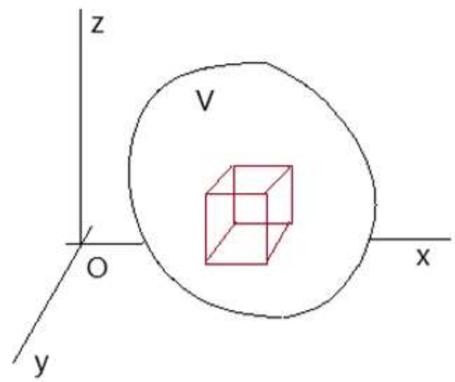
ĐỊNH NGHĨA

Mở rộng khái niệm tích phân hai lớp sang tích phân ba lớp từ bài toán tính thể tích khối trụ và dẫn đến việc xây dựng tổng tích phân Riemann. Hoàn toàn tương tự, xét hàm $f(x,y,z)$ xác định trong miền đóng, bị chặn $V \subset R^3$. Chia nhỏ khối V thành n phần tử khối có thể tích bé $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Trong mỗi phần tử thể tích ΔV_i, lấy điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i)$.



Miền V và thể tích đơn vị ΔV_i

Lập tổng tích phân Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

Gọi $d(\Delta V_i)$ là "đường kính" của phần tử ΔV_i, tức là khoảng cách lớn nhất của những điểm chứa trong ΔV_i.

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $d = \max_{\Delta V_i} (\Delta V_i) \to 0$ mà S_n tiến tới giới hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền thành các phần tử ΔV_i và cách chọn điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân ba lớp (bội ba) của hàm $f(x,y,z)$ trong miền V và được ký hiệu:

$$\iiint_V f(x,y,z) dV$$

ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

Tích phân bội ba của hàm số $f(x, y, z)$ trong miền V:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

Tính chất tuyến tính:

$$\iiint_V [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

$$\iiint_V kf(x,y,z)dxdydz = k\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

Tính chất cộng tính: nếu $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \varnothing$ thì:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG HỆ TỌA ĐỘ DESCARTES

Giống như tính tích phân kép, ta cần phải đưa tích phân ba lớp về tích phân lặp, thông qua trung gian là tích phân hai lớp:

Tích phân ba lớp → Tích phân hai lớp → Tích phân lặp

Việc chuyển đổi phụ thuộc chặt chẽ vào miền V. Ví dụ, nếu miền V được giới hạn bởi các mặt $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y)$ trong đó $z_1(x, y)$ và $z_2(x, y)$ là các hàm liên tục trên miền D (hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy) thì ta có:

$$I = \iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \qquad (*)$$

Các bước tiến hành:

- Xác định hình chiếu của V lên mặt phẳng Oxy
- Xác định biên dưới $z_1(x, y)$ và biên trên $z_2(x, y)$
- Sử dụng công thức (*) để hoàn tất việc chuyển đổi.

Định lý 1. Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng Oxy $(z = 0)$ và $f(x, y, z)$ là hàm số lẻ đối với z thì $\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz = 0$.

Định lý 2. Nếu V là miền đối xứng qua mặt phẳng Oxy $(z = 0)$ và $f(x, y, z)$ là hàm số chẵn đối với z thì $\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz = 2\iiint_{V_1} f(x, y, z)\,dxdydz$, trong đó V_1 là phần phía trên mặt phẳng $z = 0$ của V.

Ví dụ. Tính $\iiint\limits_V xyz^2 dV$, trong đó V là miền giới hạn bởi:

$$V = \left\{(x,y,z), 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\right\}$$

$$\iiint\limits_V xyz^2 dV = \int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 xyz^2 dxdydz = \int_{-1}^2 \int_0^3 \left[\frac{1}{2}x^2 yz^2\right]_{x=0}^{x=1} dydz = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 \int_0^3 yz^2 dydz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \left[\frac{1}{2}y^2 z^2\right]_{y=-1}^{y=2} dz = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_0^3 3z^2 dz = \frac{1}{4}.\left[z^3\right]_{z=0}^{z=3} = \frac{1}{4}.27 = \frac{27}{4}$$

Ví dụ. Tính $I = \iiint\limits_V zdxdydz$ trong đó miền V được xác định bởi:

$$V = \left\{(x,y,z), 0 \le x \le \frac{1}{4}, x \le y \le 2x, 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

$$\iiint\limits_V xyz^2 dV = \int_0^{1/4} \int_x^{2x} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdxdydz = \int_0^{1/4} dx \int_x^{2x} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^{1/4} dx \int_x^{2x} \left(1-x^2-y^2\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \left[y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=x}^{y=2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \left(x - \frac{10x^3}{3}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{5x^2}{6}\right]_{x=0}^{x=1/4} = \frac{43}{3072}$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN TỔNG QUÁT

Thường được sử dụng trong trường hợp miền V là giao của ba họ mặt. Giả sử hàm $f(x, y, z)$ liên tục trong miền V, thực hiện phép đổi biến số:

$$\begin{cases} x = x(u, v, \mathrm{w}) \\ y = y(u, v, \mathrm{w}) \\ z = z(u, v, \mathrm{w}) \end{cases} \quad (*)$$

Thỏa mãn:

+ x, y, z cùng với các đạo hàm riêng của nó là các hàm số liên tục trên miền đóng V_{uvw}.

+ Công thức (*) xác định một song ánh $V_{uvw} \to V$.

+ Định thức Jacobi của phép đổi biến được viết:

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, \mathrm{w})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{w}} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{w}} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{w}} \end{vmatrix}; \text{ hoặc } J^{-1} = \frac{D(u, v, \mathrm{w})}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Khi đó:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_{V_{uvw}} f\left[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right]|J|\,dudvdw$$

Ví dụ. Tính thể tích miền V giới hạn bởi các mặt:

$$x+y+z=\pm 3; x+2y-z=\pm 1; x+4y+z=\pm 2$$

Thực hiện phép đổi biến:

$$\begin{cases} x+y+z=u \\ x+2y-z=v \\ x+4y+z=\mathrm{w} \end{cases} \rightarrow J^{-1}=\left|\frac{D(u,v,\mathrm{w})}{D(x,y,z)}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=6$$

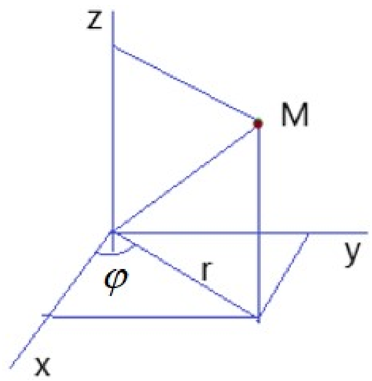
Dẫn đến:

$$V=\frac{1}{6}\iiint\limits_{V_{uvw}} \mathrm{dud}v\mathrm{dw}=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3} du\int_{-1}^{1} dv\int_{-2}^{2} dw=\frac{1}{6}.6.2.4=8$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN TRONG HỆ TỌA ĐỘ TRỤ

Khi miền V có biên là các mặt như paraboloit, mặt nón, mặt trụ và hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là hình tròn, hoặc hàm tích phân có chứa biểu thức x^2+y^2 thì công thức đổi biến trong hệ tọa độ trụ hay được sử dụng.

Tọa độ trụ (r,φ,z) có mối liên hệ với tọa độ Descartes như sau:



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Định thức Jacobian của phép biến đổi là:

$$J = \det(\mathbf{J}) = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\mathrm{z})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \mathrm{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0$$

Dẫn đến:

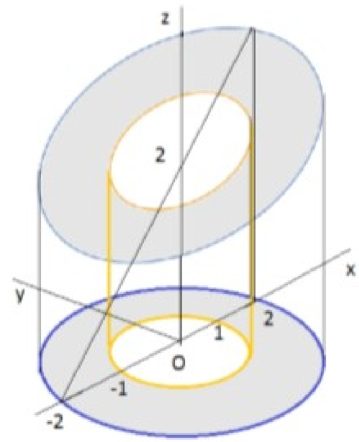
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r,\varphi,z}} f(r,\varphi,z)\,rdrd\varphi dz$$

Ví dụ. Tính $\iiint\limits_V y\,dxdydz, V$ nằm dưới mặt phẳng $z = x + 2$, trên mặt phẳng Oxy và giữa hai hình trụ $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Sử dụng phép đổi biến trong hệ tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \rightarrow D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 1 \le r \le 2 \\ 0 \le z \le r\cos\varphi + 2 \end{cases};$$

$$J = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}\right| = r$$



Dẫn đến:

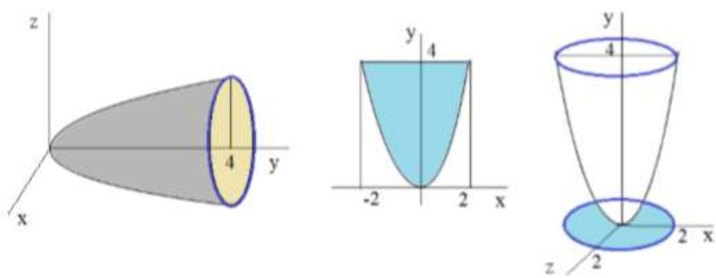
$$\iiint\limits_V y\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 dr \int_0^{r\cos\varphi+2} r^2 \sin\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r^2 \sin\varphi\left(r\cos\varphi + 2\right)dr$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{15}{4}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{14}{3}\sin\varphi\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{15}{8}\sin 2\varphi + \frac{14}{3}\sin\varphi\right) = 0$$

Ví dụ. Tính $I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$, V giới hạn bởi mặt paraboloid $y=x^2+z^2$ và mặt phẳng $y=4$.

$$I=\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Trường hợp 1. Xem xét Oxy là mặt phẳng chiếu

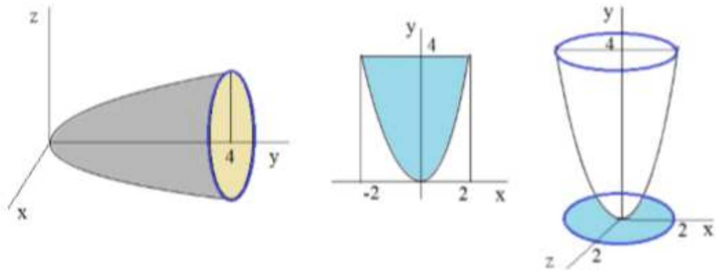


$$V=\left\{(x,y,z), -2\le x\le 2, x^2\le y\le 4, -\sqrt{y-x^2}\le z\le\sqrt{y-x^2}\right\}$$

$$I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{x^2}^{4}dy\int\limits_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,dz$$

Đây là 1 tích phân rất khó để tính.

Trường hợp 2. Xem xét Oxz là mặt phẳng chiếu (V giới hạn bởi mặt paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$)

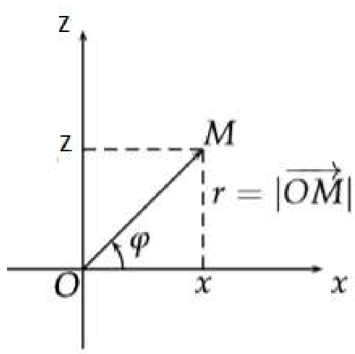


$$V = \left\{ (x, y, z), -2 \le x \le 2, -\sqrt{4 - x^2} \le z \le \sqrt{4 - x^2}, x^2 + z^2 \le y \le 4 \right\}$$

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + z^2}\, dxdydz = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dz \int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(4 - x^2 - z^2\right) \sqrt{x^2 + z^2}\, dz$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực $x = r\cos\varphi; z = r\sin\varphi$ (hình vẽ). Ta có:

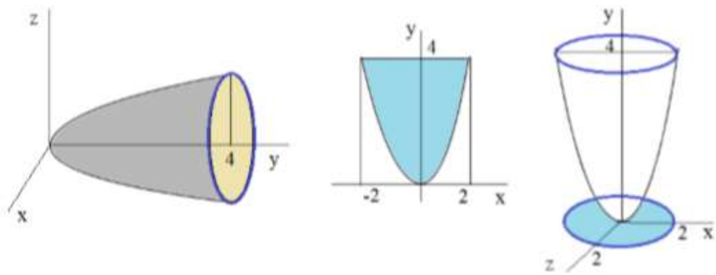


$$4 - x^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(4 - r^2\right) r^2 dr = \frac{128\pi}{15}$$

Trường hợp 3. Xem xét trong hệ tọa độ trụ ngay từ đầu:

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + z^2}\, dxdydz,$$



$$x = r\cos\varphi, z = r\sin\varphi, y = y$$

$$V = \left\{ (\varphi, r, y), 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 2, r^2 \le y \le 4 \right\}$$

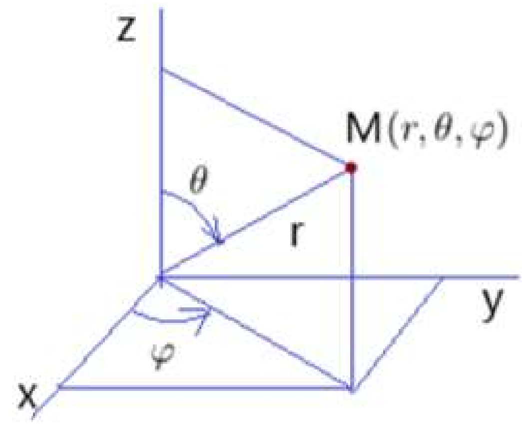
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2}^4 r.rdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 y \Big|_{y=r^2}^{y=4} dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(4r^2 - r^4\right) dr = \frac{128\pi}{15}$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN TRONG HỆ TỌA ĐỘ CẦU

Khi miền V có dạng hình cầu, chỏm cầu, múi cầu, … và khi hàm lấy tích phân có chứa biểu thức $x^2+y^2+z^2$ thì phép đổi biến trong hệ tọa độ cầu hay được sử dụng.

Hệ tọa độ cầu (r,θ,φ) có mối liên hệ với hệ tọa đồ Descartes như sau:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



$$r \ge 0; 0 \le \theta \le \pi; 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Định thức Jacobian của phép biến đổi:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

Dẫn đến:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\theta\varphi}} f[r,\theta,\varphi]\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

Đặc biệt, nếu $\begin{cases} \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\,(\varphi_2-\varphi_1 \le 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta,\varphi) \le r \le r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$ thì:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta\,d\theta \int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r,r\theta,\varphi)\,r^2dr$$

Ví dụ. Tính $I = \iiint\limits_V z^2 dxdydz, V$ được giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$

Thực hiện phép đổi biến trong hệ tọa độ cầu:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}; \; J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

$$I = \iiint\limits_V z^2 dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \int\limits_0^R r^4 dr$$

Ta có: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi; \int\limits_0^R r^4 dr = \frac{R^5}{5}$. Đặt:

$$\cos\theta = u \to \int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \int\limits_{-1}^{1} u^2 du = 2\int\limits_0^1 u^2 du = \frac{2}{3} \to I = 2\pi.\frac{2}{3}.\frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{15}$$

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN TRONG HỆ TỌA ĐỘ CẦU SUY RỘNG

Tương tự như khi tính tích phân kép, khi miền V có dạng hình ellipsoit hoặc hình cầu có tâm không nằm trên các trục tọa độ thì phương pháp đổi biến số trong hệ tọa độ cầu mở rộng có thể được sử dụng. Khi đó, Jacobian của phép biến đổi cần phải được tính lại.

Ví dụ. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó V là nửa của khối ellipsoit

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\le 1, z\ge 0, (a,b>0).$$

Sử dụng phương pháp đổi biến số trong hệ tọa độ cầu suy rộng, đặt:

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = ar\sin\theta\sin\varphi \\ \quad z = br\cos\theta \end{cases} \to J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = a^2br^2\sin\theta$$

Miền tính tích phân trong hệ tọa độ cầu suy rộng:

$$V:\left\{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le 1\right\}$$

Dẫn đến tích phân:

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 br\cos\varphi.ar\sin\theta.a^2br^2\sin\theta dr$$