

Fysica van Galaxieën Programmeerproject

KEVIN CANTERS
ALEXANDRO FULCO
FREDERIC VAN ASSCHE

Academiejaar 2013-2014

1 Uitdrukking voor dichtheid

Voor de triaxiale zwaartekrachtpotentiaal geldt dat

$$V(x, y, z) = \frac{v_0^2}{2} \ln \left(1 + x^2 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right)$$

Om hieruit de dichtheid $\rho(x, y, z)$ te halen die hiermee overeenstemt, maken we gebruik van de vergelijking van Poisson voor de zwaartekracht

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 4\pi G \rho(x, y, z)$$

In dit geval geldt dat $\phi(x, y, z) = V(x, y, z)$. De uitdrukking voor $\rho(x, y, z)$ hebben we via Python met symbolische differentiatie bekomen, en is

$$4\pi G \rho(x, y, z) = \frac{-(v_0^2(a^4(b^4(x^2 - 1) - b^2(x^2 + z^2 + 1) + z^2) - a^2b^2(b^2(x^2 + y^2 + 1) + y^2 + z^2) + b^4y^2))}{(a^2(b^2(x^2 + 1) + z^2) + b^2y^2)^2}$$

Met deze uitdrukking hebben we ter illustratie en controle in figuur 1 een plot gemaakt die de massaverdeling binnen de galaxie weergeeft.

Als we nu willen weten aan welke voorwaarde b moet voldoen, met $1 > a > b$, opdat de dichtheid overall positief is, kunnen we dit probleem schrijven als een set van vergelijking (ofwel, in matrixvorm). De noemer is altijd positief, dus deze kunnen we uit het probleem halen. v_0^2 kunnen we ook uit het probleem halen, omwille van dezelfde reden. De voorfactor $(4\pi G)^{-1}$ kunnen we daarom dus ook laten vallen. Het resultaat, in matrixvorm, is dan

$$\begin{pmatrix} 0 & a^2b^4 - b^4 + a^2b^2 & b^2a^4 - a^4 + b^2a^2 & b^4a^4 + b^2a^4 + b^4a^2 \\ -b^4a^4 + b^2a^4 + b^4a^2 & 0 & b^2a^4 - a^4 + b^2a^2 & b^4a^4 + b^2a^4 + b^4a^2 \\ -b^4a^4 + b^2a^4 + b^4a^2 & a^2b^4 - b^4 + a^2b^2 & 0 & b^4a^4 + b^2a^4 + b^4a^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^4a^4 + b^2a^4 + b^4a^2 \end{pmatrix}$$

De determinant van deze matrix is

$$D = a^2b^2 (a^4b^4 + a^4b^2 + a^2b^4) \times (-2a^8b^8 + 2a^8b^6 + 2a^8b^4 - 2a^8b^2 + 2a^6b^8 - 4a^6b^6 + 2a^6b^4 + 2a^4b^8 + 2a^4b^6 - 2a^2b^8)$$

Als oplossingen vinden we, met alle (8) mogelijke permutaties van de tekens

$$b > \pm \frac{a}{\sqrt{\pm a^2 \pm 1}}$$

Echter, de enige fysisch relevante oplossing is die waarbij $b > 0$, en de wortel nergens singulier is

$$b > \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

2 Eenheden

De gebruikte eenheden staan in onderstaande tabel 1 weergegeven. Als constante G gebruikten we $G = 4.302 \times 10^{-6} \text{ kpc km}^2 \text{ s}^{-2} M_{\odot}^{-1}$.

Grootheid	Symbol	Eenheid
Afstanden	x	kpc
Snelheden	v	km s^{-1}
Massa's	m	M_{\odot}
Tijden	t	$\text{s km pc}^{-1} \approx 950 \times 10^6 \text{ yr}$

Tabel 1: Gebruikte eenheden

3 Voorbeeldbanen

De drie types banen werden gesimuleerd en geplot:

1. Box orbits

De parameters staan opgeliist in tabel 3, en de bekomen baan is weergegeven in figuur 2.

2. Long axis tube

De parameters staan opgeliist in tabel 4, en de bekomen baan is weergegeven in figuur 3.

3. Short axis tube

De parameters staan opgeliist in tabel 5, en de bekomen baan is weergegeven in figuur 4.

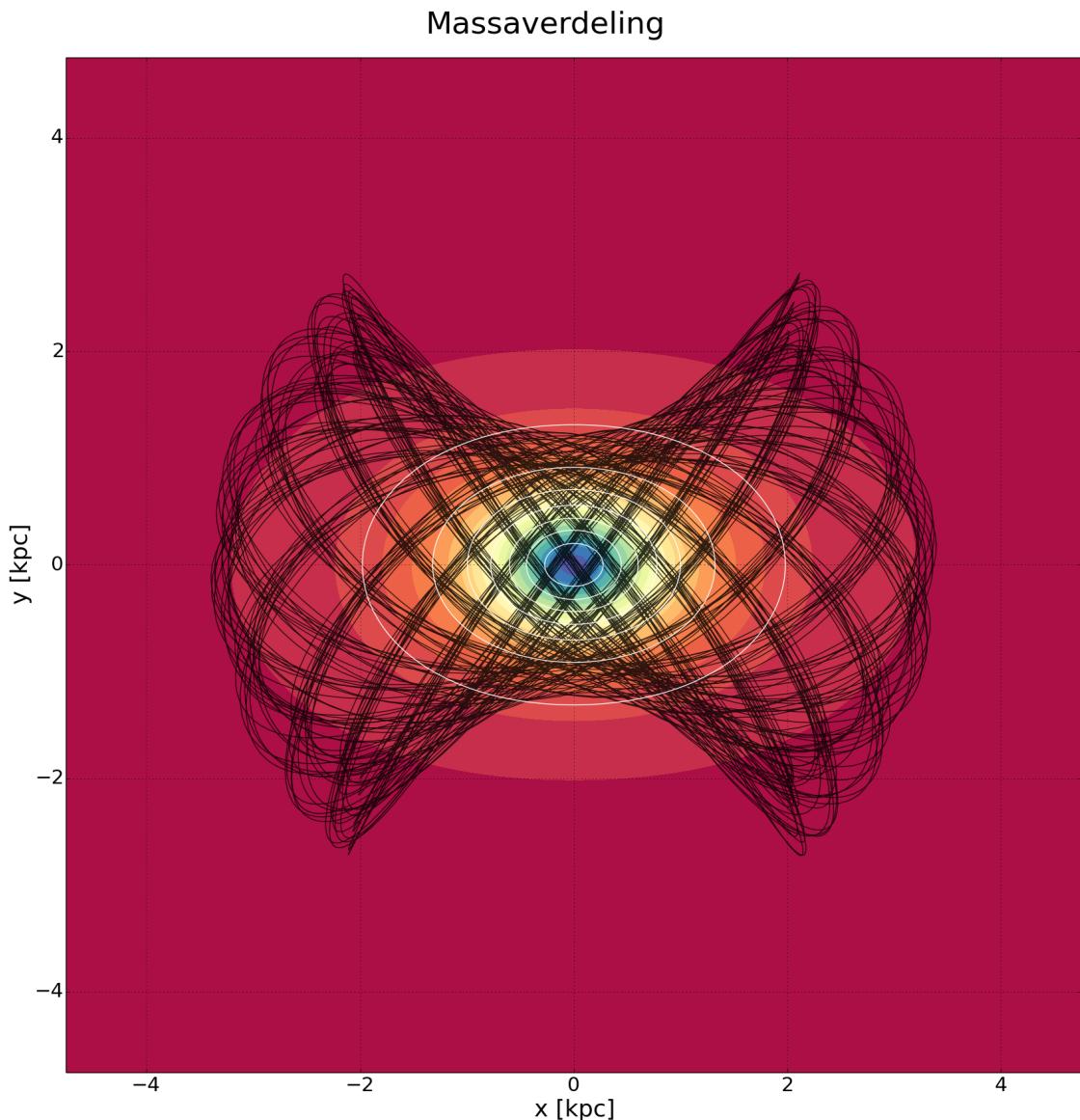
De doorsnijdingen met het oppervlak van constante energie $E = V(x, y, z)$ zijn weergegeven in dikke zwarte contouren op de verschillende grafieken.

4 Effect van zwart gat

Tenslotte hebben we een puntpotentiaal van een zwart gat toegevoegd aan het model. We lieten M_{\bullet} variëren van $3.1 \times 10^7 M_{\odot}$ tot $10 \times 10^8 M_{\odot}$ in zes stappen (telkens verdubbeling van M_{\bullet}). Het resultaat werd geplot in figuur 5. Als baan werd dezelfde gebruikt als voor de box orbit, weergegeven in tabel 3.

Het effect van de extra puntpotentiaal van het zwart gat manifesteerde zich bij kleine M_{\bullet} als een kleine perturbatie van de baan. Bij stijgende massa keren de rollen van de galactische potentiaal als geperturbeerde en M_{\bullet} -potentiaal als perturbatie geleidelijk om. Bij grote M_{\bullet} begint het zwart gat uiteindelijk de gehele potentiaal te overheersen en gaan we over van een triaxiaal systeem richting een eerder sferisch symmetrisch systeem. In dit systeem worden de sterbanen zeer chaotisch, en beginnen ze het hele oppervlak van constante energie op te vullen.

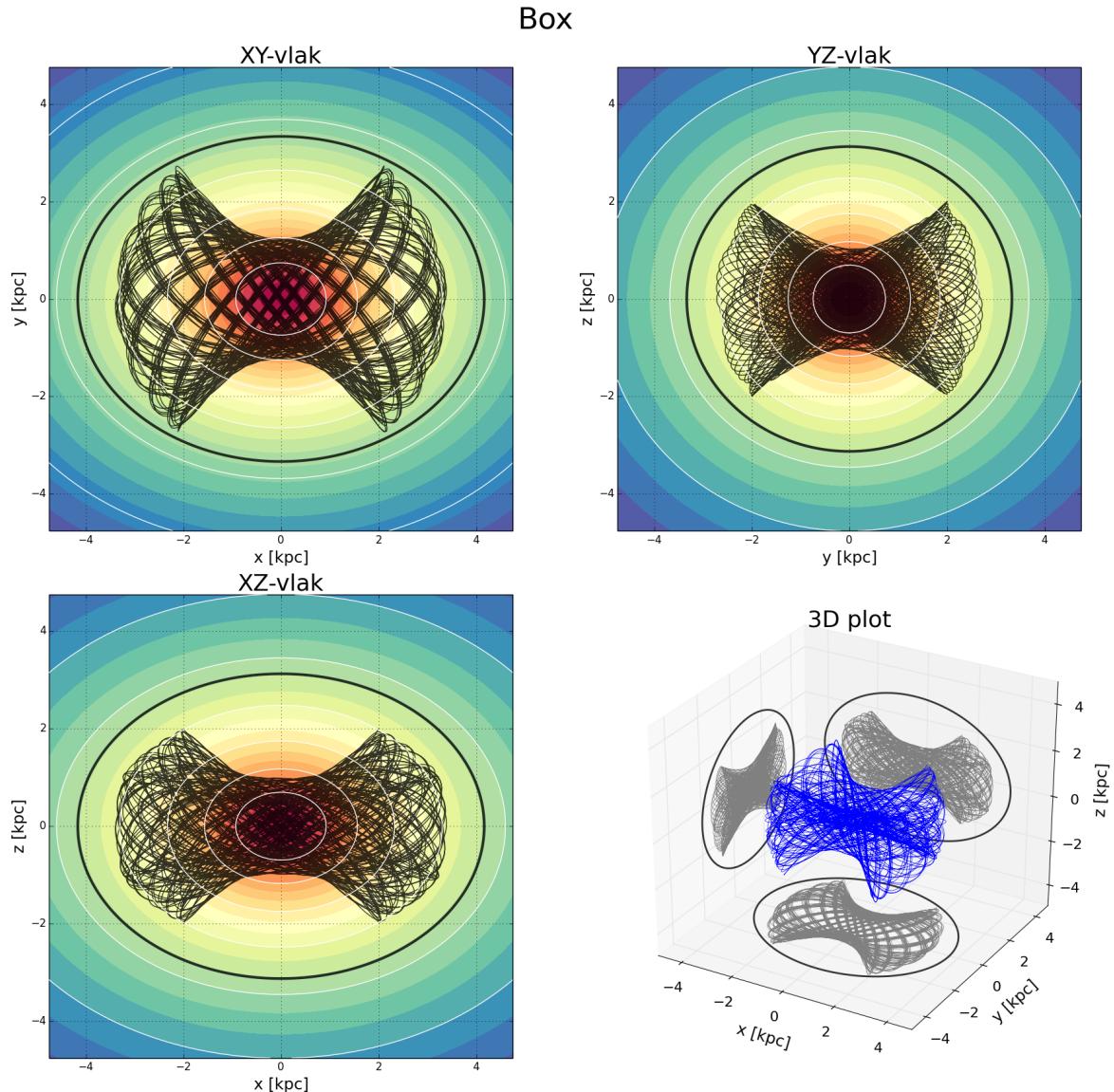
Deze neiging naar sferische symmetrie hebben we nog eens geverifieerd door een plot te maken met $M_{\bullet} = 10^{10} M_{\odot}$, weergegeven in figuur 6. Voor deze plot werden ook dezelfde parameters gebruikt als in tabel 3. In deze figuur zien we inderdaad dat de galaxie zijn triaxialiteit verliest wanneer het zwart gat aan massa wint.



Figuur 1: Massaverdeling

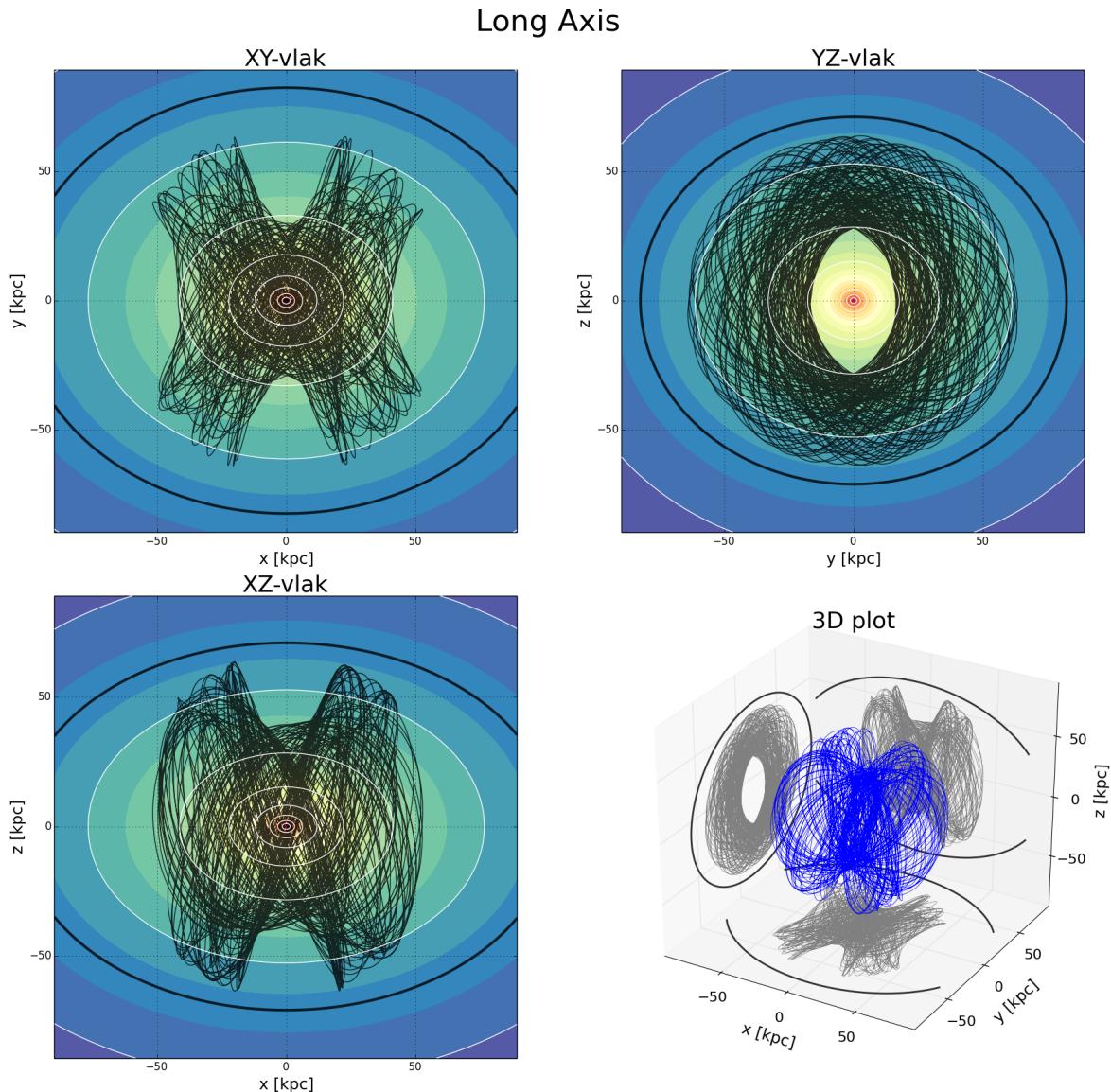
Parameter	Symbol	Waarde
Lange as	a	0.8
Korte as	b	0.75
Galactische circkelsnelheid	v_c	220 km s^{-1}
Beginpositie	\vec{x}_0	(2, 2, 2) kpc
Beginsnelheid	\vec{v}_0	(0, 0, 0) km s^{-1}
Integratietijd	T	$10 \text{ s km pc}^{-1} \approx 9.5 \times 10^9 \text{ yr}$

Tabel 2: Parameters voor box orbit in massaverdelingsplot


Figuur 2: Box orbit

Parameter	Symbol	Waarde
Lange as	a	0.8
Korte as	b	0.75
Galactische circelsnelheid	v_c	220 km s^{-1}
Beginpositie	\vec{x}_0	$(2, 2, 2) \text{ kpc}$
Beginsnelheid	\vec{v}_0	$(0, 0, 0) \text{ km s}^{-1}$
Integratietijd	T	$10 \text{ s km pc}^{-1} \approx 9.5 \times 10^9 \text{ yr}$

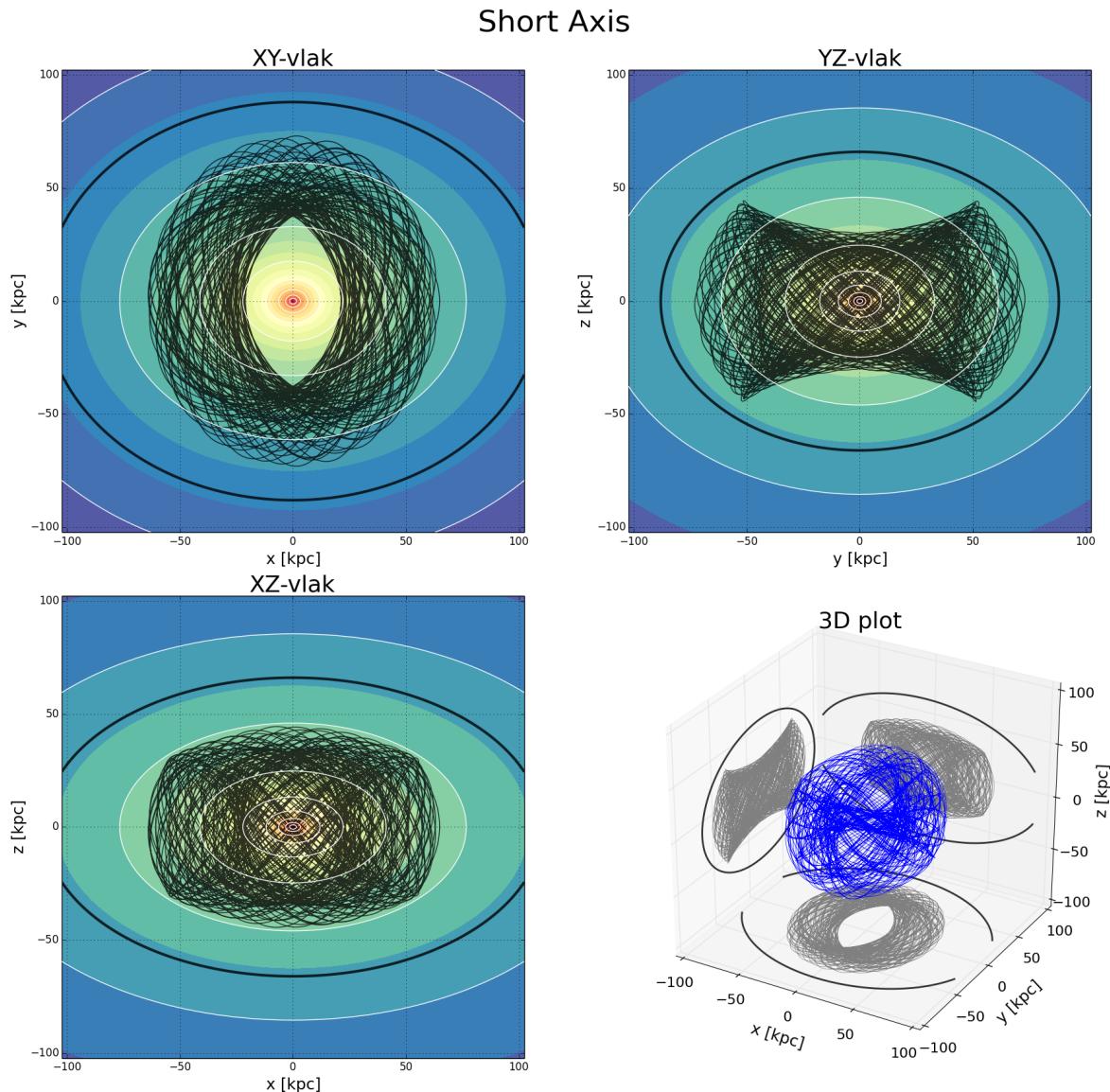
Tabel 3: Parameters voor box orbit



Figuur 3: Long axis tube

Parameter	Symbol	Waarde
Lange as	a	0.8
Korte as	b	0.69
Galactische circkelsnelheid	v_c	220 km s^{-1}
Beginpositie	\vec{x}_0	(20, 50, 40) kpc
Beginsnelheid	\vec{v}_0	(10, -75, 100) km s^{-1}
Integratietijd	T	$200 \text{ s km pc}^{-1} \approx 1.9 \times 10^{11} \text{ yr}$

Tabel 4: Parameters voor long axis tube

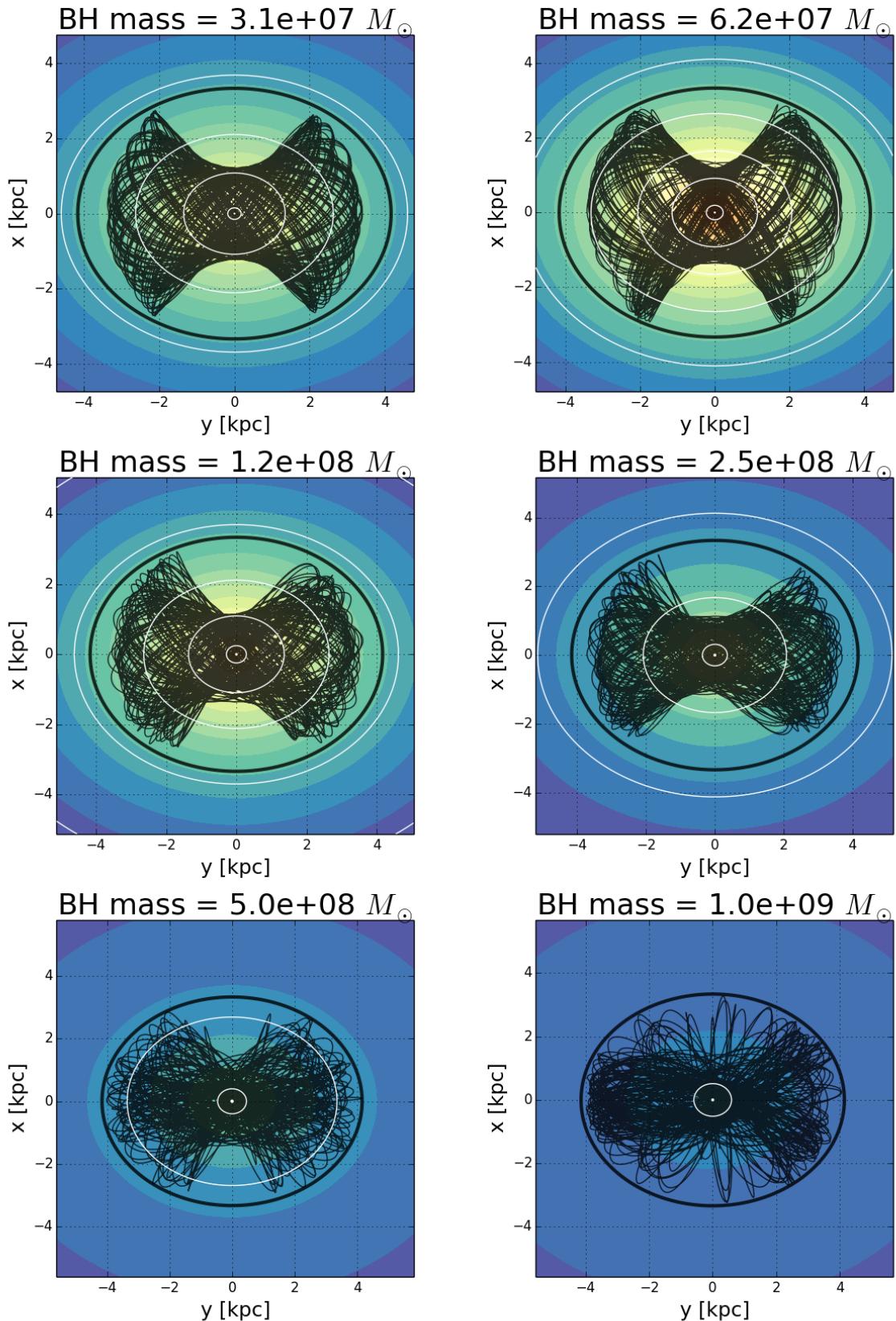


Figuur 4: Short axis tube

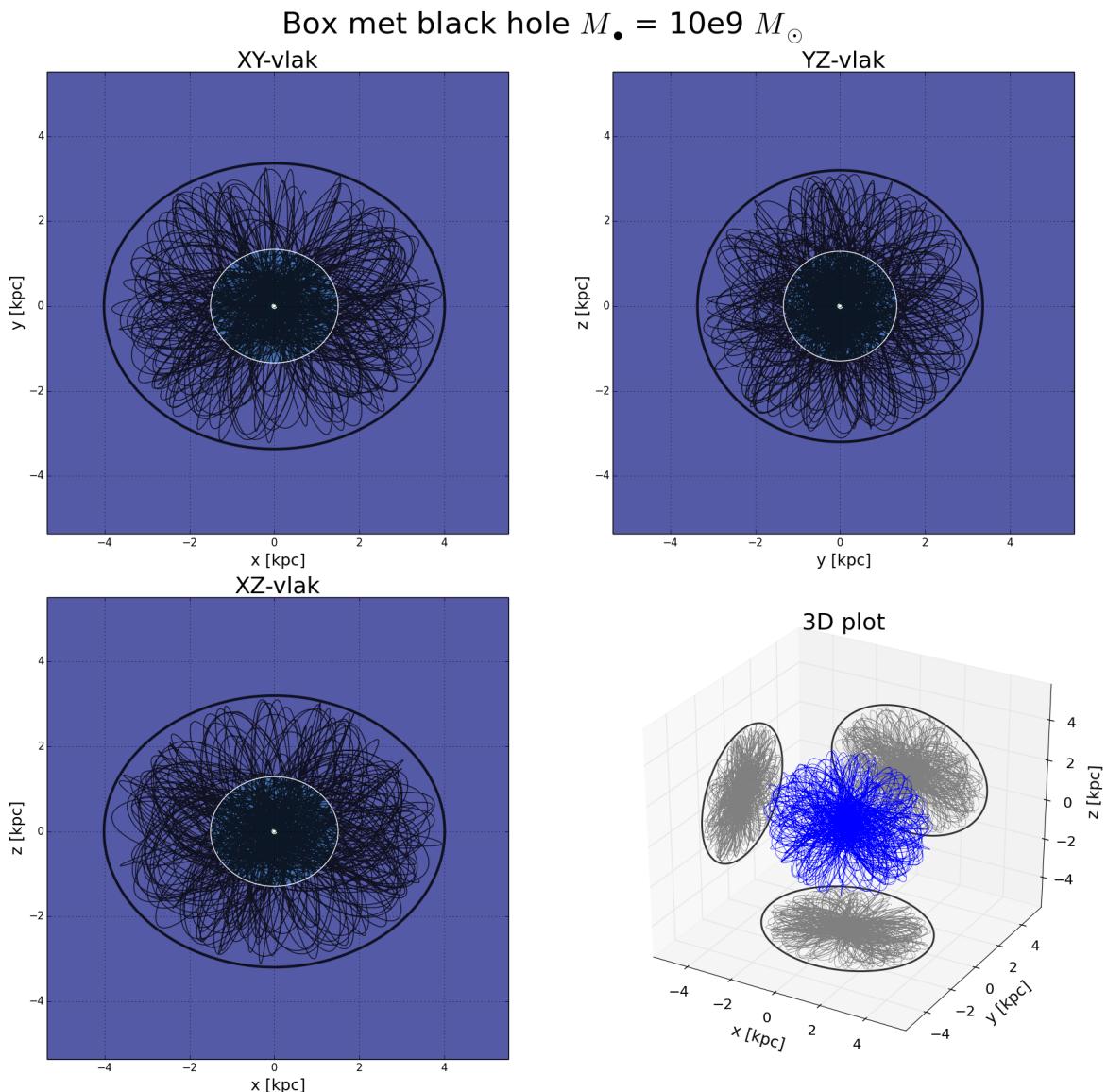
Parameter	Symbol	Waarde
Lange as	a	0.8
Korte as	b	0.6
Galactische circkelsnelheid	v_c	220 km s^{-1}
Beginpositie	\vec{x}_0	(20, 50, 40) kpc
Beginsnelheid	\vec{v}_0	(100, -75, 10) km s^{-1}
Integratietijd	T	$200 \text{ s km pc}^{-1} \approx 1.9 \times 10^{11} \text{ yr}$

Tabel 5: Parameters voor short axis tube

Box met black hole



Figuur 5: Effect van een zwart gat



Figuur 6: Effect van een zeer massief zwart gat