PROBLEMA 01:

ANÁLISE DO TEOREMA DA AMOSTRAGEM E ALIASING ATRAVÉS DE SINAIS PAM

TEC513 - MI - PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Aurelio Barreto
aurelionadjabarreto@gmail.com

Kevin Gomes
kevingomes.uefs@gmail.com

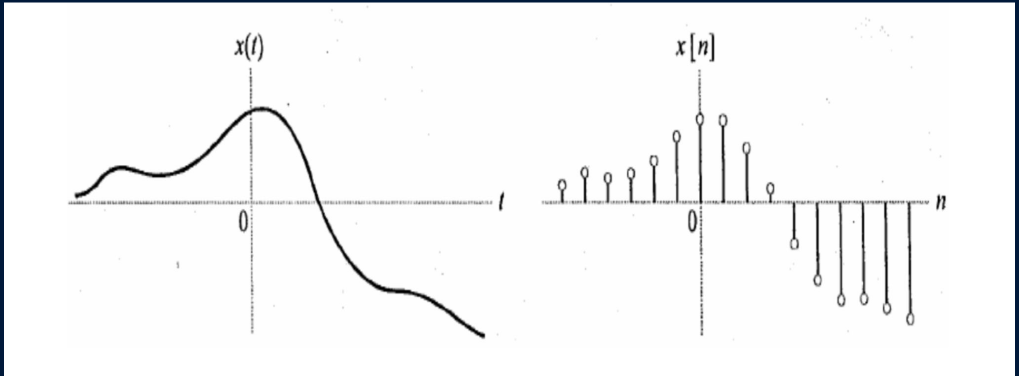
Roberto Maia
romaiajr5@gmail.com

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

- A grande maioria das grandezas físicas presentes na natureza são representadas por seus valores contínuos;
- Necessidade de representá-las de forma discreta;
- A conversão analógico-digital (A/D)
  - Dividida em três etapas: amostragem, quantização e codificação.
- Foi solicitado uma simulação da amostragem PAM, espectros de frequências, filtragem e reconstrução de um sinal senoidal puro.



Sinal contínuo e sua discretização. Fonte: Haykin.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

TEOREMA DA AMOSTRAGEM

Seja x(t) um sinal com transformada de fourier nula,

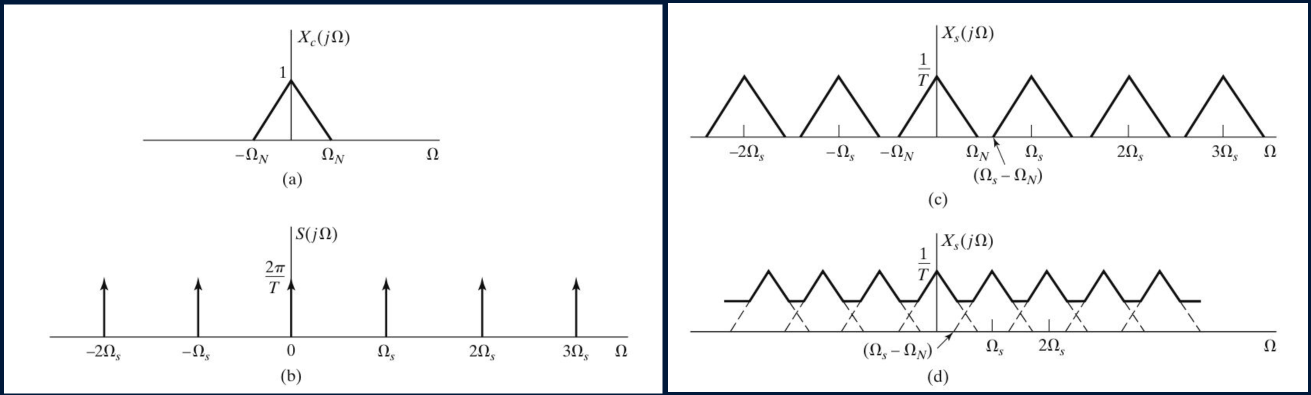
$$X(j\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \omega_M.$$

Então, x(t) é determinado unicamente por suas amostras x(nT), com n = 0, ±1, ±2, …

Para isso, é necessário que $\Omega_s >= 2\omega_M$

Onde $\omega_s = 2\pi / T$

Possibilitando a reconstrução do sinal a partir da modulação do sinal original por um trem de impulsos.



Representação, no domínio da frequência, da amostragem no domínio do tempo. Fonte: OPPENHEIM

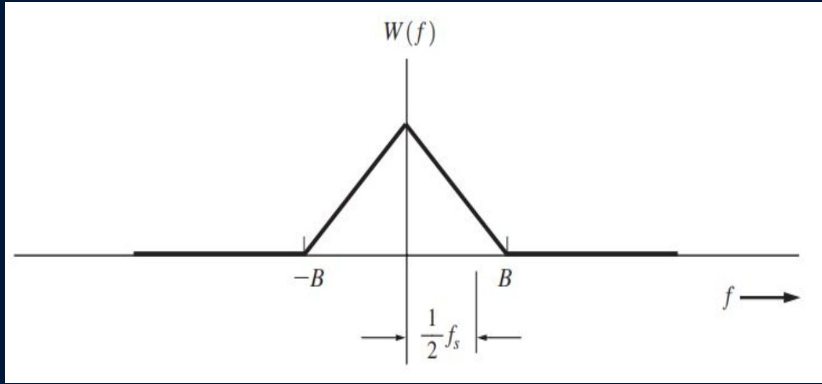
$$X_p(j\omega) = 1/T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)).$$

Equação do espectro do sinal amostrado. Fonte: OPPENHEIM

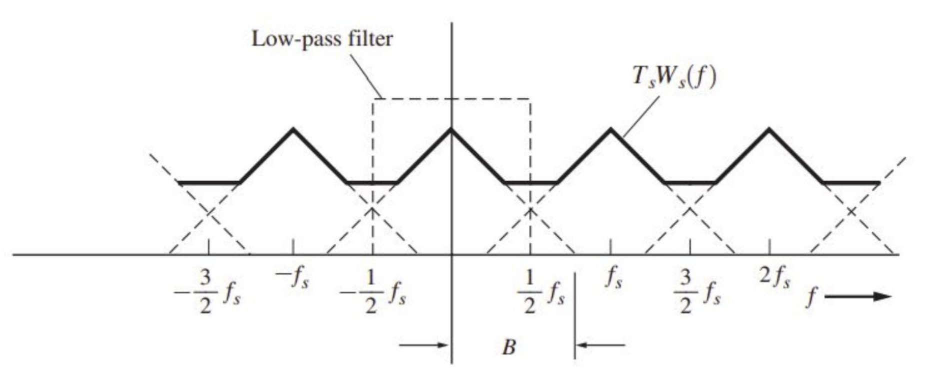
Aliasing

Fenômeno que ocorre quando o teorema da amostragem não é obedecido, ou seja, se $f_s < 2B$ as replicas de W(f) ficam sobrepostas dificultando a recuperação do sinal original.

- O filtro Butterworth é um método de aproximação de resposta de um filtro passa-baixa ideal.



Espectro do sinal não amostrado. Fonte: COUCH



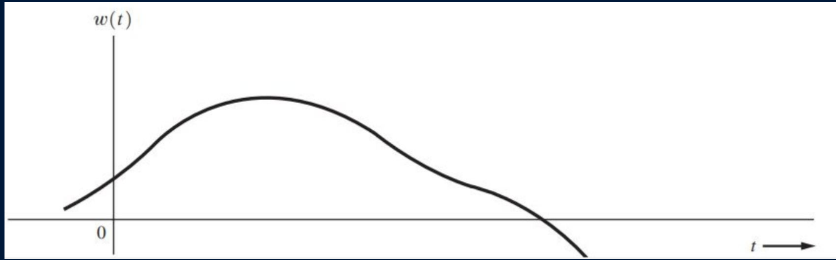
Espectro do sinal amostrado com fs < 2B. Fonte: COUCH

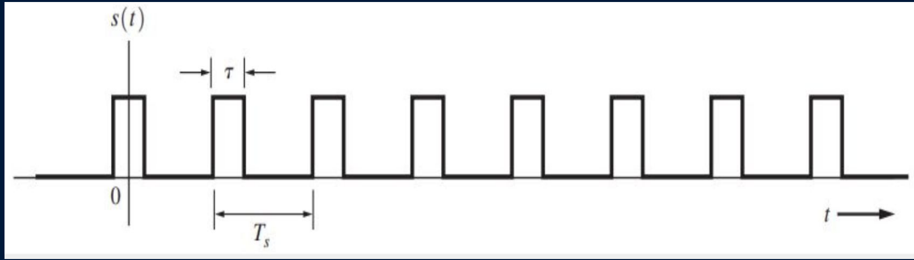
PAM: MODULAÇÃO POR AMPLITUDE DE PULSO

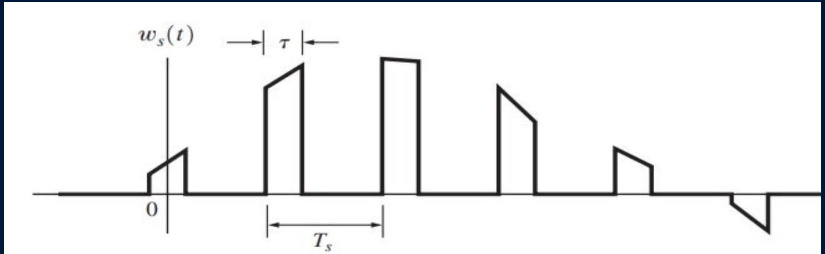
Se um sinal ω(t) é um sinal analógico limitado em banda, o sinal PAM que utiliza a amostragem é

$$\omega_s(t) = \omega(t)s(t)$$

onde s(t) é uma forma de onda retangular cujo $f_s = 1/T_s$ e $f_s > 2f_m$.







Modulação PAM. Fonte: COUCH

$$W_s(f) = W(f) * S(f)$$

Replicação do espectro da forma de onda analogica de entrada se repetindo em harmônicos da frequência de amostragem.

3. METODOLOGIA

DIAGRAMA

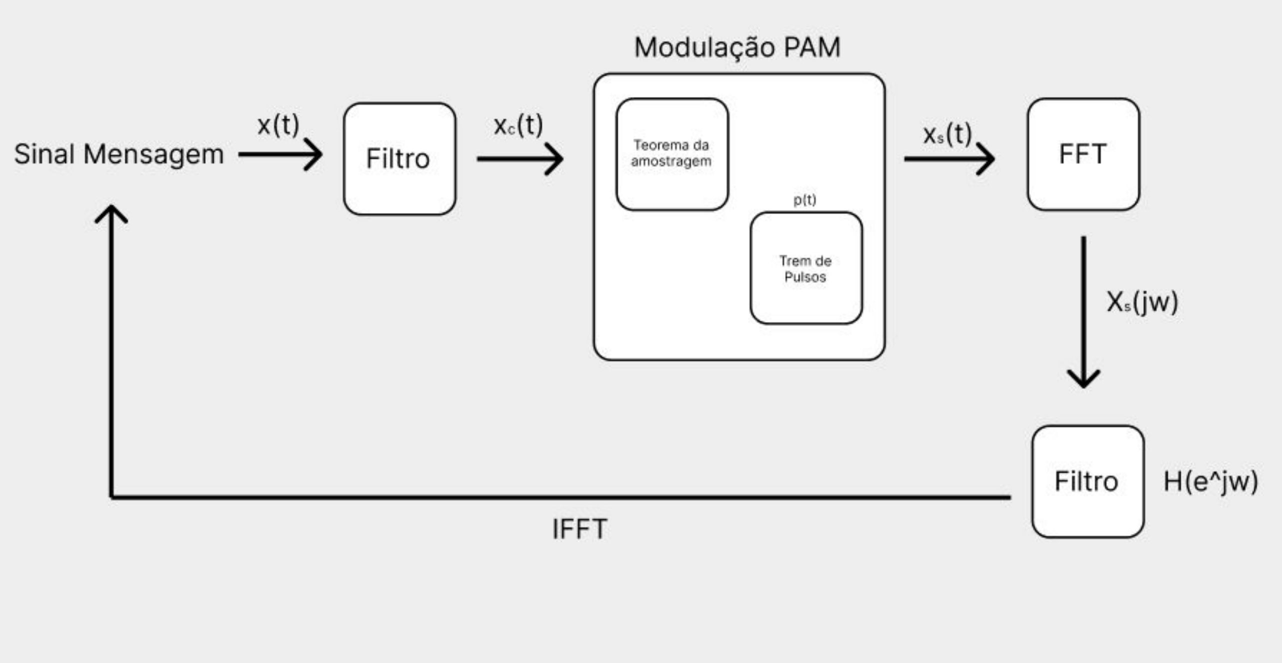


Diagrama. Fonte: Autor

ENTRADA

- O sinal de entrada é uma senoide;
  $x(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f1 \cdot t) + B \cdot \sin(2\pi \cdot f2 \cdot t)$

- A soma das senóides podem gerar novas componentes de frequência.
- Limitamos a frequência do sinal de entrada para evitar *aliasing*;
- Utilizamos o filtro passa-baixa *Butterworth* que possui possui resposta em
- magnitude maximamente plana (imagem da fórmula abaixo).

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

Butterworth. Fonte: autor

AMOSTRAGEM

- Após realizar a filtragem do sinal de entrada iniciou-se o processo de amostragem;
  - Definição da frequência de amostragem (Fs) (imagem abaixo);
  - Montagem do trem de pulsos retangulares com período Ts = 1/Fs.

$$f_s \geq 2 \cdot f_{max}$$

Definição da frequência de amostragem. Fonte: autor

AMOSTRAGEM

- Multiplicação do sinal filtrado pelo trem de pulsos retangulares;

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot p(t) = x_c(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - nT_s)$$

Fonte: autor

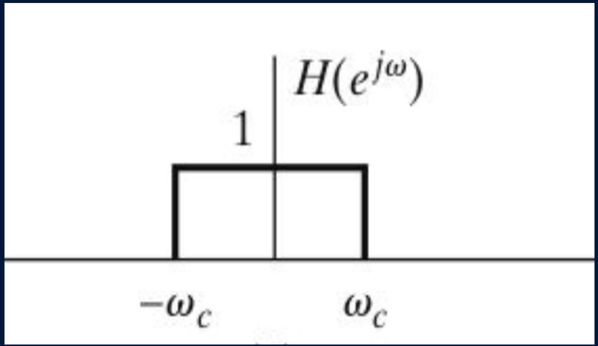
- Com o sinal amostrado, realizou-se Transformada de Fourier para obter os seus espectros.

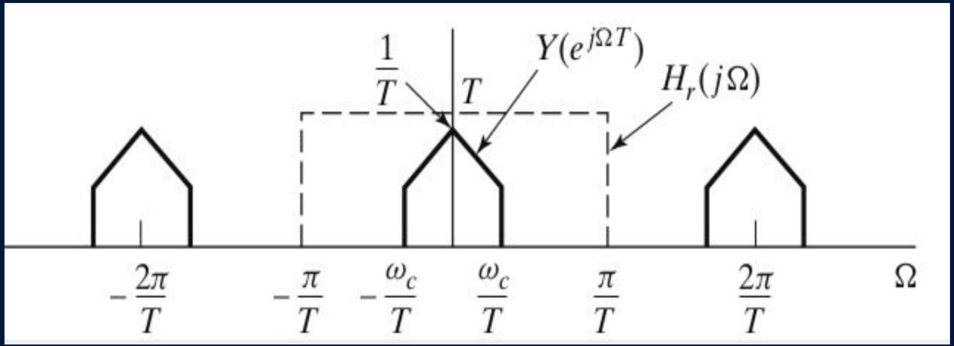
$$X_s(j\omega) = X_c(j\omega) * P(j\omega)$$

Fonte: autor

RECONSTRUÇÃO DO SINAL

- Aplicação do filtro passa-baixa ideal;





Fonte: OPPENHEIM

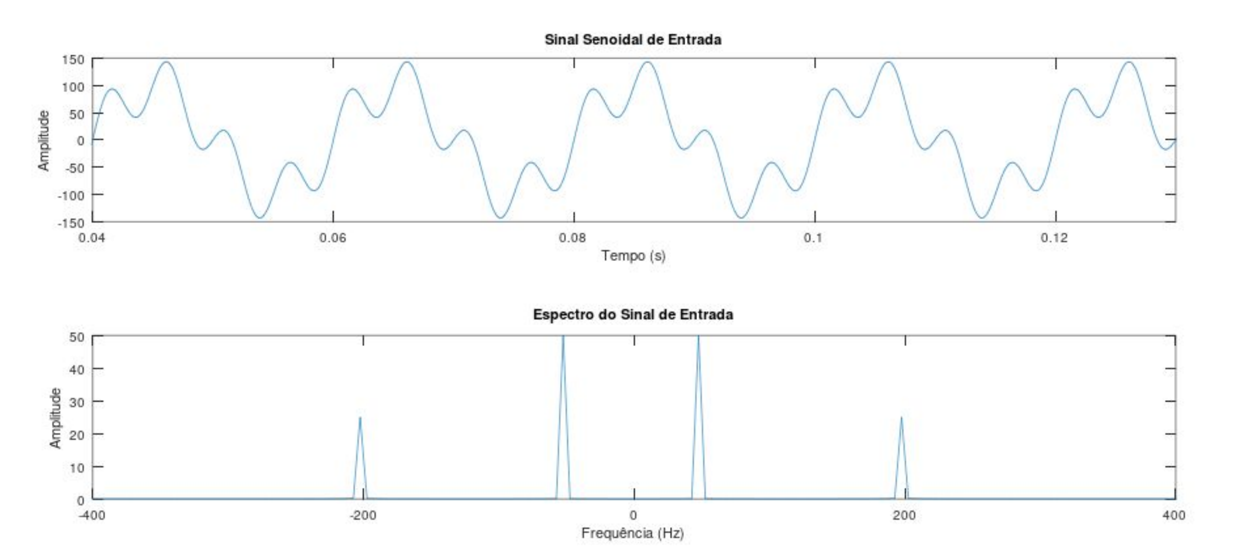
- E por fim, realizamos a Transformada Inversa de Fourier (IFFT) no sinal filtrado.

4. RESULTADOS

SINAL DE ENTRADA

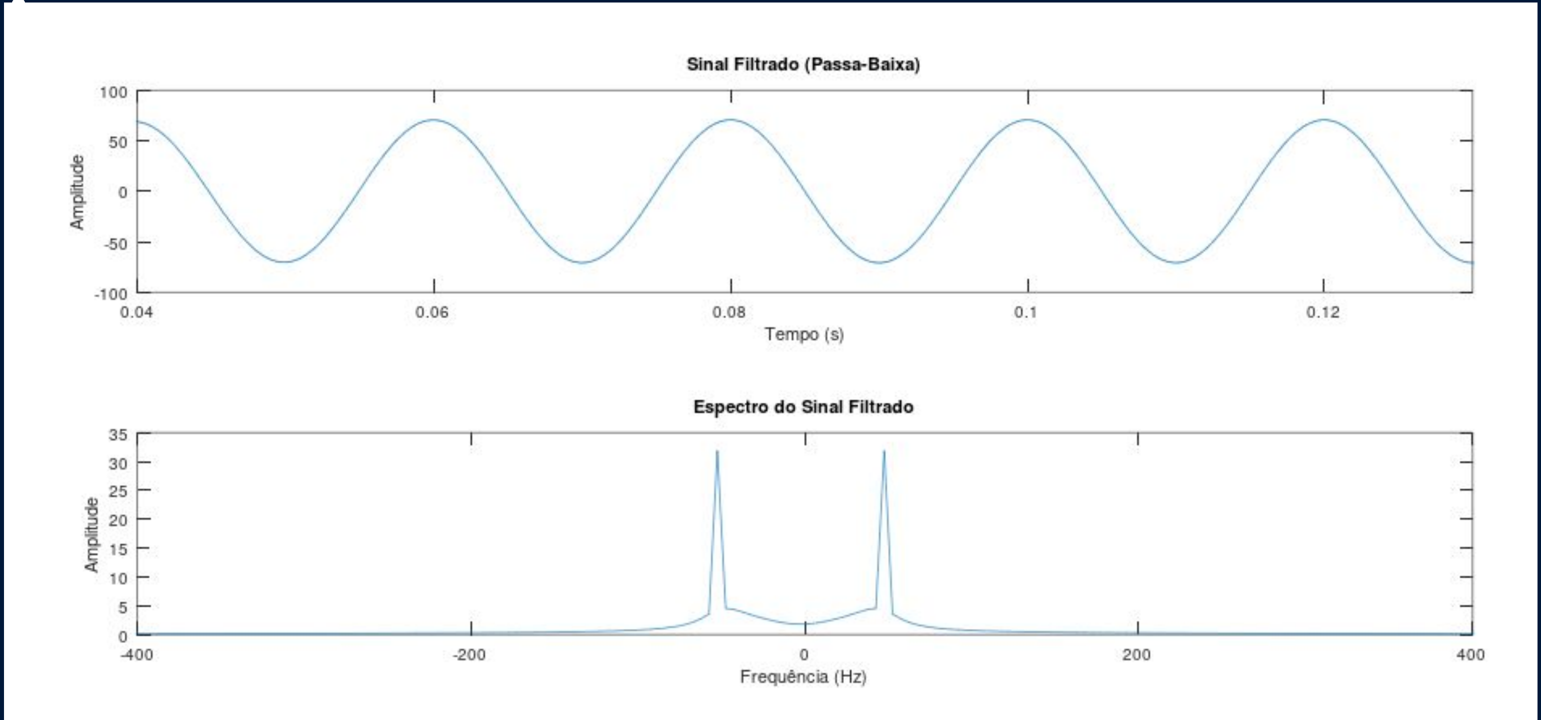
- $$x(t) = a \cdot \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + b \cdot \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$$

$$x(t) = 100\sin(2\pi 50t) + 50\sin(2\pi 200t)$$



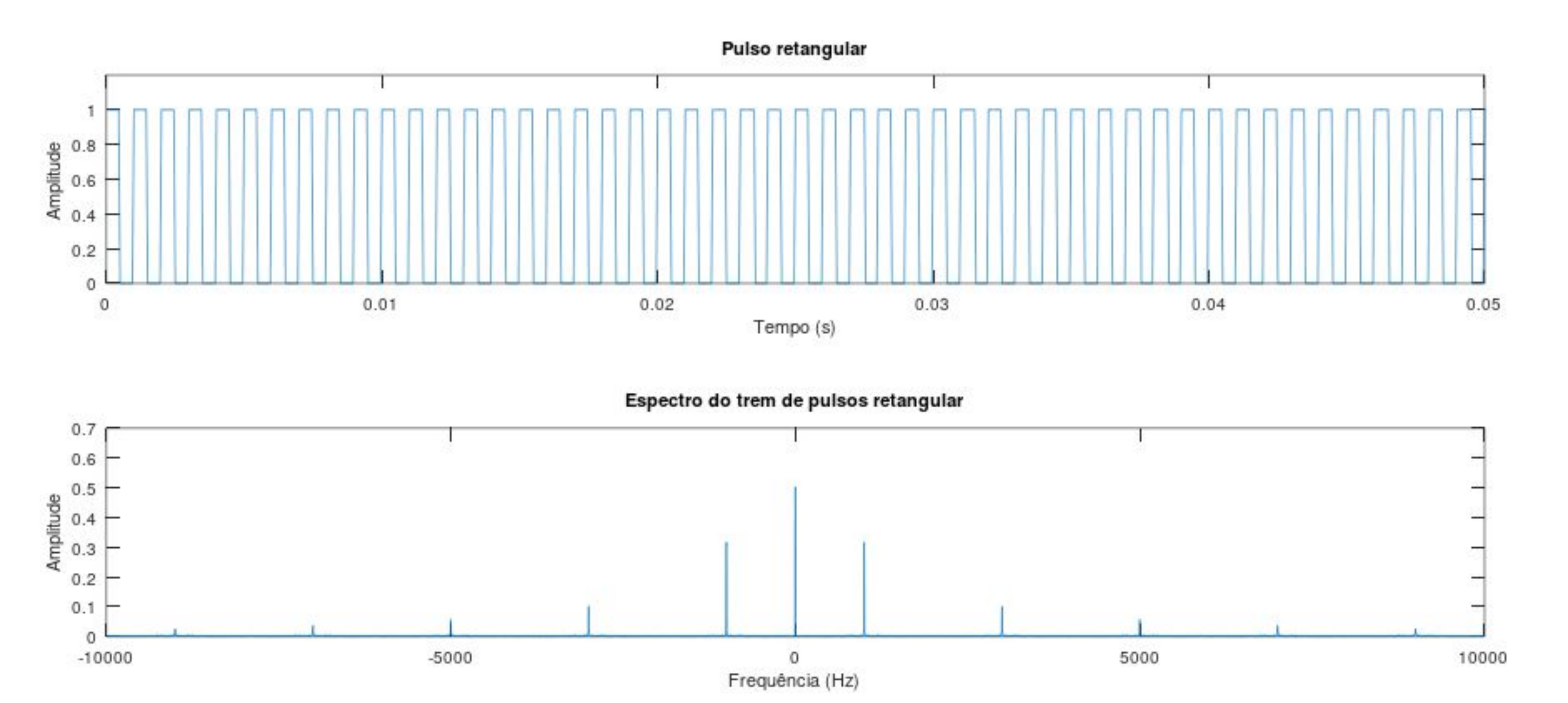
Fonte: Autor

FILTRO *Anti-aliasing*



Fonte: Autor

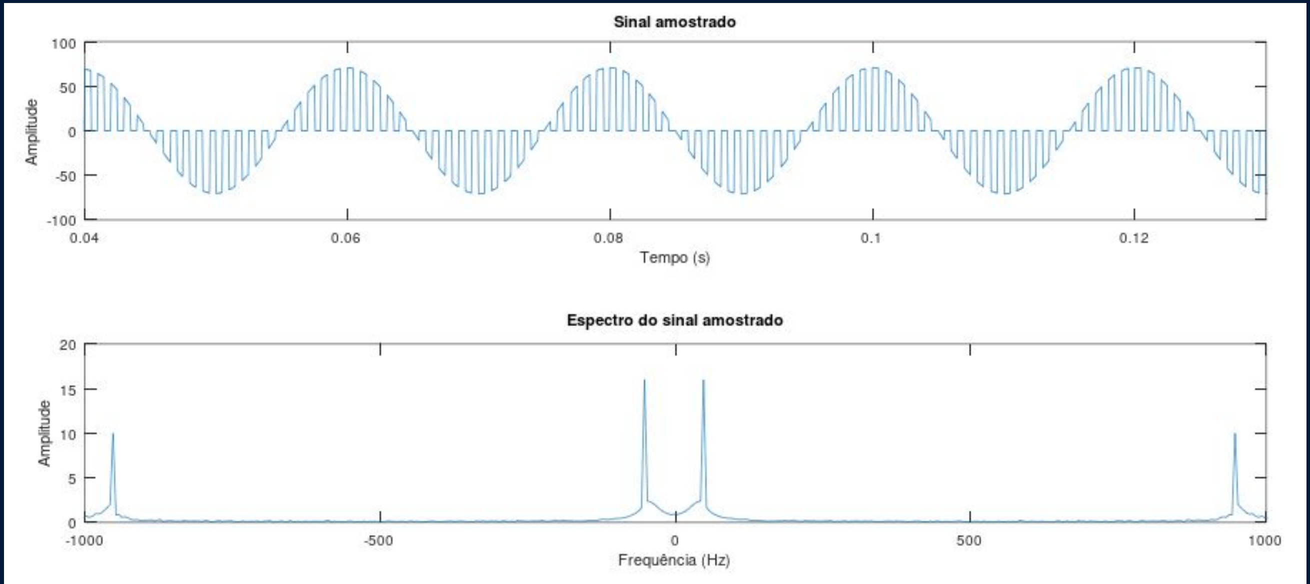
AMOSTRAGEM PAM



Fonte: Autor

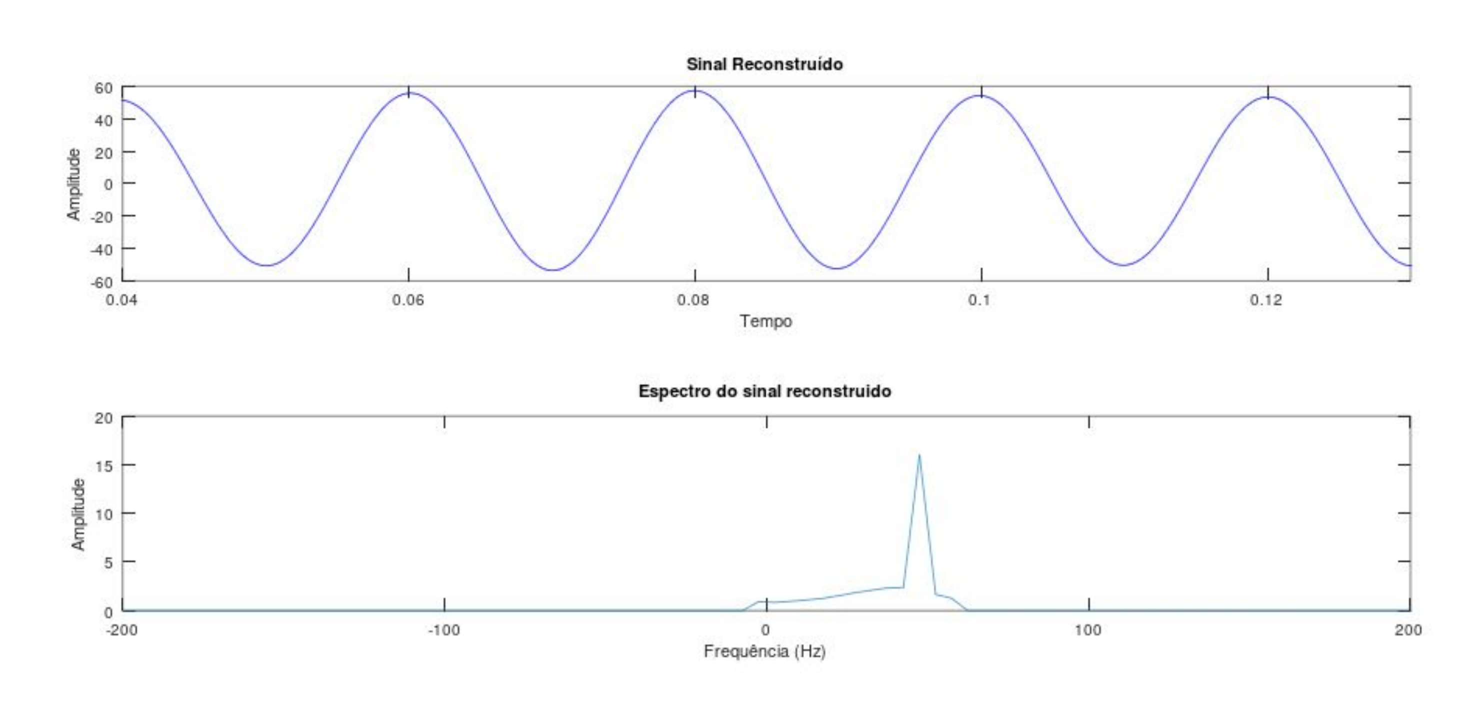
AMOSTRAGEM PAM

$$f_s = 5 \times f_2 = 1000\,\text{Hz}$$



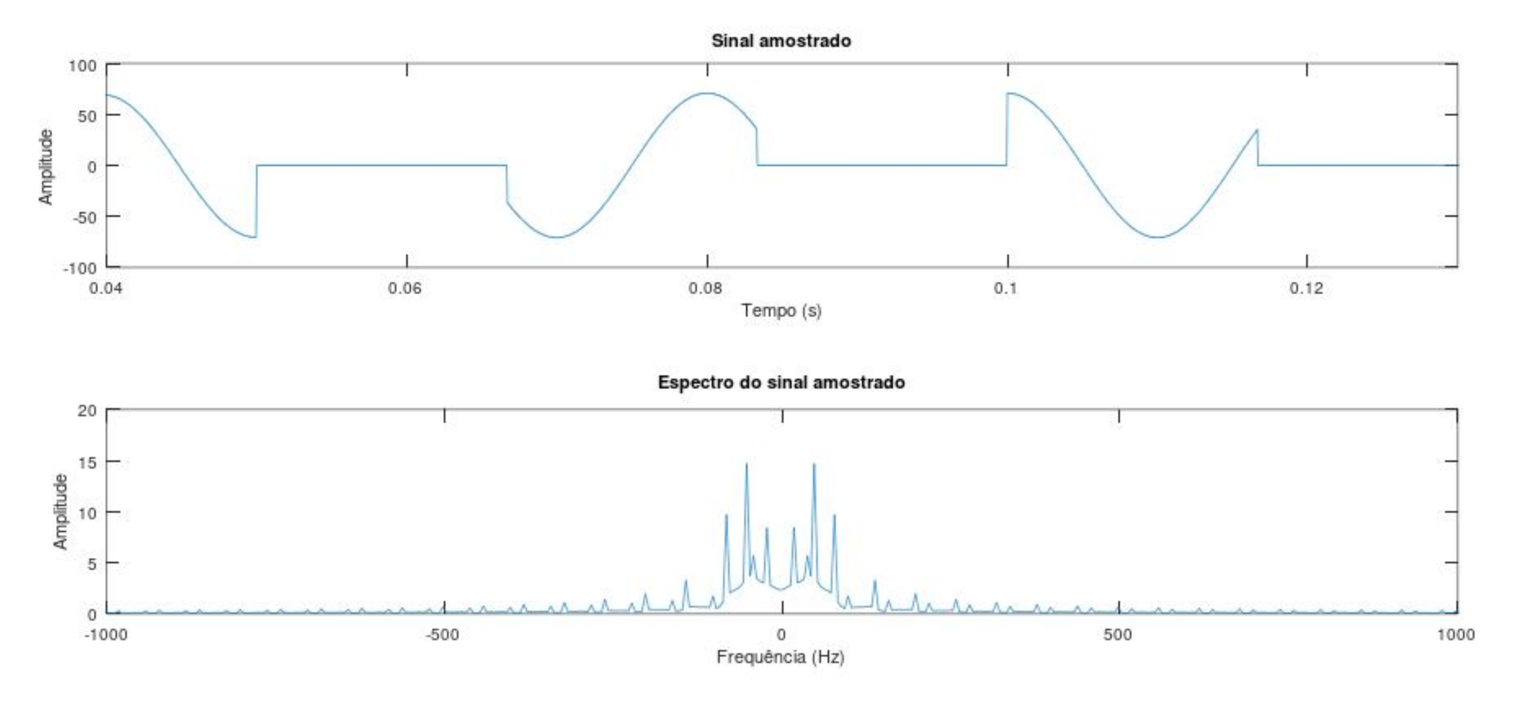
Fonte: Autor

RECONSTRUÇÃO DO SINAL



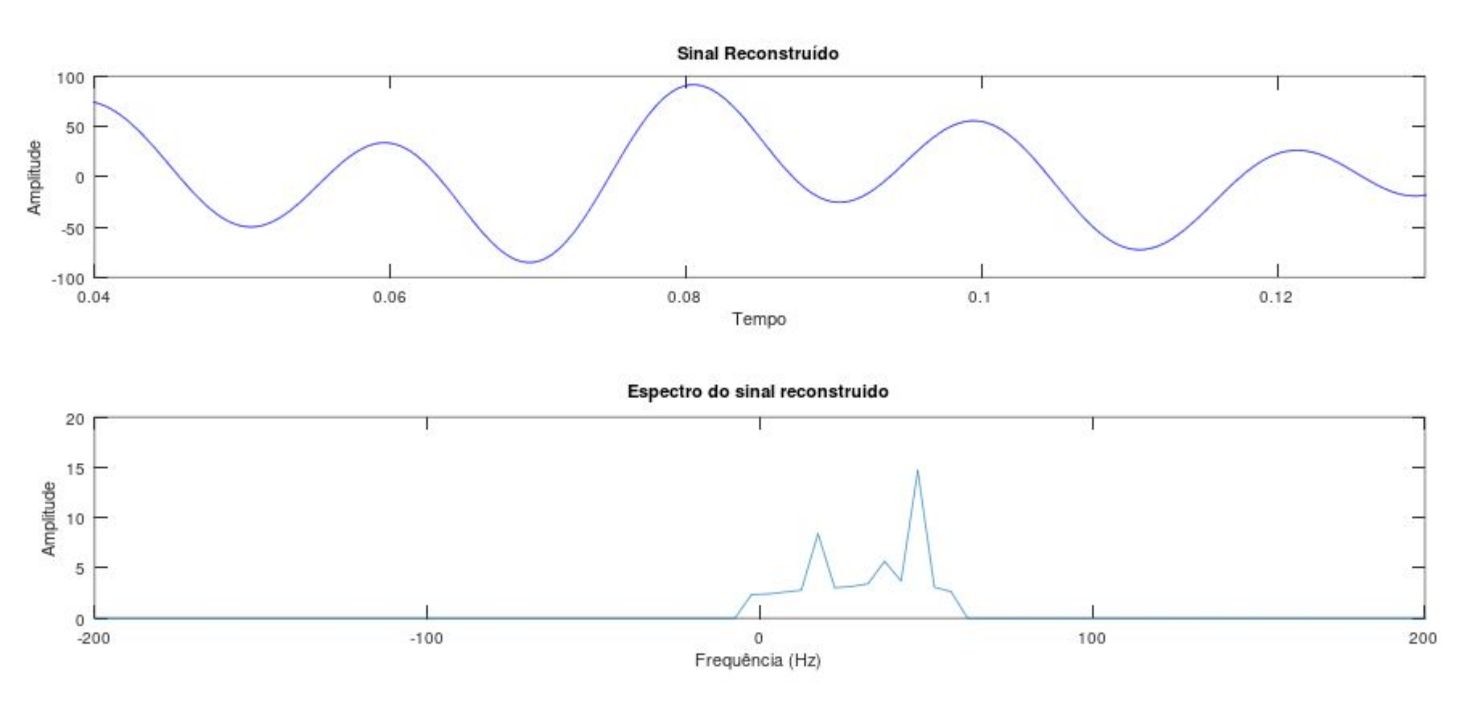
Fonte: Autor

AMOSTRAGEM COM *aliasing*



Fonte: Autor

Reconstrução COM *Aliasing*



Fonte: Autor

5. CONCLUSÃO

CONCLUSÃO

- Através deste estudo, pudemos demonstrar conceitos fundamentais relacionados ao processamento de sinais;

- Os resultados obtidos mostram a importância da escolha adequada da taxa de amostragem e do uso de filtros.

OBRIGADO!

ALGUMA PERGUNTA?

REFERÊNCIAS

COUCH, Leon W.; KULKARNI, Muralidhar; ACHARYA, U. Sripati. **Digital and analog communication systems**. Upper Saddle River: Pearson, 2013.
HAYKIN, Simon; VAN VEEN, Barry. **Signals and systems**. John Wiley & Sons, 2007.
OPPENHEIM, Alan V. et al. **Signals & systems**. Pearson Educación, 1997.
OPPENHEIM, Alan V.; SCHAFER, Ronald W. **Processamento em tempo discreto de sinais**. Tradução Daniel Vieira. 3ª ed.-São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.