《高等数学 B（下）》期中试卷参考解答

一、填空题（4 分*5= 20 分）

1. 设$w(x,y,z)=\ln(y^2+z^2-x)$，则$dw|_{(1,1,-1)}=$ $\underline{-dx+2dy-2dz}$

2. 函数 $f(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)$ 在点 $(0,1,-1)$处下降最快的方向为 <u>(0,-1,1)或（0，-3，3）</u>，其方向导数是 <u>-3$\sqrt{2}$</u> 。

3. 曲面$z-e^z+xyz+1=0$ 在点$(2,-1,0)$处的切平面方程为 $\underline{z=0}$ 。

4. 设有$\begin{cases} uv=x^2+y^2 \\ xy=u^2+v^2 \end{cases}$，如果$|u|\neq|v|$，则 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{4yu-xv}{2(u^2-v^2)}$

5. $x+y=5$和$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{5}$ 所围区域面积是 $\frac{25}{3}$ 。

二、计算和问答题（10 分*8=80 分）

1. 三元函数$f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & x^2+y^2+z^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2+z^2=0 \end{cases}$ 在$(0,0,0)$是否连续、可偏导、可微？

解：1) 写出$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}-0\right|<g(x,y,z)$，例如：$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}-0\right|<\frac{1}{9}(|x|+|y|+|z|)$

指出：$f(x,y,z)\to 0$ 当$(x,y,z)\to(0,0,0)$，

结论：连续

2) 用定义计算 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0,0)}=\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0,0)}=\frac{\partial f}{\partial z}|_{(0,0,0)}=0$，

结论：可偏导

3）写出 $\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}-0-f'_x(0,0,0)x-f'_y(0,0,0)y-f'_z(0,0,0)z\right|=\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right|$

指出 $\frac{\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 当(x,y,z)->(0,0,0)时极限不存在

结论：不可微

2. 设$xz=ln(yz)$，　求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

解 1：对原方程关于 x 求导，利用链式法则得出关于$\frac{\partial z}{\partial x}$的方程$z+x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$

解方程得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z^2}{1-xz}$　(*)

同样，　$x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$

解方程得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{y(xz-1)}$　（**）

对（*）关于 y 求偏导得　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{2z\frac{\partial z}{\partial y}(1-xz)-z^2(-x)\frac{\partial z}{\partial y}}{(1-xz)^2}$

将（**）代入，化简得$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z^2(2-xz)}{y(xz-1)^3}$

解 2：设$F(x,y,z)=xz-ln(yz)$,

$F'_x=z,\ F'_y=-\frac{1}{y},\ F'_z=\frac{xz-1}{z}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{z^2}{1-xz},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{z}{y(1-xz)}$,

以下同解 1

3. 求$x^2=2xyz-1$ 和$z^3=3xy-z(x+y)$的交线在点$P(1,1,1)$处的切线方程和法平面方程。

解：设$F(x,y,z)=x^2-2xyz+1$，$G(x,y,z)=z^3-3xy+z(x+y)$

$(F'_x,F'_y,F'_z)|_P=(2x-2yz,-2xz,-2yz)|_P=(0,-2,-2)$

$(G'_x,G'_y,G'_z)|_P=(-3y+z,-3x+z,3z^2+(x+y))|_P=(-2,-2,5)$

切线方向：$(0,1,1)\times(-2,-2,5)=(7,-2,2)$

切线方程：$\frac{x-1}{7}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{2}$

法平面方程：7(x-1)-2(y-1)+2(z-1)=0,　7x-2y-2z=7

4. 求函数$f(x,y,z)=x^3+y^2+\sqrt{6}z-2xyz$ 的极值。

解：$F'_x=3x^2-2yz=0\quad => \quad 3x^2=2yz$

$F'_y=2y-2xz=0\quad => \quad y=xz$

$f'_z=\sqrt{6}-2xy=0\quad => \quad xy=\frac{\sqrt{6}}{2}$

解方程组得：$x=1,y=z=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Hessain 阵 H=$\begin{pmatrix}6 & -\sqrt{6} & -\sqrt{6}\\ -\sqrt{6} & 2 & -2\\ -\sqrt{6} & -2 & 0\end{pmatrix}$，$\Delta_1=6,\Delta_2=6,\Delta_3=-60$, H 非正定亦非负定

f(x,y,z)没有极值

5. 求曲面 $2x^2+y^2+z=0$ 与平面$x+y-2z+1=0$ 间的最近距离。

解：设球面上任意一点(x,y,z)到平面的距离为 d，则

$$\mathrm{d}^2=\left(\frac{|x+y-2z+1|}{\sqrt{1+1+4}}\right)^2=\frac{(x+y-2z+1)^2}{6}$$

点（x,y,z）满足$2x^2+y^2+z=0$

$$L(x,y,z,\lambda)=\frac{(x+y-2z+1)^2}{6}+\lambda(2x^2+y^2+z)$$

$$L'_x=(x+y-2z+1)/3+4\lambda x=0$$

$$L'_y=(x+y-2z+1)/3+2\lambda y=0$$

$$L'_z=-2(x+y-2z+1)/3+\lambda=0$$

$$\mathrm{L}'_\lambda=2x^2+y^2+z=0$$

解得：x=-1/8,y=-1/4,z=-3/32

代入 d 得最近距离为$\frac{13}{16\sqrt{6}}$

6. 计算 $\iint_\Omega \ |x^2+\frac{y^2}{a^2}-1|dxdy$, 其中 $\Omega=\{(x,y)|(x-1)^2+\frac{y^2}{a^2}\ \le 1,a>0\ \}$ 。

解：$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$

$$\Omega_1=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+\frac{y^2}{a^2}\le 1,\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2}-1\le 0,a>0\right\}$$

$$\Omega_2=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+\frac{y^2}{a^2}\le 1,\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2}-1>0,a>0\right\}$$

设：$x=rcos\theta,y=arsin\theta,$

$$\Omega'_1\ \ =\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3},0\le r\le 1;-\frac{\pi}{2}\le\theta\le-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2cos\theta,\right\}$$

$$\Omega'_2\ \ =\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3},1\le r\le 2cos\theta\right\},$$

$$\iint_\Omega\ \left|x^2+\frac{y^2}{a^2}-1\right|dxdy$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^1(1-r^2)ardr+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2cos\theta}(1-r^2)ardr+\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2cos\theta}(r^2-1)ardr\right]$$

$$=\ (\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4})a$$

7. 求由抛物面：$y = x^2 + z^2$, $y = 4x^2 + 2z^2$和柱面：$xz = a$, $xz = b\ (b > a > 0)$，$z = 27x^2$, $x^2 = 8z$ 所围区域的体积。

解：$\mathrm{V} = \iint_{\Omega} dxdz \int_{x^2+z^2}^{4x^2+2z^2} dy = \iint_{\Omega} (3x^2 + z^2) dxdz$

设 $u = xz, v = \frac{z}{x^2}$，则 $\Omega' = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \times [\frac{1}{8}, 27]$，

$\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| = \frac{3z}{x^2} = 3v$

$\mathrm{V} = \int_a^b du \int_{\frac{1}{8}}^{27} \left(3u^{\frac{2}{3}} v^{-\left(\frac{2}{3}\right)} + u^{\frac{4}{3}} v^{\frac{2}{3}}\right) \frac{1}{3v}\ \mathrm{dv}$

$= \frac{7}{2}\left(b^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{5}{3}}\right) + \frac{15}{8}\left(b^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{7}{3}}\right)$

8. 一均质物体占据区域Ω, Ω由单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$ 与平面$z = 2R$、$z = R$ 所围成，设物体密度的密度为常数 C，求物体绕 y 轴旋转的转动惯量。

解：$\mathrm{I_y} = \iiint_{\Omega} C(x^2 + z^2) dxdydz$

$= C \int_R^{2R} dz \iint_{x^2+y^2 \le R^2+z^2} (x^2 + z^2) dxdy$

$= C[\int_R^{2R} dz \iint_{x^2+y^2 \le R^2+z^2} x^2 dxdy + C \int_R^{2R} dz \iint_{x^2+y^2 \le R^2+z^2} z^2 dxdy$

$= C[\int_R^{2R} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2+z^2}} r^2 \cos^2\theta\, r\, dr + \int_R^{2R} z^2 \pi (R^2 + z^2) dz]$

$= C[\pi \int_R^{2R} \frac{1}{4} (R^2 + z^2)^2 dz\ + \int_R^{2R} z^2 \pi (R^2 + z^2) dz]$

$= \frac{\pi C}{4} [\int_R^{2R} (R^4 + 6r^2 z^2 + 5z^4) dz = \frac{23}{2} \pi C R^5$