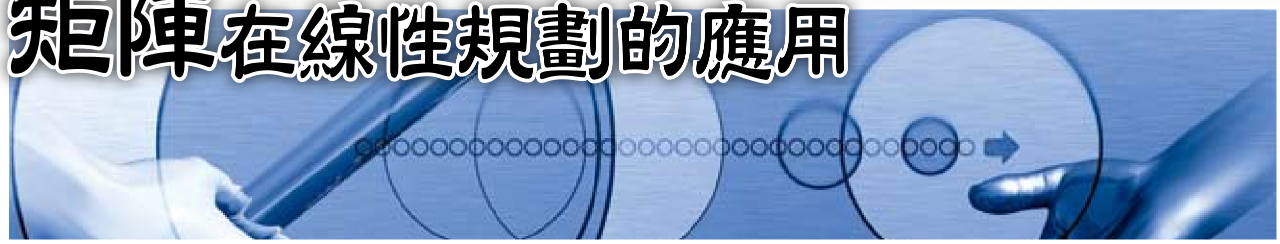


矩陣在線性規劃的應用

■長榮大學　翁耀臨助理教授

普通高級中學選修科目「數學（I）」的第二章介紹矩陣的一些基本性質，而在第三章介紹二元一次不等式的圖形，以及線性規劃的圖解法．嚴格來講，線性規劃在數學領域是屬於作業研究中，決策分析的一支．理論發展至今已經非常完備，並已開發出許多相關的電腦軟體解決實際應用上的問題．例如 LINDO，GAMS 等專業軟體．即使是個人電腦上常見的 Microsoft EXCEL 軟體也能求解線性規劃問題．在實務上，線性規劃問題裡的決策變數往往不只兩個．當變數是三個時，如果仍執意以圖解方式求解，除了必須畫出各個限制式所代表之空間中的平面外，還需要求解各平面間的相交頂點以找出最佳解發生的點（定理 1）．另一方面，當變數是四個或四個以上，此時各限制式所代表的幾何圖形（n 維空間，$n\geq4$）已經超出徒手作圖可以處理的範圍了．因此實務上的線性規劃問題並非以圖解方式解題，這也是高中數學線性規劃內容只限二元的關係．筆者在大學的管理學院任教，決策分析相關的主題例如線性規劃、運輸與指派問題、專案排程問題，以及賽局理論等，均以矩陣作為解題的工具．由於所應用到的矩陣相關性質不難理解，本文將介紹在決策分析的領域裡如何以矩陣的基本列運算求解線性規劃問題．

首先以數學的理論基礎說明線性規劃的基本定理．

定義 1

設函數 f 是定義在 n 維空間 R^n 的函數．如果對 R^n 中的任意點 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$f(X)$ 可寫成 $f(X)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 的形式，其中 a_i（$i=1, 2, \cdots, n$）都是常數，則稱函數 f 是線性函數（linear function）．

定義 2

設 S 為 R^n 中的子集合．若 S 中任意兩點的連線仍在集合 S 中，則稱 S 為凸集合（convex set）．此外，若凸集合 S 中的一點 $X\in R^n$ 不為 S 中任一線段的內點（interior point），則稱 X 為極點（extreme point）．

定理 1

線性不等式方程組 $AX\leq B$,其中 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $X=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$, $B=[b_1, b_2, \cdots, b_m]^T$ 的解集合必然是多面凸集合．

定理 2〔線性規劃的基本定理〕

設 $f(X)$ 是定義在有界多面凸集合 S 上的線性函數，則 $f(X)$ 的極值必出現在 S 上的極點．

若以矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$X=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $B=[b_1, b_2, \cdots, b_m]$, $C=[c_1, c_2, \cdots, c_m]$ 表示線性規劃的一般數學模式：

Maxmize or Minimize　$f(X)=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$$\text{Subject to}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leq b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leq b_m \\ x_i\geq0, i=1, \cdots, n \end{cases}$$

則原線性規劃可表示為

Max or Min　　$f(X)=CX^T$

Subject to　　$AX^T \leq B^T$

（受限於）　　$X \geq 0$

其最佳解必然會發生在所有限制式所行成的可行解區域（feasible domain），亦即一個多面的凸集合 S 的極點上．因此，如何在眾多極點中有效率的找出最佳解發生的點，便成為解決線性規劃問題的主要課題．也就是說，先在可行解區域的一個極點上尋求一個解答，再從這一個極點移動到另一個具有更好目標函數值的極點，持續運用這個方法直到找到最佳解為止．這個方法就是本文的主題：單形法．

單形法（Simplex Method）是由美國數學家 George Dantzing 在 1947 年所提出的．他的方法是將一組線性限制式求基本可行解（可行解區域的一個極點）的過程，利用矩陣的基本列運算找出下一個能使目標函數值增大（或減小）的點．其精神在於不必列出所有基本可行解（basic feasible solution），而是以一個較好的基本可行解代替一個較差的基本可行解，直到沒有更好的基本可行解存在為止．因此，單形法在執行上必須能解決下面兩個問題：

1. 如何檢定目前的基本可行解為最佳解？
2. 如何尋找下一個能使目標函數值增大（或減小）的基本可行解？

礙於篇幅限制，本文只針對具有標準形式的線性規劃問題作介紹．基本上高中數學也大多以下列的標準形式線性規劃問題為主．線性規劃問題之標準形式（standard form）條件如下：

1. 目標函數必須為最大化．
2. 所有變數都是非負的．
3. 每個限制式都必須為小於或等於一個非負常數的線性表現式．

其數學模型表示為：

Max　$f(X)=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$$\text{Subject to}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

where x_i，$b_j \geq 0$，$i=1$，$\cdots$，n，$j=1$，$\cdots$，m

其中 $f(X)=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$ 稱為目標函數（objective function），而以下的不等式稱為限制式（constraints）．

底下以一個二元線性規劃標準形式的問題直接介紹單形法的解題步驟．

例：

Max　$Z=3x_1+5x_2$

$$\text{Subject to}\begin{cases} x_1+x_2 \leq 60 \\ x_1+2x_2 \leq 80 \\ x_1，x_2 \geq 0 \end{cases}$$

步驟一：

導入寬鬆變數（slack variable）使所有不等式限制式成為等式限制式，並建構初始單形表（initial simplex tableau）．

在兩個限制式中分別引入寬鬆變數 s_1 與 s_2，s_1，$s_2 \geq 0$，並改寫原限制式為 $x_1+x_2+s_1=60$ 與 $x_1+2x_2+s_2=80$．另外也將目標函數改寫為 $-3x_1-5x_2+Z=0$．如此一來，我們可以得到一組 5 個變數 x_1，x_2，s_1，s_2，Z 與三個方程式 $x_1+x_2+s_1=60$，$x_1+2x_2+s_2=80$，$-3x_1-5x_2+Z=0$ 的線性方程組（注意：此線性方程組有無窮多組解）．接著以下列形式列出上述方程組的擴增矩陣：

$$
\begin{array}{c}
 \\ ① \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \text{RHS} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 80 \\
\hline
-3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right] \Leftarrow \text{目標函數列}
\end{array}
$$

上述矩陣稱為初始單形表．由此表發現 s_1，s_2 與 Z 三行形成一個單位矩陣 I_3．如果將變數 s_1，s_2 與 Z 寫成 x_1 與 x_2 的線性組合模式，可得

$$s_1=-x_1-x_2+60$$
$$s_2=-x_1-2x_2+80$$
$$Z=3x_1+5x_2$$

令 x_1 與 x_2 的值為 0，可得出 $s_1=60$，$s_2=80$ 與 $Z=0$．此解稱為起始基本可行解（initial basic feasible solution）．也可以由式 ① 單形表中的右手邊值看出．然而，由於 $Z=3x_1+4x_2$，x_1，$x_2\geq 0$，當 x_1 或 x_2 任一變數增加時，Z 值將會隨之增加，並未達到最大化 Z 值的目標．因此我們需進行以下步驟以改善基本可行解．

步驟二：進行樞紐運算

選取由單形表最後一列（目標函數列）中絕對值最大的負值元素所在的行（column）為樞紐行．對於樞紐行目標函數列上方的所有正元素值，計算其右手邊值（RHS）與在此樞紐行中對應元素的比值．選取最小非負比值對應元素所在的列為樞紐列，再選取該元素為樞紐元素（pivot element）進行樞紐運算（pivoting），也就是經由矩陣基本列運算將樞紐元素的值轉換為 1，而樞紐行中其他元素轉換為 0．

由目標函數 $Z=3x_1+5x_2$ 各個變數的係數可看出，變數 x_2 的值增加 1，Z 值即可增加 5，因此增加 x_2 的值要比增加 x_1 的值來得更有效率．這就作為選擇樞紐行的依據．然而，x_2 並非可以無限制的增加．舉例而言，當 x_2 增加為 61 時，x_1 必須為負數值才能滿足第一個限制式 $x_1+x_2\leq 60$，這違反了 $x_1\geq 0$ 的條件．由於第二個限制式中，x_2 增加的上限為 40，因此 x_2 最多只能增加到 40，因而選取樞紐行中第二列的元素 2 作為樞紐元素．在計算過程中我們將樞紐元素畫上圈號（見式①）．透過矩陣的基本列運算將樞紐行轉變為單位行，即可得出以下的單形表：

$$
② \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \text{RHS} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 20 \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 40 \\
\hline
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 200
\end{array}\right]
\end{array}
$$

在式 ② 的單形表中，s_1，x_2，與 Z 三行又形成另一個單位矩陣 I_3．將變數 s_1，x_2，與 Z 寫成 x_1 與 s_2 的線性組合模式，可得

$$s_1=-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}s_2+20$$
$$x_2=-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}s_2+40$$
$$Z=\frac{1}{2}x_1-\frac{5}{2}s_2+200$$

令 x_1 與 s_2 的值為 0，可得出 $s_1=20$，$x_2=40$，$Z=200$．然而，當 $s_2=0$ 且增加 x_1 的值，目標函數 $Z=\frac{1}{2}x_1-\frac{5}{2}s_2+200$，$x_1$，$s_2\geq 0$，還會再增加並超過 200，所以還未將 Z 值最大化．事實上，我們可由式 ② 的單形表中最後一列每個變數所對應元素的正負號作為是否已找出最佳解的判斷依據．

步驟三：最佳解判斷規則

如果單形表最後一列（目標函數列）中均沒有負值元素，則停止運算，此時已找到最佳解。反之，如果還存在負值元素，則重復步驟 2 進行樞紐運算，直到最佳解找到為止。

在式 ② 的單形表中只剩下 x_1 所對應的元素是 $-\frac{1}{2}$，因此以 x_1 所在的行（column）為樞紐行。透過右手邊值與在此樞紐行中對應元素的比值（$\frac{20}{\frac{1}{2}}=40$ 與 $\frac{40}{\frac{1}{2}}=80$），我們選擇樞紐行中第一列的元素 $\frac{1}{2}$ 為樞紐元素（見式 ②）。進行樞紐運算後得到以下的單形表：

$$③\quad \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & & \text{RHS} \\ \end{array}$$
$$③\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 220 \end{array}\right]$$

在式 ③ 的單形表中，x_1，x_2，與 Z 三行形成一個單位矩陣 I_3。將變數 x_1，x_2，與 Z 寫成 s_1 與 s_2 的線性組合模式，可得

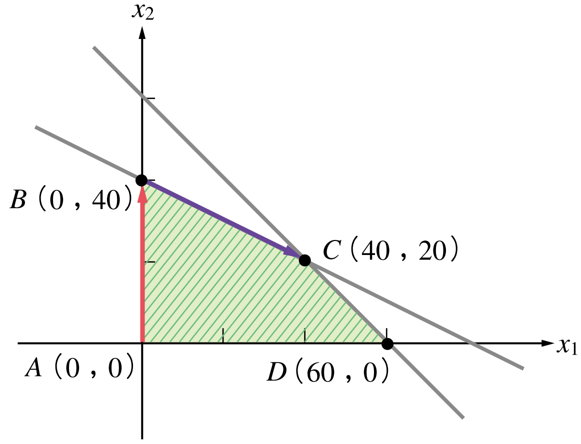
$$x_1=-2s_1+s_2+40$$
$$x_2=s_1-s_2+20$$
$$Z=-s_1-2s_2+220$$

令 s_1 與 s_2 的值為 0，可得出 $x_1=40$，$x_2=20$，$Z=220$。由於 $Z=-s_1-2s_2+220$，且 s_1，$s_2\geq 0$，目標函數 Z 值已無法超過 220。因此，最佳解已得到：當 $x_1=40$ 且 $x_2=20$ 時，Z 值有最大值 220。

【附註】

1. 由線性代數的角度，單形法實際上是在起始單形表所有的行向量中選擇 R^m 空間的基底。每個基底對應一個基本可行解。基本可行解的移動就相當於基底的改變。而基底的改變是透過步驟二達成，且每次只更換基底的一個向量。
2. 在步驟一中，如果絕對值最大的負值元素有兩個以上，可任意選擇一行作為樞紐行。
3. 在步驟二中，如果最小比值有兩個以上，也可任意選擇一列作為樞紐列。
4. 本文所提供的單形法又稱為基本單形法（Basic Simplex Method），只處理標準形式的線性規劃問題。其他有關極小化問題、限制式的右手邊值為負值常數、變數 x_1 為負值等等問題，在數學上也都可以利用進階形式的單形法解決。
5. 在式 ① 的單形表中，起始基本可行解為 $x_1=0$，$x_2=0$，$Z=0$。在可行解區域所對應到的點為 A（0，0）。在式 ② 的單形表中，基本可行解為 $x_1=0$，$x_2=40$，$Z=200$。此時已將可行解由 A（0，0）移動到 B（0，40）。最後在式 ③ 的單形表中，最佳解為 $x_1=40$，$x_2=20$，$Z=220$。亦即將可行解由 B（0，40）再移動到 C（40，20）。我們以表列方式表示每一步驟所對應的極點與目標函數值作結尾。教師不妨在教學上與高三選修數學（I）第三章線性規劃圖解法作比較。

圖解可行解區域



單形表	極點坐標（x_1，x_2）	在極點上的目標函數值 $Z=3x_1+5x_2$
$\left[\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 80 \\ \hline -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$	A（0，0）	0
$\left[\begin{array}{ccccc\|c} \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 20 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 40 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 200 \end{array}\right]$	B（0，40）	200
$\left[\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 220 \end{array}\right]$	C（40，20）	220

參考資料：

1. M.Sullivan and A.Mizrahi: *Finite Mathematics*. John Wiley&Sons, Inc.
2. Richard Bronson and Gary Bronson: *Finite Mathematics*（*A Modeling Approach*）. West Publishing Company.
3. Anderson, Sweeney, and Williams: *An Introduction to Management Science*. Thomsonn.
4. 張保隆著，現代管理數學，華泰書局 .