *là* $A_2 A_1$.

Hợp thành của hai ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *và* $T_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *là các ánh xạ tuyến tính.* Ánh xạ hợp thành *của* T_1 *và* T_2, *ký hiệu là* $T_2 \circ T_1$, *là một ánh xạ* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *được định nghĩa bởi*

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}) = T_2\left(T_1(\mathbf{v})\right) .$$



Định lý

Nếu T_1 *và* T_2 *là các ánh xạ tuyến tính thì* $T_2 \circ T_1$ *cũng là một ánh xạ tuyến tính. Nếu* A_1 *và* A_2 *là các ma trận chính tắc của* T_1 *và* T_2 *thì ma trận chính tắc của* $T_2 \circ T_1$ *là* A_2A_1.

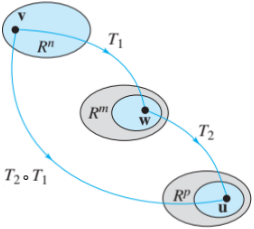
Ví dụ: $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_1(x,y,z) = (2x+y, 0, x+z),\ T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$T_2(x,y,z) = (x-y, z, y)$.

Hợp thành của hai ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *và* $T_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *là các ánh xạ tuyến tính.* Ánh xạ hợp thành *của* T_1 *và* T_2*, ký hiệu là* $T_2 \circ T_1$*, là một ánh xạ* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *được định nghĩa bởi*

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}) = T_2\left(T_1(\mathbf{v})\right) .$$



Định lý

Nếu T_1 *và* T_2 *là các ánh xạ tuyến tính thì* $T_2 \circ T_1$ *cũng là một ánh xạ tuyến tính. Nếu* A_1 *và* A_2 *là các ma trận chính tắc của* T_1 *và* T_2 *thì ma trận chính tắc của* $T_2 \circ T_1$ *là* A_2A_1*.*

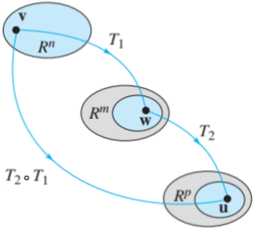
Ví dụ: $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_1(x,y,z) = (2x+y, 0, x+z),\ T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$T_2(x,y,z) = (x-y, z, y)$.
$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = (2x+y, x+z, 0)$
$(T_1 \circ T_2)(x,y,z) = (2x-2y+z, 0, x)$

Hợp thành của hai ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *và* $T_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *là các ánh xạ tuyến tính.* Ánh xạ hợp thành *của* T_1 *và* T_2*, ký hiệu là* $T_2 \circ T_1$*, là một ánh xạ* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *được định nghĩa bởi*

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}) = T_2\left(T_1(\mathbf{v})\right).$$



Định lý

Nếu T_1 *và* T_2 *là các ánh xạ tuyến tính thì* $T_2 \circ T_1$ *cũng là một ánh xạ tuyến tính. Nếu* A_1 *và* A_2 *là các ma trận chính tắc của* T_1 *và* T_2 *thì ma trận chính tắc của* $T_2 \circ T_1$ *là* A_2A_1*.*

Ví dụ: $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_1(x, y, z) = (2x + y, 0, x + z)$, $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(x, y, z) = (x - y, z, y)$.
$(T_2 \circ T_1)(x, y, z) = (2x + y, x + z, 0)$
$(T_1 \circ T_2)(x, y, z) = (2x - 2y + z, 0, x)$

Chú ý: $T_2 \circ T_1 \neq T_1 \circ T_2$

Ánh xạ tuyến tính khả nghịch

Định nghĩa

Nếu các ánh xạ tuyến tính $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *và* $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *thỏa mãn* $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2 = id$ *thì ta nói rằng* T_1 khả nghịch *và* T_2 *là* ánh xạ nghịch đảo *của* T_1*.*

Ánh xạ tuyến tính khả nghịch

Định nghĩa

Nếu các ánh xạ tuyến tính $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *và* $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *thỏa mãn* $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2 = id$ *thì ta nói rằng* T_1 khả nghịch *và* T_2 *là* ánh xạ nghịch đảo *của* T_1.

Nhận xét:

- Nếu T là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch thì ánh xạ nghịch đảo của nó là duy nhất và được ký hiệu là T^{-1}.

Ánh xạ tuyến tính khả nghịch

Định nghĩa

Nếu các ánh xạ tuyến tính $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ và $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2 = id$ thì ta nói rằng T_1 khả nghịch và T_2 là ánh xạ nghịch đảo của T_1.

Nhận xét:

- Nếu T là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch thì ánh xạ nghịch đảo của nó là duy nhất và được ký hiệu là T^{-1}.

Định lý

Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ với ma trận chính tắc A. Các khẳng định sau là tương đương:

1. *T là khả nghịch.*
2. *T là một đẳng cấu.*
3. *A là khả nghịch.*

Hơn nữa, nếu T là khả nghịch thì ma trận chính tắc của T^{-1} là A^{-1}.

Ánh xạ tuyến tính khả nghịch

Ví dụ: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho $T(x, y, z) = (2x + 3y + z, 3x + 3y + z, 2x + 4y + z)$.

Ánh xạ tuyến tính khả nghịch

Ví dụ: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho $T(x, y, z) = (2x + 3y + z, 3x + 3y + z, 2x + 4y + z)$.

Ma trận chính tắc của T là $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ma trận này khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Từ đó, T là khả nghịch và $T^{-1}(x, y, z) = (-x + y, -x + z, 6x - 2y - 3z)$.

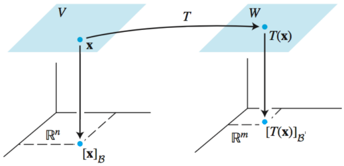
Không gian và cơ sở bất kỳ

Cho V, W là các không gian vector hữu hạn chiều. Giả sử $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ tương ứng là cơ sở của V và W.

Định nghĩa

Ma trận của T trong cặp cơ sở B, B' *là ma trận* $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ *sao cho:*

$$[T(\mathbf{v}_j)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \forall j = 1, \ldots, n.$$



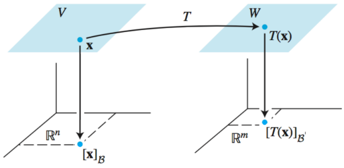
Không gian và cơ sở bất kỳ

Cho V, W là các không gian vector hữu hạn chiều. Giả sử $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ và $B' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ tương ứng là cơ sở của V và W.

Định nghĩa

Ma trận của T trong cặp cơ sở B, B' *là ma trận* $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ *sao cho:*

$$[T(\mathbf{v}_j)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \forall j = 1, \dots, n.$$



Mệnh đề

Nếu A là ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ trong cặp cơ sở B, B' thì với mọi $\mathbf{v} \in V$,

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = A\,[\mathbf{v}]_B\ .$$

Không gian và cơ sở bất kỳ

Ví dụ: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.
$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(1, 2), (-1, 1)\},\ B' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Không gian và cơ sở bất kỳ

Ví dụ: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.
$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(1, 2), (-1, 1)\},\ B' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= (3, 0) = 3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{u}_2) &= (0, -3) = 0\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Từ đó, ma trận của T trong cặp cơ sở B, B' là $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Ma trận của ánh xạ hợp thành

Cho U, V, W là các không gian vector hữu hạn chiều và B, B', B'' tương ứng là cơ sở của U, V, W.

Định lý

Nếu $T_1 : U \to V$ *và* $T_2 : V \to W$ *là các ánh xạ tuyến tính thì* $T_2 \circ T_1$ *cũng là một ánh xạ tuyến tính.*
Hơn nữa, nếu A_1 *là ma trận của* T_1 *trong cặp cơ sở* B, B' *và* A_2 *là ma trận của* T_2 *trong cặp cơ sở* B', B'' *thì* A_2A_1 *là ma trận của* $T_2 \circ T_1$ *trong cặp cơ sở* B, B''.

Ma trận của ánh xạ khả nghịch

Định nghĩa

Một ánh xạ tuyến tính $T_1 : V \to V$ *là* khả nghịch *nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính* $T_2 : V \to V$ *sao cho* $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = id$.
Khi đó, T_2 *được gọi là* ánh xạ nghịch đảo *của* T_1.

Ma trận của ánh xạ khả nghịch

Định nghĩa

Một ánh xạ tuyến tính $T_1 : V \to V$ *là* khả nghịch *nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính* $T_2 : V \to V$ *sao cho* $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = id$.
Khi đó, T_2 *được gọi là* ánh xạ nghịch đảo *của* T_1.

Mệnh đề

Nếu $T : V \to V$ *là khả nghịch thì ánh xạ nghịch đảo của nó là duy nhất. Khi đó, ánh xạ nghịch đảo của* T *được ký hiệu là* T^{-1}.

Ma trận của ánh xạ khả nghịch

Định nghĩa

Một ánh xạ tuyến tính $T_1 : V \to V$ *là* khả nghịch *nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính* $T_2 : V \to V$ *sao cho* $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = id$*.*
Khi đó, T_2 *được gọi là* ánh xạ nghịch đảo *của* T_1*.*

Mệnh đề

Nếu $T : V \to V$ *là khả nghịch thì ánh xạ nghịch đảo của nó là duy nhất. Khi đó, ánh xạ nghịch đảo của* T *được ký hiệu là* T^{-1}*.*

Định lý

Cho ánh xạ tuyến tính $T : V \to V$ *với ma trận* A *trong cơ sở* B*. Các khẳng định sau là tương đương:*

1. T *là khả nghịch.*
2. T *là một đẳng cấu.*
3. A *là khả nghịch.*

Hơn nữa, nếu T *là khả nghịch thì ma trận của* T^{-1} *trong cơ sở* B *là* A^{-1}*.*

Tóm tắt

Chuyển cơ sở

Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều, B và B' là hai cơ sở của V và $T : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính.
Gọi A (tương ứng, A') là ma trận của T trong cơ sở B (tương ứng, B'). Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

Định lý

$$A' = P^{-1}AP\,.$$

Chuyển cơ sở

Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều, B và B' là hai cơ sở của V và $T : V \to V$ là một ánh xạ tuyến tính.
Gọi A (tương ứng, A') là ma trận của T trong cơ sở B (tương ứng, B'). Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

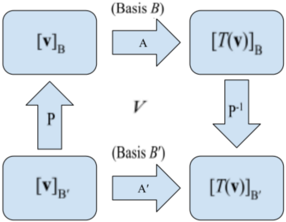
Định lý

$$A' = P^{-1}AP\,.$$

Chứng minh:
$\forall \mathbf{v} \in V$, ta có $[T(\mathbf{v})]_B = A\,[\mathbf{v}]_B$; $[T(\mathbf{v})]_{B'} = A'\,[\mathbf{v}]_{B'}$;
$[\mathbf{v}]_B = P\,[\mathbf{v}]_{B'}$; $[T(\mathbf{v})]_{B'} = P^{-1}\,[T(\mathbf{v})]_B$.
Do đó:

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = P^{-1}\,[T(\mathbf{v})]_B = P^{-1}A\,[\mathbf{v}]_B = P^{-1}AP\,[\mathbf{v}]_{B'}\,.$$

Suy ra $P^{-1}AP$ cũng là ma trận của T trong cơ sở B'.
Vậy $P^{-1}AP = A'$.



Chuyển cơ sở

Ví dụ: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 2y, -x + 3y)$, B là cơ sở chính tắc và $B' = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

Chuyển cơ sở

Ví dụ: $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (2x-2y, -x+3y),\ B$ là cơ sở chính tắc và $B' = \{(1,0),(1,1)\}$.

Ta có $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Từ đó $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Chuyển cơ sở

Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều, và B, B' là hai cơ sở của V;
W là một không gian vector hữu hạn chiều, và S, S' là hai cơ sở của W.
Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B,
Q là ma trận chuyển cơ sở từ S' sang S.
Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính và A (tương ứng A') là ma trận của T đối với cặp cơ sở B, S (tương ứng, B', S').

Chuyển cơ sở

Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều, và B, B' là hai cơ sở của V;
    W là một không gian vector hữu hạn chiều, và S, S' là hai cơ sở của W.
Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B,
    Q là ma trận chuyển cơ sở từ S' sang S.
Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính và A (tương ứng A') là ma trận của T đối với cặp cơ sở B, S (tương ứng, B', S').

Định lý

$$A' = Q^{-1}AP$$

Chuyển cơ sở

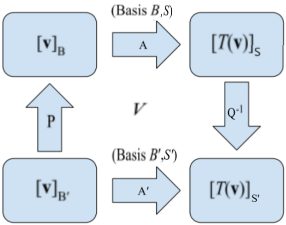
Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều, và B, B' là hai cơ sở của V;
W là một không gian vector hữu hạn chiều, và S, S' là hai cơ sở của W.
Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B,
Q là ma trận chuyển cơ sở từ S' sang S.
Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính và A (tương ứng A') là ma trận của T đối với cặp cơ sở B, S (tương ứng, B', S').

Định lý

$$A' = Q^{-1}AP$$

Chứng minh:
$\forall \mathbf{v} \in V$, ta có

$$\begin{aligned}[T(\mathbf{v})]_{S'} = Q^{-1}[T(\mathbf{v})]_S &= Q^{-1}(A[\mathbf{v}]_B) \\ &= Q^{-1}(A(P[\mathbf{v}]_{B'})).\end{aligned}$$



$\Rightarrow$ $Q^{-1}AP$ cũng là ma trận của T trong cặp cơ sở B', S'. Vậy $Q^{-1}AP = A'$.

Quiz

1) Cho $L : P_3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$L(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0 + a_1, 2a_2, a_3 - a_0).$$

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính L đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và $\mathbb{R}^3$.

Quiz

1) Cho $L : P_3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$L(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0 + a_1, 2a_2, a_3 - a_0).$$

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính L đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và $\mathbb{R}^3$.

Đáp án: Ta có

$L(x^3) = (0, 0, 1) \qquad L(x^2) = (0, 2, 0)$

$L(x) = (1, 0, 0) \qquad L(1) = (1, 0, -1).$

Do đó ma trận của L đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quiz

1) Cho $L : P_3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$L(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0 + a_1, 2a_2, a_3 - a_0).$$

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính L đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và $\mathbb{R}^3$.

Đáp án: Ta có

$L(x^3) = (0, 0, 1)$ $\quad$ $L(x^2) = (0, 2, 0)$

$L(x) = (1, 0, 0)$ $\quad$ $L(1) = (1, 0, -1)$.

Do đó ma trận của L đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Tìm ma trận của ánh xạ trên đối với cơ sở $B = \{x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1, 1\}$ của P_3 và $S = \{(-2, 1, -3), (1, -3, 0), (3, -6, 2)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Quiz

1) Cho $L : P_3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$L(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0 + a_1, 2a_2, a_3 - a_0).$$

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính L đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và $\mathbb{R}^3$.

Đáp án: Ta có

$L(x^3) = (0,0,1)$ $\quad$ $L(x^2) = (0,2,0)$

$L(x) = (1,0,0)$ $\quad$ $L(1) = (1,0,-1)$.

Do đó ma trận của L đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Tìm ma trận của ánh xạ trên đối với cơ sở $B = \{x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1, 1\}$ của P_3 và $S = \{(-2,1,-3), (1,-3,0), (3,-6,2)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Đáp án: Ma trận chuyển của L đối với cặp cơ sở B và S là $A' = QAP$ với

$$Q_{ct\to S} := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 \\ 16 & 5 & -9 \\ -9 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad P_{B\to ct} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quiz

3) Xét ánh xạ $T : P_3 \to P_4$ xác định bởi $T(f)(x) = (2 + 3x)f(x)$. Chứng minh rằng T là một ánh xạ tuyến tính. Tìm ma trận của T đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và P_4.

Quiz

3) Xét ánh xạ $T : P_3 \to P_4$ xác định bởi $T(f)(x) = (2+3x)f(x)$. Chứng minh rằng T là một ánh xạ tuyến tính. Tìm ma trận của T đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và P_4.

Đáp án: Ta có với mọi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(a+bx+cx^2+dx^3) &= (2+3x)(a+bx+cx^2+dx^3) \\ &= 2a+(2b+3a)x+(2c+3b)x^2+(2d+3c)x^3+3dx^4. \end{aligned}$$

Quiz

3) Xét ánh xạ $T : P_3 \to P_4$ xác định bởi $T(f)(x) = (2+3x)f(x)$. Chứng minh rằng T là một ánh xạ tuyến tính. Tìm ma trận của T đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và P_4.

Đáp án: Ta có với mọi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(a + bx + cx^2 + dx^3) &= (2+3x)(a + bx + cx^2 + dx^3) \\ &= 2a + (2b+3a)x + (2c+3b)x^2 + (2d+3c)x^3 + 3dx^4. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ T là một axtt và
$T(1) = 2 + 3x;\ T(x) = 2x + 3x^2;\ T(x^2) = 2x^2 + 3x^3;\ T(x^3) = 2x^3 + 3x^4.$

Quiz

3) Xét ánh xạ $T : P_3 \to P_4$ xác định bởi $T(f)(x) = (2+3x)f(x)$. Chứng minh rằng T là một ánh xạ tuyến tính. Tìm ma trận của T đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và P_4.

Đáp án: Ta có với mọi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(a+bx+cx^2+dx^3) &= (2+3x)(a+bx+cx^2+dx^3) \\ &= 2a+(2b+3a)x+(2c+3b)x^2+(2d+3c)x^3+3dx^4. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ T là một axtt và
$T(1) = 2+3x;\ T(x) = 2x+3x^2;\ T(x^2) = 2x^2+3x^3;\ T(x^3) = 2x^3+3x^4.$

$\Rightarrow$ Ma trận của T đối với cơ sở chính tắc trên P_3 và P_4 là

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ma trận đồng dạng

Định nghĩa

Hai ma trận vuông cấp n A và A' được gọi là đồng dạng *với nhau nếu tồn tại một ma trận khả nghịch P (cấp n) sao cho $A' = P^{-1}AP$.*

Ma trận đồng dạng

Định nghĩa

Hai ma trận vuông cấp n A và A' được gọi là đồng dạng *với nhau nếu tồn tại một ma trận khả nghịch P (cấp n) sao cho $A' = P^{-1}AP$.*

Định lý

Cho các ma trận vuông cùng cấp A, B, C. Khi đó:

1. *A đồng dạng với chính nó.*
2. *Nếu A đồng dạng với B thì B đồng dạng với A.*
3. *Nếu A đồng dạng với B và B đồng dạng với C thì A đồng dạng với C.*

Ma trận đồng dạng

Định nghĩa

Hai ma trận vuông cấp n A và A' được gọi là đồng dạng *với nhau nếu tồn tại một ma trận khả nghịch P (cấp n) sao cho $A' = P^{-1}AP$.*

Định lý

Cho các ma trận vuông cùng cấp A, B, C. Khi đó:

1. *A đồng dạng với chính nó.*
2. *Nếu A đồng dạng với B thì B đồng dạng với A.*
3. *Nếu A đồng dạng với B và B đồng dạng với C thì A đồng dạng với C.*

Nhận xét: Hai ma trận của cùng một ánh xạ tuyến tính trong hai cơ sở khác nhau là hai ma trận đồng dạng với nhau.