Các dạng phương trình đường cong

- Dạng $y = f(x)$
- Dạng tham số $x = x(t), y = y(t)$
- Dạng hàm ẩn $F(x, y) = 0$

$$F(x, y) = f(x) - y$$

Điểm chính quy (regular) và điểm kỳ dị (singular)

- Cho đường cong (L) xác định bởi phương trình $f(x, y) = 0$. Điểm $M(x_0, y_0)$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm riêng $f_x'(M), f_y'(M)$ không đồng thời bằng 0.

$$\left(f_x'(M)\right)^2 + \left(f_y'(M)\right)^2 \neq 0$$

- Khi đường cong (L) được xác định bởi các đường cong tham số $x = x(t), y = y(t)$, nếu tồn tại các đạo hàm $x'(t), y'(t)$ không đồng thời bằng 0 thì điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L).
- Một điểm không phải là điểm chính quy thì được gọi là điểm kỳ dị.

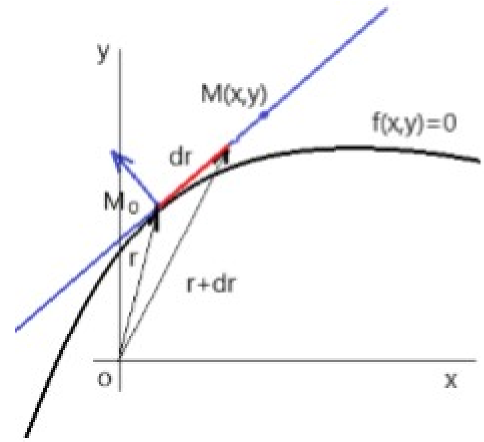
Phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến của đường cong

Khi đường cong (L) xác định bởi phương trình $y = f(x)$. Tại điểm $M(x_0, y_0)$ thuộc (L), phương trình tiếp tuyến:

$$y = f_x'(M)(x - x_0) + y_0$$

Và phương trình pháp tuyến:

$$f_x'(M)(y - y_0) + (x - x_0) = 0$$



Khi đường cong (L) được xác định bởi các đường cong tham số $x = x(t), y = y(t)$, nếu tồn tại các đạo hàm $x'(t), y'(t)$ không đồng thời bằng 0, điểm $M(x(t_0), y(t_0))$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L).

Phương trình tiếp tuyến:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

Và phương trình pháp tuyến:

$$x'(t_0)\big(x - x(t_0)\big) + y'(t_0)\big(y - y(t_0)\big) = 0$$

Khi đường cong (L) xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Điểm $M(x_0, y_0)$ được gọi là điểm chính quy của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm riêng $F_x'(M), F_M'(M)$ không đồng thời bằng 0.

Phương trình tiếp tuyến:

$$F_x'(M)(x - x_0) + F_y'(M)(y - y_0) = 0$$

Và phương trình pháp tuyến:

$$\frac{x - x_0}{F_x'(M)} = \frac{y - y_0}{F_y'(M)}$$

Bài tập. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm với đường thẳng $y = 1$.

Giải phương trình $e^{1-x^2} = 1$ dẫn đến: $x = \pm 1$, vì vậy có 2 điểm cần xem xét $M_1(-1,1)$ và $M_2(1,1)$.

$$f(x,y) = e^{1-x^2} - y \to f_x^{'} = -2xe^{1-x^2}; f_y^{'} = -1$$

+ Tại $M_1(-1,1)$:

- Phương trình tiếp tuyến: $f_x^{'}(M)(x-x_0) + f_y^{'}(M)(y-y_0) = 0$

$$\to -2.(-1).1.(x+1) - 1.(y-1) = 0 \to 2x - y + 3 = 0$$

- Phương trình pháp tuyến:

$$\frac{x-x_0}{f_x^{'}(M)} = \frac{y-y_0}{f_y^{'}(M)} \to -1.(x+1) = 2.(y-1) \to x + 2y - 1 = 0$$

+ Tại $M_2(1,1)$:

- Phương trình tiếp tuyến: $f_x^{'}(M)(x-x_0) + f_y^{'}(M)(y-y_0) = 0$

$$\to -2.(1).1.(x-1) - 1.(y-1) = 0 \to 2x + y - 3 = 0$$

- Phương trình pháp tuyến:

$$\frac{x-x_0}{f_x^{'}(M)} = \frac{y-y_0}{f_y^{'}(M)} \to -1.(x-1) = -2.(y-1) \to x - 2y + 1 = 0$$

Bài tập. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong $x = \frac{1+t}{t^3}$; $y = \frac{3}{2t^3} + \frac{1}{2t}$ tại điểm $B(2,2)$

Giả sử điểm $B(2,2)$ tương ứng với điểm $t = t_0$, dẫn đến:

$$\begin{cases} x(t_0) = 2 \\ y(t_0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1+t_0}{t_0^3} = 2; \frac{3}{2t_0^3} + \frac{1}{2t_0} = 2$$

Dễ thấy $t_0 = 1$ thỏa mãn hệ. Mặt khác:

$$x'(t) = \frac{1}{t^3} - \frac{3(1+t)}{t^4} \to x'(t_0) = 1 - \frac{3.2}{1} = -5; y'(t) = -\frac{9}{2t^4} - \frac{1}{2t^2} \to y'(t_0) = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5$$

Phương trình tiếp tuyến:

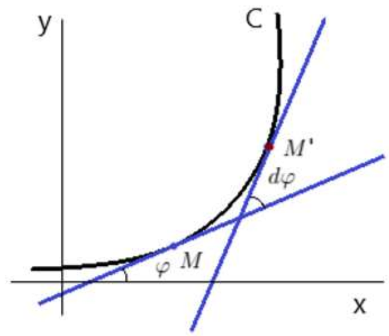
$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} \to -5.(x-2) = -5.(y-2) \to x - y = 0$$

Phương trình pháp tuyến: $x'(t_0)\left(x - x(t_0)\right) + y'(t_0)\left(y - y(t_0)\right) = 0$

$$\to -5.(x-2) - 5.(y-2) = 0 \to x + y + 4 = 0$$

Độ cong và bán kính cong của đường cong tại một điểm

Cho đường cong C. Gọi $M(x,y) \in C$. Khi M di chuyển dọc theo C đến điểm $M_0 \in C$ thì độ dài cung tăng thêm một số gia $|\Delta s| = \widehat{MM'}$ và góc $\varphi = \widehat{ox, Mt}$ nhận một số gia $\Delta\varphi$ tương ứng.



Độ cong của (C) tại M được định nghĩa bởi:

+ Nếu đường cong được cho bởi phương trình $y = f(x)$:

$$\kappa(M) = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}$$

+ Nếu đường cong được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$

$$\kappa(M) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$

+ Nếu đường cong được cho bởi phương trình trong hệ tọa độ cực $r = r(\varphi)$:

$$\kappa(M) = \frac{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}}$$

Bán kính cong của đường cong tại một điểm được đưa ra: $R(M) = \dfrac{1}{\kappa(M)}$.

Bài tập. Tính độ cong và bán kính cong của $x = e^t \sin t; y = e^t \cos t$ tại điểm ứng với $t = 1$.

Ta có:
$$x' = e^t\left(\sin t + \cos t\right); x'' = 2e^t \cos t$$
$$y' = e^t\left(cost - \sin t\right); y'' = -2e^t \sin t$$

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{\left|x'y'' - x''y'\right|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$
$$= \frac{\left|-e^t.\left(\sin t + \cos t\right)2.e^t.\sin t - 2e^t.\cos t.e^t.\left(cost - \sin t\right)\right|}{\left(e^{2t}\left(\sin t + \cos t\right)^2 + e^{2t}\left(cost - \sin t\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|-2.e^{2t}\right|}{2\sqrt{2}.e^{3t}} = \frac{1}{e^t.\sqrt{2}}$$

Ứng với điểm $t = 1 \rightarrow \kappa\left(M\right) = \frac{1}{e.\sqrt{2}}$. Vậy bán kính cong là: $R\left(M\right) = \frac{1}{\kappa\left(M\right)} = e\sqrt{2}$

Bài tập. Tính độ cong và bán kính cong của hàm $\begin{cases} x = a\left(t - \sin t\right) \\ y = a\left(t - cost\right) \end{cases} \left(a > 0\right)$ tại điểm bất kỳ.

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{\begin{vmatrix} a - a\cos t & a + a\sin t \\ a\sin t & a\cos t \end{vmatrix}}{\sqrt{\left(\left(a - a\cos t\right)^2 + \left(a + a\sin t\right)^2\right)^3}}$$
$$= \frac{a\cos t\left(a - a\cos t\right) - a\sin t\left(a + a\sin t\right)}{\sqrt{\left(\left(a - a\cos t\right)^2 + \left(a + a\sin t\right)^2\right)^3}} = \frac{\cos t - \sin t - 1}{a\sqrt{\left(3 - 2\cos t + 2\sin t\right)^3}}$$

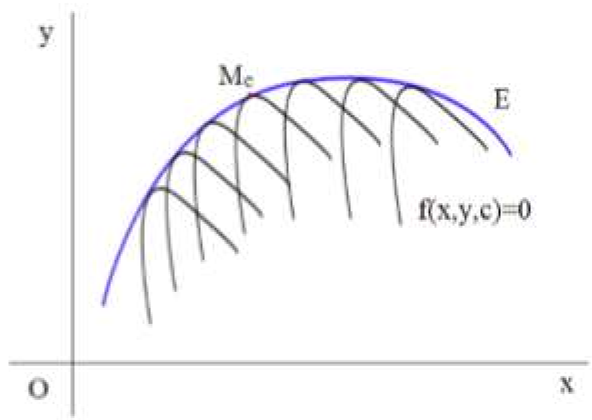
Hình bao của họ đường cong phụ thuộc tham số

Cho họ đường cong (L) phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Nếu mỗi đường cong trong họ (L) đều tiếp xúc với đường cong (E) và ngược lại, mỗi điểm của (E) có một đường của họ (L) tiếp xúc với (E) tại điểm đó thì (E) được gọi là hình bao của họ đường cong (L).

Định lý. *Cho họ đường cong $F(x, y, c)$=0 phụ thuộc tham số c. Nếu họ đường cong trên không có điểm kỳ dị thì hình bao của nó được xác định bằng cách khử c từ hệ phương trình:*

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F_c'(x,y,c)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

Nếu hệ phương trình (*) có điểm kỳ dị thì hệ phương trình (*) bao gồm hình bao (E) và quỹ tích các điểm kỳ dị thuộc họ các đường cong đã cho.



Bài tập. Tìm hình bao của họ đường tròn $(x-c)^2+(y-c)^2=4$

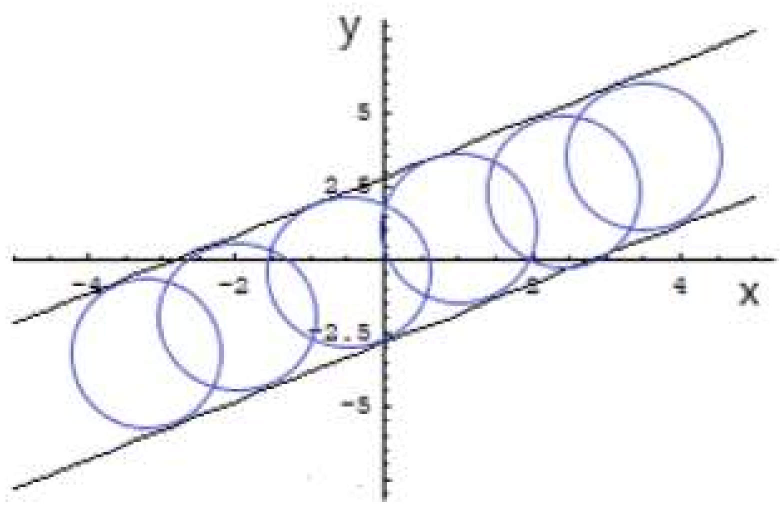
Đặt $F(x,y,c)=(x-c)^2+(y-c)^2-4$. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} F'_x(x,y,c)=0 \\ F'_y(x,y,c)=0 \\ F(x,y,c)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(x-c)=0 \\ 2(y-c)=0 \\ (x-c)^2+(y-c)^2-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y=c \\ 4=0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm nên họ đường cong không có điểm kỳ dị. Xét tiếp hệ phương trình:

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F'_c(x,y,c)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-c)^2+(y-c)^2-4=0 \\ 2(x-c)+2(y-c)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{x+y}{2} \\ (x-y)^2=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{x+y}{2} \\ x-y=\pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy hình bao của họ đường tròn đã cho là tập hợp các điểm thuộc 2 đường thẳng $x-y=\pm 2\sqrt{2}$.



Bài tập. Tìm hình bao của họ đường cong $4x\sin c + y\cos c = 1$

Đặt $F(x,y,c) = 4x\sin c + y\cos c - 1$. Xét điều kiện:

$$\left(F_x^{'}\right)^2 + \left(F_y^{'}\right)^2 = \left(4\sin c\right)^2 + \left(\cos c\right)^2 = 16\sin^2 c + cos^2 c = 15\sin^2 c + 1 \neq 0$$

Vì vậy họ đường cong không có điểm kỳ dị. Xét tiếp hệ:

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F_c^{'}(x,y,c) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4\sin c.x + \cos c.y = 1 \\ 4\cos c.x - \sin c.y = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Áp dụng nguyên lý Cramer, trong đó:

$$D = \begin{vmatrix} 4\sin c & cosc \\ 4cosc & -\sin c \end{vmatrix} = -4\sin^2 c - 4cos^2 c = -4$$

Dẫn đến nghiệm của hệ phương trình (*):

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & cosc \\ 0 & -\sin c \end{vmatrix}}{-4} = \frac{\sin c}{4}; y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4\sin c & 1 \\ 4cosc & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4cosc}{-4} = \cos c$$

Khử *c* từ các nghiệm này dẫn đến: $\sin^2 c + cos^2 c = \left(4x\right)^2 + y^2 = 1$

Vậy hình bao của họ đường cong là $16x^2 + y^2 = 1$.

Bài tập. Tìm hình bao của họ đường cong $y = c^2(x-c)^2$

Đặt $F(x,y,c) = c^2(x-c)^2 - y$. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} F_x^{'}(x,y,c) = 0 \\ F_y^{'}(x,y,c) = 0 \\ F(x,y,c) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2c^2(x-c) = 0 \\ -1 = 0 \\ c^2(x-c)^2 - y = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm nên họ đường cong không có điểm kỳ dị. Xét tiếp hệ phương trình:

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F_c^{'}(x,y,c) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c^2(x-c)^2 - y = 0 \quad (1) \\ -2c^2(x-c) + 2c(x-c)^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có: $c = 0; c = x; c = \frac{x}{2}$. Thay vào (1) ta nhận được:

$$c = 0; c = x \rightarrow y = 0; c = \frac{x}{2} \rightarrow y = \frac{x^4}{16}$$

Vậy hình bao của họ đường cong đã cho là $y = 0, y = \frac{x^4}{16}$.

2. Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học không gian

PT tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho dưới dạng tham số

Cho đường cong (C) trong không gian được định nghĩa bởi phương trình $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ và một điểm chính quy $M_0(x_0, y_0, z_0) \in C$.

- Phương trình tiếp tuyến tại M:

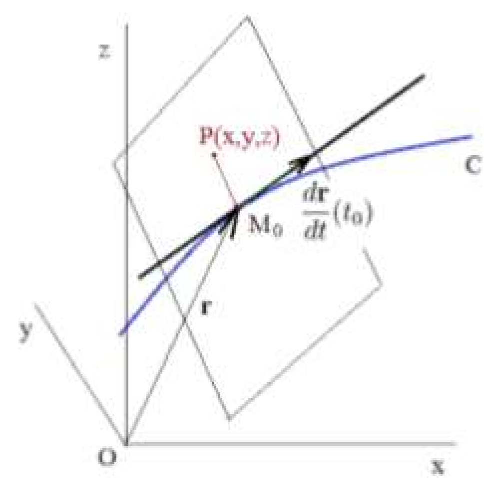
$$(d):\ \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

Hoặc viết dưới dạng tham số:

$$x = x(t_0) + x'(t_0)t; y = y(t_0) + y'(t_0)t; z = z(t_0) + z'(t_0)t$$

- Phương trình pháp diện tại M:

$$(P):\ x'(t_0).(x - x(t_0)) + y'(t_0).(y - y(t_0)) + z'(t_0).(z - z(t_0)) = 0$$



Bài tập. Cho phương trình đường xoắn (helix) $x = \cos t; y = \sin t; z = t$. Thiết lập phương trình tiếp tuyến và pháp diện với đường cong tại $t = \frac{\pi}{2}$.

Ta có:

$$x_t^{'} = -\sin t; y_t^{'} = \cos t; z_t^{'} = 1.$$

Tại điểm $t_0 = \frac{\pi}{2}$ tương ứng với:

$$x(t_0) = 0; y(t_0) = 1; z(t_0) = \frac{\pi}{2};\ x'(t_0) = -1; y'(t_0) = 0; z'(t_0) = 1$$

Dẫn đến phương trình tiếp tuyến: $x = -t = -\frac{\pi}{2}; y = 1; z = \frac{\pi}{2} + t = \pi$

Phương trình pháp diện: $-1.(x-0) + 0.(y-1) + 1.\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow z = x + \frac{\pi}{2}$

Bài tập. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

$$x = \frac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}; y = 1; z = \frac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}$$

Tại điểm tương ứng với $t = 0$.

$$x_t^{'} = \frac{e^t\left(\sin t + \cos t\right)}{\sqrt{2}}; y_t^{'} = 0; z_t^{'} = \frac{e^t\left(\cos t - \sin t\right)}{\sqrt{2}}$$

Khi $t_0 = 0$:

$$x_0 = 0; y_0 = 1; z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x'\left(t_0\right) = \frac{e^t\left(\sin t + \cos t\right)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; y'\left(t_0\right) = 0; z'\left(t_0\right) = \frac{e^t\left(\cos t - \sin t\right)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Phương trình tiếp tuyến: $$\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y}{0} = \frac{z - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Phương trình pháp diện: $$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong

Cho mặt cong (S) xác định bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$ và điểm $M(x_0, y_0, z)$ là một điểm chính quy của (S).

- Phương trình pháp tuyến tại M:

$$(d): \frac{x - x_0}{f_x^{'}(M)} = \frac{y - y_0}{f_y^{'}(M)} = \frac{z - z_0}{f_z^{'}(M)}$$

- Phương trình tiếp diện tại M:

$$(P): f_x^{'}(M)(x - x_0) + f_y^{'}(M)(y - y_0) + f_z^{'}(M)(z - z_0) = 0$$

Đặc biệt, nếu mặt cong được cho bởi phương trình $z = z(x, y)$ thì phương trình tiếp diện tại M là:

$$(P): z - z_0 = f_x^{'}(M)(x - x_0) + f_y^{'}(M)(y - y_0)$$

Bài tập. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong:

$$x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6 \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6$$

Tại điểm $M(2,2,3)$.

$$f'_x(x,y,z) = 2x \to f'_x(M) = 4$$
$$f'_y(x,y,z) = -8y \to f'_y(M) = -16;$$
$$f'_z(x,y,z) = 4z \to f'_z(M) = 12$$

- Phương trình pháp tuyến của mặt tại $M(2,2,3)$.

$$(d): \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z-3}{12} \to x-2 = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{3}$$

- Phương trình tiếp diện tại M:

$$(P): 4(x-2) - 16(y-2) + 12(z-3) = 0 \to x - 2 - 4(y-2) + 3(z-3) = 0$$

$+)\left(S\right): z = 2x^2 + 4y^2, PTPT\ \&\ PTTD, M\left(2,1,12\right)$

$F = 2x^2 + 4y^2 - z$

$F_x^{'} = 4x \Rightarrow F_x^{'}\left(M\right) = 8$

$F_y^{'} = 8y \Rightarrow F_y^{'}\left(M\right) = 8$

$F_z^{'}\left(M\right) = -1$

$$(d): \frac{x - x_0}{f_x^{'}\left(M\right)} = \frac{y - y_0}{f_y^{'}\left(M\right)} = \frac{z - z_0}{f_z^{'}\left(M\right)} \Rightarrow \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-12}{-1}$$

$$(P): f_x^{'}\left(M\right)\left(x - x_0\right) + f_y^{'}\left(M\right)\left(y - y_0\right) + f_z^{'}\left(M\right)\left(z - z_0\right) = 0$$

$$\Rightarrow 8\left(x-2\right) + 8\left(y-1\right) - \left(z-12\right) = 0$$

Phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho dưới dạng giao của hai mặt cong

Cho đường cong xác định bởi giao của hai mặt cong $f(x,y,z)$ và $g(x,y,z)$.

Đặt $\overrightarrow{n_f}=\left(f_x^{'}(M),f_y^{'}(M),f_z^{'}(M)\right)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $f(x,y,z)=0$ tại điểm M.

Đặt $\overrightarrow{n_g}=\left(g_x^{'}(M),g_y^{'}(M),g_z^{'}(M)\right)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $g(x,y,z)=0$ tại điểm M.

Khi đó $\overrightarrow{n_f}\wedge\overrightarrow{n_g}$ là véctơ chỉ phương của tiếp tuyến đường cong đã cho tại M.

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

Phương trình tổng quát:

$$\begin{cases} f_x^{'}(M)(x-x_0)+f_y^{'}(M)(y-y_0)+f_z^{'}(M)(z-z_0)=0 \\ g_x^{'}(M)(x-x_0)+g_y^{'}(M)(y-y_0)+g_z^{'}(M)(z-z_0)=0 \end{cases}$$

Phương trình cần tìm:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} f_y^{'}(M) & f_z^{'}(M) \\ g_y^{'}(M) & g_z^{'}(M) \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} f_z^{'}(M) & f_x^{'}(M) \\ g_z^{'}(M) & g_x^{'}(M) \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} f_x^{'}(M) & f_y^{'}(M) \\ g_x^{'}(M) & g_y^{'}(M) \end{vmatrix}}$$

Phương trình pháp diện cần tìm:

$$\begin{vmatrix} f_y^{'}(M) & f_z^{'}(M) \\ g_y^{'}(M) & g_z^{'}(M) \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} f_z^{'}(M) & f_x^{'}(M) \\ g_z^{'}(M) & g_x^{'}(M) \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} f_x^{'}(M) & f_y^{'}(M) \\ g_x^{'}(M) & g_y^{'}(M) \end{vmatrix}(z-z_0)=0$$

Bài tập. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cho bởi giao của 2 mặt $x^2+y^2=10, y^2+z^2=25$ tại điểm $M(1,3,4)$.

Đặt $f(x,y,z)=x^2+y^2-10; g(x,y,z)=y^2+z^2-25$

Ta có:

$$f_x'(x,y,z)=2x \to f_x'(M)=2; f_y'(x,y,z)=2y \to f_y'(M)=6; f_z'(x,y,z)=0 \to f_z'(M)=0$$
$$g_x'(x,y,z)=0 \to g_x'(M)=0; g_y'(x,y,z)=2y \to g_y'(M)=6; g_z'(x,y,z)=2z \to g_z'(M)=8$$

Dẫn đến phương trình tiếp diện của mặt $x^2+y^2=10$ tại điểm M là:

$$2(x-1)+6(y-3)=0 \text{ hay } (x-1)+3(y-3)=0$$

Phương trình tiếp diện của mặt $y^2+z^2=25$ tại điểm M là:

$$6(y-3)+8(z-4)=0 \text{ hay } 3(y-3)+4(z-4)=0$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$\begin{cases}(x-1)+3(y-3)=0\\ 3(y-3)+4(z-4)=0\end{cases} \to \frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$$

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix}6 & 0\\ 6 & 8\end{vmatrix}}=\frac{y-3}{\begin{vmatrix}0 & 2\\ 8 & 0\end{vmatrix}}=\frac{z-4}{\begin{vmatrix}2 & 6\\ 0 & 6\end{vmatrix}}$$

Phương trình pháp diện cần tìm là:

$$12(x-1)-4(y-3)+3(z-4)=0$$

$$+)2x^2+3y^2+z^2=47; x^2+2y^2=z; M(-2,6,1)$$

$$f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-47; g(x,y,z)=x^2+2y^2-z$$

$$(d): \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} f_y'(M) & f_z'(M) \\ g_y'(M) & g_z'(M) \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} f_z'(M) & f_x'(M) \\ g_z'(M) & g_x'(M) \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} f_x'(M) & f_y'(M) \\ g_x'(M) & g_y'(M) \end{vmatrix}}$$

$$(P): \begin{vmatrix} f_y'(M) & f_z'(M) \\ g_y'(M) & g_z'(M) \end{vmatrix}(x-x_0) + \begin{vmatrix} f_z'(M) & f_x'(M) \\ g_z'(M) & g_x'(M) \end{vmatrix}(y-y_0) + \begin{vmatrix} f_x'(M) & f_y'(M) \\ g_x'(M) & g_y'(M) \end{vmatrix}(z-z_0)=0$$

$$f_x'(M)=4x=-8; f_y'(M)=6y=36; f_z'(M)=2z=2$$

$$g_x'(M)=2x=-4; g_y'(M)=4y=24; g_z'(M)=-1$$

$$\Rightarrow (d): \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} 36 & 2 \\ 24 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{y-x_0}{\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} -8 & 36 \\ -4 & 24 \end{vmatrix}} \Rightarrow \frac{x+2}{12} = \frac{y-6}{-16} = \frac{z-1}{\begin{vmatrix} -8 & 36 \\ -4 & 24 \end{vmatrix}}$$

$$(P): 12(x+2)-16(y-6)+\begin{vmatrix} f_x'(M) & f_y'(M) \\ g_x'(M) & g_y'(M) \end{vmatrix}(z-1)=0$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Tính độ cong của đường: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, (a > 0, \forall x, y)$

Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

$$\begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = b\sin t\cos t \text{ tại } t = \dfrac{\pi}{4}, (a, b, c > 0) \\ z = c\cos^2 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}} \\ y = 1 \quad \text{tại } t = 0 \\ z = \dfrac{e^t \cos t}{\sqrt{2}} \end{cases}$$