Ánh xạ tuyến tính

Hà Minh Lam
hmlam@math.ac.vn

2021-2022

Tóm tắt

Tóm tắt

1. Ánh xạ tuyến tính

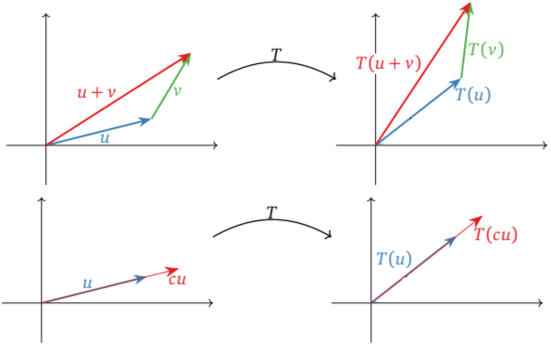
2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho V, W là các không gian vector. Một ánh xạ $T: V \to W$ được gọi là một ánh xạ tuyến tính *(hay một* đồng cấu*) từ V vào W nếu với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ và với mọi $c \in \mathbb{R}$:*

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
2. $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$

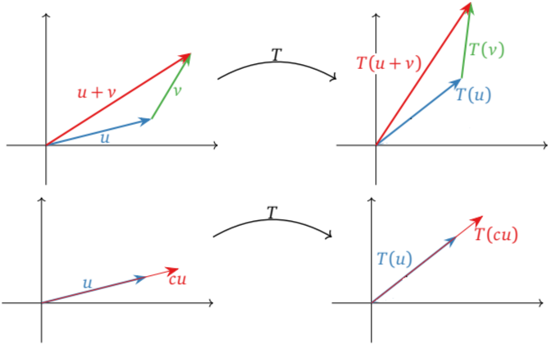


Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho V, W là các không gian vector. Một ánh xạ $T : V \to W$ được gọi là một ánh xạ tuyến tính *(hay một* đồng cấu*) từ V vào W nếu với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ và với mọi $c \in \mathbb{R}$:*

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
2. $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$



Chú ý: Các phép toán ở vế trái là các phép toán trong V, các phép toán ở vế phải là các phép toán trong W.

Ví dụ

- Xét $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được cho bởi $T_1(x, y) = (2x, x + y)$. Xét $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ và $c \in \mathbb{R}$. Ta có:
  - $T_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ và $T_1(\mathbf{v}_1) + T_1(\mathbf{v}_2) = (2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$.
  - $T_1(c\mathbf{v}_1) = T_1(cx_1, cy_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$, $cT_1(\mathbf{v}_1) = c(2x_1, x_1 + y_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$.

  Vậy T_1 là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ

- Xét $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được cho bởi $T_1(x, y) = (2x, x + y)$. Xét $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ và $c \in \mathbb{R}$. Ta có:
  - $T_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ và $T_1(\mathbf{v}_1) + T_1(\mathbf{v}_2) = (2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$.
  - $T_1(c\mathbf{v}_1) = T_1(cx_1, cy_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$, $cT_1(\mathbf{v}_1) = c(2x_1, x_1 + y_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$.

  Vậy T_1 là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

- Xét $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_2(x) = x^2$. Vì nói chung $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$ (chẳng hạn lấy $x_1, x_2 \neq 0$) nên T_2 không phải là một ánh xạ tuyến tính. (T_2 *có thỏa mãn tính chất thứ hai không?*)

Ví dụ

- Xét $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được cho bởi $T_1(x, y) = (2x, x + y)$. Xét $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ và $c \in \mathbb{R}$. Ta có:
  - $T_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ và $T_1(\mathbf{v}_1) + T_1(\mathbf{v}_2) = (2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$.
  - $T_1(c\mathbf{v}_1) = T_1(cx_1, cy_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$, $cT_1(\mathbf{v}_1) = c(2x_1, x_1 + y_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$.

  Vậy T_1 là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

- Xét $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_2(x) = x^2$. Vì nói chung $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$ (chẳng hạn lấy $x_1, x_2 \neq 0$) nên T_2 không phải là một ánh xạ tuyến tính. (T_2 *có thỏa mãn tính chất thứ hai không?*)

- Xét $T_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_3(x) = x + 2$. Với $c \neq 1$, $T_3(cx) = cx + 2 \neq c(x + 2) = cT_3(x)$, nên T_3 không phải là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

- Xét $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được cho bởi $T_1(x, y) = (2x, x + y)$. Xét $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ và $c \in \mathbb{R}$. Ta có:
  - $T_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ và $T_1(\mathbf{v}_1) + T_1(\mathbf{v}_2) = (2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$.
  - $T_1(c\mathbf{v}_1) = T_1(cx_1, cy_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$, $cT_1(\mathbf{v}_1) = c(2x_1, x_1 + y_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$.

  Vậy T_1 là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

- Xét $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_2(x) = x^2$. Vì nói chung $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$ (chẳng hạn lấy $x_1, x_2 \neq 0$) nên T_2 không phải là một ánh xạ tuyến tính.
  (T_2 *có thỏa mãn tính chất thứ hai không?*)

- Xét $T_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_3(x) = x + 2$.
  Với $c \neq 1$, $T_3(cx) = cx + 2 \neq c(x + 2) = cT_3(x)$, nên T_3 không phải là một ánh xạ tuyến tính.
  (T_3 *có thỏa mãn tính chất thứ nhất không?*)

Ví dụ

- Xét $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được cho bởi $T_1(x, y) = (2x, x + y)$. Xét $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ và $c \in \mathbb{R}$. Ta có:
  - $T_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ và $T_1(\mathbf{v}_1) + T_1(\mathbf{v}_2) = (2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$.
  - $T_1(c\mathbf{v}_1) = T_1(cx_1, cy_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$, $cT_1(\mathbf{v}_1) = c(2x_1, x_1 + y_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$.

  Vậy T_1 là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

- Xét $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_2(x) = x^2$. Vì nói chung $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$ (chẳng hạn lấy $x_1, x_2 \neq 0$) nên T_2 không phải là một ánh xạ tuyến tính.
  (T_2 *có thỏa mãn tính chất thứ hai không?*)

- Xét $T_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_3(x) = x + 2$.
  Với $c \neq 1$, $T_3(cx) = cx + 2 \neq c(x + 2) = cT_3(x)$, nên T_3 không phải là một ánh xạ tuyến tính.
  (T_3 *có thỏa mãn tính chất thứ nhất không?*)

- **Ánh xạ không** $0 : V \to W, 0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

- Xét $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được cho bởi $T_1(x, y) = (2x, x + y)$. Xét $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ và $c \in \mathbb{R}$. Ta có:
  - $T_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$ và $T_1(\mathbf{v}_1) + T_1(\mathbf{v}_2) = (2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$.
  - $T_1(c\mathbf{v}_1) = T_1(cx_1, cy_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$, $cT_1(\mathbf{v}_1) = c(2x_1, x_1 + y_1) = (2cx_1, cx_1 + cy_1)$.

  Vậy T_1 là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

- Xét $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_2(x) = x^2$. Vì nói chung $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$ (chẳng hạn lấy $x_1, x_2 \neq 0$) nên T_2 không phải là một ánh xạ tuyến tính.
  (*T_2 có thỏa mãn tính chất thứ hai không?*)

- Xét $T_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi $T_3(x) = x + 2$.
  Với $c \neq 1$, $T_3(cx) = cx + 2 \neq c(x + 2) = cT_3(x)$, nên T_3 không phải là một ánh xạ tuyến tính.
  (*T_3 có thỏa mãn tính chất thứ nhất không?*)

- **Ánh xạ không** $0 : V \to W, 0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ là một ánh xạ tuyến tính.

- **Ánh xạ đồng nhất** $id : V \to V, id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ là một ánh xạ tuyến tính.

Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. *Với mọi* $\mathbf{v} \in V$, $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.
3. *Với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$.
4. *Nếu* $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ *thì*

$$T(\mathbf{v}) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_k T(\mathbf{v}_k).$$

Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. *Với mọi* $\mathbf{v} \in V$, $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.
3. *Với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$.
4. *Nếu* $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ *thì*

$$T(\mathbf{v}) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_k T(\mathbf{v}_k).$$

Nhận xét: Một ánh xạ tuyến tính được xác định hoàn toàn bởi ảnh của một cơ sở.

Tính chất của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Cho $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. *Với mọi* $\mathbf{v} \in V$, $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$.
3. *Với mọi* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$.
4. *Nếu* $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ *thì*

$$T(\mathbf{v}) = c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_k T(\mathbf{v}_k).$$

Nhận xét: Một ánh xạ tuyến tính được xác định hoàn toàn bởi ảnh của một cơ sở.

Định lý

Ánh xạ $T : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ và với mọi $a, b \in \mathbb{R}$:

$$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v}).$$

Ví dụ

- Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho

$$T(\mathbf{e}_1) = (2, -1, 4)\,,\; T(\mathbf{e}_2) = (1, 5, -2)\,,\; T(\mathbf{e}_3) = (0, 3, 1)\,.$$

Khi đó với mọi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) + zT(\mathbf{e}_3) \\ &= x(2, -1, 4) + y(1, 5, -2) + z(0, 3, 1) \\ &= (2x + y, -x + 5y + 3z, 4x - 2y + z)\,. \end{aligned}$$

Ví dụ

- Xét ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho

$$T(\mathbf{e}_1) = (2, -1, 4)\,,\; T(\mathbf{e}_2) = (1, 5, -2)\,,\; T(\mathbf{e}_3) = (0, 3, 1)\,.$$

  Khi đó với mọi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

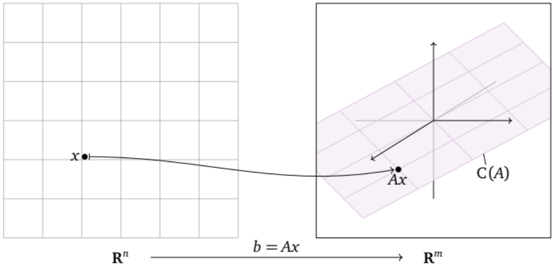
$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) + zT(\mathbf{e}_3) \\ &= x(2, -1, 4) + y(1, 5, -2) + z(0, 3, 1) \\ &= (2x + y, -x + 5y + 3z, 4x - 2y + z)\,. \end{aligned}$$

- Xét $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ và $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.
  Do các tính chất của phép nhân ma trận, T_2 là một ánh xạ tuyến tính.
  Cụ thể, $T_2(x, y) = (3x, 2x + y, -x - 2y)$.

Ánh xạ tuyến tính xác định bởi phép nhân ma trận

Định lý

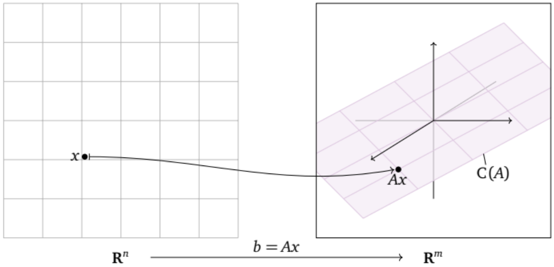
Cho A là một ma trận $m \times n$. Khi đó ánh xạ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được xác định bởi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ là một ánh xạ tuyến tính.



Ánh xạ tuyến tính xác định bởi phép nhân ma trận

Định lý

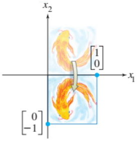
Cho A là một ma trận $m \times n$. Khi đó ánh xạ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được xác định bởi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ là một ánh xạ tuyến tính.



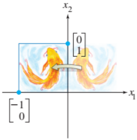
Ví dụ:

- Xét $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ánh xạ tuyến tính $P_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $P_z(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ là phép chiếu lên mặt phẳng Oxy.

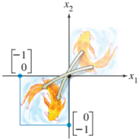
Một số ánh xạ tuyến tính trong $\mathbb{R}^2$



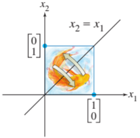
$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$



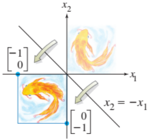
$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$



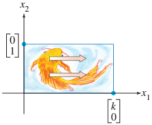
$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$



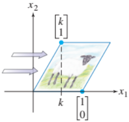
$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$



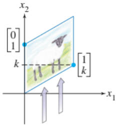
$\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Tóm tắt

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Nhân *(hay* hạt nhân, hạch*) của một ánh xạ tuyến tính* $T : V \to W$, *ký hiệu là* $\ker(T)$, *là tập hợp tất cả các vector* $\mathbf{v} \in V$ *sao cho* $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$*:*

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \ .$$

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Nhân *(hay* hạt nhân, hạch*) của một ánh xạ tuyến tính* $T : V \to W$*, ký hiệu là* $\ker(T)$*, là tập hợp tất cả các vector* $\mathbf{v} \in V$ *sao cho* $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$*:*

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} .$$

Ví dụ:

- Nhân của ánh xạ $0 : V \to W$ là toàn bộ V.

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Nhân *(hay* hạt nhân, hạch*) của một ánh xạ tuyến tính* $T : V \to W$*, ký hiệu là* $\ker(T)$*, là tập hợp tất cả các vector* $\mathbf{v} \in V$ *sao cho* $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$*:*

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} .$$

Ví dụ:

- Nhân của ánh xạ $0 : V \to W$ là toàn bộ V.
- Nhân của ánh xạ đồng nhất id là $\ker(id) = \{\mathbf{0}\}$.

Nhân của ánh xạ tuyến tính

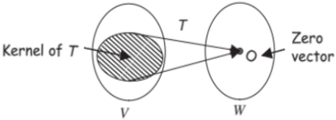
Định nghĩa

Nhân *(hay* hạt nhân, hạch*) của một ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$, ký hiệu là* $\ker(T)$*, là tập hợp tất cả các vector $\mathbf{v} \in V$ sao cho $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$:*

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} .$$

Ví dụ:

- Nhân của ánh xạ $0 : V \to W$ là toàn bộ V.
- Nhân của ánh xạ đồng nhất id là $\ker(id) = \{\mathbf{0}\}$.
- Phép chiếu P_z trong $\mathbb{R}^3$ lên mặt phẳng Oxy có nhân là $\ker(P_z) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.



Nhân của ánh xạ tuyến tính

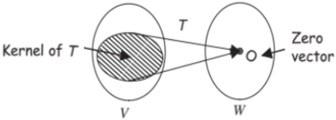
Định nghĩa

Nhân *(hay* hạt nhân, hạch*) của một ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$, ký hiệu là* $\ker(T)$*, là tập hợp tất cả các vector* $\mathbf{v} \in V$ *sao cho* $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$*:*

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} .$$

Ví dụ:

- Nhân của ánh xạ $0 : V \to W$ là toàn bộ V.
- Nhân của ánh xạ đồng nhất id là $\ker(id) = \{\mathbf{0}\}$.
- Phép chiếu P_z trong $\mathbb{R}^3$ lên mặt phẳng Oxy có nhân là $\ker(P_z) = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.



- Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Nhân của $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Với mọi ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$, $\ker(T)$ *là một không gian con của* V.

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Với mọi ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$, $\ker(T)$ là một không gian con của V.

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ và $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

Nhân của T là không gian nghiệm của hệ $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Nghiệm của hệ là $(-2s + t, s + 2t, s, -4t, t)$, suy ra

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{(-2s + t, s + 2t, s, -4t, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= span\{(-2, 1, 1, 0, 0), (1, 2, 0, -4, 1)\}. \end{aligned}$$

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Định lý

Với mọi ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$, $\ker(T)$ là một không gian con của V.

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ và $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

Nhân của T là không gian nghiệm của hệ $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Nghiệm của hệ là $(-2s + t, s + 2t, s, -4t, t)$, suy ra

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{(-2s+t, s+2t, s, -4t, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= span\{(-2,1,1,0,0), (1,2,0,-4,1)\}. \end{aligned}$$

Hệ quả

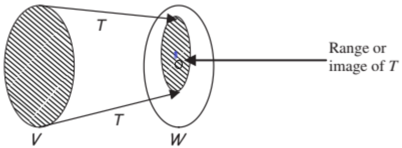
Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được xác định bởi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ $(A : m \times n)$. Nhân của T là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ảnh của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Ảnh *của ánh xạ tuyến tính* $T : V \to W$, *ký hiệu là* $Im(T)$, *được định nghĩa bởi:*

$$Im(T) = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} .$$

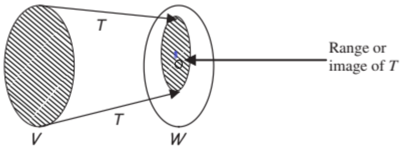


Ảnh của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Ảnh *của ánh xạ tuyến tính* $T : V \to W$, *ký hiệu là* $Im(T)$, *được định nghĩa bởi:*

$$Im(T) = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} .$$



Định lý

Ảnh của ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ *là một không gian con của* W.

Ảnh của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ và $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4,\ T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

Với $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, ta có:

$$A\mathbf{v} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

suy ra
$Im(T) = span\{(1, 2, -1, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 3, -2, 0), (1, 1, 0, 2), (-1, 0, 1, 8)\}$.

Ảnh của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ và $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

Với $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, ta có:

$$A\mathbf{v} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

suy ra
$Im(T) = span\{(1, 2, -1, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 3, -2, 0), (1, 1, 0, 2), (-1, 0, 1, 8)\}$.

Mệnh đề

Ảnh của ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ là không gian cột của ma trận A.

Hạng của ánh xạ tuyến tính

Xét ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$.

Định nghĩa

Hạng của T, ký hiệu là $rank(T)$, là số chiều của không gian ảnh của T:

$$rank(T) = \dim(Im(T))\,.$$

Hạng của ánh xạ tuyến tính

Xét ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$.

Định nghĩa

Hạng của T, ký hiệu là $rank(T)$, là số chiều của không gian ảnh của T:

$$rank(T) = \dim(Im(T)).$$

Định lý (Hạng của ánh xạ tuyến tính)

Nếu V là một không gian hữu hạn chiều thì

$$\dim(\ker(T)) + rank(T) = \dim(V).$$

Hạng của ánh xạ tuyến tính

Xét ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$.

Định nghĩa

Hạng của T, ký hiệu là $rank(T)$, là số chiều của không gian ảnh của T:

$$rank(T) = \dim(Im(T)).$$

Định lý (Hạng của ánh xạ tuyến tính)

Nếu V là một không gian hữu hạn chiều thì

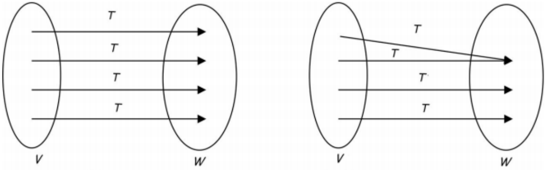
$$\dim(\ker(T)) + rank(T) = \dim(V).$$

Nhận xét: Khi $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, ta tìm lại định lý hạng của ma trận.

Đơn cấu

Định nghĩa

Một đơn cấu *là một ánh xạ tuyến tính đồng thời là một đơn ánh.*

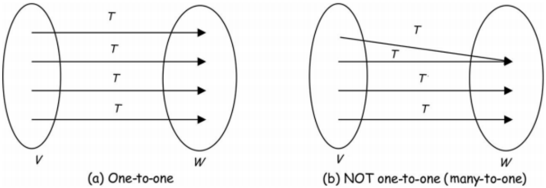


(a) One-to-one (b) NOT one-to-one (many-to-one)

Đơn cấu

Định nghĩa

Một đơn cấu *là một ánh xạ tuyến tính đồng thời là một đơn ánh.*



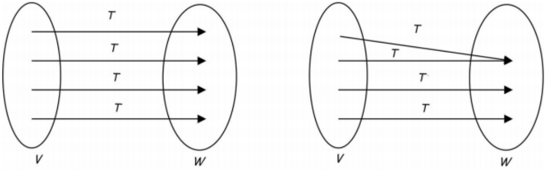
Định lý

Ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ là một đơn cấu khi và chỉ khi $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Đơn cấu

Định nghĩa

Một đơn cấu *là một ánh xạ tuyến tính đồng thời là một đơn ánh.*



(a) One-to-one

(b) NOT one-to-one (many-to-one)

Định lý

Ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ *là một đơn cấu khi và chỉ khi* $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

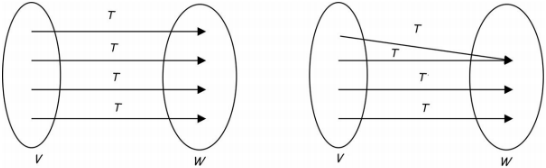
Ví dụ:

- Ánh xạ đồng nhất là một đơn cấu.
- Ánh xạ không không phải là một đơn cấu nếu $V \neq \{\mathbf{0}\}$.

Đơn cấu

Định nghĩa

Một đơn cấu *là một ánh xạ tuyến tính đồng thời là một đơn ánh.*



(a) One-to-one (b) NOT one-to-one (many-to-one)

Định lý

Ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ *là một đơn cấu khi và chỉ khi* $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

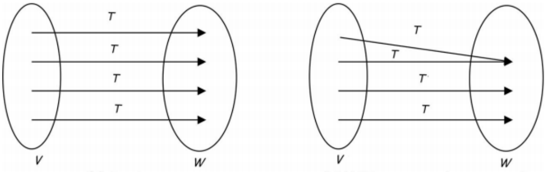
Ví dụ:

- Ánh xạ đồng nhất là một đơn cấu.
- Ánh xạ không không phải là một đơn cấu nếu $V \neq \{\mathbf{0}\}$.
- Phép quay R_θ trong $\mathbb{R}^2$ là một đơn cấu.

Đơn cấu

Định nghĩa

Một đơn cấu *là một ánh xạ tuyến tính đồng thời là một đơn ánh.*



(a) One-to-one (b) NOT one-to-one (many-to-one)

Định lý

Ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ *là một đơn cấu khi và chỉ khi* $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

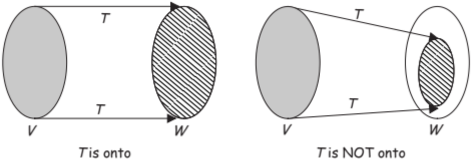
Ví dụ:

- Ánh xạ đồng nhất là một đơn cấu.
- Ánh xạ không không phải là một đơn cấu nếu $V \neq \{\mathbf{0}\}$.
- Phép quay R_θ trong $\mathbb{R}^2$ là một đơn cấu.
- Phép chiếu P_z trong $\mathbb{R}^3$ không phải là một đơn cấu.

Toàn cấu

Định nghĩa

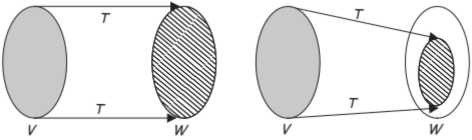
Một toàn cấu *là một ánh xạ tuyến tính đồng thời là một toàn ánh.*



Toàn cấu

Định nghĩa

Một toàn cấu *là một ánh xạ tuyến tính đồng thời là một toàn ánh.*



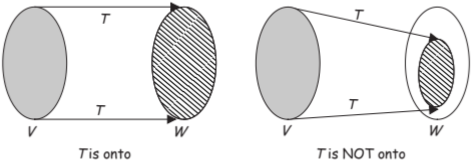
Định lý

Nếu W là một không gian hữu hạn chiều thì ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ là một toàn cấu khi và chỉ khi $\text{rank}(T) = \dim(W)$.

Toàn cấu

Định nghĩa

Một toàn cấu *là một ánh xạ tuyến tính đồng thời là một toàn ánh.*



Định lý

Nếu W là một không gian hữu hạn chiều thì ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ là một toàn cấu khi và chỉ khi $rank(T) = \dim(W)$.

Hệ quả

Nếu $\dim(V) = \dim(W) = n$ thì ánh xạ tuyến tính $T : V \to W$ là một đơn cấu khi và chỉ khi nó là một toàn cấu.

Đẳng cấu

Định nghĩa

Một đẳng cấu *là một ánh xạ tuyến tính vừa là đơn cấu, vừa là toàn cấu. Nếu tồn tại một đẳng cấu $T : V \to W$ thì ta nói rằng các không gian V và W* đẳng cấu *với nhau.*

Đẳng cấu

Định nghĩa

Một đẳng cấu *là một ánh xạ tuyến tính vừa là đơn cấu, vừa là toàn cấu. Nếu tồn tại một đẳng cấu $T : V \to W$ thì ta nói rằng các không gian V và W* đẳng cấu *với nhau.*

Định lý

Hai không gian hữu hạn chiều V và W là đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi $\dim(V) = \dim(W)$.

Đẳng cấu

Định nghĩa

Một đẳng cấu *là một ánh xạ tuyến tính vừa là đơn cấu, vừa là toàn cấu. Nếu tồn tại một đẳng cấu $T : V \to W$ thì ta nói rằng các không gian V và W* đẳng cấu *với nhau.*

Định lý

Hai không gian hữu hạn chiều V và W là đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi $\dim(V) = \dim(W)$.

Ví dụ: Các không gian sau đẳng cấu với nhau:

- $\mathbb{R}^4$
- $M_{2,2}$
- $M_{1,4}$
- P_3 (các đa thức bậc không quá 3)