Problema 01: Análise do teorema da amostragem e aliasing através de sinais PAM

Aurelio Rocha Barreto
Universidade Estadual de Feira de Santana
Feira de Santana, Brasil
aurelionadjabarreto@gmail.com

Kevin Cerqueira Gomes
Universidade Estadual de Feira de Santana
Feira de Santana, Brasil
kevingomes.uefs@gmail.com

Roberto Maia
Universidade Estadual de Feira de Santana
Feira de Santana, Brasil
robertomaia@gmail.com

***Resumo*—Este trabalho aborda o processo de compreensão e aplicação do teorema da amostragem na simulação da Modulação por Amplitude de Pulso (PAM) de um sinal senoidal contínuo. A metodologia envolve a variação da frequência de amostragem para observar o comportamento do espectro de frequências e a capacidade de reconstrução do sinal original, enfocando a prevenção do fenômeno de aliasing.**

***Palavras-chave*—Aliasing, teorema da amostragem, Nyquist, subamostragem, reconstrução do sinal**

I. INTRODUÇÃO

A. *Contextualização tecnológica e descrição do problema:*

A empresa SigmaDelta Inc. atua no mercado de dispositivos eletrônicos há vários anos, sendo uma das empresas pioneiras nesse ramo. Atualmente, a empresa está expandindo suas áreas de atuação, visando a uma maior diversificação de mercado. Com isso, ela tem prestado diversos serviços na área de consultoria de assuntos especializados. Um dos mais recentes desafios postos à frente da SigmaDelta Inc. é o entendimento minucioso e completo do teorema da amostragem para consultoria aos profissionais de uma de suas empresas parceiras. A amostragem é a primeira de três etapas da conversão analógico-digital (A/D) e é a etapa que define se haverá ou não aliasing no sinal amostrado.

B. *Produto:*

Vislumbrando a importância da inserção da empresa em mais esse nicho de mercado, o presidente da Sigma Delta Inc., através da diretoria de P&D, vem solicitar à sua equipe de engenheiros, uma simulação da amostragem PAM (Pulse Amplitude Modulation) de um sinal de valor real, senoidal e contínuo no tempo, a obtenção do respectivo espectro de frequências para análise, e a filtragem de reconstrução para retornar ao sinal senoidal original. A frequência de amostragem deve ser variada para que o comportamento do espectro e a reconstrução do sinal original sejam observados à luz da relação entre as frequências de amostragem e da senoide. Mostre os resultados de suas escolhas para representar o sinal amostrado com e sem aliasing. Matlab ou Octave são as ferramentas de desenvolvimento, computação numérica do método, simulação e apresentação dos resultados para o relatório. Assim, um relatório também deverá ser entregue no formato artigo IEEE, contendo a apresentação do problema, a descrição analítica da amostragem PAM, bem como a reconstrução do sinal original, as representações gráficas dos espectros resultantes, a descrição de como você tratou o problema e a discussão dos resultados e conclusões. Lembrando que todas as fontes de pesquisas utilizadas devem estar citadas no relatório, sendo completamente desnecessária sua reprodução. O relatório deve ser feito em trio, utilizando no máximo seis (6) páginas. Seu relatório deve ser entregue, impreterivelmente até o dia 26/04, anexando todo material pertinente ao des envolvimento. A apresentação para o tutor deve ser realizada no dia 26 de abril, na seção Tutorial(cada participante será arguido sobre o seu projeto).

Este trabalho tem por objetivo demonstrar o processo do estudo e analise da aplicação do Teorema da Amostragem na simulação da Modulação por Amplitude de Pulso (PAM) de um sinal senoidal contínuo, com foco na prevenção do fenômeno de aliasing e por fim reconstruir os sinal de origem. Para alcançar esses objetivos, serão utilizadas ferramentas computacionais, como MATLAB, para desenvolver simulações numéricas e observar a reconstrução do sinal original.

II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para chegar no resultado esperado no desenvolvimento desse trabalho, foi necessária a aquisição de alguns conceitos que foram discutidos durante as sessões tutoriais. Esta seção apresenta as definições teóricas necessárias para a solução do problema proposto.

A. *Amostragem*

Em certas condições, um sinal de tempo contínuo pode ser representado por seus valores ou amostras uniformemente espaçadas no tempo [1]. Alguns exemplos de amostragem que podem ser citados são as imagens em movimento, onde cada quadro representa uma amostra no tempo e imagens impressas compostas por uma grade de diversos pontos representados.

O conceito de amostragem é utilizado na conversão analógico-digital (A/D), onde um sinal de tempo contínuo é convertido em um sinal de tempo discreto, processado e transformado novamente em sinal de tempo contínuo. Esse conceito é importante, pois o desenvolvimento da tecnologia digital tornou os sistemas de tempo discretos baratos e portáteis.[1]

B. Teorema da Amostragem

O teorema da amostragem, também conhecido como teorema de Nyquist, é um conceito importante para a compreensão do processo de amostragem e análise de sinais. Nele é definido que se um sinal for limitado em banda (transformada de Fourier nula) pode-se tomar amostras suficientemente próximas em relação à frequência mais alta presente no sinal [1]

Segundo Oppenheim et al. [1], seja $x(t)$ um sinal de banda limitada com transformada de Fourier $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$, então, $x(t)$ é determinado unicamente por suas amostras $x(nT)$, com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$[

Se

$$\omega_s > 2\omega_M \tag{1}$$

Em que

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

A partir das amostras, é possível a reconstrução do sinal $x(t)$ a partir do trem de impulsos periódicos multiplicado pelo sinal de tempo contínuo que queremos amostrar $xp(t) = x(t)p(t)$ [1]. Como a convolução com impulsos apenas criam réplicas do espectro do sinal diante do exito das frequências, ou seja:

$$X(jw) * \delta(w - w_0) = X(j(w - w_0)) \tag{3}$$

$$Xp(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)). \tag{4}$$

Temos que:

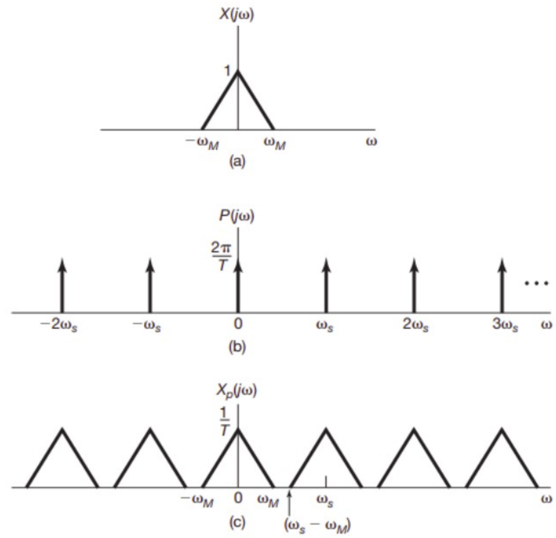

Figura 1: Representação no domínio da frequência da amostragem no domínio do tempo

Conforme a equação 4, pode-se observar que $Xp(jw)$ é uma função periódica, que consiste de repetidas réplicas deslocadas da transformada $X(jw)$ na frequência de amostragem ω_s.

C. Amostragem por Modulação por Amplitude de Pulso (PAM) natural

A Modulação por Amplitude de Pulso (PAM) é um método de transmissão de informações no qual a mensagem é representada pela variação da amplitude de uma série de pulsos de sinal. A PAM é o primeiro passo na conversão analógica-digital.

Existem dois tipos de modulação PAM, a flat-top e natural. A flat-top é utilizada na conversão para PCM (Pulse code modulation), a natural é mais fácil de gerar e é usado em outras aplicações. A modulação PAM natural é o tipo de modulação usado nesse trabalho.

Segundo Couch [2], se um sinal $\omega(t)$ é um sinal analógico limitado em banda, o sinal PAM que utiliza a amostragem natural é

$$\omega_s(t) = \omega(t)s(t) \tag{5}$$

onde $s(t)$ é uma forma de onda retangular cujo $f_s = \frac{1}{T_s} > 2f_n$. Os sinais podem ser melhor visualizados através da Figura 2, Figura 3 e Figura 4.

Temos que a transformada de Fourier para a equação (5) é dada por

$$W_s(f) = W(f) * S(f) \tag{6}$$

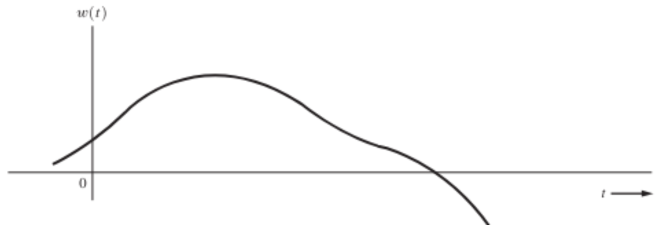

Figura 2: Sinal Analógico

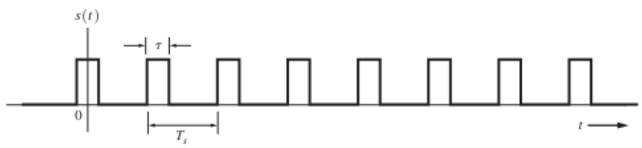

Figura 3: Trem de pulsos retangulares

O resultado esperado dessa convolução é a replicação do espectro na forma de onda analógica de entrada se repetindo em harmônicos da frequência de amostragem. Ver a Figura 5 e Figura 6

D. Aliasing

Aliasing é um fenômeno que ocorre quando o teorema da amostragem não é obedecido. Se $\omega_s < 2\omega_M$ as réplicas de $X(j\omega)$ ficam sobrepostas, causando ambiguidade no processamento do sinal, inviabilizando a recuperação do sinal original $x(t)$.

Na Figura 7 pode-se observar o efeito do aliasing no espectro de um sinal amostrado, cuja taxa de amostragem não obedece o teorema da amostragem. O aliasing cria novas frequências indesejadas que podem ser interpretadas como se fossem parte da função original. Caso a frequência de amostragem não obedeça o teorema da amostragem, não será possível reconstruir o sinal corretamente a partir do filtro passa-baixas, também conhecido como filtro anti-aliasing, que tem a função de remover as réplicas do espectro do sinal amostrado. Por conta das sobreposições das réplicas, o sinal recuperado terá frequências indesejadas e será distorcido no domínio do tempo.

III. Metodologia

O desenvolvimento da solução foi realizado através de quatro etapas: filtragem do sinal de entrada, amostragem, obtenção do espectro do sinal amostrado e por fim a reconstrução do sinal para o domínio do tempo.

A. Filtro de entrada

O sinal de entrada é um sinal senoidal puro, sendo uma soma de senóides com frequências distintas [1]. O sinal assume a forma $x(t) = a \cdot \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + b \cdot \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$

Sinais de tempo contínuo geralmente não são limitados em bandas. Para evitar aliasing é necessário limitar a frequência do sinal de entrada à metade da frequência de amostragem, para assim então respeitar o teorema de Nyquist [3]. Isso pode ser feito pela filtragem passa-baixas do sinal de tempo contínuo antes da conversão C/D, chamado de filtro anti aliasing.

B. Amostragem

Após realizar a filtragem do sinal de entrada e obtenção do sinal $x_c(t)$ foi realizado a conversão do mesmo em sinal discreto $x[n]$, que pode ser representado pela relação $x[n] = x_c(nT_s)$. Essa conversão ocorre através do processo de amostragem, o qual foi utilizada a amostragem PAM natural.

Para isso, foi definido uma frequência de amostragem (f_s) que fosse maior ou igual a 2 vezes a maior frequência do sinal de entrada ($f_s \geq 2 \cdot f_{\text{max}}$). Após a escolha da frequência de amostragem, foi montado um trem de pulsos retangulares cujo o período é definido como $T_s = \frac{1}{f_s}$.

Desta forma, pode-se então iniciar o processo de amostragem, multiplicando o sinal filtrado no tempo contínuo ($x_c(t)$) pelo trem de pulsos retangulares ($p(t)$), resultando assim o sinal amostrado.

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot p(t) = x_c(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - nT_s) \tag{7}$$

C. Obtenção do espectro de frequências

Com o sinal amostrado em mãos, realizou-se então a Transformada Rápida de Fourier (FFT) para obter os espectros do sinal amostrado no domínio da frequência, através da função fft(sinal). A transformada de Fourier do produto de duas funções é proporcional a convolução de suas transformadas de Fourier, entao:

$$FT\{x_s\} = FT\{x_c(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - nT_s)\} \tag{8}$$

$$X_s(j\omega) = X_c(j\omega) * P(j\omega) \tag{9}$$

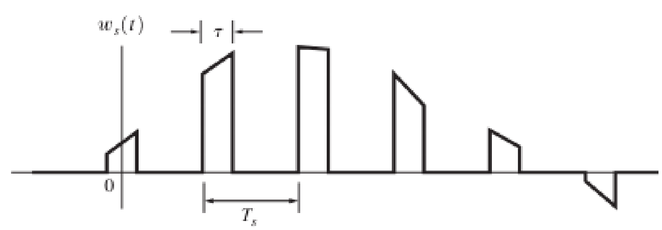

Figura 4: Resultado do sinal pós PAM

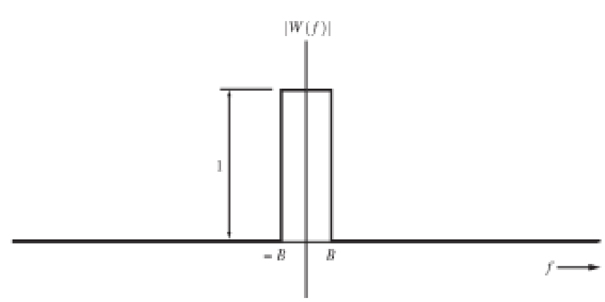

Figura 5: Magnitude do espectro de uma forma de onda analógica

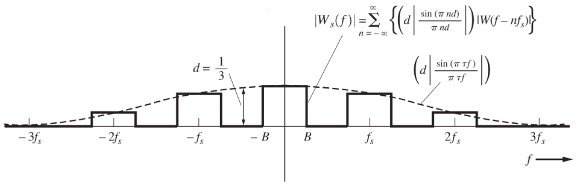

Figura 6: Magnitude do espectro de um PAM

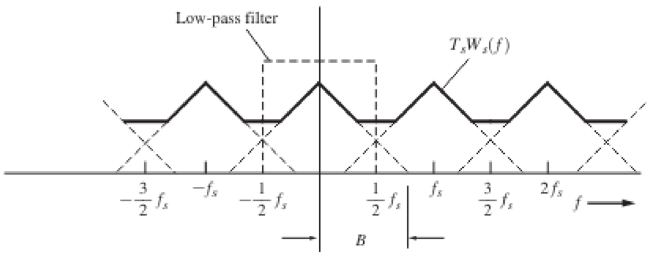

Figura 7: Espectro de sinal amostrado com $[\omega_s < 2\omega_N]$.

Após a obtenção do espectro de frequência do sinal amostrado, foi realizada a análise espectral do sinal. Esta análise permitiu identificar as componentes de frequência presentes no sinal e suas respectivas amplitudes.

Para a análise espectral, foi utilizada a função `abs(fftshift(fft(sinal)))`, que retorna o módulo do espectro de frequência do sinal. O uso da função `fftshift` é necessário para centralizar o espectro de frequência em torno de zero.

A análise espectral do sinal amostrado é uma etapa crucial na metodologia, pois permite a identificação das componentes de frequência do sinal, que são essenciais para a compreensão do comportamento do sinal no domínio da frequência. A transformada de Fourier do produto de duas funções é proporcional à convolução de suas transformadas de Fourier, então:

D. *Reconstrução do sinal*

Após obter no domínio da frequência o sinal amostrado, foi realizada a reconstrução do sinal. Se as condições do teorema de amostragem forem atendidas e o filtro de reconstrução for aplicado apropriadamente, a transformada de Fourier da saída do filtro será idêntica à transformada de Fourier do sinal original de tempo contínuo.

Desta forma, o primeiro passo para reconstrução e aplicar um filtro passa-baixa ideal no sinal amostrado no domínio da frequência e assim eliminar as réplicas do sinal. O filtro de reconstrução transmite todas as frequências dentro da faixa de passagem sem qualquer distorçao e rejeita todas frequências dentro da faixa de rejeição [3]. Com o sinal resultante da filtragem de reconstruçao, foi realizada a Transformada Inversa de Fourier, atraves da função *ifft(sinal)*. O sinal reconstruído possui uma perda de amplitude, e por isso aplicamos uma amplificação para obter a mesma amplitude do sinal original.

IV. Resultados e Discussões

Foram realizadas diversas simulações utilizando o software Matlab versão web, para demonstrar o efeito do aliasing quando não obedecida o teorema da amostragem.

A. *Filtro passa-baixa para eliminar frequências altas*

A primeira etapa do programa envolveu a geração de um sinal senoidal $x(t)$, que é a soma de duas senoides com frequências e amplitudes diferentes:

$$x(t) = 100\sin(2\pi 50t) + 50\sin(2\pi 200t)$$

Ao plotar o sinal de entrada e seu espectro, observamos a presença das duas componentes senoidais distintas. O espectro revelou picos nas frequências das senoides, validando a composição do sinal, Figura 8.

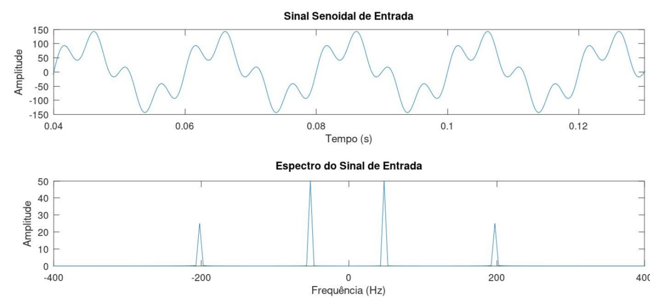

Figura 8: Sinal de entrada e espectro da frequência

A seguir, aplicamos um filtro anti-aliasing, isso resultou em um sinal filtrado suavizado, que atenuou as componentes de alta frequência. A visualização do sinal filtrado e de seu espectro mostrou a eliminação das frequências acima de 50Hz como mostra a Figura 9.

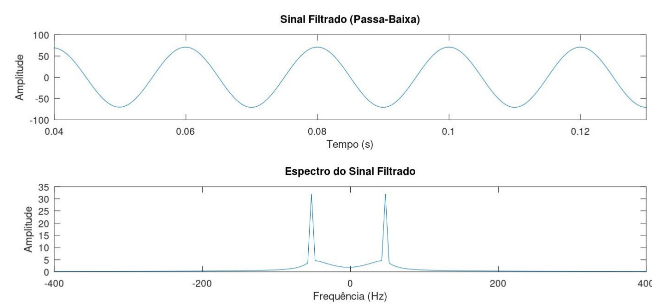

Figura 9: Sinal Filtrado e espectro da frequência

B. *Amostragem PAM*

Para observar os passos da etapa de amostragem PAM natural, plotamos os gráficos do trem de pulsos retangular no domínio do tempo e o espectro da transformada de Fourier, e pudemos observar que conforme vimos na teoria, a FFT do trem de pulsos retangular é uma função sinc. Esses gráficos podem ser observados na Figura 10.

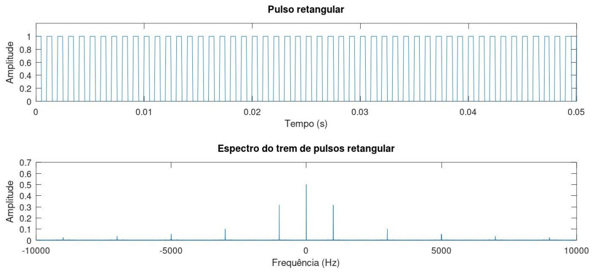

Figura 10: Sinal de pulso retangular e espectro do sinal

O sinal amostrado no domínio do tempo é uma sequência de pulsos que representam os instantes amostrados do sinal senoidal de entrada filtrado. Para avaliar o efeito da PAM no espectro do sinal, aplicamos Transformada de Fourier ao sinal amostrado. O espectro do sinal amostrado nos proporcionou informações importantes sobre as frequências presentes e a localização das réplicas do espectro que estão espaçadas de fs em fs. Esse resultado pode ser observado na Figura 11, para $f_s = 5 \times f_2 = 1000\,\mathrm{Hz}$

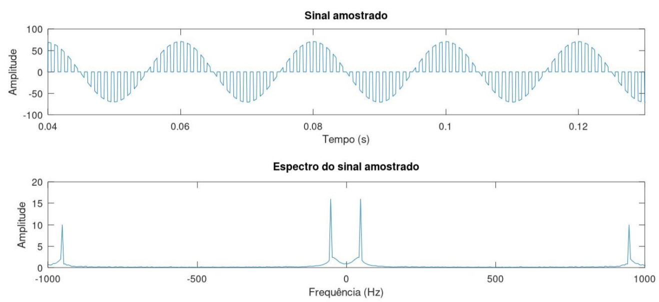

Figura 11: Sinal amostrado e espectro na frequência

C. Reconstrução do sinal senoidal

Ao realizar a reconstrução do sinal, obtivemos um sinal senoidal muito próximo do sinal original, com mesmo período e amplitude inferior. Por conta disso, ampliamos o sinal reconstruído para obter a mesma amplitude do sinal original. Os resultados finais podem ser vistos na Figura 12

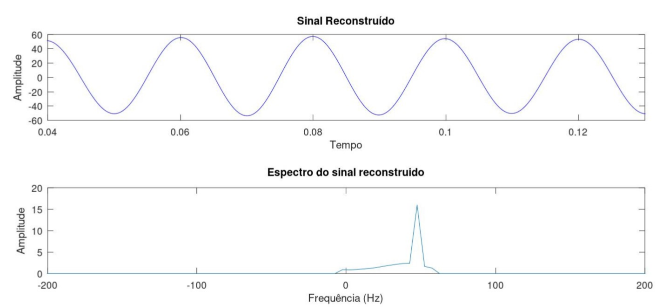

Figura 12: Sinal amostrado e espectro na frequência

D. Amostragem com aliasing

Para observar o aliasing, alteramos a frequência de amostragem para um valor abaixo do dobro da maior frequência do sinal de entrada, ou seja, um valor que não obedeça o critério de Nyquist. Escolhemos $f_s = 30ae$Hz. Dessa forma podemos observar pelos gráficos da amostragem PAM (Figura 14) e da reconstrução do sinal (Figura 12), que não foi feita uma amostragem correta do sinal original. Observando o espectro da transformada de Fourier do sinal reconstruído, podemos ver que existem frequências que não estão presentes no espectro da transformada de Fourier do sinal original, e são resultantes da sobreposição causada pela replicação do espectro do sinal de entrada com uma taxa de amostragem inferior ao dobro da frequência do sinal.

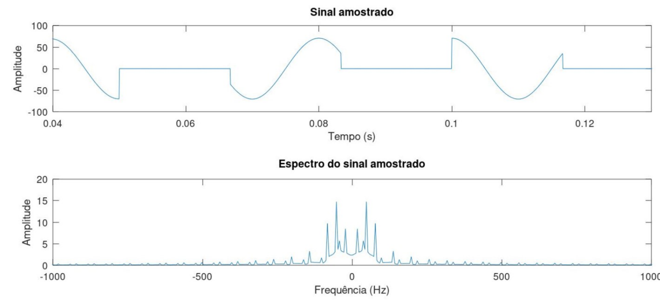

Figura 13: Sinal amostrado com aliasing e espectro na frequência

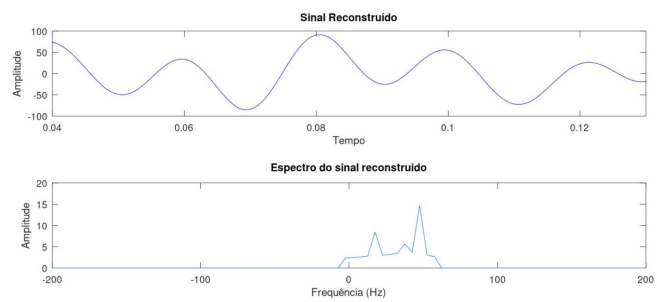

Figura 14: Sinal reconstruído com aliasing e espectro na frequência

V. Conclusão

Através deste estudo, conseguimos explorar conceitos fundamentais relacionados ao processamento de sinais. Isso incluiu a aplicação do teorema de Nyquist para evitar o aliasing, a importância do uso de filtros anti-aliasing e a técnica de amostragem PAM.

Ao variar a frequência de amostragem, pudemos observar os fenômenos resultantes e compreender os desafios associados à não conformidade com o teorema de Nyquist na amostragem de sinais. Essa observação destacou a importância vital de seguir os princípios estabelecidos por Nyquist para garantir uma reconstrução precisa do sinal original.

Portanto, o desenvolvimento deste projeto foi de extrema relevância para a assimilação prática dos conceitos discutidos em nossos estudos teóricos. Essa abordagem prática permitiu uma compreensão mais profunda e tangível dos tópicos abordados, reforçando nosso entendimento sobre o processamento de sinais e suas aplicações.

Referências

[1] A. Oppenheim and A. Willsky, Sinais e Sistemas. Pearson Universidades, 2010. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=ZOg9bwAACAAJ

[2] L. Couch, Digital and Analog Communication Systems, ser. Prentice-Hall international editions. Pearson, 2013. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=j1UjygAACAAJ

[3] S. HAYKIN and B. VAN VEEN, Sinais E Sistemas. Bookman, 2001. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=tdNYclZwaYIC