5.$S(x)=\ln(1+\frac{x}{2}),\ x\in(-2,2]$.

$$\ln(1+\frac{x}{2})=\ln\frac{3}{2}+\ln(1+\frac{x-1}{3})=\ln\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-1)^n$$

收敛域为$x\in(-2,4]$(但仅在$(-2,2]$上与$S(x)$相等).

6.

$$(\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x)^2=\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le1\text{且}x,y\ge0} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_{x^2+y^2\le2\text{且}x,y\ge0} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即可证得结论。

7(1)$a_0=1,a_n=0(n\ge1),\ b_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n\pi}$,

$$f(x)\sim S(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x$$

$S(\frac{7\pi}{2})=S(-\frac{\pi}{2})=0,\ S(7\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}$.

(2)

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}[\big(f(x)-g(x)\big)^2+g^2(x)]\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}[2\big(\frac{f(x)}{2}-g(x)\big)^2+\frac{1}{2}f^2(x)]\mathrm{d}x$$

所以$A_i=\dfrac{a_i}{2},\ i=0,1,\dots,10,\ B_i=\dfrac{b_i}{2},\ i=1,\dots,10.$

又解：由$\dfrac{\partial}{\partial A_i}I=0$得：$A_i=\dfrac{a_i}{2},\ i=0,1,\dots,10,$

由$\dfrac{\partial}{\partial B_i}I=0$得：$B_i=\dfrac{b_i}{2},\ i=1,\dots,10.$

（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2012～2013学年第二学期期末考试试卷

■A 卷

课程名称：高等数学B(下)　　课程代码：MATH120004

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：________　学　号：________　专　业：________

题　目	1	2	3	4	5	6	7	总分
得　分								

1.（本题满分42 分，每小题7 分）计算下列各题：

(1)设$z(x,y)=(\frac{x}{y})^2\ln(3x-2y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$.

(2)求空间曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程。

(3)求椭圆抛物面$z=1+x^2+3y^2$、圆柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0$所围的有界区域的体积。

(4)计算二重积分$\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\frac{(1+x+y)^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中区域$\Omega=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

(5)求和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$.

（装订线内不要答题）

(6)一个雪球开始融化，假设它将时刻保持球形，且体积的融化率与表面积成正比，若在最初的一个小时内，其体积缩减为原来的$\frac{1}{8}$。计算雪球全部融化所需的时间。

2.（本题满分8 分） 求函数$f(x,y)=x^2+y^2-xy$在区域D：$|x|+|y|\leq 1$上的最大值。

3.（本题满分8 分） 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导，讨论$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$的敛散性。

4.（本题满分10 分） 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上二阶连续可导，$f(1)=0$, $f'(1)=1$, 函数$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$满足方程$z_{xx}+z_{yy}=0$. 求函数$f(x)$。

（装订线内不要答题）

5.（本题满分10 分） 求函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}x^n$ 在$x=1$处的Taylor展开式及所求展开式的收敛域。

（装订线内不要答题）

6.（本题满分10 分） 证明不等式：

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-1}) < \left(\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$$

7.（本题满分12 分） 设$f(x)$是以2π为周期的函数且$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\pi];\\ 0, & x\in(-\pi,0).\end{cases}$

(1)求$f(x)$的Fourier展开式，并分别计算和函数在$\frac{7\pi}{2}$及7π处的值；

(2)求实系数$A_0,A_1,\ldots,A_{10}$和$B_1,B_2,\ldots,B_{10}$使下面的积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(f(x)-g(x)\right)^2+g^2(x)\right]\mathrm{d}x$$

达到最小值，其中函数$g(x)=\frac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{10}\left(A_n\cos nx+B_n\sin nx\right)$.

复旦大学数学科学学院

2012～2013学年第二学期期末考试

■ 高数B（下）A 卷参考答案

1. (1)$z_x(1,1)=3,\ z_{xy}(1,1)=-4.$

(2)$\begin{cases}-x+2y+2z-3=0\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 或$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}.$

(3)$2\pi.$

(4)$\pi.$

(5)$\dfrac{e+e^{-1}}{2}-1.$

(6)2小时。

2.显然最大值可在$0\le x$及$y\le 0$且$x-y\le 1$时取到.

由$z_x=z_y=0$可解得：$x=y=0,\ z(0,0)=0;$

由$x=0$：$z=y^2,\ y=-1$时z取最大值1;

由$y=0$：$z=x^2,\ x=1$时z取最大值1;

由$y=x-1, x\in[0,1]$：$z=x^2-x+1,\ x=1$时z取最大值1;

所以z的最大值为1.

3.因为$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\dfrac{f''(0)}{2},$

所以$\exists N_0>0\forall n>N_0$: $|f(\frac{1}{n})-f(0)-f'(0)\frac{1}{n}|<\dfrac{|f''(0)|+1}{n^2}$, 因而：

(1)$f(0)\neq 0$时，级数发散;

(2)$f(0)=0, f'(0)\neq 0$时，级数条件收敛;

(3)$f(0)=f'(0)=0$时，级数绝对收敛。

4.记$r=\sqrt{x^2+y^2}$, 则$z_x=2xf(r^2)+2xr^2f'(r^2),$

$z_{xx}=2f(r^2)+[2r^2+8x^2]f'(r^2)+4x^2r^2f''(r^2),$

同理：$z_{yy}=2f(r^2)+[2r^2+8y^2]f'(r^2)+4y^2r^2f''(r^2),$

所以：$z_{xx}+z_{yy}=4f(r^2)+12r^2f'(r^2)+4r^4f''(r^2)=0.$

记$y(t)=f(e^t)$, 则：$y''+2y'+y=0,\ y=(C_1+C_2t)e^{-t}.$

所以：$f(x)=\dfrac{C_1+C_2\ln x}{x}$, 代入初始条件得：$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}.$