Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2017
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(*Thời gian làm bài: 120 phút*)

Bài 1. (*2 điểm*) Xét hệ phương trình tuyến tính với tham số k:

$$\begin{cases} 9x + 8y - 4z = -25 \\ 2x + 2y - z = -5 \\ 8x + 6y + (k-4)z = -25 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $k = 1$.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo k.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Tính hạng của ma trận A.

(b) Tính định thức của ma trận AA^T, trong đó A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A.

Bài 3. (*2 điểm*) Gọi V là không gian tất cả các đa thức hệ số thực biến x với bậc nhỏ hơn hay bằng 2. Xét ánh xạ $T\colon V \to \mathbb{R}^3$ cho bởi: với $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V$ thì

$$T(p) = (p(1), p(2), p(3)) = (a_0 + a_1 + a_2, a_0 + 2a_1 + 4a_2, a_0 + 3a_1 + 9a_2).$$

(a) Chứng minh rằng T là một ánh xạ tuyến tính. Tìm ma trận của T đối với cơ sở $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ của V và cơ sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm hạt nhân (hay không gian hạch) của T.

Bài 4. (*2 điểm*) Gọi S là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hai vector $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ và $v_2 = (0, 2, 0, 2)$. Ta xét không gian $\mathbb{R}^4$ cùng với tích vô hướng thông thường.

(a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con S.

(b) Tìm hình chiếu vuông góc của vector $v = (2, 4, 6, 8)$ lên không gian con S.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng của ma trận A.

(b) Tìm một ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 2

Bài 1. (a) Với $k = 1$, ma trận hệ số mở rộng tương đương với:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ có vô số nghiệm: $x = -5, y = \frac{1}{2}z + \frac{5}{2}$.

(b) Ma trận hệ số mở rộng tương đương với:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

Từ đó hệ có vô số nghiệm nếu $k = 1$ (câu trên) và hệ có nghiệm duy nhất nếu $k \neq 1$.

Bài 2. (a) Dễ thấy hạng bằng 3 bằng cách tính định thức ma trận con 3x3.

(b) Vì hạng của $AA^T \leq 3$ nên định thức là 0.

Bài 3. (a) Xét p và q là hai đa thức bất kì thuộc V. Theo đề bài ta có với mỗi bộ $a, b \in \mathbb{R}$:

$$T(ap+bq) = ((ap+bq)(1), (ap+bq)(2), (ap+bq)(3)) = (ap(1)+bq(1), ap(2)+bq(2), cp(3)+bq(3))$$

Do đó T là một ánh xạ tuyến tính.

Cở sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$\mathcal{S} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} T(1) &= (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) \\ T(x) &= (1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) \\ T(x^2) &= (1,4,9) = 1(1,0,0) + 4(0,1,0) + 9(0,0,1) \end{aligned}$$

Ma trận A của T theo cơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}_2[x]$ và cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(b) Không gian hạch của T được xác định bởi không gian nghiệm của A

$$AX = 0$$

Đưa A về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi dòng ta được

$$D2 - D1 \longrightarrow D2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

$$1/2D3 - 1/2D1 - D2 \longrightarrow D3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy $Ker(T) = \{0\}$. Do đó $\dim(\mathrm{Ker}T) = 0$.

Bài 4. Vì hai vector v_1 và v_2 là độc lập tuyến tính nên chúng lập thành một cơ sở của không gian S.

Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt cơ sở $\{v_1, v_2\}$, ta nhận được:

$$w_1 := v_1 = (1,1,1,1) \text{ và } w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (-1,1,-1,1).$$

Chuẩn hóa hai vector w_1 và w_2, ta nhận được:

$$\{u_1, u_2\} = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}.$$

Khi đó, ta có:

$$\text{proj}_S v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 = (4,6,4,6).$$

Bài 5. (a) Đa thức đặc trưng của ma trận A là

(1) $$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda + 3).$$

A có 2 giá trị riêng: $\lambda = -3$ (bội 1), $\lambda = 3$ (bội 2).

(b) Với giá trị riêng $\lambda = -3$ (bội 1) ta tìm một vecto riêng tương ứng là $v_1 = (1,1,1)$. Chuẩn hóa vecto này ta được vecto riêng độ dài 1 là

$$u_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

Với giá trị riêng $\lambda = 3$ (bội 2), giải hệ $2x + 2y + 2z = 0$, ta được 2 vecto riêng độc lập tuyến tính tương ứng

$$v_2 = (-1,1,0); \quad v_3 = (-1,0,1).$$

Dùng trực chuẩn hóa Gram-Schmidt ta nhận được cơ sở trực chuẩn cho không gian con riêng ứng với $\lambda = 3$ là

$$u_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0); \quad u_3 = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}).$$

Đặt $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. Khi đó P trực giao và

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$