Phương trình vi phân cấp 1 có biến số phân ly (tách biến)

Phương trình vi phân có biến số phân ly hay còn gọi là phương trình tách biến là phương trình vi phân cấp 1 có dạng như sau:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Nếu $g(y) \neq 0$: $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Suy ra tích phân tổng quát:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Nếu $g(y) = 0$ có nghiệm $y = b$ thì $y = b$ là nghiệm của phương trình.

Bài tập. Giải PTVP $x\left(1+x^2\right)dy-\left(1+y^2\right)dx=0$

Công thức trên có thể viết dưới dạng:

$$\frac{dy}{1+y^2}-\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}=0$$

Lấy tích phân 2 vế dẫn đến:

$$\int\frac{dy}{1+y^2}-\int\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}=C$$

$$\rightarrow \arctan(y)-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|=C$$

Bài tập. Giải PTVP: $\left[4y+\ln\left(1+y^2\right)\right]dy=\left(e^{-2x}+2x^3\right)dx$

Lấy tích phân cả 2 vế: $\int\left[4y+\ln\left(1+y^2\right)\right]dy=\int\left(e^{-2x}+2x^3\right)dx$

$$\Rightarrow 2y^2+\int\ln\left(1+y^2\right)dy=-\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{x^4}{2}+C$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần:

$$u=\ln\left(1+y^2\right)\Rightarrow du=\frac{2y}{1+y^2};dv=dy\Rightarrow v=y$$

$$\Rightarrow\int\ln\left(1+y^2\right)dy=y\ln\left(1+y^2\right)-\int\frac{2y^2}{1+y^2}dy$$

$$=y\ln\left(1+y^2\right)-2\int\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)dy=y\ln\left(1+y^2\right)-2y+2\arctan y$$

Dẫn đến nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:

$$2y^2+y\ln\left(1+y^2\right)-2y+2\arctan y=-\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{x^4}{2}+C$$

Phương trình vi phân cấp 1 đẳng cấp

Phương trình vi phân cấp 1 đẳng cấp có dạng: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Để tìm nghiệm, đặt $u = \frac{y}{x} \to y = ux$, lấy đạo hàm 2 vế theo x:

$$y' = u + u'x = f(u)$$

Phương trình trên trở thành dạng có biến phân ly:

$$f(u) - u = x\frac{du}{dx}$$

Nếu $f(u) - u \neq 0 \to \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$ dẫn đến tích phân tổng quát:

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Bài tập. Giải PTVP $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x-y)}{x^2}$

$$\frac{y(x-y)}{x^2} = \frac{\text{yx}}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \to y = ux$ và $y' = u + u'x = u - u^2$, suy ra:

$$u'x = -u^2 \Rightarrow x\frac{du}{dx} = -u^2 \Rightarrow -\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

Tích phân 2 vế dẫn đến nghiệm tổng quát của PTVP:

$$\frac{1}{u} = \ln Cx \Rightarrow \frac{x}{y} = \ln Cx \Rightarrow y = \frac{x}{\ln Cx}, Cx > 0, Cx \neq 1$$

Bài tập. Giải PTVP $y - xy' = y\ln\dfrac{x}{y}$

Chia cả 2 vế cho $x \to \dfrac{y}{x} - y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{x}{y} \to y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$.

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \to y = ux$ và $y' = u + u'x$, suy ra:

$$u + u'x = u + u\ln u \to u'x = u\ln u \to \frac{du}{dx}x = u\ln u \to \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$$

Tích phân cả 2 vế ta có:

$$\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x} + C^* \to \ln\left|\ln|u|\right| = \ln|x| + \ln C$$

$$\to \ln\left|\frac{\ln|u|}{x}\right| = \ln C \to \ln|u| = C|x| \to u = e^{C_1 x} \to y = xe^{C_1 x}$$

Bài tập. Giải PTVP: $xdy - ydx = ydy, y\left(-1\right) = 1$

Ta có: $xdy - ydx = ydy \to \left(x - y\right)dy = ydx \to y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x - y} = \dfrac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \to y = ux$ và $y' = u + u'x$, suy ra:

$$u + u'x = \frac{u}{1-u} \to \frac{du}{dx}x = \frac{u}{1-u} - u = \frac{u^2}{1-u}$$

$$\to \frac{\left(1-u\right)du}{u^2} = \frac{dx}{x} \to \int \frac{\left(1-u\right)du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\to -\frac{1}{u} - \ln\left|u\right| = \ln\left|x\right| - C \to \frac{1}{u} + \ln\left|xu\right| = C \to x = y\left(C - \ln\left|y\right|\right)$$

Kết hợp điều kiện $y(-1) = 1$ dẫn đến: $-1 = 1.\left(C - \ln\left|1\right|\right) \to C = -1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -y\left(1 + \ln\left|y\right|\right)$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 (không thuần nhất) là phương trình mà biểu thức là tuyến tính đối với ẩn và đạo hàm của nó. Dạng tổng quát là:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm xác định trên khoảng (a, b) nào đó. Nếu $q(x) = 0$, ta nhận được phương trình tuyến tính cấp 1 thuần nhất:

$$y' + p(x)y = 0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất y_1 cộng với nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất y_2 tìm được bằng phương pháp biến thiên hằng số đối với y_1.

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = y_1 + y_2$$

Công thức thường được áp dụng:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \rightarrow e^{\ln x} = x^{\ln e} = x; e^{3\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^3 = x^3$$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Nhân cả 2 vế với $e^{\int p(x)dx}$:

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Hoặc: $$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Lấy tích phân cả 2 vế:

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

Bài tập. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $\left(x^2+1\right)y'+4xy=3$

Chia cả 2 vế cho x^2+1:

$$y'+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{3}{x^2+1}$$

$$p(x)=\frac{4x}{x^2+1}\to\int\frac{4x}{x^2+1}dx=2\ln\left(x^2+1\right);q(x)=\frac{3}{x^2+1}$$

$$\to y=e^{-2\ln\left(x^2+1\right)}\left[\int\frac{3}{x^2+1}e^{2\ln\left(x^2+1\right)}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\left[\int\frac{3}{x^2+1}\left(x^2+1\right)^2dx+C\right]=\frac{x^3+3x+C}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Bài tập. Tìm nghiệm của PTVP $y'+3xy=x$ đi qua điểm $(0,4)$.

Ta có: $$p(x)=3x\to\int p(x)dx=\frac{3x^2}{2};q(x)=x$$

Dẫn đến nghiệm tổng quát:

$$y=e^{-\frac{3x^2}{2}}\left(\int xe^{\frac{3x^2}{2}}dx+C\right)=e^{-\frac{3x^2}{2}}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{3x^2}{2}}+C\right)=\frac{1}{3}+Ce^{-\frac{3x^2}{2}}$$

Thay $x=0,y=4$ vào đẳng thức trên, ta tìm được $C=\frac{11}{3}$ dẫn đến nghiệm riêng cần tìm là: $y=\frac{1}{3}+\frac{11}{3}e^{-\frac{3x^2}{2}}$

Phương trình Bernoulli

$$y' + p(x)y = y^{\alpha}g(x) \qquad (*)$$

Trong đó α là một số thực nào đó.

+ $\alpha = 1; \alpha = 0$: phương trình trở thành phương trình tuyến tính.

+ $\alpha \neq 1; \alpha \neq 0$: đặt $z = y^{1-\alpha} \to z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

Chia cả 2 vế của (*) cho y^{α} và thay $z = y^{1-\alpha}; z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ vào (*):

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\frac{y}{y^{\alpha}} = \frac{y^{\alpha}}{y^{\alpha}}g(x) \to \frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = g(x)$$

Dẫn đến phương trình vi phân tuyến tính theo z:

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)g(x)$$

Chú ý: *phải xét riêng trường hợp $y = 0$ trước khi chia 2 vế cho y^{α} để tránh làm mất nghiệm này.*

Bài tập. Giải phương trình $xy'+y=y^2\ln x, y(1)=1$

Chia cả 2 vế cho $x \to y'+\frac{1}{x}y=\frac{\ln x}{x}.y^2$ đây là phương trình Bernoulli có $\alpha = 2$. Chia cả 2 vế cho y^2 ta nhận được: $y'y^{-2}+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{\ln x}{x}$

Đặt $z=y^{-1} \to z'=-y^{-2}y'$ phương trình trên trở thành: $-z'+\frac{1}{x}z=\frac{\ln x}{x}$

$$z'-\frac{1}{x}z=-\frac{\ln x}{x}$$

Giải phương trình này, tìm được nghiệm:

$$z=x\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C\right)=\ln x+1+Cx$$

Thay thế điều kiện $y(1)=1$ vào ta có:

$$z(1)=\frac{1}{y(1)}=1=\ln(1)+1+C.1 \to C=0$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $z=\ln x+1 \to y=\frac{1}{\ln x+1}$

Bài tập. Giải phương trình $y'+\frac{2x}{1+x^2}y+(2x+1)^2y^3=0$.

Đây là phương trình Bernoulli có $\alpha = 3$. Xét $y \neq 0$, Chia cả 2 vế cho y^3:

$$y^{-3}y'+\frac{2x}{1+x^2}y^{-2}=-(2x+1)^2 \qquad (*)$$

Đặt $z = y^{-2} \to z'=-2y^{-3}y'$, nhân cả 2 vế với -2 và thay vào phương trình (*) ta có:

$$u'-\frac{4x}{1+x^2}u=2(2x+1)^2$$

+ C1: sử dụng công thức nghiệm $\Rightarrow u=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$

+ C2: Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số.

Giải phương trình thuần nhất:

$$u'-\frac{4x}{1+x^2}u=0 \Rightarrow \frac{du}{u}=\frac{4x}{1+x^2}dx \Rightarrow u=C(x^2+1)^2 \qquad (**)$$

Rõ ràng, $u = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình ứng với $C = 0$.

Để tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất, ta giả sử $C = C(x)$ sao cho nghiệm (**) thỏa mãn phương trình không thuần nhất. Thay (**) cùng đạo hàm của nó vào phương trình không thuần nhất:

$$u=C(x^2+1)^2 \Rightarrow u'=C'(x^2+1)^2+4x(x^2+1)C$$

$$C'(x^2+1)^2+4x(x^2+1)C-\frac{4x}{1+x^2}.C(x^2+1)^2=2(2x+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx}\left(x^2+1\right)=2\left(2x+1\right)^2$$

$$\Rightarrow C=\int \frac{2\left(2x+1\right)^2}{x^2+1}dx=8x-6\arctan x+4\ln\left(4\left(x^2+1\right)\right)+4$$

Vậy nghiệm tổng quát của PTVP:

$$u=\frac{1}{y^2}=\left(1+x^2\right)^2\left[8x-6\arctan x+4\ln\left(4\left(x^2+1\right)\right)+4+K\right]$$

Phương trình vi phân toàn phần

PTVP dạng: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (*) được gọi là PTVP toàn phần nếu vế trái của nó là vi phân toàn phần của hàm nào đó, nghĩa là tồn tại hàm $U(x,y)$ sao cho:

$$dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình (*) là PTVP toàn phần là: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Khi đó hàm $U(x,y)$ có thể tìm dưới dạng:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$$

Hay:
$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$$

Trong đó (x_0,y_0) là điểm tùy ý mà P,Q liên tục.

Bài tập. Giải phương trình $\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(x^2y+y^3\right)dy=0$

Ta có:

$$P\left(x,y\right)=x^3+xy^2;Q\left(x,y\right)=x^2y+y^3$$

$$\to\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy,\forall\left(x,y\right)$$

Hệ thức này chứng tỏ phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần với hàm $U(x,y)$ có thể chọn tại $x_0=y_0=0$:

$$U\left(x,y\right)=\int_0^x\left(x^3+xy^2\right)dx+\int_0^y\left(0.y+y^3\right)dy$$

$$\to U\left(x,y\right)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C_1$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=4C_1=C^2$$

$$\to x^2+y^2=C,C>0$$

Bài tập. Giải phương trình $\left(4xy^2+y\right)dx+\left(4x^2y+x\right)dy=0$

Ta có:

$$P\left(x,y\right)=4xy^2+y;Q\left(x,y\right)=4x^2y+x$$

$$\to\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=8xy,\forall\left(x,y\right)$$

Hệ thức này chứng tỏ phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần với hàm $U(x,y)$ có thể chọn tại $x_0=y_0=0$:

$$U\left(x,y\right)=\int_0^x\left(4xy^2+y\right)dx+\int_0^y\left(4.0.y+0\right)dy$$

$$\to U\left(x,y\right)=2x^2y^2+xy=C$$

Bài tập. Giải phương trình $\left(3x^2y^2+7\right)dx+2x^3ydy=0$

$$P\left(x,y\right)=3x^2y^2+7;Q\left(x,y\right)=2x^3y$$

$$\rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y,\forall\left(x,y\right)$$

Hệ thức này chứng tỏ phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần với hàm $U(x,y)$ có thể chọn tại $x_0=y_0=0$:

$$U\left(x,y\right)=\int_0^x\left(3x^2y^2+7\right)dx+\int_0^y 2.0^3.ydy$$

$$\rightarrow U\left(x,y\right)=x^3y^2+7x=C$$