

程式設計與統計分析期中考

考試時間：106 年 11/27 日(週一)凌晨 0:00 至 106 年 12/6 日(週三)上午 10:20

考試地點：課堂外考試(Take-home Midterm)

授課教師：黃旻華

說明：

1. 這是一個課堂外考試(又稱返家測驗)，同學可以參考任何網站或書籍，也可以使用任何電腦軟體，同時 11/29 日的上課時間亦停課讓同學進行考試答題，請同學務必在 12/6 日(週三)上課時間前(上午 10:20)以電腦打字的紙本形式繳交給助教黃忠偉，若因事無法到課繳交，則可先以電子郵件在截止時間前用電子郵件繳交，之後再補送紙本。
2. 關於上一週單形法的講述內容，各位可以參考 Hillier, Frederick S. 所著之 Introduction to Operations Research 2001 年版第四章中的 pp.123-128。

一、線性方程組極大值問題解題 (共 40%)

請用單形法(Simplex)法一步一步來解下面的線性方程組極大值問題，並回答下列問題

線性方程組極大值問題為

目標式： 極大化 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3$

限制式：

- (1) $x_2 - 3x_3 \leq 10$
- (2) $x_1 \leq 6$
- (3) $2x_1 + x_3 \leq 12$
- (4) $0.5x_2 \leq 4$

值域限制： $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

1. 請用表格方式，並以 $Z = f(x_1, x_2, x_3)$ ， c_x, c_s 分別為原始變量和閒置變量 (slack variable，將限制式不等式變成等式所加入的變量)， I 為單位矩陣， b 為方程組等式右邊的常數向量， A 為限制式係數矩陣，來表示加入閒置變量後的線性方程組問題。(5%)
2. 請分別將下面的矩陣標明出來。(5%)

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_x & c_s \\ 0 & A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

3. 請用疊代法方式，進行第一回求解，請從目標式挑選一單位能夠增加最多數值的變量當作工作變量(辨識 pivot column「軸行」)，然後尋找滿足其可行域的可行邊界條件當作單位化約式 pivot row「軸列」，請問「軸行」、「軸列」分別為？(10%)
4. 對於上面等式方程組進行通分約分的操作，直到求得可行解為止，請把過程都列出來。(若可行條件相同，可任意選擇其一) (20%)

二、等價對偶問題 (共 35%)

請利用 11/15 日的上課講義有關原始問題(primal)和對偶(dual)問題的等價關係，來解第一題的極大值問題

原始問題	對偶問題
$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & Z = cx \\ \text{Subject to} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & y_0 = yb \\ \text{Subject to} & yA \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$

1. 請重新將第一題的極大值問題當作原始問題，用聯立方程組的方式表示其對偶問題。(10%)
2. 請用表格方式，並以 $y_0 = f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ ， c_y, c_{sy} 分別為原始變量和閒置變量(slack variable，將限制式不等式變成等式所加入的變量)， I 為單位矩陣， c 為方程組等式右邊的常數向量， A 為限制式係數矩陣，來表示加入閒置變量後的線性方程組問題。(5%)
3. 請用疊代法方式，敘明解題過程，來解出上面 $y_0 = f(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 的極小化問題(提示：解法相同於第一題所用的單形法，極小化問題目標式等於極大化元目標式的相反數，不過當目標式已經化簡到最簡時仍看不出全部未知變數的解時，則可以先將確定知道的其中一個未知變數解帶回原方程組，進一步降階成比原來少一個未知變量的極大化問題，如此持續進行降階直到解出所有未知變量的解，在解此對偶問題時，可以考慮依序對 y_1, y_4 一一降階至僅剩 y_2, y_3 便可求出完整未知變數解) (20%)

三、以線性代數來看原始問題和對偶問題(共 25%)

1. 由線性代數來看，我們可以知道在第一、二題的疊代過程中，方程組中間置變數的區塊會從原本的單位矩陣 I ，在求解過程中，紀錄所有的操作運算，直到求出參數解為止的最後結果，

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_x & c_s \\ 0 & A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z + cX = 0 \\ BX = b \end{cases}$$

$$\text{其中 } c = (-c_x \quad c_s), X = \begin{pmatrix} x \\ x_s \end{pmatrix}, B = (A \quad I)$$

也因此，在線性代數中，我們可以很快求得未知參數解 X

$$B^{-1}BX = B^{-1}b$$

$$X = B^{-1}b$$

其中原始的聯立方程組，最後就會變成

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_x & c_s \\ 0 & A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & y^*A - c_x & y^* \\ 0 & B^*A & B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ x \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^*b \\ B^*b \end{pmatrix}$$

請問針對第一大題第四小題「線性方程組極大值問題解題」最後一個疊代的矩陣結果，原始問題中的 B^* 、 y^* 分別為多少，並用 Matlab (或任何可以進行矩陣代數運算的軟體)驗證來驗證 $y^*A - c_x$ 、 y^*b 、 B^*A 、 B^*b 是否吻合。(15%)

2. 請分別針對原始問題和對偶問題，說明在最終的參數解中，閒置變量數值與限制式之間的關係及其意義。(10%)