一（48 分，每小题 6 分，共 8 小题）

√1 设x_n为方程$x^n+nx-1=0$的正根，求α的范围使得$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$收敛。

√2 设 $z=f(x,y)$ 有二阶连续偏导数。写出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在坐标变换 $\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=2xy\end{cases}$ 下的表达式。

√3 利用x^2 的 fourier 展开，求和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

4 利用条件极值的 lagrange 乘数法，证明：

$$\prod_{i=1}^{n}p_i^{q_i}\le\prod_{i=1}^{n}q_i^{q_i}$$

其中$\sum p_i=\sum q_i=1$ 且每一个 p_i,q_i为正数。

√5 判断级数 $1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots$ 是否收敛。

√6 求函数 $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ 在闭区域

$$D=\{(x,y):x\ge 0,y\ge 0,x+y\le 2\pi\}$$

上的最大值和最小值。

√7 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$

√8 （i）求曲面$x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点$(0,1,-1)$处的切平面方程。

（ii）求曲线$\begin{cases}x=t-sint\\ y=1-cost\\ z=4sin\frac{t}{2}\end{cases}$ 在点$t=\frac{\pi}{2}$处的切线方程和法平面方程。

√二 （10 分）设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续。证明下列等式：

（1）$\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b f(y)(b-y)dy$

（2）$\int_0^a dy\int_0^y e^{a-x}f(x)dx=\int_0^a (a-x)e^{a-x}f(x)dx$

√三（10 分）设$y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 定义的关于 x,y 的隐函数。证明：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}$$

√四 （10 分） 设$D:x\ge 0,y\ge 0,x^2+y^2\le 1$. 证明

$$\frac{\pi}{4\sqrt{4\sqrt{10}+15}}\le\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{(x+3y+2)^2+1}}\le\frac{\sqrt{5}\pi}{20}$$

五 （11 分） 设函数$f(x)$满足

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2}f(x^2-t)\,dt+\iint_D f(xy)\,dx\,dy$$

其中D是以$(-1,-1),(1,-1),(1,1)$为顶点的三角形，且$f(1)=0$，求$\int_0^1 f(x)dx$。

六（11 分）设二元函数f(x, y)在区域$D=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$上具有连续的四阶偏导数，f(x, y)在$D$的边界上恒为 0，且

$$\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right|\le 3.$$

证明：

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right|\le\frac{1}{48}$$